การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

พงศกร พุฒฟัก

การค้นคว้าอิสระเสนอบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
ปีการศึกษา 2566
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยนเรศวร

การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

พงศกร พุฒฟัก

การค้นคว้าอิสระเสนอบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา หลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
ปีการศึกษา 2566
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยนเรศวร

การค้นคว้าอิสระ เรื่อง "การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์"

ของ พงศกร พุฒฟัก

ได้รับการพิจารณาให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร.จักรกฤษ กลิ่นเอี่ยม)

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรีย์พร สว่างเมฆ)

หัวหน้าภาควิชาการศึกษา

ชื่อเรื่อง การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ผู้วิจัย พงศกร พุฒฟัก

ประธานที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.จักรกฤษ กลิ่นเอี่ยม

ประเภทสารนิพนธ์ การค้นคว้าอิสระ กศ.ม. คณิตศาสตร์ศึกษา, มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2566

คำสำคัญ กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์, ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์, ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์, การประยุกต์ของอนุพันธ์

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวทางและศึกษาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ กลุ่มเป้าหมาย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 33 คน ปีการศึกษา 2566 ผู้วิจัยใช้รูปแบบการวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน จำนวน 3 วงจร ระยะเวลาทั้งหมด 8 ชั่วโมง และใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหาและตรวจสอบข้อมูลแบบสามเส้า ผลการวิจัย พบว่า 1. แนวทางการเรียนรู้ในแต่ละขั้นตอนกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ สิ่งที่ครูควรเน้น ได้แก่ ขั้นตอนที่ 1 แนะนำให้นักเรียนระบุคำตอบแยกเป็นรายข้อ ขั้นตอนที่ 2 แนะนำให้นักเรียนทดลองสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลและใช้คำถามให้นักเรียนเกิดความสงสัยในข้อคาดการณ์ แล้วชี้แนะให้สร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างออกไป ขั้นตอนที่ 3 แนะนำให้นักเรียนปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ ขั้นตอนที่ 4 สนับสนุนให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นในขั้นตอนวิธีทำ และขั้นตอนที่ 5 การใช้คำถามให้นักเรียนสรุปว่าข้อคาดการณ์ควรเป็นอย่างไรจึงเหมาะสมกับการหาข้อสรุป 2. ผลการเรียนรู้ พบว่า ทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ กิจกรรมและการทดสอบ

Title LEARNING IMPLEMENTATION THROUGH MATHEMATISING PROCESS TO ENHANCE OF GRADE 12 STUDENTS' MATHEMATICAL REASONING AND MATHEMATICAL ARGUMENT SKILLS ON APPLICATION OF DERIVATIVE

Author Pongsakon Putfak

Advisor Associate Professor Chakkrid Klin-eam, Ph.D.

Academic Paper M.Ed. Independent Study in Mathematics Education, Naresuan University, 2023

Keywords Mathematising Process, Mathematical Reasoning Skill, Mathematical Argument Skill, Application of Derivative

ABSTRACT

The purposes of this research were to study the guidelines and results of enhancing students' mathematical reasoning and argument skills by using mathematising process of grade 12 students on application of derivative. The participants were 33 grade 12 students in the academic year 2023. The researcher used classroom action research, 3 cycles, a total duration of 8 hours, and used content analysis and triangulation methods. The research results found that: 1. Learning guidelines in each step of the mathematising process, teachers should emphasize Step 1: Instruct students to specify their answers individually. Step 2: Instruct students to create predictions and reasons, and use questions to make students doubt their predictions. Then guide them to create different predictions. Step 3: Instruct students to adjust their predictions to make them reliable. Step 4: Encourage students to exchange opinions on solutions. Step 5: Use questions to ask students to conclude what the predictions should be appropriate for concluding. 2. Learning results were found that students' mathematical reasoning and argumentation skills improved with every activity and test.

ประกาศคุณูปการ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีเนื่องจากได้รับความกรุณาอย่างยิ่ง จากท่านรองศาสตราจารย์ ดร.จักรกฤษ กลิ่นเอี่ยม อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ให้คำแนะนำ ปรึกษา ชี้แนะแนวทาง ตลอดจนตรวจสอบข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง จนการศึกษาอิสระสำเร็จสมบูรณ์ได้ อีกทั้งยังช่วยเป็นแรงผลักดันให้ผู้วิจัยสามารถก้าวข้ามอุปสรรคต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในตลอดระยะเวลาที่ทำการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์ อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก ดร.อาทร นกแก้ว อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก และนางสาววรีย์ วงราช ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จังหวัดพิจิตร ที่ท่านได้กรุณาตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยโดยให้ข้อเสนอแนะเป็นอย่างดี และกราบขอบพระคุณ นางสาวนิตยา สายแวว ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จังหวัดพิจิตร ที่ท่านได้กรุณาเป็นผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้และสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ จนทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้สมบูรณ์และมีคุณค่า

เหนือสิ่งอื่นใดขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ญาติมิตร ครอบครัว และเพื่อนสนิทที่คอยห่วงใย เป็นกำลังใจที่สำคัญ และคอยสนับสนุนในทุก ๆ เรื่องเสมอมา

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาการศึกษาทุกท่าน และขอบใจเพื่อนนิสิตปริญญาโทที่เป็นส่วนหนึ่งในการให้คำปรึกษา ช่วยเหลือ และเป็นกำลังใจที่ดีแก่ผู้วิจัยตลอดมา

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ผู้วิจัยขอมอบและอุทิศแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาการจัดการเรียนรู้ได้ต่อไป

พงศกร พุฒฟัก

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ค

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ง

ประกาศคุณูปการ ..... จ

สารบัญ ..... ฉ

สารบัญตาราง ..... ฌ

สารบัญภาพ ..... ฎ

บทที่ 1 1

ความเป็นมาของปัญหา 1

คำถามของการวิจัย 6

จุดมุ่งหมายของการวิจัย 6

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 7

ขอบเขตของการวิจัย 7

นิยามศัพท์เฉพาะ 7

บทที่ 2 10

1. กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 11

1.1 ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 11

1.2 ความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 12

1.3 ลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 14

1.4 พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 16
1.5 ขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 19
2. ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 22
2.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 23
2.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 25
2.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 26
2.4 แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 28
2.5 การวัดและประเมินผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 30
3. ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 36
3.1 ความหมายของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 36
3.2 ความสำคัญของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 37
3.3 องค์ประกอบของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 39
3.4 แนวทางการพัฒนาการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 41
3.5 การวัดและประเมินผลการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 43
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 47
4.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องภายในประเทศ 47
4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในต่างประเทศ 53
บทที่ 3 56
รูปแบบการวิจัย 56
ผู้เข้าร่วมวิจัย 58
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 58

การเก็บรวบรวมข้อมูล 72
การวิเคราะห์ข้อมูล 72
บทที่ 4 76
ตอนที่ 1 แนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ 76
ตอนที่ 2 ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ 99
บทที่ 5 124
สรุปผลการวิจัย 124
อภิปรายผลการวิจัย 129
ข้อเสนอแนะ 136
บรรณานุกรม 138
ภาคผนวก 144
ประวัติผู้วิจัย 232

สารบัญตาราง

หน้า

ตาราง 1 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการทำข้อสอบแบบอัตนัย 31

ตาราง 2 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 32

ตาราง 3 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตด้านการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ และด้านความสามารถในการอธิบายข้อสรุป 32

ตาราง 4 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตด้านการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์และการแสดงข้อสรุปของข้อมูล 33

ตาราง 5 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 34

ตาราง 6 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการหาข้อสรุปของปัญหา 34

ตาราง 7 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา 35

ตาราง 8 แสดงเกณฑ์การให้ระดับความสามารถในการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน 44

ตาราง 9 แสดงจุดมุ่งหมายของการวิจัยและเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 58

ตาราง 10 แสดงวงจร แผนการจัดการเรียนรู้ เนื้อหา สถานการณ์ปัญหา และจำนวนชั่วโมง 59

ตาราง 11 แสดงเกณฑ์ทักษะการให้เหตุผลของใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ 63

ตาราง 12 แสดงเกณฑ์ทักษะการโต้แย้งของแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 65

ตาราง 13 แสดงเกณฑ์ทักษะการให้เหตุผลของแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 68

ตาราง 14 แสดงเกณฑ์ทักษะการโต้แย้งของแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 70

ตาราง 15 แสดงเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยแยกตามจุดมุ่งหมายของการวิจัยเป็นรายข้อ 73

ตาราง 16 แสดงการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 1 82

ตาราง 17 แสดงการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 2 88

ตาราง 18 แสดงการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 3 94

ตาราง 19 แสดงประเด็นที่ควรเน้นในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 96

ตาราง 20 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการให้เหตุผลแต่ละวงจรปฏิบัติการ 100

ตาราง 21 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการให้เหตุผลในแบบทดสอบ 107

ตาราง 22 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการโต้แย้งแต่ละวงจรปฏิบัติการ 112

ตาราง 23 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการโต้แย้งในแบบทดสอบ 120

ตาราง 24 แสดงผลการประเมินความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้การคิดให้เป็น 146

ตาราง 25 แสดงผลการประเมินความตรงเชิงเนื้อหาของความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบกับ 150

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพ 1 แสดงกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (OECD, 2009) 20

ภาพ 2 แสดงระดับการคิด ตามแนวคิดของ Krulik & Rudnick (1993, p. 3)..... 23

ภาพ 3 แสดงวงจรของการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน..... 58

ภาพ 4 แสดงนักเรียนปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ 80

ภาพ 5 แสดงนักเรียนสะท้อนปัญหาทางคณิตศาสตร์สู่ชีวิตจริง..... 81

ภาพ 6 แสดงนักเรียนระบุคำตอบแยกเป็นรายข้อ 85

ภาพ 7 แสดงนักเรียนแสดงการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 87

ภาพ 8 แสดงนักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่มเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีทำ..... 92

ภาพ 9 แสดงการอภิปรายร่วมกันเพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ที่เหมาะสมกับการหาข้อสรุป 94

ภาพ 10 แสดงประเด็นที่ควรเน้นในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็น
คณิตศาสตร์ 99

ภาพ 11 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 2...101

ภาพ 12 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 2...102

ภาพ 13 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 3...103

ภาพ 14 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการให้เหตุผล..... 104

ภาพ 15 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 2..... 105

ภาพ 16 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 3..... 105

ภาพ 17 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 3..... 106

ภาพ 18 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการให้เหตุผล..... 107

ภาพ 19 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 3...109

ภาพ 20 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 3.....110

ภาพ 21 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้ง.....115

ภาพ 22 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้ง.....116

ภาพ 23 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้ง 118

ภาพ 24 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้ง.....119

ภาพ 25 ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ระดับ 3.....121

ภาพ 26 แสดงด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาระดับ 3
.....122

ภาพ 27 แสดงด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไประดับ 3.....123

ภาพ 28 แสดงด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับระดับ 3 123

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาของปัญหา

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากช่วยให้มนุษย์สามารถสร้างสรรค์สิ่งใหม่ ๆ ความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและรอบด้าน ช่วยคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ไขปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ รากฐาน เพื่อพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาประเทศ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงมีความจำเป็น พัฒนาอย่างต่อเนื่องให้ทันสมัยและสอดคล้องกับความรู้ทางเศรษฐกิจ สังคม วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่ก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) จัดทำขึ้นโดยคำนึงการส่งเสริมให้ผู้เรียนมีทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ที่สำคัญ คือ การเตรียมผู้เรียนให้มีทักษะการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ ซึ่งจะส่งผลให้ผู้เรียนรู้เท่าทันต่อการเปลี่ยนแปลงของเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรม และสภาพแวดล้อม สามารถแข่งขันและอยู่ร่วมกับประชาคมโลกได้ ซึ่งการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้นั้น ผู้เรียนต้องเตรียมตัวให้พร้อมที่จะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และพร้อมที่จะประกอบอาชีพเมื่อสำเร็จการศึกษา หรือสามารถศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้นได้ ดังนั้น สถานศึกษาจึงควรจัดการเรียนรู้ให้เหมาะสมตามศักยภาพของผู้เรียน และนักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์โดยใช้หลักสูตรความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพและประสิทธิผลจากการประเมินความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ในระดับดี มีความพึงพอใจต่อหลักสูตรอยู่ในเกณฑ์ดีมาก เนื่องจากบริบทการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงความคิดเห็น อภิปรายแลกเปลี่ยน และร่วมมือกันแก้ปัญหา อีกทั้งกิจกรรมที่สอดคล้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียนให้ได้เห็นปัญหาในโลกจริง ทำให้นักเรียนเห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์ (มะลิวรรณ งามยิ่ง, 2563) ซึ่งสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2546) กล่าวไว้ว่า ผู้สอนสามารถช่วยให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียนได้โดยสร้างทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ส่งเสริมกระตุ้นให้ผู้เรียนทุกคนได้เรียนอย่างเต็มความสามารถ สร้างบรรยากาศและช่วยให้ผู้เรียนแต่ละคนสื่อสารกันในทางคณิตศาสตร์ จึงกล่าวได้ว่าการจัดการเรียนการสอนโดยใช้ทักษะความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์สอดคล้องและสามารถบรรลุเป้าหมายการเรียนคณิตศาสตร์ตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับ

ปรับปรุง พ.ศ. 2560) ได้โดยบริบทการเรียนรู้ที่ควรให้ความสำคัญคือการเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงความคิดเห็น อภิปรายแลกเปลี่ยน และร่วมมือกันแก้ปัญหาที่สอดคล้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน กระบวนการเหล่านี้ทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

โปรแกรมประเมินสมรรถนะนักเรียนมาตรฐานสากล (Program for International Student Assessment หรือ PISA) ริเริ่มโดยองค์การเพื่อความร่วมมือทางเศรษฐกิจและการพัฒนา (Organisation for Economic Co-operation and Development หรือ OECD) มีวัตถุประสงค์เพื่อประเมินคุณภาพของระบบการศึกษาของประเทศต่าง ๆ ในการเตรียมความพร้อมให้เยาวชนมีศักยภาพหรือความสามารถพื้นฐานที่จำเป็นต่อการดำรงชีวิตในโลกที่มีการเปลี่ยนแปลง โดย PISA เน้นการประเมินสมรรถนะของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ความรู้และทักษะในชีวิตจริงมากกว่าการเรียนรู้ตามหลักสูตรในโรงเรียน โดยสมรรถนะที่ PISA ประเมินเรียกว่า Literacy ซึ่งหมายความว่า “ความฉลาดรู้” (สสวท., 2566) และความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) เป็นหนึ่งในความฉลาดรู้ที่ PISA เลือกประเมิน PISA ให้นิยามความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) ไว้ว่า ความสามารถของแต่ละบุคคลในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และสามารถแปลงปัญหา ใช้คณิตศาสตร์ และตีความผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาในบริบทของโลกชีวิตจริง รวมถึงการใช้มโนทัศน์ กระบวนการ ข้อเท็จจริง และเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อบรรยาย อธิบาย และคาดการณ์ปรากฏการณ์ต่าง ๆ โดยสิ่งเหล่านี้จะช่วยให้แต่ละบุคคลทราบถึงบทบาทของคณิตศาสตร์ที่มีต่อโลกนี้และสร้างพื้นฐานที่ดีในการลงข้อสรุปและการตัดสินใจซึ่งเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับพลเมืองในศตวรรษที่ 21 ที่ต้องมีความสร้างสรรค์ มีการคิดอย่างไตร่ตรอง และมีส่วนร่วมต่อสังคมส่วนรวม โดย PISA ได้พัฒนากรอบโครงสร้างการประเมินคณิตศาสตร์ให้ทันสมัยและสอดคล้องกับรูปแบบการประเมินที่เปลี่ยนเป็นการทำแบบทดสอบด้วยคอมพิวเตอร์ แต่ยังคงไว้ซึ่งมโนทัศน์พื้นฐานของความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ ทำให้มีการเน้นความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการคิดเชิงคำนวณ (Computational Thinking) ซึ่งเป็นกระบวนการในการแก้ปัญหา การคิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผลเป็นขั้นตอน รวมถึงบริบทที่สอดคล้องกับทักษะแห่งศตวรรษที่ 21 โดยกรอบการประเมินคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการประเมิน PISA 2021 มี 3 องค์ประกอบที่เกี่ยวข้องกัน ได้แก่ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์, เนื้อหาคณิตศาสตร์ และบริบทซึ่งสัมพันธ์กับทักษะแห่งศตวรรษที่ 21 การทำข้อสอบความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์จะต้องนำความรู้จากเนื้อหาคณิตศาสตร์มาใช้แก้ปัญหาในบริบทที่ท้าทายหรือปัญหาที่พบเจอในโลกชีวิตจริง เริ่มตั้งแต่การแปลงสถานการณ์ของปัญหาให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาได้ แล้วใช้หลักการ กระบวนการ และการเลือกใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาวิธีแก้ปัญหานั้น จากนั้นประเมินวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาและตีความผลลัพธ์ที่ได้ให้อยู่ในบริบทของโลกชีวิตจริง ซึ่งในแต่ละกระบวนการแก้ปัญหาต้องอาศัยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เพื่อตัดสินใจโดยอาศัยข้อมูลประกอบ

ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับปัญหาซึ่งสามารถอธิบายได้ในเชิงคณิตศาสตร์ รวมถึงการคิดไตร่ตรองถึงกระบวนการแก้ปัญหาและผลลัพธ์ที่ได้จากการประเมินและตัดสินความน่าเชื่อถือของข้อมูล (สสวท., 2566) จึงได้เป็นทักษะความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ นั่นคือ ความสามารถของบุคคลในการคิด / แปลงปัญหา, การใช้คณิตศาสตร์ และการตีความและประเมิน ซึ่งแต่ละกระบวนการต้องอาศัยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ การจัดการเรียนการสอนในประเทศไทยควรนำกระบวนการแก้ปัญหาโดยใช้ทักษะความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ไปใช้ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาในบริบทของโลกชีวิตจริงที่ต้องใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล สอดคล้องกับเป้าหมายการเรียนคณิตศาสตร์ตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

วิธีการสอนที่นอกจากจะมีความสอดคล้องกับทักษะความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) ในด้านกระบวนการแก้ปัญหาในชีวิตจริง นั่นคือ กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) ซึ่งเป็นกลยุทธ์ของคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยกระบวนการ 5 ขั้นตอน ได้แก่ 1) เริ่มต้นด้วยปัญหาในความเป็นจริง 2) จัดการโดยใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ 3) ค่อย ๆ ตัดความเป็นจริงออกขณะดำเนินกระบวนการคิด 4) แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ 5) ทำให้คำตอบของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มีความหมายในรูปของความเป็นจริง ซึ่งแต่ละกระบวนการต้องอาศัยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และการอภิปรายโต้แย้งกับการกล่าวอ้างดังกล่าวได้อีกด้วย ซึ่งกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นกลยุทธ์ที่สำคัญในการเรียนรู้เพื่อแก้ไขปัญหาในชีวิตจริงและสนับสนุนทักษะต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนตระหนักถึงคุณค่าและความสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ นำไปสู่การเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ดียิ่งขึ้น (จุฑามาส โจชัยชาญ และ วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล, 2562) ผู้วิจัยได้ศึกษาสภาพปัญหาของนักเรียนจากการสังเกตและสัมภาษณ์นักเรียน พบว่า นักเรียนไม่สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้ โดยนักเรียนจะตัดสินใจใช้วิธีการแก้ปัญหาด้วยความรู้สึกส่วนตัวมากกว่าการใช้เหตุผล แสดงให้เห็นถึงการขาดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สามารถทำได้จากการใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่อาศัยการจัดระบบโครงสร้างของสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง แล้วแสดงแทน เพื่อนำมาใช้อธิบายสถานการณ์ปัญหาโดยคำนึงถึงความถูกต้องตามหลักโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และความสมเหตุสมผลบนพื้นฐานความเป็นจริง (กิติโรจน์ ปัณฑรนนทกะ, วิชัย เสวกงาม, และ อัมพร ม้าคนอง, 2563) และผู้วิจัยสังเกตเพิ่มเติม พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เลือกถามเพื่อนร่วมชั้นเรียนมากกว่าถามครูผู้สอน เมื่อนักเรียนเกิดข้อสงสัยในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหา แต่นักเรียนไม่สามารถหาข้อสรุปจากของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนขาดความสามารถในการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ที่จะ

นำนักเรียนไปสู่การหาข้อสรุปที่ถูกต้องจากการอภิปรายโต้แย้งร่วมกันในชั้นเรียน โดยการส่งเสริมให้นักเรียนมีการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ (Cooperative Learning) ซึ่งเป็นการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนทำงานร่วมกัน แสดงความคิดเห็นอภิปรายแลกเปลี่ยน และร่วมมือกันแก้ปัญหา กมลวรรณ ใจอารีย์ (2556) กล่าวไว้ว่า การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการเรียนรู้แบบร่วมมือทำให้นักเรียนมีความกล้าคิด กล้าแสดงออก และมีความรับผิดชอบสูงขึ้น จากการค้นพบของผู้วิจัยข้างต้น จึงสรุปได้ว่าความสามารถที่นักเรียนควรได้รับการส่งเสริม ได้แก่ การให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ Hermawan, Lestari, Rahmawati, and Suwarno (2019) กล่าวว่า การให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เป็นหนึ่งในความสามารถพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ ความสามารถนี้สามารถสอนให้กับนักเรียนผ่านการสอนคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดเชิงตรรกะและลึกซึ้งผ่านกระบวนการที่เชื่อมโยงองค์ประกอบของปัญหาเพื่อลงข้อสรุป ซึ่งการถ่ายทอดมโนทัศน์ของตนเองให้คนอื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้องมีความสัมพันธ์กับการให้เหตุผล ความคิดในการรวบรวมข้อเท็จจริงของปัญหาแล้วเชื่อมโยงความสัมพันธ์เพื่อให้เกิดข้อคาดการณ์ใหม่ด้วยการให้เหตุผลสนับสนุนหรือการโต้แย้ง โดยการโต้แย้งจะช่วยให้นักเรียนแสดงมโนทัศน์ อธิบายเหตุผลประกอบข้อโต้แย้งกับข้อคาดการณ์ของคนอื่น ทำให้การแก้ปัญหามีความชัดเจนยิ่งขึ้น ดังนั้นการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์จึงมีความเกี่ยวข้องกัน (กาญจนา อรอินทร์, ทรงชัย อักษรคิด, ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์, และ สกล ตั้งเก้าสกุล, 2566)

การให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถพื้นฐานทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในขั้นตอนและกิจกรรมที่เชื่อมโยงกับความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ ความสามารถนี้เกี่ยวข้องกับพื้นฐานของความเป็นเหตุเป็นผลในกระบวนการคิดที่ค้นมีการค้นหาและเชื่อมโยงองค์ประกอบของปัญหา เพื่อสร้างข้อสรุปจากองค์ประกอบเหล่านั้น โดยมีการตรวจสอบการให้เหตุผลที่ได้รับ หรือแสดงการให้เหตุผลของข้อความหรือวิธีการแก้ปัญหา (สสวท., 2555) ซึ่งการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการคิดที่หยั่งรากลึกอย่างมีเหตุผลซึ่งสำรวจและเชื่อมโยงองค์ประกอบต่าง ๆ ของปัญหาเพื่ออนุมานจากองค์ประกอบเหล่านั้น ตรวจสอบเหตุผลที่ได้รับ หรือให้เหตุผลของข้อความหรือแนวทางการแก้ไขปัญหา ความสามารถในการให้เหตุผลรวมถึง 1) การให้เหตุผลโดยทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการค้นหาวิธีแก้ปัญหาหรือการแก้ปัญหา 2) ความสามารถในการสรุปผล เช่นเดียวกับในการอ้างเหตุผล และเกี่ยวข้องกับความสามารถในการประเมินผลกระทบของข้อโต้แย้ง และ 3) ความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์ ไม่เพียงแต่ความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหาเท่านั้น แต่ยังรวมถึงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ด้วย จากนั้นใช้การเชื่อมโยงนั้นเพื่อให้ได้เนื้อหาหรือมโนทัศน์อื่น ๆ ในขณะที่ กระทรวงทรัพยากรของออนแทรีโอ (Ontario Ministry Resource) ระบุว่า กระบวนการให้เหตุผลสนับสนุนความเข้าใจที่ลึกซึ้งยิ่งขึ้น

เกี่ยวกับคณิตศาสตร์โดยช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ที่พวกเขากำลังเรียนรู้ กระบวนการนี้เกี่ยวข้องกับการสำรวจปรากฏการณ์ การพัฒนามโนทัศน์ การคาดเดาทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลกับผลลัพธ์ จากความคิดเห็นข้างต้น ความสามารถในการให้เหตุผลและการโต้แย้งคือความสามารถที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดเชิงตรรกะที่สำรวจและเชื่อมโยงองค์ประกอบของปัญหาเพื่อค้นหาวิธีแก้ไขหรือการแก้ไขปัญหาและสรุปผล ซึ่งการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่จะทำให้นักเรียนที่มีความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้มีการปรับปรุงความเข้าใจในมโนทัศน์นั้นให้ดียิ่งขึ้น จึงต้องมีการส่งเสริมและสนับสนุนการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนเกิดความสงสัยต่อความเข้าใจในมโนทัศน์และปรับปรุงมโนทัศน์ของตัวเอง Chen and Wang (2016) กล่าวว่า การเรียนรู้มโนทัศน์ของนักเรียน แบ่งได้เป็น 3 ประเภท คือ 1) มีมโนทัศน์ที่ถูกต้องมาก่อนแล้ว นักเรียนเหล่านี้สามารถเผชิญกับสิ่งใหม่ ๆ ได้เสมอ แก้ปัญหาได้อย่างราบรื่นและเรียนรู้ได้โดยไม่ยาก 2) มโนทัศน์ที่มีข้อบกพร่องกับมโนทัศน์ที่ถูกต้องมาก่อน นักเรียนดังกล่าวจะมีการเรียนรู้มโนทัศน์จะทำให้เกิดความไม่แน่นอนทางความเข้าใจในมโนทัศน์ของตนเองได้ง่าย เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ใหม่ ๆ หรือเมื่อถูกท้าทายจากคนรอบข้าง และจึงปรับปรุงมโนทัศน์เดิมของพวกเขา 3) ไม่มีความชัดเจนในมโนทัศน์ของตัวเอง นักเรียนเหล่านี้จะเรียนรู้มโนทัศน์ผ่านการสนทนากับเพื่อน ดังนั้นกลไกที่เป็นไปได้ที่มีอิทธิพลต่อการเรียนรู้มโนทัศน์ของนักเรียนและการเปลี่ยนแปลงมโนทัศน์ คือ คำอธิบายที่สมเหตุสมผล และความไม่พอใจในมโนทัศน์เดิม ซึ่งรูปแบบการแสดงออกของนักเรียนเพื่อโน้มน้าวใจผู้อื่นให้เข้าใจมโนทัศน์ของตัวเอง จะเป็นการใช้ตัวอย่างและทฤษฎีบทเป็นพื้นฐานในการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น การให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะที่สำคัญต่อการทำความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ที่นักเรียนอาจมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนหรือไม่ถูกต้องในมโนทัศน์นั้น ๆ อีกทั้งยังเป็นการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น อภิปรายแลกเปลี่ยน และร่วมมือกันแก้ปัญหาซึ่งจะทำให้นักเรียนบรรลุเป้าหมายการเรียนตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

Hermawan et al. (2019) ระบุว่า ทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งจึงกลายเป็นแง่มุมหนึ่งใน หัวข้อความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ซึ่งหัวข้อเหล่านี้เป็นข้อกำหนดเบื้องต้นสำหรับความเชี่ยวชาญในมโนทัศน์ของแคลคูลัส ดังนั้นการวิจัยนี้จึงเลือกส่งเสริมการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในมโนทัศน์ของแคลคูลัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เนื่องจากแคลคูลัสเป็นพื้นฐานของสูตรการคำนวณมากมาย เช่น สูตรการหาความเร็ว ความเร่ง การเติบโตของประชากร หรือแม้แต่ทฤษฎีการบริโภคของลูกค้า ก็มีการประยุกต์ใช้การอนุพันธ์ในแคลคูลัสเพื่ออธิบายเช่นกัน แคลคูลัสจึงเป็นวิชาที่มีความสำคัญในการประกอบอาชีพเมื่อสำเร็จการศึกษาหรือการศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้น แต่นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจมโนทัศน์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่

ลึกซึ้งและมีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไม่ดีพอ ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจมโนทัศน์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ส่งผลให้ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ในแก้ปัญหาในชีวิตจริงได้ (สาธินี วารีศรี, 2564) เพื่อให้นักเรียนสามารถทำความเข้าใจมโนทัศน์การประยุกต์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ดียิ่งขึ้น ผู้วิจัยจึงเลือกส่งเสริมการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นทักษะที่สำคัญต่อการทำความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แตกต่างจากงานวิจัยอื่นที่มุ่งเน้นการแก้ปัญหา ซึ่งไม่ได้คำนึงถึงผลกระทบที่จะเกิดขึ้นกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการเรียนรู้ผ่านกิจกรรมเหล่านั้น โดยการส่งเสริมการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ จะทำให้นักเรียนมีโอกาสตรวจสอบความเข้าใจในมโนทัศน์ของตัวเองผ่านการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลจากข้อโต้แย้งของเพื่อนร่วมชั้นเรียน ที่จะทำให้นักเรียนได้สังเกตเห็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในมโนทัศน์ของตัวเอง จากนั้นจึงปรับปรุงแก้ไขมโนทัศน์เดิมให้ถูกต้องตามมโนทัศน์ที่ถูกต้องทางคณิตศาสตร์ หรือนักเรียนที่ไม่มีความเข้าใจในมโนทัศน์นั้นเลย จะสามารถเรียนรู้จากการให้เหตุผลและการโต้แย้งของเพื่อนร่วมชั้นเรียนได้ จากความสำคัญและเหตุผลดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

คำถามของการวิจัย

1. การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จะมีแนวทางการจัดการเรียนรู้อย่างไร

2. หลังจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ แล้วนักเรียนจะมีทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างไร

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาแนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

2. เพื่อศึกษาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้แนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ และนำไปปรับใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องอื่น

2. ได้รับรู้ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดขอบเขตเป็น 3 ด้าน ตามรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. กลุ่มเป้าหมาย / ผู้เข้าร่วมวิจัย

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ - คณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร ที่เรียนในรายวิชา ค30206 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566 จำนวน 33 คน

2. เนื้อหาในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ได้นำเนื้อหาตามหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1 บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2.8 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ มีเนื้อหาทั้งหมด 3 เรื่องและใช้เวลาทั้งหมด 8 ชั่วโมง ดังนี้

เรื่องที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง จำนวน 2 ชั่วโมง

เรื่องที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน จำนวน 3 ชั่วโมง

เรื่องที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด จำนวน 3 ชั่วโมง

3. ตัวแปรที่ศึกษา

3.1 การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

3.2 ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.3 ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Learning management by mathematising process) หมายถึง วิธีการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาผ่านกระบวนการคิดโดยเริ่มต้นจากสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แก้ปัญหานั้นด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ และใช้ความรู้เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ แล้วย้อนกลับไปตอบปัญหาในชีวิตจริง ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง คือ นักเรียนศึกษาสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ ในเรื่องการเคลื่อนที่แนวตรง ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดยนักเรียนทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง โดยทำความเข้าใจข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาตามสถานการณ์ปัญหานั้น รวมทั้งสร้างความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษาสัญลักษณ์ และกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อน โดยนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหานั้น เช่น มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การเขียนนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ การเขียนแผนภาพ เป็นต้น เพื่อแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้การประยุกต์ของอนุพันธ์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม เพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จนได้คำตอบของปัญหาในรูปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง คือ นักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง และนำเสนอผลการแก้ปัญหาให้อยู่ในบริบทชีวิตจริงเพื่อตอบปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์

2. ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical reasoning skill) หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการแสดงมโนทัศน์ วิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา เพื่อนำมาหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาและยืนยันข้อสรุป โดยใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ประสบการณ์ หลักฐาน ข้อคาดการณ์ต่าง ๆ และข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา มาประกอบการอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผล ซึ่งวัดได้จากใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยวัดความสามารถ 2 ด้าน ดังนี้

2.1 ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา เป็นความสามารถของนักเรียนในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา แสดงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาเพื่อนำมาหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างมีเหตุผล

2.2 ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา เป็นความสามารถของนักเรียนในการสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องและยืนยันข้อสรุป โดยอาศัยมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหามาประกอบการอธิบายความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะวัดและประเมินผลได้โดยใช้ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

3. ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ (Mathematical argumentation skill) หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการสนับสนุน คัดค้าน หรือปรับปรุงข้อคาดการณ์ของข้อมูลเพื่อนำไปสู่การสร้างองค์ความรู้ที่ได้รับการยอมรับ โดยอาศัยหลักฐาน ได้แก่ ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า ร่วมกับการให้เหตุผล เพื่อเชื่อมข้อคาดการณ์ของข้อมูลและหลักฐานเข้าด้วยกัน โดยวัดความสามารถ 4 ด้าน ดังนี้

3.1 การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ เป็นความสามารถของนักเรียนในการระบุข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาและให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างสมเหตุสมผล

3.2 การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา เป็นความสามารถของนักเรียนในการให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาให้มีความน่าเชื่อถือ

3.3 การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป เป็นความสามารถของนักเรียนในการสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายและให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ที่แตกต่างออกไปอย่างสมเหตุสมผล

3.4 การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ เป็นความสามารถของนักเรียนในการให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลง

ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์จะวัดและประเมินผลได้โดยใช้แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัย เรื่อง การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    1.1 ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    1.2 ความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    1.3 ลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    1.4 พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    1.5 ขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
2. ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.4 แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.5 การวัดและประเมินผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
3. ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
    3.1 ความหมายของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
    3.2 ความสำคัญของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
    3.3 องค์ประกอบของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
    3.4 แนวทางการพัฒนาการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
    3.5 การวัดและประเมินผลการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    4.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องภายในประเทศ
    4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในต่างประเทศ

1. กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าความหมาย ความสำคัญ ลักษณะ พัฒนาการ และขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งรายละเอียดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ โดยมีหัวข้อที่น่าสนใจดังต่อไปนี้

1.1 ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกลยุทธ์ของคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

Treffers (1987 อ้างอิงใน Wardono, 2017) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองของปรากฏการณ์ทางคณิตศาสตร์หรือสร้างมโนทัศน์ของปรากฏการณ์ ซึ่งเป็นการนำปรากฏการณ์ในโลกชีวิตจริงไปสู่โลกของคณิตศาสตร์ และใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม

Freudent (1991 อ้างอิงใน Nguyen, P. L. and Mai, H. H., 2016) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการในการจัดระบบความคิดจากสถานการณ์ในชีวิตจริงให้เป็นลักษณะของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

OECD (2009) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง การรับรู้และการดึงคณิตศาสตร์ที่ฝังอยู่ในสถานการณ์และการใช้คณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหา โดยใช้การวิเคราะห์ การตีความ พัฒนารูปแบบและกลยุทธ์ของตัวนักเรียนเองและนำเสนอข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งการพิสูจน์และการวางนัยทั่วไป

Grigoras (2010) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นวิธีการวิเคราะห์ปัญหาสถานการณ์ที่นักเรียนทำกิจกรรม และมโนทัศน์ของการคิดทางคณิตศาสตร์โดยพื้นฐานที่ใช้ในการกำหนดโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นจากการทำงานของนักเรียน

PISA (2018) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ คือ ความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้อยู่ในรูปทางคณิตศาสตร์ ด้วยวิธีการต่าง ๆ เช่น การสร้างโครงสร้าง การสร้างมโนทัศน์ การสร้างสมมติฐานและการสร้างแบบจำลอง หรือการตีความผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับปัญหาในชีวิตจริง

แพรไหม สามารถ (2555) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดโดยการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์

จากสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์และแก้ปัญหานั้นด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบและนำคำตอบนั้นย้อนกลับไปตอบปัญหาในชีวิตจริง

เฉลิมพงษ์ เหมืองห้า (2558) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดโดยการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์จากสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์และแก้ปัญหานั้นด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบและนำคำตอบนั้นย้อนกลับไปตอบปัญหาในชีวิตจริง

พรวิมล บัวโรย (2561) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นขณะสร้างแบบจำลองสถานการณ์ในชีวิตจริง ไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยนำสถานการณ์ปัญหานั้นมาวิเคราะห์ข้อมูล เลือกใช้กลยุทธ์ วิธีการ สร้างตัวแบบ และใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ และนำคำตอบที่ได้นั้นย้อนกลับไปตอบปัญหาในชีวิตจริง

ทรงยศ สกุลยา (2562) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดโดยการนำสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อแก้ปัญหาด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ให้ได้คำตอบทางคณิตศาสตร์ และนำไปสู่คำตอบของสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง

ชรินรัตน์ ด้วงธรรม (2564) ได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดที่เริ่มต้นจากสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วแก้ปัญหาด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบทางคณิตศาสตร์ และนำคำตอบนั้นแปลผลกลับไปตอบปัญหาในชีวิตจริง

จากความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาผ่านกระบวนการคิดโดยเริ่มต้นจากสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แก้ปัญหานั้นด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ และใช้ความรู้เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ แล้วย้อนกลับไปตอบปัญหาในชีวิตจริง

1.2 ความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่มีความสำคัญในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

Freudenthal (1991 อ้างใน Gravemeijer, 1997) ได้กล่าวถึงความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการสำคัญของการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ด้วยเหตุผล 2 ประการ ดังนี้

ประการที่หนึ่ง กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์นอกจากจะเป็นกิจกรรมหลักที่สำคัญของนักคณิตศาสตร์แล้ว ยังทำให้นักเรียนเกิดความคุ้นเคยกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่พบในชีวิตประจำวัน เช่น กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ในการมองหาปัญหานำไปสู่เจตคติทางคณิตศาสตร์ ทำให้รู้ถึงความเป็นไปได้และข้อจำกัดของวิธีการทางคณิตศาสตร์ และรู้ว่าสถานการณ์ใดมีความเหมาะสมและสถานการณ์ได้ไม่มีความเหมาะสมในการนำวิธีการทางคณิตศาสตร์ไปใช้

ประการที่สองเกี่ยวข้องกับการคิดค้นทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นขั้นตอนสุดท้ายในกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นการสร้างความเป็นแบบแผนโดยการสร้างสัจพจน์ ซึ่งขั้นตอนสุดท้ายนี้ไม่ควรเป็นจุดเริ่มต้นในการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากการเริ่มต้นจากสัจพจน์ตรงข้ามกับกระบวนการที่นักคณิตศาสตร์ได้มาซึ่งข้อสรุป การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ควรใช้กระบวนการคิดค้นคณิตศาสตร์แบบได้รับคำแนะนำ ซึ่งจะทำให้นักเรียนได้รับประสบการณ์เช่นเดียวกับกระบวนการที่นักคณิตศาสตร์ได้คิดค้นขึ้นมา

OECD (1999) ได้กล่าวถึงความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์นี้ได้แสดงให้เห็นว่านักคณิตศาสตร์เขาทำงานคณิตศาสตร์กันอย่างไร และคนทั่วไปสามารถจะใช้คณิตศาสตร์กับอาชีพต่าง ๆ ได้อย่างไร และประชาชนที่มีข้อมูลพร้อมในตัวและเป็นคนช่างคิดลึกซึ้งจะสามารถใช้คณิตศาสตร์ได้อย่างไรจึงจะอยู่กับความเป็นจริงในโลกชีวิตจริงอย่างมีคุณภาพ ซึ่งการเรียนคณิตศาสตร์ในลักษณะนี้น่าจะเป็นจุดประสงค์แรกของการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ทรงยศ สกุลยา (2562) ได้ให้ความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มีความสำคัญในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้กับสถานการณ์ปัญหาในโลกชีวิตจริงได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

ชรินรัตน์ ด้วงธรรม (2564) ได้กล่าวถึงความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มีความสำคัญในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้กับสถานการณ์ปัญหาในโลกชีวิตจริงได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

จากความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นกลยุทธ์ที่สำคัญในการเรียนรู้เพื่อแก้ไขปัญหาในชีวิตจริง เพื่อนำไปสู่การสนับสนุนทักษะต่าง ๆ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้กับสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงได้อย่างเหมาะสม

1.3 ลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่มีลักษณะกระบวนการทางคณิตศาสตร์หลายลักษณะ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

Freudenthal (1991 อ้างอิงใน Grigorus, 2010) ได้แบ่งลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่

1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (Horizontal Mathematization) เป็นกระบวนการนำโลกในชีวิตจริงไปสู่โลกของสัญลักษณ์

2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical Mathematization) เป็นกระบวนการที่คล้ายย้ายภายในโลกสัญลักษณ์

OECD (1999) ได้แบ่งลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่

1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (Horizontal Mathematization) เป็นกระบวนการแปลงโลกจริงไปสู่โลกทางคณิตศาสตร์

2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical Mathematization) เป็นกระบวนการทำงานบนปัญหาภายใต้โลกทางคณิตศาสตร์และใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาและนำคำตอบนั้นสะท้อนกลับไปในปัญหาเดิม

Murdani (2013) ได้อธิบายลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (Horizontal Mathematization) เป็นกระบวนการเปลี่ยนปัญหาของสถานการณ์หรือบริบทไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical Mathematization) เป็นกระบวนการกำหนดปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระบบเชิงคณิตศาสตร์ (สัญลักษณ์) โดยใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

Nguyen, P. L. and Mai, H. H. (2016) ได้อธิบายลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ในแต่ละลักษณะ ดังนี้

1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (Horizontal Mathematization) เป็นกระบวนการที่นักเรียนใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการจัดการและแก้ปัญหาในสถานการณ์ในชีวิตจริง

2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical Mathematization) เป็นกระบวนการสร้างความรู้ภายในวิชาคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบจึงเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนย้ายจากโลกของชีวิตจริงไปสู่โลกของสัญลักษณ์ ในขณะที่การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนบตั้งจะเคลื่อนย้ายภายในโลกของสัญลักษณ์

เฉลิมพงษ์ เหมืองห้า (2558) ได้กล่าวถึงลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 2 ลักษณะ ได้แก่ 1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (horizontal mathematization) โดยเป็นกระบวนการแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ และ 2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (vertical mathematization) เป็นกระบวนการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และนำคำตอบนั้นกลับไปตอบปัญชีวิตจริง

ทรงยศ สกุลยา (2562) ได้กล่าวถึงลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า ลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แบ่งออก 2 ลักษณะได้แก่ 1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (horizontal mathematization) เป็นกระบวนการเปลี่ยนแปลงสถานการณ์ของโลกชีวิตจริงไปสู่โลกทางคณิตศาสตร์และ 2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (vertical mathematization) เป็นกระบวนการจัดการและแก้ปัญหาในระบบเชิงพาณิชย์คณิตศาสตร์ โดยใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์และนำคำตอบนั้นสะท้อนกลับไปอธิบายสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง

ชรินรัตน์ ด้วงธรรม (2564) ได้กล่าวถึงลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่ 1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (Horizontal Mathematization) เป็นกระบวนการแปลงปัญหาโลกชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ และ 2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical Mathematization) เป็นกระบวนการที่ใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ช่วยจัดการและแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบ และนำคำตอบที่ได้นั้นสะท้อนกลับไปตอบปัญหาในโลกชีวิตจริง

จากลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า ลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แบ่งเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่

1) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (Horizontal Mathematization) เป็นกระบวนการแปลงสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

2) กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical Mathematization) เป็นกระบวนการที่มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไปใช้จัดการและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้คำตอบแล้วนำคำตอบที่ได้นั้นสะท้อนกลับไปตอบสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง

1.4 พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องเพื่อศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงพัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

Freudenthal (1991 อ้างอิงใน Grigorus, 2010) ได้พัฒนากรอบทฤษฎีของแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Education: RME) ซึ่งอยู่บนพื้นฐานจากแนวคิดของ Freudenthal ที่ว่าคณิตศาสตร์จะต้องเชื่อมโยงกับชีวิตจริงและใช้บริบทในชีวิตจริงให้กลายเป็นส่วนหนึ่งของการกำหนดลักษณะวิธีการในแบบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยที่ Freudenthal มองว่าคณิตศาสตร์ไม่ได้เป็นเพียงแค่ความรู้คณิตศาสตร์เท่านั้น แต่คณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมของการสร้างสถานการณ์จากชีวิตจริงหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกิจกรรมนี้เรียกว่าการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising) โดยการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นลักษณะที่สำคัญมากที่สุดของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง และมีบริบทในชีวิตจริงของเราเป็นส่วนหนึ่งที่ก่อให้เกิดการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Shipulina, Lilijedahl and Smith, 2012) นอกจากนี้ Greer (1997 อ้างอิงใน Grigoras, 2008) ได้กล่าวถึงการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ว่าเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นขณะที่สร้างแบบจำลองสถานการณ์ในชีวิตจริง เช่น การแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์เป็นการสร้างแบบจำลองที่สามารถมองผ่านการเชื่อมโยง 2 ด้าน ได้แก่ ด้านคณิตศาสตร์ และด้านชีวิตจริง และการพัฒนาโครงสร้างความรู้ตามรูปแบบนามธรรม

De Lang (1996 อ้างอิงใน แพรไหม สามารถ, 2555) ได้กำหนดกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ในวิถีทางที่แตกต่างออกไป โดย De Lang มองว่ากระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์นั้นเป็นแบบจำลอง (Modeling) ไม่ได้เป็นเพียงแค่ส่วนหนึ่งในแบบจำลองซึ่ง De Lang ได้ธิบายถึงกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงมโนทัศน์ (Conceptual Mathematization Process) ประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ ได้แก่ กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ และกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง โดยได้ระบุเป้าหมายของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบนั้นเป็นการแปลงปัญหาไปยังปัญหาคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ผ่านโครงสร้างความรู้ (Schematizing) และการมองภาพ (Visualizing) เพื่อพยายามค้นหากฎและความสัมพันธ์ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการระบุคณิตศาสตร์ในบริบททั่วไป

กิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ ประกอบด้วย

- การระบุคณิตศาสตร์ในบริบททั่วไป
- โครงสร้างความรู้
- การใช้สูตรและการนึกภาพปัญหาในวิธีการที่แตกต่าง
- การค้นพบความสัมพันธ์

- การค้นพบกฎ
- การแปลงปัญหาในชีวิตจริงไปเป็นปัญหาคณิตศาสตร์
- การแปลงปัญหาในชีวิตจริงไปเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่รู้จัก

กิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง ประกอบด้วย

- แสดงแทนความสัมพันธ์ในรูปแบบของสูตร
- พิสูจน์กฎ
- การปรับแต่งและการปรับแบบจำลอง
- การใช้แบบจำลองที่แตกต่างกัน
- การสร้างมโนทัศน์ใหม่ทางคณิตศาสตร์
- กระบวนการวางนัยทั่วไป

OECD (1999) ได้กล่าวว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ได้ถูกนำมาใช้ใน OECD / PISA นั่นคือ การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบของการรับรู้ในชีวิตจริงผ่านการใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ซึ่งนอกจากนี้การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นการสร้างกิจกรรมที่ได้รับมาซึ่งทักษะและความรู้จากการค้นพบกฎเกณฑ์ โครงสร้าง ความรู้และความสัมพันธ์ กระบวนการนี้เรียกว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวนอน ซึ่งประกอบกิจกรรมดังต่อไปนี้

- การระบุเฉพาะเจาะจงคณิตศาสตร์ในบริบททั่วไป
- แผนผังโครงสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์
- การกำหนดปัญหาและแสดงภาพปัญหา
- การค้นพบความสัมพันธ์และกูฎ
- การตระหนักถึงความคล้ายคลึงและความแตกต่างของปัญหา

และเมื่อปัญหาได้มีการเปลี่ยนไปเป็นบัญหาทางคณิตศาสตร์ก็จะสามารถแก้ปัญหาด้วยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อการจัดการและปรับให้เป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์จากปัญหาในชีวิตจริง กระบวนการนี้เรียกว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง และมีกิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบดังนี้

- การแสดงแทนความสัมพันธ์โดยการใช้สูตร
- การพิสูจน์กฎ
- การปรับแต่งและการปรับแบบรูป
- การบูรณาการและการรวมรูปแบบ
- กระบวนการวางนัยทั่วไป

OECD (2009) ได้เสนอกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising process) ซึ่งเป็นกระบวนการคิดจากสถานการณ์จริงสู่สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ OECD ได้เสนอกระบวนการนี้เป็นกระบวนการแก้ปัญหาในชีวิตจริง โดยกำหนดไว้เป็น 5 ลักษณะ ดังนี้

1) เริ่มด้วยปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

2) จัดให้อยู่ในรูปแบบตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และระบุคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

3) ค่อย ๆ ตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไป ผ่านกระบวนการสร้างสมมติฐานการวางนัยทั่วไป และการทำให้เป็นแบบแผนที่ส่งเสริมลักษณะทางคณิตศาสตร์ของสถานการณ์และแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

4) แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

5) สร้างความสมเหตุสมผลของคำตอบทางคณิตศาสตร์ในส่วนของปัญหาในชีวิตจริง รวมทั้งการระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหา

ทรงยศ สกุลยา (2562) ได้กล่าวถึงพัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เกิดจากแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Education) ที่ไม่ได้มองคณิตศาสตร์ว่าเป็นแค่ความรู้ แต่มองคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมที่เชื่อมโยงกับสถานการณ์ในชีวิตจริง ซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ และกิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง

ชรินรัตน์ ด้วงธรรม (2564) ได้กล่าวถึงพัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ว่า พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เกิดจากแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Education) ที่ไม่ได้มองคณิตศาสตร์ว่าเป็นแค่ความรู้ แต่มองคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมที่เชื่อมโยงกับสถานการณ์ในชีวิตจริง ซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ และกิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง

จากพัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มีการพัฒนาจากกรอบแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Education : RME) ที่มองว่าคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมของการสร้างสถานการณ์จากชีวิตจริง มาสู่กระบวนการคิดจากสถานการณ์ในชีวิตจริงสู่สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ แล้วแก้ปัญหาด้วยกระบวนการทางคณิตศาสตร์และแปลงคำตอบที่ได้กลับมาเป็นคำตอบของสถานการณ์ในชีวิตจริง

1.5 ขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่มีขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลายขั้นตอนและแบ่งได้หลายรูปแบบ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

OECD (2009) กล่าวว่า PISA ต้องการตรวจสอบความสามารถของนักเรียนในด้านการแก้ปัญหา ซึ่งครอบคลุมการวิเคราะห์ การใช้เหตุผล และการสื่อสารมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพ ในการแก้ปัญหานั้นนักเรียนจะต้องใช้กระบวนการ ความรู้ และทักษะคณิตศาสตร์ ทั้งที่ได้เรียนมาในโรงเรียนและจากประสบการณ์ชีวิต สำหรับการประเมินผลของ PISA จะเรียกกระบวนการพื้นฐานที่นักเรียนใช้แก้ปัญหาที่ปรากฏในชีวิตจริงว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ประกอบไปด้วยกระบวนการ 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เริ่มด้วยปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง โดยแปลงปัญหาจากความเป็นจริงไปเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ กระบวนการนี้เกี่ยวข้องกับการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ได้กับปัญหานั้น ๆ แสดงปัญหาในรูปที่แตกต่างไป รวมทั้งจัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องและระบุข้อตกลงเบื้องต้นที่สอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหา

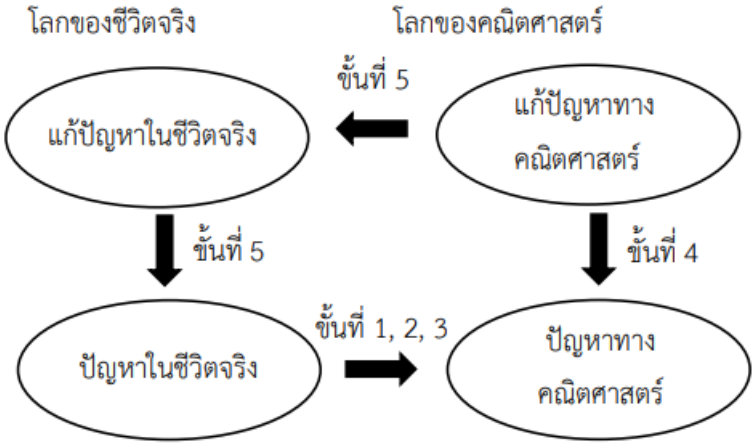
ขั้นที่ 2 จัดให้อยู่ในรูปแบบตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษา สัญลักษณ์ กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ทำให้เข้าใจปัญหานั้นในเชิงคณิตศาสตร์ มองหารูปแบบ ความสัมพันธ์และแบบรูปทางคณิตศาสตร์ และมองหาลักษณะของปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 3 ค่อย ๆ ตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อน โดยนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหา เช่น การสร้างข้อตกลงเบื้องต้น การทำให้เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การลงข้อสรุป เป็นต้น รวมทั้งแปลงปัญหาให้เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนนี้รวมถึงการใช้และการแสดงแทนเปลี่ยนกลับไปมา การใช้สัญลักษณ์ กฎ ภาษาเฉพาะทาง และการทำโจทย์ทางคณิตศาสตร์ การใช้ ปรับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ผสมผสานและบูรณาการตัวแบบ การให้ความเห็น สนับสนุน โต้แย้ง รวมทั้งการสรุปการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 5 แปลผลจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง รวมถึงการระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหานั้น ๆ ด้วย การทำความเข้าใจว่าคณิตศาสตร์ทำได้แค่ไหนและมีข้อจำกัดอย่างไร การคิด สะท้อนถึงข้ออภิปราย โต้แย้ง และหาคำอธิบายถึงความใช้ได้ของผลการแก้โจทย์ปัญหา การสื่อสารทั้งกระบวนการคิดและผลที่ได้รวมทั้งการวิพากษ์ตัวแบบและข้อจำกัด

จากแนวคิดพื้นฐานสำหรับกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ PISA กำหนดไว้เป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้



ภาพ 1 แสดงกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (OECD, 2009)

เฉลิมพงษ์ เหมืองห้า (2558) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ประกอบไปด้วยกระบวนการ 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นเสนอปัญหาในชีวิตจริง เป็นการแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น แสดงปัญหาในรูปที่แตกต่างไป และระบุข้อตกลงเบื้องต้นที่สอดคล้องเหมาะสมกับปัญหา

ขั้นที่ 2 ขั้นมองปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการจัดการกับปัญหาให้อยู่ในรูปแบบตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยนักเรียนทำความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษา สัญลักษณ์ และกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนพยายามค้นหาความสัมพันธ์และแบบรูปทางคณิตศาสตร์จากปัญหา จึงเป็นการพิจารณาลักษณะของปัญหานั้นในเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการค่อย ๆ ตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไป โดยนักเรียนนำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหาซึ่งอาจมีการสร้างข้อตกลงเบื้องต้นและหาข้อสรุปเพื่อแปลงปัญหาให้เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นการมองปัญหาในรูปคณิตศาสตร์ล้วน ๆ เพื่อสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการใช้สัญลักษณ์ กฎเกณฑ์ ภาษาและวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา มีการปรับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับปัญหาจนได้คำตอบของปัญหา

ขั้นที่ 5 ขั้นสะท้อนคิด เป็นการแปลผลจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กลับไปสู่ปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง รวมถึงการระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยให้นักเรียนร่วมกัน

อภิปรายและวิเคราะห์ถึงผลที่ได้และข้อจำกัดจากการใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา รวมถึงมีการวิเคราะห์ความสมเหตุสมผลของตัวแบบที่ใช้ในการแก้ปัญหา

ทรงยศ สกุลยา (2562) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง เป็น การแปลงปัญหาจากความเป็นจริงไปเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีการระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริง ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ได้กับปัญหาหรือสถานการณ์นั้น จัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องและ ระบุข้อตกลงเบื้องต้นที่สอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหา ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการพิจารณาปัญหาให้อยู่ในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ทำความเข้าใจและ สร้างความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษา สัญลักษณ์ และกฎเกณฑ์ทาง คณิตศาสตร์ ตลอดจนค้นหารูปแบบ ความสัมพันธ์และแบบรูปของปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อน โดยนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหา เช่น การสร้างข้อตกลงเบื้องต้น การทำให้เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การลงข้อสรุป เป็นต้น เพื่อแปลงปัญหาให้เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการใช้ สัญลักษณ์ กฎ ภาษาเฉพาะทาง และการทำโจทย์ทางคณิตศาสตร์ มีการใช้ ปรับตัวแบบทาง คณิตศาสตร์ ผสมผสานและบูรณาการตัวแบบ รวมทั้งการให้ความเห็น สนับสนุน โต้แย้ง และสรุป การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จนได้คำตอบของปัญหา และขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง เป็นการแปลผลจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของ ชีวิตจริง การระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยร่วมกันคิด วิเคราะห์ อภิปราย สะท้อนผล โต้แย้ง และหาคำอธิบายถึงผลการแก้โจทย์ปัญหานั้น รวมทั้งการยกตัวอย่างสถานการณ์ที่สามารถ นำมโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสมที่สุดไปใช้ได้ในชีวิตจริง

ชรินรัตน์ ด้วงธรรม (2564) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง เป็นการแปลงปัญหาจากความเป็นจริงไปเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีการระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ได้กับปัญหาหรือสถานการณ์นั้น จัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องและระบุข้อตกลงเบื้องต้นที่สอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหา ขั้นตอนที่ 2 ขั้นจัดให้อยู่ในรูปแบบตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการพิจารณาปัญหาให้อยู่ในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ทำความเข้าใจและสร้างความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษา สัญลักษณ์ และกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนค้นหารูปแบบ ความสัมพันธ์และแบบรูปของปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อน โดยนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหา เช่น การ

สร้างข้อตกลงเบื้องต้น การทำให้เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การลงข้อสรุป เป็นต้น เพื่อแปลงปัญหาให้เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการใช้สัญลักษณ์ กฎ ภาษาเฉพาะทาง และการทำโจทย์ทางคณิตศาสตร์ มีการใช้ ปรับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ผสมผสานและบูรณาการตัวแบบ รวมทั้งการให้ความเห็น สนับสนุน โต้แย้ง และสรุปการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จนได้คำตอบของปัญหา และขั้นตอนที่ 5 ขั้นแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กลับเป็นปัญหาในชีวิตจริง เป็นการแปลผลจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง การระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยร่วมกันคิด วิเคราะห์อภิปราย สะท้อนผล โต้แย้ง และหาคำอธิบายถึงผลการแก้โจทย์ปัญหานั้น รวมทั้งการยกตัวอย่างสถานการณ์ที่สามารถนำมโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสมที่สุดไปใช้ได้ในชีวิตจริง

จากขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า ขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง คือ การศึกษาสถานการณ์ปัญหาที่ โดยทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ การระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง โดยทำความเข้าใจข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาตามสถานการณ์ปัญหานั้น รวมทั้งสร้างความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษาสัญลักษณ์ และกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ การใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อน โดยนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหานั้น เพื่อแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ การตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม เพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จนได้คำตอบของปัญหาในรูปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง คือ การแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง และนำเสนอผลการแก้ปัญหาให้อยู่ในบริบทชีวิตจริง

2. ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าความหมาย ความสำคัญ ประเภท แนวทางการพัฒนา และการวัดและประเมินผลทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งรายละเอียดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยมีหัวข้อที่น่าสนใจดังต่อไปนี้

2.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงความสามารถที่ใช้ในการอธิบายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาสรุปอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

Krulik & Rudnick (1993, p. 3) ให้ความหมายของ ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความสามารถในการคิดหาข้อสรุปจากการสังเกตและการคาดเดาจากข้อมูลที่กำหนดให้ เพื่อนำมาสร้างข้อคาดการณ์ ซึ่งผู้เรียนต้องสามารถอธิบายและแสดงเหตุผลเกี่ยวกับข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปข้างต้นนั้นว่า มีความเกี่ยวข้องกับองค์ความรู้ใหม่ที่ได้เรียนรู้นั้นอย่างไร

Krulik & Rudnick (1993, pp. 3-5) ได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ขั้น คือการคิดแบบรู้จำ (Recall) เป็นลักษณะการคิดบนพื้นฐานของความรู้เดิมที่มีอยู่สามารถคิดได้โดยอัตโนมัติการคิดแบบขั้นพื้นฐาน(Basic) เป็นการคิดที่มีพื้นฐานอยู่บนความเข้าใจในองค์ความรู้หรือความคิดรวบยอดนั้น การคิดแบบมีวิจารณญาณ(Critical) เป็นลักษณะการคิดขั้นสูงที่ใช้การเชื่อมโยงวิเคราะห์และประเมินค่าลักษณะทั้งหมดของการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบที่สมเหตุสมผลได้และการคิดแบบสร้างสรรค์ (Creative) เป็นการคิดที่ต้องอาศัยการแต่งเติมความรู้ และนำไปขยายต่อเพื่อให้เกิดความคิดใหม่ๆ ซึ่ง Krulik & Rudnick (1993) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นการคิดระดับที่สูงกว่า ขั้นการคิดแบบรู้จำ (Recall) ขึ้นไป

ภาพ 2 แสดงระดับการคิด ตามแนวคิดของ Krulik & Rudnick (1993, p. 3)

Galotti (2004, p. 422) ให้ความหมายของการให้เหตุผลไว้ว่าเป็นการสร้างข้อสรุป โดยการอ้างอิงข้อมูลมาใช้ในการสนับสนุนข้อสรุปนั้นบางข้อสรุปอาจอ้างอิงข้อมูลใหม่ที่ได้รับ แต่อย่างไรก็ตามการอ้างอิงข้อมูลเพื่อสร้างข้อสรุปนั้นอาจใช้ความคิดเห็นส่วนตัวมาเป็นข้อสนับสนุนได้

NCTM (2010, p. 4) ได้กล่าวถึง การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าเป็นกระบวนการในการสร้างข้อสรุปบนพื้นฐานของข้อมูลที่เป็นหลักฐานหรือข้อสมมติฐานที่มีอยู่เป็นกระบวนการที่เกี่ยวกับการสำรวจ การสืบสอบ การนำเสนอ การอธิบายข้อคาดการณ์ และการตรวจสอบข้อคาดการณ์นั้น

ทิศนา แขมมณี (2544, น. 78) ได้ให้ความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความสามารถในการคิดที่มีจุดมุ่งหมาย เพื่อเข้าใจความคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเหตุผล โดยสามารถจำแนกข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริง และพิจารณาเรื่องที่คิดบนพื้นฐานของข้อเท็จจริงโดยใช้เหตุผลแบบนิรนัยและอุปนัยซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อยดังนี้

1) สามารถแยกข้อเท็จจริงและความคิดเห็นออกจากกันได้

2) สามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยควบคู่กับการให้เหตุผลแบบอุปนัย ในการพิจารณาข้อเท็จจริงได้

3) สามารถเลือกใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยหรืออุปนัยอย่างใดอย่างหนึ่ง ในการพิจารณาข้อเท็จจริงได้

วรนุช หลวงจันทร์ (2564) ได้กล่าวถึงความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการคิดและอธิบายข้อสรุปซึ่งได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลในปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

วารินทร์ จันทวงษ์ (2564) ได้กล่าวถึงความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว่ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในอธิบายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปโดยเหตุผลที่ใช้อาจแสดงถึงมโนทัศน์ ข้อเท็จจริง หลักการ ข้อคาดการณ์ หรือข้อสนับสนุนที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น

วรุฒ หล้าบือ (2565) ได้กล่าวถึงความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว่ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่ใช้ในการอธิบายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาข้อสรุปโดยเหตุผลที่ใช้อาจแสดงถึงมโนทัศน์ ข้อเท็จจริง หลักการ ข้อคาดการณ์หรือข้อสนับสนุนที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น

จากความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของในการแสดงมโนทัศน์ วิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา เพื่อนำมาหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาและยืนยันข้อสรุป โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ประสบการณ์ หลักฐาน ข้อคาดการณ์ต่าง ๆ และข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา มาประกอบการอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผล

2.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญกับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากเป็นทักษะที่ส่งเสริมความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้ง ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

Baroody (1993, pp. 2-6) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญ ที่จะทำ ให้นักเรียนได้พัฒนานอกเหนือไปจากการจดจำข้อเท็จจริง กฎ และการดำเนินการ นอกจากนั้นการเน้นสอนให้นักเรียนให้เหตุผลยังช่วยให้ผู้เรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่สามารถให้เหตุผลได้อย่างเป็นระบบและมีความหมายสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสาขาอื่น ๆ ได้

Stiggins (1997, p. 6) ได้กล่าวว่า การทำความเข้าใจโดยใช้เหตุผลช่วยให้นักเรียนเป็นนักคิดที่ดี ในบางครั้งเราอาจต้องใช้การให้เหตุผลในลักษณะของการวิเคราะห์เพื่อจะดูว่าส่วนปลีกย่อยต่างๆ เข้ากับ ภาพรวมของสิ่งนั้น หรือไม่ในบางโอกาสเราต้องใชการให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบเพื่อให้เข้าใจความเหมือนและความแตกต่างของสิ่งนั้น ๆ

Alice & Shirel (1999, p. 114) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์หรือวางแผน การแก้ปัญหาได้ หากปราศจากการให้เหตุผล กล่าวได้ว่าการให้เหตุผลมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

Ball & Bass (2003, p. 28) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งมีความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมาก เนื่องจากความสามารถในการให้เหตุผลสามารถทำให้ผู้เรียนเข้าใจองค์ความรู้ที่เป็นความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถ่องแท้ นอกจากนั้นยังทำให้ผู้เรียนสามารถใช้ความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

NCTM (2010, p. 5) กล่าวว่า การให้เหตุผลช่วยให้นักเรียนจัดระบบความรู้และสามารถส่งเสริมความเข้าใจในทางคณิตศาสตร์ได้มากยิ่งขึ้น เมื่อนักเรียนเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับประสบการณ์เดิม หรือความรู้เดิมที่มีแล้วผู้เรียนจะสามารถทำความเข้าใจและจดจำความรู้ใหม่ได้ดี

วิชัย เสวกงาม (2557, น. 208) กล่าวว่า การสอนให้ผู้เรียนเกิดความสามารถในการให้เหตุผลจะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเกิดทักษะการให้เหตุผลและทักษะการคิดขั้นสูงความสามารถและทักษะมีความแตกต่างกัน ความสามารถคือคุณภาพที่เป็นจริงของความสามารถที่จะทำหรือดำเนินงานบางอย่าง ส่วนทักษะคือความสามารถในการทำบางอย่างได้ดีซึ่งมักจะเป็นผลมาจากประสบการณ์และการฝึกอบรม ทักษะเกิดจากการเรียนรู้ส่วนความสามารถมาจากมรดกทางพันธุกรรม ดังนั้นความสามารถจึงมีความมั่นคงและยั่งยืนกว่าทักษะ

วรนุช หลวงจันทร์ (2564) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะที่ช่วยพัฒนาให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์อย่างเป็นเหตุเป็น สามารถตัดสินใจได้อย่างมั่นใจ และยังเป็นทักษะที่ช่วยให้การพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาสมบูรณ์ขึ้น ดังนั้น การฝึกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นเรื่องจำเป็นที่ครูจะต้องฝึกฝนนักเรียนให้เกิดเป็นทักษะหรือความชำนาญ

วารินทร์ จันทวงษ์ (2564) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ความสามารถในการให้เหตุผลสามารถส่งเสริมให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย ทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ไม่ใช่เพียงแค่การท่องจำ นอกจากนั้นยังส่งเสริมให้นักเรียนแก้ปัญหาได้อย่างสมบูรณ์

วรุฒ หล้าบือ (2565) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า สมรรถนะการให้เหตุผลสามารถส่งเสริมให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย ทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ไม่ใช่เพียงแค่การท่องจำ นอกจากนั้นยังส่งเสริมให้ผู้เรียนแก้ปัญหาได้อย่างสมบูรณ์

จากความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย กระบวนการนี้เกี่ยวข้องกับการสำรวจปรากฏการณ์ การพัฒนามโนทัศน์ การคาดเดาทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลกับผลลัพธ์

2.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่มีการจำแนกประเภทได้หลายรูปแบบ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

Baroody (1993, pp. 57-72) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลนั้น มี 3 ประเภท ดังนี้

1) การให้เหตุผลโดยใช้ความรู้สึกนึกคิด (Intuitive reasoning) เป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ที่ไม่ได้มีข้อมูลที่จำ เป็นทั้งหมดในการตัดสินใจจึงตัดสินใจจากข้อมูลที่เห็นหรือความรู้สึกภายในเหตุผลเชิงหยั่งรู้จึงเป็นเหตุผลที่วางอยู่บนสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสมมติฐานซึ่งสิ่งที่ปรากฏอาจถูกหรือผิดก็ได้

2) การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นเหตุผลที่ได้จากการพิจารณาสิ่งที่มีร่วมกัน จากตัวอย่างหลายตัวอย่าง แล้วสรุปออกมาโดยมีเหตุผลสนับสนุน

3) การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่อาศัย กฎหรือข้ออ้าง ที่ได้รับการยอมรับว่าเป็นจริงมาพิจารณาเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

Stiggins (1997, pp. 6-7) ได้กล่าวถึง รูปแบบของการให้เหตุผลว่ามี 3 รูปแบบ คือ การให้เหตุผล แบบวิเคราะห์ การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ และการให้เหตุผลในการประเมิน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1) การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ เป็นการให้เหตุผลโดยพิจารณาส่วนย่อยหรือส่วนประกอบเล็ก ที่ประกอบกันเป็นสิ่งนั้น เป็นการศึกษาลงลึกในส่วนย่อยเมื่อต้องการศึกษาสิ่งนั้นอย่างลึกซึ่ง เพื่อศึกษารายละเอียดหรือกรณีที่ต้องการแก้ปัญหานักเรียนจะต้องอาศัยการวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหานั้นแล้วนำ ความรู้และการให้เหตุผลมาใช้ในการแก้ปัญหา

2) การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ เป็นกระบวนการศึกษาว่า ในสิ่งนั้น ๆมีอะไรที่เหมือนกันหรือแตกต่างกัน การให้เหตุผลในวิธีนี้จะต้องมีความรู้ความเข้าใจสิ่งที่ต้องการเปรียบเทียบอย่างลึกซึ่งมีข้อตกลงอย่างชัดเจนว่าแบบใดที่ถือว่าเหมือนและแบบใดที่ถือว่า แตกต่างก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบ

3) การให้เหตุผลในการประเมิน เป็นการให้เหตุผลเมื่อเราต้องการตัดสินคุณค่าหรือความถูกต้องโดยอาศัยเหตุผลที่สมเหตุสมผลมาประกอบการพิจารณา

วิชัย เสวกงาม (2557, น. 209-214) ได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผล เป็น 5 ประเภท ดังนี้

1) การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เริ่มด้วยการอ้างถึงกฎโดยทั่วไป ไปยืนยันข้อสรุปที่เฉพาะเจาะจงถ้า กฎหรือข้อสรุปที่เป็นนัยโดยทั่วไปที่นำมาอ้างนั้นเป็นจริงแล้วข้อสรุปที่เกิดขึ้นต้องเป็นจริงด้วยและข้อสรุปนั้นต้องเป็นไปตามข้ออ้างอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

2) การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เริ่มด้วยการสังเกตที่มีความเฉพาะเจาะจงและจำกัดอยู่ในขอบเขตและวิธีการที่จะได้ข้อสรุปทั่ว ไปที่อาจเป็นไปได้แต่ไม่ใช่ว่าจะไม่เกิดข้อผิดพลาด ทั้งที่ขึ้นอยู่กับหลักฐานเชิงประจักษ์ที่มีอยู่อาจกล่าวได้ว่าเป็นการอ้างข้อเท็จจริงเฉพาะย่อย ๆ ไปสู่ข้อสรุปที่เป็นนัยทั่วไป

3) การให้เหตุผลเชิงอธิบาย (Abductive reasoning) เป็นการลงข้อสรุปที่กำหนดสภาพ การพิเศษในการพิจารณาเพื่อการอธิบายเป็นการให้เหตุผลที่พิจารณาข้ออ้างที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดในการได้มาซึ่งข้อสรุป หรือเป็นการคาดเดาเหตุการณ์อย่างมีหลักการที่เป็นการอธิบายข้อสรุปที่เกิดขึ้นซึ่งเป็นการพิจารณาถึงความน่าจะเป็นแต่ไม่ยืนยันว่าเป็นเหตุการณ์ที่ถูกต้อง

4) การให้เหตุผลเชิงอุปมา (Analogical reasoning) เป็นวิธีการประมวลผลข้อมูลที่เปรียบเทียบ ความคล้ายคลึงกันระหว่างมโนทัศน์ใหม่กับมโนทัศน์ที่เข้าใจแล้ว และใช้ความคล้ายคลึงกัน นั้นเพื่อให้เข้าใจมโนทัศน์ใหม่ ซึ่งถือเป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัย เพราะมุ่งที่จะทำ ความเข้าใจในสิ่งที่มีความเป็นไปได้ที่จะเป็นจริง มากกว่านิรนัยเพื่อพิสูจน์สิ่งที่เป็นจริงการให้เหตุผลเชิงอุปมานี้สามารถนำมาใช้เป็นวิธีการเรียนรู้ข้อมูลใหม่และเป็นส่วนหนึ่งของการอ้างเหตุผลที่ใช้อย่างแพร่หลาย

5) การให้เหตุผลเชิงจริยธรรม (Moral reasoning) เป็นกิจกรรมทางจิตสำนึกที่ประกอบด้วย การเปลี่ยนแปลงในการกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับผู้คนเพื่อให้สามารถเข้าถึงการตัดสินทางจริยธรรม เหตุผลเชิงจริยธรรม ช่วยในการตัดสินใจว่าควรทำหรือไม่ควรทำอะไรที่จะเป็นไปอย่างถูกต้องตามหลักคุณธรรมจริยธรรม

วรนุช หลวงจันทร์ (2564) ได้กล่าวถึงประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ประเภทของการให้เหตุผลมีอยู่หลากหลายมีทั้งที่เหมือนกันและแตกต่างกันไปตามเกณฑ์ที่ใช้ในการจำแนกแต่ประเภทของ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและพบเห็นค่อนข้างมาก คือ การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) ซึ่งเป็นการคิดจากข้อเท็จจริงย่อยโดยการสังเกตลักษณะร่วมที่สำคัญหรือแบบแผนของสิ่งที่พบเพื่อนำไปสู่กฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไปและการให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) ซึ่งเป็นการคิดจากกฎเกณฑ์หลักการเข้าถึงข้อสรุปทั่วไปสู่ข้อเท็จจริงย่อย

วารินทร์ จันทวงษ์ (2564) ได้กล่าวถึงประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การแบ่งประเภทของความสามารถในการให้เหตุผลขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ของการให้เหตุผลและการนำไปใช้ซึ่งที่กล่าวถึงส่วนใหญ่ก็จะเป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย

วรุฒ หล้าบือ (2565) ได้กล่าวถึงประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การแบ่งประเภทของสมรรถนะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ของการให้เหตุผลและการนำไปใช้ ซึ่งที่ที่กล่าวส่วนใหญ่ก็จะเป็น การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย

จากประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จะถูกแบ่งโดยขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการนำไปใช้ ซึ่งส่วนใหญ่จะแบ่งเป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย

2.4 แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์โดยมีแนวทางการพัฒนาที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสม ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงแนวทางการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

Lappan & Schram (1989, pp. 18-19) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นทักษะที่ต้องฝึกฝนจากประสบการณ์ที่หลากหลาย และควรส่งเสริมให้นักเรียนได้รับการฝึกอย่างต่อเนื่องโดยจัดบรรยากาศชั้นเรียนที่สนับสนุนให้นักเรียนมีการแลกเปลี่ยนความคิด ชี้แจงเหตุผลและแก้ปัญหาร่วมกัน ดังนั้น การพัฒนาทักษะในการคิดและการให้เหตุผล ควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและแสดงพฤติกรรมในการสืบค้น คาดการณ์ ค้นหาวิธีพิสูจน์ สังเกตแบบรูป ชี้แจงมโนทัศน์อย่างเป็นเหตุเป็นผลโดยการอธิบายแบบรูป และตอบคำถามต่างๆที่ก่อให้เกิดการคิด การสร้าง ข้อคาดการณ์และอธิบายให้เหตุผลเกี่ยวกบั สถานการณ์นั้น

NCTM (2010, p. 11) กล่าวว่าครูผู้สอนสามารถส่งเสริมการให้เหตุผลของนักเรียนผ่านการใช้ปัญหาที่เน้นการให้เหตุผลและการใช้คำถาม เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ที่จะคิดวิเคราะห์แนวทางในการแก้ปัญหา และให้เหตุผลเพื่อหาข้อสรุปที่ถูกต้องและสมเหตุสมผล ซึ่งแนวทางในการพัฒนาการให้เหตุผลในชั้นเรียนคณิตศาสตร์สามารถทำได้ดังนี้

1) ส่งเสริมให้ผู้เรียนแก้ปัญหาด้วยตัวเอง

2) ใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนอธิบายความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาด้วยภาษาและความเข้าใจของตัวผู้เรียนเอง

3) ให้เวลาแก่นักเรียนในการคิดวิเคราะห์ปัญหาและดำเนินการแก้ในหลาย ๆ วิธี

4) กระตุ้นนักเรียนโดยการถามเช่น สามารถแก้ปัญหานี้ได้อย่างไร ทำไมเราต้องใช้วิธีนี้ นักเรียนสามารถทราบคำ ตอบนี้ได้อย่างไรเมื่อนักเรียนเกิดความท้อแท้ควรหาวิธีที่เหมาะสมในการสร้างแรงจูงใจในการทำงาน

5) ให้เวลานักเรียนในการคิดตอบคำถามซึ่งจะเป็นการส่งเสริมการอธิบายมโนทัศน์โดยใช้ภาษาและความเข้าใจของตัวผู้เรียนเอง

6) ส่งเสริมให้มีการสื่อสารหรือให้เหตุผลในชั้นเรียนไม่ว่า จะเป็นครูกับนักเรียนหรือนักเรียนกับนักเรียนเอง

7) สร้างบรรยากาศในห้องเรียนให้เป็นห้องเรียนแห่งการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ เกิดการคิดอย่างมีเหตุผล มีการอภิปราย โต้แย้ง อธิบายเหตุผล เป็นต้น

Rowan & Morrow (1993, pp. 16-18) ได้กล่าวว่า นอกจากการเตรียมกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการฝึกทักษะและพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลแล้วการสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนก็เป็นสิ่งสำคัญมากครูต้องสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนให้นักเรียนเห็นว่า การให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าการได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งแนวทางในการสร้างบรรยากาศให้เหมาะกับการให้เหตุผล ครูผู้สอนต้องสนับสนุนและส่งเสริมให้นักเรียนกล้าแสดงความคิดเห็น พูดอธิบายเหตุผลและสรุปพร้อมยืนยันข้อ สรุปของมโนทัศน์นั้น ๆ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547, น. 18) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการให้เหตุผลว่า มีหลักการที่สำคัญดังนี้

1) ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น

2) การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้โดยสอดแทรกทุกหน่วยการเรียนรู้ตามความเหมาะสม

3) ระดับการให้เหตุผลควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน

4) การให้เหตุผลควรจัดให้ได้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอตั้งแต่วัยก่อนอนุบาลจนถึงระดับมหาวิทยาลัยซึ่งควรปลูกฝังให้เกิดเป็นนิสัย

5) ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล

6) ควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้ส่งเสริมการให้เหตุผล

อัมพร ม้าคะนอง (2554, น. 49) ได้กล่าวไว้ว่า การฝึกให้นักเรียนใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ควรทำในบริบททางคณิตศาสตร์เช่นเนื้อหา ในขณะทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์มากกว่าจะเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญหรือให้เรียนรู้การให้เหตุผลเดี่ยว ๆ แยกจากสิ่งอื่น อาจสอนโดยการเน้นความคิดรวบยอด หรือการแก้ปัญหา ซึ่งควรเน้นที่กระบวนการในการแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่การอธิบายเหตุผล

วรนุช หลวงจันทร์ (2564) ได้กล่าวถึงแนวทางการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ส่งเสริมและเปิดโอกาสในการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ให้นักเรียนได้อธิบายเหตุผลมโนทัศน์ของตนเองอย่างอิสระและยืนยันเหตุผลด้วยข้อเท็จจริง ในสถานการณ์ที่หลากหลายและสม่ำเสมอ สำหรับวิธีการสอนที่ช่วยส่งเสริมและพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นั้นอาจทำได้ด้วยวิธีการใช้คำถาม (Questioning) และการสืบสอบ (Inquiry Approach)

วารินทร์ จันทวงษ์ (2564) ได้กล่าวถึงแนวทางการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การพัฒนาทักษะการให้เหตุผลสามารถทำได้โดยการส่งเสริมให้นักเรียนได้แก้ปัญหาควบคู่กับการอธิบายเหตุผล และเน้นสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนให้เป็นสังคมแห่งการแลกเปลี่ยนเรียนรู้

วรุฒ หล้าบือ (2565) ได้กล่าวถึงแนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนที่สนับสนุนให้นักเรียนได้คิดและอธิบายมโนทัศน์ โดยให้เหตุผลยืนยันหรือคัดค้านมโนทัศน์นั้น ๆ อย่างสมเหตุสมผล รวมทั้งสร้างบรรยากาศในห้องเรียนให้เป็นห้องเรียนแห่งการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ มีการอภิปราย โต้แย้งและอธิบายเหตุผล

จากแนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ต้องฝึกฝนจากการแก้ปัญหาร่วมกับอธิบายเหตุผลจากสถานการณ์ปัญหาที่หลากหลาย ฝึกฝนอย่างต่อเนื่อง และจัดบรรยากาศในชั้นเรียนที่สนับสนุนนักเรียนมีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ให้เป็นสังคมแห่งการแลกเปลี่ยนเรียนรู้และมีการอภิปรายโต้แย้งพร้อมอธิบายเหตุผล

2.5 การวัดและประเมินผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์โดยมีแนวทางการวัดและประเมินผลที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสม ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงการวัดและประเมินผลทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

California state department of education (1989) ได้เสนอ เกณฑ์การให้คะแนนกรณีที่ข้อสอบเป็นแบบอัตนัยโดยแบ่งระดับคะแนนเป็น 6 ระดับ คือ 6 5 4 3 2 1 มีรายละเอียด ดังนี้

ระดับ 6 ตอบแบบชัดเจน (Exemplary response) โดยให้คำตอบสมบูรณ์ ชัดเจนมีเหตุมีผล ไม่คลุมเครือและอธิบายได้ดีเยี่ยม ซึ่งรวมถึงการใช้แผนผังประกอบการอธิบายชัดเจนอ่านง่าย สามารถสื่อสารได้อย่างมีประสิทธิภาพ แสดงความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เพื่อตอบคำถามจำแนกส่วนประกอบสำคัญทั้งหมดของปัญหายกตัวอย่างที่ใช่และไม่ใช่มีข้อมูลสนับสนุนชัดเจนและหนักแน่น

ระดับ 5 ตอบโดยมีข้อมูลเพียงพอ (Competent response) อธิบายชัดเจน มีเหตุมีผลและสมบูรณ์ ใช้แผนผังประกอบการอธิบายได้เหมาะสม สื่อสารได้อย่างมีประสิทธิภาพ แสดงความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เพื่อตอบคำถาม จำแนกส่วนประกอบที่สำคัญโดยส่วนใหญ่ของปัญหา มีข้อสนับสนุนเพียงพอ

ระดับ 4 ตอบโดยมีข้อบกพร่องเล็กน้อย แต่มีข้อมูลน่าสนใจ (Minor flaws but satisfactory) ตอบคำถามถูกต้อง ครบถ้วน แต่อธิบายสับสน ข้ออ้างหรือข้อสนับสนุนไม่สมบูรณ์ แผนผังประกอบการอธิบายไม่เหมาะสม หรือ ไม่ชัดเจน แสดงความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานในการตอบคำถาม ใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ระดับ 3 ตอบโดยมีข้อบกพร่องมากค่อนข้างพอใช้ (Serious laws but nearly satisfactory) เริ่มต้นในการตอบคำถามถูกต้องแต่ไม่ตอบคำถามบางคำถาม แสดงออกถึงความไม่เข้าใจ มโนทัศน์หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ คำนวณผิด นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ผิด แก้ปัญหาผิดวิธี

ระดับ 2 เริ่มต้นได้แค่แก้ปัญหาไม่ได้ (Begin but fails to complete problem) อธิบายไม่เข้าใจ ใช้แผนผังประกอบการอธิบายไม่ชัดเจน แสดงถึงการไม่เข้าใจคำถาม คำนวณผิด

ระดับ 1 ไม่สามารถเริ่มต้นแก้ปัญหาได้ (Unable to begin effectively) คำตอบไม่สอดคล้องกับคำถาม นำเสนอข้อมูลที่ ไม่เกี่ยวกับคำถามหรือไม่ตอบ

กรมวิชาการ (2546, น. 123) ได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนการทำข้อสอบแบบอัตนัยดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการทำข้อสอบแบบอัตนัย

คะแนน	ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผล
4	ดีมาก	มีการอ้างอิง เสนอมโนทัศน์ประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล
3	ดี	มีการอ้างอิงที่ถูกต้องบางส่วน และเสนอมโนทัศน์ประกอบการตัดสินใจ
2	พอใช้	เสนอมโนทัศน์ไม่สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ
1	ควรแก้ไข	มีความพยายามเสนอมโนทัศน์ประกอบการตัดสินใจ
0	ต้องปรับปรุง	ไม่มีมโนทัศน์ประกอบการตัดสินใจ

สสวท. (2547, น. 52) ได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คะแนน	ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
0	ไม่พยายาม	ไม่มีมโนทัศน์ประกอบการตัดสินใจ / มีมโนทัศน์ไม่ถูกต้อง
1	ต้องปรับปรุง	มีความพยายามเสนอมโนทัศน์ประกอบการตัดสินใจหรือมีข้อบกพร่องมากกว่า 2 แห่ง
2	พอใช้	เสนอแนวติดได้สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจแต่มีข้อบกพร่องมากกว่า 2 แห่ง
3	ดี	มีการอ้างอิงที่ถูกต้อง และเสนอมโนทัศน์ประกอบการตัดสินใจมีข้อบกพร่องเพียง 1 แห่ง
4	ดีมาก	มีการอ้างอิง เสนอมโนทัศน์การประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล

วรนารถ อยู่สุข (2555: 78) ได้สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตเป็นความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ คือ 1) การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ และ 2) ความสามารถในการอธิบายข้อสรุป โดยใช้ข้อมูลในการสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล ดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตด้านการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ และด้านความสามารถในการอธิบายข้อสรุป

1. ด้านการวิเคราะห์ข้อมูล	ระดับคะแนน
นักเรียนสามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงข้อมูลได้อย่างถูกต้อง และครบถ้วน	3
นักเรียนสามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงข้อมูลได้ถูกต้อง อย่างน้อยครึ่งหนึ่งของข้อมูลที่กำหนดให้วิเคราะห์ทั้งหมด แต่ยังขาดข้อมูลหรือยังไม่สมบูรณ์นัก	2
นักเรียนสามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงข้อมูลได้ถูกต้องบ้าง แต่ยังไม่ถึงครึ่งหนึ่งของข้อมูลที่กำหนดให้วิเคราะห์ทั้งหมด	1

นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงข้อมูลได้เลย	0
2. ด้านความสามารถในการอธิบายข้อสรุป	**ระดับคะแนน**
นักเรียนสามารถเขียนอธิบายสรุป โดยใช้ข้อมูลจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง และครบถ้วน	3
นักเรียนสามารถเขียนอธิบายสรุป โดยใช้ข้อมูลจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้องอย่างน้อยครึ่งหนึ่ง แต่ยังไม่สมบูรณ์	2
-นักเรียนสามารถเขียนอธิบายสรุป โดยใช้ข้อมูลจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ถูกต้องบ้าง แต่ยังไม่ถึงครึ่งหนึ่ง -นักเรียนสามารถเขียนอธิบายข้อสรุปได้ถูกต้องบ้าง แต่ยังไม่สามารถใช้ข้อมูลจากสถานการณ์ที่กำหนดในการอธิบายได้	1
นักเรียนไม่สามารถเขียนอธิบายข้อสรุปได้เลย	0

ธัญพิมล จันทร์นุ่ม (2558: 16-77) ได้สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์โดยพิจารณาองค์ประกอบ 2 ด้าน คือ 1) ด้านการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ และ 2) ด้านการแสดงข้อสรุปของข้อมูล ดังตาราง 4

ตาราง 4 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตด้านการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์และการแสดงข้อสรุปของข้อมูล

1. ความสามารถในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูล	**ระดับคะแนน**
วิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้อย่างถูกต้องและครบถ้วนทั้งหมด	3
วิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้อย่างถูกต้อง อย่างน้อยครึ่งหนึ่งของข้อมูลที่กำหนดให้	2
วิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้อย่างถูกต้องบ้าง แต่ยังไม่ถึงครึ่งหนึ่งของข้อมูลที่กำหนดให้	1
วิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนเลย	0
2. ความสามารถในการแสดงข้อสรุปของข้อมูล	**ระดับคะแนน**
เขียนอธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง และสมเหตุสมผล	3
เขียนอธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปได้ถูกต้อง อย่างน้อยครึ่งหนึ่ง และ	2

สมเหตุสมผลหรือ เขียนอธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง และไม่สมเหตุสมผลในบางกรณี	
เขียนอธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปได้ถูกต้องบ้าง แต่ยังไม่ถึงครึ่งหนึ่ง และสมเหตุสมผล หรือ เขียนแสดงข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง และไม่สมเหตุสมผลเลย	1
เขียนอธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปได้ถูกต้องบ้าง แต่ยังไม่ถึงครึ่งหนึ่ง และไม่สมเหตุสมผลเลย หรือ เขียนอธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปไม่ถูกต้อง และไม่สมเหตุสมผลเลย หรือ ไม่เขียนเลย	0

วรนุช หลวงจันทร์ (2564) ได้กล่าวถึงการวัดและประเมินผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ประกอบไปด้วย 3 องค์ประกอบ คือ การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล การหาข้อสรุปของปัญหา และการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาไว้ ดังนี้

ตาราง 5 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล

ระดับคุณภาพ	พฤติกรรม
ดี (2)	นักเรียนสามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และระบุความรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
พอใช้ (1)	นักเรียนสามารถระบุปัญหา เขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา หรือระบุความรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้ถูกต้องอย่างใดอย่างหนึ่ง
ปรับปรุง (0)	นักเรียนไม่สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา พร้อมทั้งไม่สามารถระบุความรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง

ตาราง 6 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการหาข้อสรุปของปัญหา

ระดับคุณภาพ	พฤติกรรม
ดี (2)	นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา สามารถบอกความรู้ทาง

	คณิตศาสตร์ที่ใช้ และสามารถหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
พอใช้ (1)	นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา สามารถบอกความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ หรือสามารถหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้องอย่างใดอย่างหนึ่ง
ปรับปรุง (0)	นักเรียนไม่สามารถใช้ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา ไม่สามารถบอกความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ และไม่สามารถหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง

ตาราง 7 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา

ระดับคุณภาพ	พฤติกรรม
ดี (2)	นักเรียนสามารถเขียนอธิบายเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องและชัดเจน
พอใช้ (1)	นักเรียนสามารถเขียนอธิบายเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องบางส่วน
ปรับปรุง (0)	นักเรียนไม่เขียนอธิบายสนับสนุนหรือไม่เขียนคัดค้านข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ หรือเขียนอธิบายข้อสรุปแต่ไม่ถูกต้อง

วารินทร์ (2564) ได้กล่าวถึงการวัดและประเมินผลทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า การวัดทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สามารถวัดได้จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยพิจารณาจากลักษณะพฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของวรนารถ อยู่สุข (2555: 78) และ ธัญพิมล จันทร์นุ่ม (2558: 76-77) ซึ่งมีองค์ประกอบ 2 ด้าน ดังนี้

1) ความสามารถในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูล เป็นความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูลจากโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ แล้วนำมาเขียนแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างถูกต้อง

2) ความสามารถในการอธิบายข้อสรุป เป็นความสามารถในการเขียนอธิบายและยืนยันข้อสรุป โดยใช้ข้อมูลสนับสนุนอย่างสมเหตุสมผล

จากการวัดและประเมินผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การวัดและประเมินผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยวัดความสามารถ 2 ด้าน ดังนี้

1) ด้านการหาข้อสรุปของปัญหา เป็นความสามารถในการวิเคราะห์ แสดงมโนทัศน์เกี่ยวกับการระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาเพื่อนำมาหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา

2) ด้านการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุป เป็นความสามารถในการยืนยันข้อสรุปโดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์และข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหามาประกอบการอธิบายความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

3. ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าความหมาย ความสำคัญ ประเภท แนวทางการพัฒนา และการวัดและประเมินผลทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งรายละเอียดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยมีหัวข้อที่น่าสนใจดังต่อไปนี้

3.1 ความหมายของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงความสามารถที่ใช้ในการแสดงมโนทัศน์ที่แตกต่างกันแล้วต่างฝ่ายต่างหาเหตุผลมาสนับสนุนมโนทัศน์ของตนเองและคัดค้านมโนทัศน์ของอีกฝ่าย ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน (2556) ได้อธิบายความหมายของคำว่า “อภิปราย” หมายถึง การพูดชี้แจงแสดงความคิดเห็น” มีการนำแนวทางการอภิปรายนี้ไปปรับใช้ ในการเรียนการสอน ซึ่งมีนักวิชาการหลายท่าน ได้ให้ความหมายของการนาการอภิปรายไปใช้ ใน ชั้นเรียนไว้ ดังนี้

ทิศนา แขมมณี (2553) ได้ให้ความหมายของ การอภิปรายในชั้นเรียน ว่าเป็นกระบวนการ ที่ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนพูดคุย แลกเปลี่ยนข้อมูล ความคิดเห็น และประสบการณ์ร่วมกัน ในประเด็นที่กำหนด เพื่อให้เกิดนักเรียนการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ที่ครูวางแผนไว้

ชนาธิป พรกุล (2554) ได้กล่าวสรุปความหมายของ การอภิปรายในชั้นเรียน ว่าเป็น การสนทนาแลกเปลี่ยนข้อมูลกันระหว่างครูกับนักเรียนหรือนักเรียนกับนักเรียน เพื่อให้เกิดปฏิสัมพันธ์ระหว่างกันในการแบ่งปันข้อมูล ในด้านความรู้ ความคิด ข้อคิดเห็น รวมถึงความรู้สึก โดยทุกคนสามารถมีส่วนร่วมในการเรียนรู้อย่างเท่าเทียมกัน

นิรัญชลา ทับพุ่ม (2564) ได้กล่าวถึงความหมายของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การโต้แย้งทางคณิตศาสตร์คือ การร่วมกันแสดงความคิดเห็น แลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเกี่ยวกับเรื่องใด

เรื่องหนึ่ง ซึ่งอาจนำไปสู่การหาข้อสรุปในการแก้ปัญหา ซึ่งเมื่อนำมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะเป็นวิธีการ ที่ทำให้นักเรียนได้รับความรู้และเกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และทำงานร่วมกับผู้อื่นได้เป็นอย่างดี

จากความหมายของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการสนับสนุน คัดค้าน หรือปรับปรุงข้อคาดการณ์ของข้อมูลเพื่อนำไปสู่การสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง โดยอาศัยหลักฐาน ได้แก่ ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า ร่วมกับการให้เหตุผล เพื่อเชื่อมข้อคาดการณ์ของข้อมูลและหลักฐานเข้าด้วยกัน

3.2 ความสำคัญของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญกับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากเป็นทักษะที่สนับสนุนให้นักเรียนแสดงมโนทัศน์ที่แตกต่างกันอย่างมีเหตุผลทำให้เข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

นิรัญชลา ทับพุ่ม (2564) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ครูจะนำเสนอปัญหาตัวอย่างเล็กน้อยตามด้วยการยกตัวอย่างวิธีแก้ปัญหา ซึ่งแต่ละขั้นตอนของการยกตัวอย่างจะมีการโต้ตอบสั้น ๆ ระหว่างครูกับนักเรียน (Stigler, & Hiebert, 1999) อย่างไรก็ตามในช่วง 20 ปีที่ผ่านมานักการศึกษาคณิตศาสตร์มีการสังเกตและวิเคราะห์จากการสนับสนุนให้ครูใช้การอภิปรายในชั้นเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จากการจัดการเรียนรู้โดยใช้การอภิปรายทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดประโยชน์ ดังนี้ (NCTM, 2013)

1) การอภิปรายสามารถส่งเสริมการเรียนรู้ของนักเรียน

วัฒนธรรมในห้องเรียนที่เกิดจากปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนและครู นักเรียนเกิดประสบการณ์การเรียนรู้จากงานที่นักเรียนได้ลงมือทำ และจากการมีส่วนร่วมในการเรียนของนักเรียน ซึ่งส่งผลต่อโอกาสทางการเรียนในห้องเรียน (Hiebert et al., 1997) เราเรียนรู้ผ่านปฏิสัมพันธ์ทางสังคม (Lave, & Wenger, 1991; Vygotsky, 1978) มุมมอง Vygotskian ตามที่ Gibbons (2006) พูดชี้ให้เห็นว่าการใช้ภาษาในการสื่อสารเป็นรากฐานของการเรียนรู้โดยเฉพาะการสื่อสารทางภาษาที่แสดงถึงการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ในระหว่างการเรียนการสอน เป็นการแสดงถึงปฏิสัมพันธ์กันระหว่างครูและนักเรียน ปฏิสัมพันธ์เหล่านี้ไม่เพียงกำหนดรูปแบบการพูดคุยของนักเรียน แต่ช่วยสร้างความเข้าใจให้กับนักเรียน (Gibbons, 2006) การอภิปรายสามารถเกิดขึ้น ในกลุ่มย่อย หรือทั้งชั้นเรียน เมื่อเรามองห้องเรียนเป็นชุมชนของนักเรียนต้องจำไว้ว่าการโต้ตอบระหว่างกันของนักเรียนเป็นสิ่งสำคัญที่จำเป็นสำหรับการสร้างความเข้าใจ (Hiebert et al., 1996)

2) การอภิปรายสามารถสร้างแรงจูงใจและกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

การสร้างแรงจูงใจและดึงดูดความสนใจของนักเรียน Middleton, & Jansen (2011) แนะนำว่าครูควรพยายามให้นักเรียนมีส่วนร่วมด้วยวิธีการต่างๆ ในการสร้างองค์ความรู้ร่วมกัน ให้ได้มากที่สุดและหลากหลายวิธี เปิดโอกาสให้นักเรียนตั้งคำถาม สร้างทางเลือกในความคิดเห็นหรือมโนทัศน์ ความคิดที่เป็นเพียงสมมติฐาน หรือแม้กระทั่งการเริ่มต้นแก้ปัญหาที่ผิด เพราะการทำแบบนี้ นักเรียนจะรู้สึกสบายใจและกล้าที่จะแสดงความคิดเห็นและมีส่วนร่วมในการสร้าง องค์ความรู้ร่วมกัน มองเห็นการพัฒนาความรู้ไปด้วยกัน ช่วยพัฒนาความสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนกับวิชาคณิตศาสตร์ และตัวนักเรียนกันคนอื่นๆ ในชั้นเรียนด้วย

3) การอภิปรายเป็นการสนับสนุนให้ครูทำความเข้าใจและประเมินความคิดของนักเรียน รูปแบบการโต้ตอบในชั้นเรียนบางอย่างส่งเสริมให้การคิดทางคณิตศาสตร์สูงกว่า การสอนในรูปแบบอื่นๆ (Herbel-Eisenmann, & Breyfogle, 2005 Martens, 1999) และการตั้งคำถามที่มาจากการคิดของนักเรียนสามารถสร้างความรู้ที่มีคุณค่าแก่ครูเกี่ยวกับการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Martino, & Maher, 1999) หลักการสอนของ NCTM (2000) เริ่มต้นขึ้นด้วยคำกล่าวดังต่อไปนี้ “การสอนคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพต้องเข้าใจสิ่งที่นักเรียนรู้และจำเป็นต้องเรียนรู้จากนั้นก็ท้าทายและสนับสนุนให้พวกเขาเรียนรู้ได้ดี ” การอภิปรายเป็นกลยุทธ์ ที่สามารถสนับสนุนให้ครูทำความเข้าใจกับสิ่งที่นักเรียนรู้อยู่แล้วและช่วยกำหนดสิ่งที่นักเรียนต้องเรียนรู้ ในส่วนของการฟังมโนทัศน์ของนักเรียนในการอภิปรายสามารถใช้เป็นการประเมินเกี่ยวกับการสอนของตนเอง ครูจำเป็นต้องพัฒนาตนเองมากกว่าการสอนแบบผิวเผินที่เป็นการวิเคราะห์งานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ “ถูกหรือผิด” โดยเน้นที่วิธีการคิดของนักเรียนในการทำงานทางคณิตศาสตร์มากกว่าการมุ่งเน้นไปที่ความเข้าใจผิดหรือข้อผิดพลาดเพียงอย่างเดียว ครูควรพยายามระบุข้อมูลเชิงลึกที่มีค่าของนักเรียน ซึ่งสามารถที่จะนำไปพัฒนาต่อได้ เน้นงานทางคณิตศาสตร์ ที่เน้นการใช้เหตุผลและการคิดเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ครูทำหน้าที่เก็บข้อมูลเพื่อประเมินนักเรียนอย่างต่อเนื่อง รวมถึงแนะนำนักเรียนไปสู่ความเข้าใจ จนได้รับความรู้ใหม่ และสนับสนุนการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

4) การอภิปรายสามารถเปลี่ยนจากห้องเรียนที่มีครูเป็นจุดศูนย์กลางกลายเป็นห้องเรียนที่นักเรียนมีส่วนร่วมในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ เมื่อครูกำหนดรูปแบบของสื่อสารโดยผ่านการอภิปรายที่มีประสิทธิภาพ จะเปลี่ยนจุดศูนย์กลางจากเดิม คือ ครูหรือหนังสือเรียนไปเป็นชุมชนแห่งการเรียนรู้ของนักเรียน (Webel, 2010) อย่างไรก็ตามเพื่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงลักษณะนี้ นักเรียนต้องตระหนักและสนใจที่จะเปลี่ยนบทบาทจากบทบาทเดิมของนักเรียนที่เป็นผู้อ่านหรือผู้ฟังเพียงอย่างเดียว โดยเฉพาะอย่างยิ่งสาหรับการอภิปรายเพื่อให้เกิดประสิทธิผล นักเรียนต้องแลกเปลี่ยนความคิดเห็นร่วมกันในชั้นเรียน นักเรียนต้องแลกเปลี่ยนมโนทัศน์ระหว่างกัน เพื่ออธิบายและให้เหตุผลเกี่ยวกับวิธีการของตนเอง และต้องตระหนักว่า การเรียนรู้ หมายถึง การเรียนรู้จากผู้อื่น

ใช้ประโยชน์จากความคิดของผู้อื่น รับฟังคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาของเพื่อนร่วมชั้น (Hiebert et al., 1997) เพื่อให้กลายเป็นผู้ที่มีส่วนร่วมในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องตั้งใจที่จะแลกเปลี่ยนและรับฟังกันและกันอย่างกระตือรือร้น (NCTM, 2013)

จากความสำคัญของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การโต้แย้งทางคณิตศาสตร์จะทำให้นักเรียนได้สังเกตเห็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในมโนทัศน์ของตัวเอง จากนั้นจึงปรับปรุงแก้ไขมโนทัศน์เดิมให้ถูกต้องตามมโนทัศน์ที่ถูกต้องทางคณิตศาสตร์ หรือนักเรียนที่ไม่มีความเข้าใจในมโนทัศน์นั้นจะสามารถเรียนรู้จากการโต้แย้งของเพื่อนร่วมชั้นเรียน

3.3 องค์ประกอบของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่มีการจำแนกองค์ประกอบได้หลายรูปแบบ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงองค์ประกอบของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

CBE (2018) กล่าวว่า การอภิปรายทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนมีส่วนร่วม ในการพูดคุยเกี่ยวกับการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ นักเรียนแลกเปลี่ยนผ่านการสนทนา ที่หลากหลายความคิดทั้งเห็นด้วย ไม่เห็นด้วย คาดเดา และปรับเปลี่ยนความคิดของตนเองเมื่อเกิดความเข้าใจในการเรียนคณิตศาสตร์ร่วมกัน

Toulmin (2003) ได้กำหนดรูปแบบของการโต้แย้งเพื่ออธิบายและวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ มีทั้งแบบภาษาเพื่ออธิบายการโต้แย้งและวิธีการจัดโครงสร้างองค์ประกอบของข้อโต้แย้ง ซึ่งประกอบด้วย การเรียกร้อง (ความจริงที่กำลังถูกกำหนด) ข้อมูล (ข้อเท็จจริงจากของสิ่งที่เป็นไปตามการเรียกร้อง) และการรับประกัน (เหตุผลสำหรับการใช้ข้อมูลเพื่อสร้าง การอ้างสิทธิ์) ซึ่งหากพิจารณาแล้วจะเห็นว่า องค์ประกอบตามรูปแบบของ Toulmin นั้นต้องมีสถานการณ์ที่กำหนดขึ้นเพื่อให้นักเรียนได้เผชิญปัญหา โดยมีข้อเท็จจริงเป็นข้อประกอบการพิจารณาและการรับประกันนั้นต้องขึ้นอยู่กับการมีข้อมูลมาสนับสนุนที่น่าเชื่อถือเพื่อให้เกิด การยอมรับตามข้อกล่าวอ้างนั้น

Lin, & Mintzes (2010) สำหรับนำมาใช้จัดการเรียนการสอนวิทยาศาสตร์ในห้องเรียนว่าประกอบไปด้วย ข้อกล่าวอ้าง (Claim) เหตุผลสนับสนุนข้อกล่าวอ้าง (Warrant) หลักฐานสนับสนุนเหตุผล (Evidence) ข้อกล่าวอ้างที่ต่างออกไป (Counter claim) และการโต้แย้งกลับ (Rebuttal) ซึ่งแต่ละองค์ประกอบ มีรายละเอียด ดังนี้ 1) ข้อกล่าวอ้าง (Claim) เป็นการนำเสนอผลที่ได้จากการศึกษา ค้นคว้า ทดลองหรือเป็นการนำเสนอความคิดเห็นของตนเองต่อประเด็นซึ่งกำลังเป็นที่พิจารณา 2) เหตุผลสนับสนุนข้อกล่าวอ้าง (Warrant) เป็นการใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ได้จากการศึกษา ค้นคว้า ทดลองกับข้อกล่าวอ้าง เพื่อสนับสนุนให้ข้อกล่าวอ้าง ที่นำเสนอมีความน่าเชื่อถือ ซึ่งเหตุผลสนับสนุนข้อกล่าวอ้างนี้อาจได้รับการโต้แย้งหรือคัดค้าน จากผู้อื่นก็ได้ 3) หลักฐานสนับสนุนเหตุผล (Evidence) เป็นการนำเสนอข้อเท็จจริงหรือข้อมูล เพื่อ

ประกอบการอธิบายเหตุผลที่ใช้สนับสนุนข้อกล่าวอ้าง เพื่อทำให้ข้อกล่าวอ้างนั้นเป็นที่ยอมรับ โดยหลักฐานนั้นอาจได้มาจากการสังเกตปรากฏการณ์ต่างๆ โดยใช้ประสาทสัมผัสทั้ง 5 ซึ่งข้อเท็จจริงหรือข้อมูลที่เป็นไปได้ เช่น สี กลิ่น รูปร่าง สถานะ เป็นต้น รวมถึงข้อเท็จจริงหรือข้อมูลที่ได้จากการศึกษางานวิจัยหรือการทดลองอื่นที่มีผู้เก็บรวบรวมไว้แล้ว ทั้งนี้หลักฐานสนับสนุนเหตุผลจะต้องมาจากแหล่งข้อมูลที่มีความน่าเชื่อถือ หรือสามารถทำการทดลองซ้ำแล้วให้ผลเช่นเดียวกับผลที่นำเสนอได้ 4) ข้อกล่าวอ้างที่ต่างออกไป (Counter claim) เป็นข้อโต้แย้งที่เกิดขึ้นจากการให้เหตุผลต่อข้อกล่าวอ้างที่มีผู้นำเสนอไว้ในตอนแรกซึ่งแตกต่างไปจากเดิม กล่าวคือ เป็นการให้เหตุผลต่อ ข้อกล่าวอ้าง จากมุมมองใหม่ๆ ที่ผู้นำเสนอข้อกล่าวอ้างไม่ได้กล่าวถึงหรือไม่นำมาพิจารณาไว้ในการนำเสนอ ข้อกล่าวอ้างในตอนแรก ทำให้ข้อกล่าวอ้างเดิมมีความน่าเชื่อถือน้อยลง เป็นกระบวนการที่นำมาใช้เพื่อหาทางขจัดข้อผิดพลาดของข้อกล่าวอ้างที่ได้สร้างขึ้นไว้ในตอนแรก 5) การโต้แย้งกลับ (Rebuttal) เป็นการโต้แย้งเพื่อทำให้ข้อกล่าวอ้างที่ต่างออกไปจากข้อกล่าวอ้างเดิมมี ความน่าเชื่อถือลดลงและตกไปในที่สุด โดยการหาพยานหลักฐานและการให้เหตุผลที่มีความน่าเชื่อถือมากกว่า มาสนับสนุน

นิรัญชลา ทับพุ่ม (2564) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงวิธีคิดแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างกันในเรื่องของวิธีการหาคำตอบที่หลากหลายในการแก้โจทย์ปัญหาตามความคิดของแต่ละคน ได้พูดคุย แสดงความคิดเห็นทั้งเห็นด้วยและไม่เห็นด้วยของมโนทัศน์ที่นำเสนอ การตั้งคำถาม การตรวจสอบวิธีคิดของผู้อื่น การโต้แย้งโดยใช้เหตุผล ใช้ภาษาในการอธิบายมโนทัศน์จากความเข้าใจของตนเอง วิเคราะห์ และวิจารณ์เกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทั้งที่มีมโนทัศน์ที่เหมือนและแตกต่างจากของตนเอง การอภิปรายต้องอาศัยทักษะกระบวนการที่ทางคณิตศาสตร์ซึ่งกระบวนการนี้เป็นส่วนสำคัญที่จะพัฒนาความเข้าใจของนักเรียน เมื่อนักเรียนถูกท้าทายให้คิดและหาเหตุผลเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และนำมาแลกเปลี่ยนกันนักเรียนจะต้องกลั่นกรองความคิดเรียบเรียงให้เป็นเหตุผลรวมถึงการเลือกใช้คำพูดหรือภาษาที่เหมาะสมเพื่ออธิบายความคิดของตนเอง นักเรียนต้องมี ความมั่นใจในการแสงคิดเห็นและอภิปรายร่วมกัน เนื่องจากการโต้แย้ง มักจะมีความคิดเห็นต่างกัน นักเรียนต้องมีอิสระในการอภิปราย โดยมีข้อมูลสนับสนุนที่น่าเชื่อถือ นักเรียนมีความสามารถในการสร้าง สนับสนุน คัดค้านหรือปรับปรุงข้อคาดการณ์ของข้อมูลเพื่อนำ ไปสู่การสร้างองค์ความรู้ที่ได้รับการยอมรับ โดยอาศัยหลักฐาน ซึ่งได้แก่ ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า ร่วมกับการให้เหตุผล เพื่อเชื่อมข้อคาดการณ์ของข้อมูลและหลักฐานเข้าด้วยกัน โดยประยุกต์แนวคิดของ Lin, & Mintzes (2010) ที่ได้เสนอองค์ประกอบ ของการโต้แย้งทางวิทยาศาสตร์ข้างต้น มาใช้ในการวิจัยครั้งนี้ โดยกำหนดเป็น 4 องค์ประกอบ การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ คือ 1) การสร้างข้อคาดการณ์และการให้เหตุผลสนับสนุนข้อมูล 2) การให้หลักฐานสนับสนุนข้อมูล 3) การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป 4) การให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ

จากองค์ประกอบของการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การโต้แย้งทางคณิตศาสตร์จะแบ่งองค์ประกอบเป็น 4 องค์ประกอบ ได้แก่ 1) การสร้างข้อคาดการณ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 2) การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 3) การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป และ 4) การให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ

3.4 แนวทางการพัฒนาการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์โดยมีแนวทางการพัฒนาที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสม ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงแนวทางการพัฒนาทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

นิรัญชลา ทับพุ่ม (2564) ได้กล่าวถึงแนวทางการพัฒนาทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ว่า Anderson, Chapin, & O'Connor (2009) ได้ระบุแนวปฏิบัติการสอน 5 ขั้นที่สำคัญ ในการจัดการเรียนรู้ของครูเพื่อส่งเสริมการอภิปรายในห้องเรียนคณิตศาสตร์ ได้แก่

1) การพูดที่ทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

2) การตั้งคำถามอย่างมีศิลปะ

3) การใช้มโนทัศน์ของนักเรียนมาสร้างประเด็นในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

4) การจัดสภาพแวดล้อมของห้องเรียนให้สนับสนุนการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

5) การจัดระเบียบลาดับประเด็นในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

Chapin, O'Connor, & Anderson (2011) ได้ให้เหตุผล 5 ข้อที่จะทำให้การพูดของครูส่งผลต่อการจัดการเรียนรู้ของนักเรียน ดังนี้

1) การพูดทำให้รู้ความเข้าใจที่ถูกต้องและความเข้าใจที่ผิดพลาดของนักเรียน

2) การพูดเป็นการส่งเสริมการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพช่วยในการเพิ่มความจำที่คงทนให้กับนักเรียน

3) การพูดเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนใช้เหตุผลในการอธิบายความเข้าใจเพิ่มมากขึ้น

4) การพูดเป็นการสนับสนุนให้นักเรียนได้พัฒนาทางด้านการใช้ภาษา

5) การพูดเป็นการสนับสนุนพัฒนาทักษะทางด้านสังคม

Kersaint (2015) เสนอวิธีการที่ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งครูสามารถจัดระเบียบและจัดโครงสร้างสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ เพื่อเพิ่มการมีส่วนร่วมและสนับสนุนการเรียนรู้ การจัดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพจะช่วยสนับสนุนให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

1) การช่วยสนับสนุนให้นักเรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นและพึ่งพาคนอื่น เช่น การที่นักเรียนได้เห็นครูถามคำถามเพื่อนก่อนที่จะถามตนเอง จะเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนขอความช่วยเหลือจากเพื่อนก่อนที่ครูจะถามตนเอง และครูสามารถแนะนำนักเรียนที่มีความเข้าใจเป็นอย่างดีเกี่ยวกับปัญหา

มโนทัศน์หรือขั้นตอนวิธีการหาคำตอบให้นักเรียนคนอื่นๆ เพื่อที่นักเรียนจะสามารถไปปรึกษาก่อนที่จะมาปรึกษาครูได้

2) ให้นักเรียนทำงานอย่างอิสระก่อนที่จะแบ่งเป็นกลุ่มเล็กหรือกลุ่มใหญ่ นักเรียนต้องการเวลารวบรวมความคิดและเขียนสิ่งที่ตนเองทราบหรือไม่ทราบก่อนที่ตนเองจะได้รับแรงจูงใจทางความคิดจากนักเรียนคนอื่นๆ แล้วนักเรียนจะสามารถเปรียบเทียบแนวทางและวิธีแก้ปัญหาของตนเองกับแนวทางที่เพื่อนเสนอแนะในระหว่างการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

3) ใช้คำถามอย่างมีกลยุทธ์เพื่อให้นักเรียนมีส่วนร่วมในวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ ครูส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ได้โดยการตั้งคำถามที่กระตุ้นให้เกิดการอภิปรายทางคณิตศาสตร์และการโต้แย้ง เป็นกลยุทธ์ทางการพูด และคำถามที่ต้องการให้นักเรียนเข้ามามีส่วนร่วมในกระบวนการเรียนรู้ อธิบาย ปรับความคิดของนักเรียน และทำความเข้าใจให้ลึกซึ้งยิ่งขึ้นของกระบวนการเรียนรู้

4) เล็งเห็นความสำคัญของข้อผิดพลาดในการเรียนรู้และทำความเข้าใจ ดังนี้

4.1) ตระหนักว่านักเรียนอาจมีการทำผิดพลาดได้เพราะนักเรียนค้นหาความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งอาจมีการใช้การคาดเดาในการหาคำตอบ

4.2) เตือนนักเรียนอยู่เสมอว่าความผิดพลาดเป็นเรื่องธรรมชาติและอาจเป็นสิ่งที่ดีเพราะจะนำนักเรียนไปสู่การเรียนรู้ที่ดีขึ้น

4.3) ช่วยให้นักเรียนรับรู้สิ่งที่เรียนรู้โดยการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดและระบุความเข้าใจผิด เพื่อนำไปแก้ไขให้ถูกต้องต่อไป

4.4) กระตุ้นให้นักเรียนถามคำถามเพื่อชี้แนะแนวทางและวิจารณ์เหตุผลของเพื่อนในกลุ่มและกำหนดแนวทางแก้ไขที่ถูกต้อง

4.5) การส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจถึงข้อสรุปของความรู้โดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเองโดยไม่ต้องอาศัยคำสั่งของครู

5) ใช้กลยุทธ์การเรียนรู้ร่วมกัน เมื่อนักเรียนทำงานกับเพื่อนเป็นคู่หรือกลุ่มเล็กๆ นักเรียนจะสามารถสร้างความมั่นใจในระดับเล็กๆ ก่อนที่จะนำเสนอวิธีแก้ปัญหาในระดับชั้นเรียน ประกอบด้วย

5.1) ร่วมกันแลกเปลี่ยนความคิด แนวทางนี้สามารถใช้ในสถานการณ์การเรียนการสอนที่หลากหลายครูจะให้เวลานักเรียนคิดอย่างอิสระ แล้วให้จับคู่กันเพื่อแลกเปลี่ยนความคิด จากนั้นครูจะเรียกรวมเพื่อกลับมาอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียนอีกครั้ง

5.2) กำหนดหมายเลข เมื่อนักเรียนทำงานเป็นกลุ่ม 3-4 คนแต่ละคนสามารถกำหนดหมายเลขได้นักเรียนรู้ว่าสมาชิกคนใดคนหนึ่งในกลุ่มอาจถูกครูเรียกให้ตอบคาถาม ดังนั้น ทุกคน จึงต้องมีความเข้าใจที่ตรงกัน

6) ใช้วิธีการจัดการเรียนรู้ที่สร้างสรรค์ที่ให้นักเรียนทุกคนได้มีส่วนร่วมในการอภิปราย ในชั้นเรียน ครูสามารถใช้วิธีการต่างๆ ในการรวบรวมข้อมูลจากการทำงานของนักเรียนในชั้นเรียนที่ช่วยให้นักเรียนสามารถประเมินความเข้าใจของตนเองและภายในกลุ่มได้ ดังนี้

6.1) พอใจ/ไม่พอใจ ครูตั้งคำถามหรือปัญหาที่มีคำตอบไม่เหมือนกัน (ใช่, ไม่ใช่, จริง, เท็จ) และให้นักเรียนตอบโดยใช้นิ้วหัวแม่มือขึ้นเพื่อแสดงตัวเลือกหนึ่งตัวเลือกและยกนิ้วลง เพื่อแสดงถึงอีกตัวเลือกหนึ่ง

6.2) ตอบตามแท่งไม้ ครูเขียนชื่อนักเรียนแต่ละคนบนไม้ไอศกรีมหรือสิ่งของที่มีลักษณะคล้ายกันวางไม้ในภาชนะแล้วครูสุ่มเลือกนักเรียนโดยเลือกไม้

6.3) กำหนดระบบช่องทางการตอบคำถามในชั้นเรียนหรือใช้เครื่องมือดิจิตอลอื่นๆ เข้ามาช่วย ครูสามารถใช้ระบบช่องทางการตอบคำถามในชั้นเรียนเพื่อรวบรวมคำติชมจากนักเรียนได้ทันที โดยขอให้นักเรียนตอบในเว็บไซต์โดยใช้การคลิกเว็บไซต์หรือข้อความและจะแสดงผลลัพธ์เป็นแผนภูมิหรือกราฟ

จากวิธีการที่กล่าวมาข้างต้น จะทำให้ครูมีแนวทางในการจัดการเรียนรู้ ทราบความเข้าใจของนักเรียน ตรวจสอบ และประเมินความเข้าใจ รวมถึงทราบถึงพัฒนาการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ดีขึ้น และนักเรียนสามารถสะท้อนความเข้าใจของตนเองในขณะที่ทำความเข้าใจและวิพากษ์วิจารณ์ความคิดของผู้อื่นในสภาพแวดล้อมที่สนับสนุนการเรียนรู้ร่วมกันภายใน ชั้นเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (Gladis Kersaint, 2015)

จากแนวทางการพัฒนาทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การโต้แย้งทางคณิตศาสตร์สามารถพัฒนาได้จากการส่งเสริมให้นักเรียนแสดงความเข้าใจของตนเองและอภิปรายร่วมกับการแสดงความเข้าใจของนักเรียนคนอื่น เพื่อให้นักเรียนตรวจสอบความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของตนเองและประเมินความเข้าใจจนเกิดการปรับปรุงแก้ไขมโนทัศน์ให้ถูกต้องตามมโนทัศน์ที่แท้จริงของคณิตศาสตร์

3.5 การวัดและประเมินผลการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะและกระบวนทางคณิตศาสตร์โดยมีแนวทางการวัดและประเมินผลที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสม ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงการวัดและประเมินผลทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

นิรัญชลา ทับพุ่ม (2564) ได้กล่าวถึงการวัดและประเมินผลทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ว่า สามารถวัดและประเมินผลทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ด้วย ผู้วิจัยได้สร้างแบบสังเกต การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยประยุกต์จากแนวคิดของ Lin, & Mintzes, (2010) มาสร้างเกณฑ์รูบริค เพื่อวิเคราะห์ทักษะการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนี้

ตาราง 8 แสดงเกณฑ์การให้ระดับความสามารถในการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ทักษะการโต้แย้ง	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
การสร้างข้อคาดการณ์และการให้เหตุผลสนับสนุนข้อมูล	4	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ของข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้ และสามารถให้เหตุผลหรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบการอธิบายของข้อมูล เพื่อแสดงว่าเหตุใดข้อมูลถึงเป็นจริงได้อย่างชัดเจน ครบถ้วน
	3	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ของข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้ และสามารถให้เหตุผลหรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบการอธิบายของข้อมูลไม่ครบถ้วน
	2	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ของข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้ แต่ไม่สามารถให้เหตุผลหรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบการอธิบายของข้อมูลได้
	1	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ของข้อมูลไม่ตรงกับสถานการณ์ปัญหา ไม่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ของข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อมูล	4	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนให้ข้อมูลมีความน่าเชื่อถือได้ครบถ้วนทุกประเด็น
	3	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนให้ข้อมูลมีความน่าเชื่อถือได้เป็นส่วนใหญ่
	2	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนให้ข้อมูลมีความน่าเชื่อถือได้เป็นบางส่วน
	1	ไม่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี

ทักษะการโต้แย้ง	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
		นิยาม หรือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนให้ข้อมูลมีความน่าเชื่อถือได้
การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป	4	สามารถให้เหตุผล หรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากข้อมูลของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน
	3	สามารถให้เหตุผล หรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากข้อมูลของอีกฝ่ายได้เป็นส่วนใหญ่
	2	สามารถให้เหตุผล หรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากข้อมูลของอีกฝ่ายได้เป็นบางส่วน
	1	ไม่สามารถให้เหตุผล หรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากข้อมูลของอีกฝ่ายได้
การให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	4	สามารถให้เหตุผล มโนทัศน์ หรือหลักฐานทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนการโต้แย้งได้ชัดเจนครบถ้วน ทุกประเด็น
	3	สามารถให้เหตุผล มโนทัศน์ หรือหลักฐานทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนการโต้แย้งได้เป็นส่วนใหญ่
	2	สามารถให้เหตุผล มโนทัศน์ หรือหลักฐานทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนการโต้แย้งได้เป็นบางส่วน
	1	ไม่สามารถให้เหตุผล มโนทัศน์ หรือหลักฐานทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนการโต้แย้งได้

Lin, & Mintzes (2010) ได้เสนอองค์ประกอบของการโต้แย้งสำหรับนำมาใช้ในการจัด การเรียนการสอนวิทยาศาสตร์ในห้องเรียน ซึ่งประกอบไปด้วย ข้อกล่าวอ้าง (Claim) เหตุผลสนับสนุนข้อกล่าวอ้าง (Warrant) หลักฐานสนับสนุนเหตุผล (Evidence) ข้อกล่าวอ้างที่ต่างออกไป (Counter claim) และการโต้แย้งกลับ (Rebuttal) ซึ่งแต่ละองค์ประกอบมีรายละเอียด ดังนี้

1. ข้อกล่าวอ้าง (Claim) เป็นการนำเสนอผลที่ได้จากการศึกษา ค้นคว้า ทดลองหรือเป็นการนำเสนอความคิดเห็นของตนเองต่อประเด็นซึ่งกำลังเป็นที่พิจารณา

2. เหตุผลสนับสนุนข้อกล่าวอ้าง (Warrant) เป็นการใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ได้จากการศึกษา ค้นคว้า ทดลองกับข้อกล่าวอ้าง เพื่อสนับสนุนให้ข้อกล่าวอ้างที่

นำเสนอมีความน่าเชื่อถือ ซึ่งเหตุผลสนับสนุนข้อกล่าวอ้างนี้อาจได้รับการโต้แย้งหรือคัดค้านจากผู้อื่นได้

3. หลักฐานสนับสนุนเหตุผล (Evidence) เป็นการนำเสนอข้อเท็จจริงหรือข้อมูลเพื่อประกอบการอธิบายเหตุผลที่ใช้สนับสนุนข้อกล่าวอ้าง เพื่อทำให้ข้อกล่าวอ้างนั้นเป็นที่ยอมรับ โดยหลักฐานนั้นอาจได้มาจากการสังเกตปรากฏการณ์ต่างๆ โดยใช้ประสาทสัมผัสทั้ง 5 ซึ่งข้อเท็จจริงหรือข้อมูลที่เป็นไปได้ เช่น สี กลิ่น รูปร่าง สถานะ เป็นต้น รวมถึงข้อเท็จจริงหรือข้อมูลที่ได้จากการศึกษางานวิจัยหรือการทดลองอื่นที่มีผู้เก็บรวบรวมไว้แล้ว ทั้งนี้หลักฐานสนับสนุนเหตุผลจะต้องมาจากแหล่งข้อมูลที่มีความน่าเชื่อถือ หรือสามารถทำการทดลองซ้ำแล้วให้ผลเช่นเดียวกับที่นำเสนอได้

4. ข้อกล่าวอ้างที่ต่างออกไป (Counter claim) เป็นข้อโต้แย้งที่เกิดขึ้นจากการให้เหตุผลต่อข้อกล่าวอ้างที่มีผู้นำเสนอไว้ในตอนแรกซึ่งแตกต่างไปจากเดิม กล่าวคือเป็นการให้เหตุผลต่อ ข้อกล่าวอ้างจากมุมมองใหม่ๆ ที่ผู้นำเสนอข้อกล่าวอ้างไม่ได้กล่าวถึง หรือไม่ได้นำมาพิจารณาไว้ ในการนำเสนอข้อกล่าวอ้างในตอนแรก ทำให้ข้อกล่าวอ้างเดิมมีความน่าเชื่อถือน้อยลง เป็นกระบวนการที่นำมาใช้เพื่อหาทางขจัดข้อผิดพลาดของข้อกล่าวอ้างที่ได้สร้างขึ้นไว้ในตอนแรก

5. การโต้แย้งกลับ (Rebuttal) เป็นการโต้แย้งเพื่อทำให้ข้อกล่าวอ้างที่ต่างออกไปจากข้อกล่าวอ้างเดิมมีความน่าเชื่อถือลดลงและตกไปในที่สุด โดยการหาพยานหลักฐานและการให้เหตุผลที่มีความน่าเชื่อถือมากกว่ามาสนับสนุน

จากการวัดและประเมินผลการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การวัดและประเมินผลการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจาก 4 องค์ประกอบ ดังนี้

1) การสร้างข้อคาดการณ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การระบุข้อคาดการณ์หรือขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากปัญหาที่ได้รับ

2) การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้มีความน่าเชื่อถือ

3) การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป หมายถึง การสร้างข้อคาดการณ์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายจากสถานการณ์ปัญหาที่ได้รับ

4) การให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ หมายถึง การให้เหตุผล มโนทัศน์ หรือหลักฐานทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลง

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ และทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ทั้งภายในประเทศและต่างประเทศ ผู้วิจัยจะนำเสนอการศึกษาตามลำดับ ดังนี้

4.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องภายในประเทศ

กัญชลิตา เจริญผล (2566) ได้ศึกษาการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง รูปสามเหลี่ยม โดยการจัดการเรียนรู้แบบการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยการวิจัยในครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง รูปสามเหลี่ยม ผู้เข้าร่วมวิจัยในครั้งนี้มีจำนวน 16 คน เป็นนักเรียนของโรงเรียนขยายโอกาสแห่งหนึ่งในจังหวัดกำแพงเพชร ใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน จำนวน 4 วงจรปฏิบัติการ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ 1) แผนการจัดการเรียนรู้ 2) แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 3) ใบกิจกรรม 4) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และ 5) แบบสังเกตความสามารถการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ข้อมูลโดยการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา และตรวจสอบข้อมูลแบบสามเส้า ผลการวิจัยพบว่า ในระหว่างกิจกรรมการเรียนรู้ครูควรกำหนดสถานการณ์ปัญหาที่กระตุ้นให้เกิดการคาดเดาที่หลากหลายและครูควรใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคาดเดา ให้เหตุผล และสรุป นอกจากนี้ครูควรสร้างบรรยากาศการเรียนรู้เชิงบวก ซึ่งจะช่วยส่งเสริมให้เกิดการโต้แย้งในชั้นเรียนส่งผลให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น เมื่อได้รับการจัดการเรียนรู้แบบการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เรื่อง รูปสามเหลี่ยม ตามวงจรปฏิบัติการที่ 1 2 3 และ 4 ตามลำดับ

กิติโรจน์ ปัณฑรนนทกะ และคณะ (2563) ได้ศึกษาการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนตามแนวคิดกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์และการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น โดยการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อพัฒนาและศึกษาประสิทธิผลของรูปแบบการเรียนการสอนตามแนวคิดกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์และการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสายปัญญารังสิต จังหวัดปทุมธานีจำนวน 2 ห้องเรียน แบ่งเป็นห้องทดลอง 1 ห้อง และห้องควบคุม 1 ห้อง เครื่องมือที่ใช้คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์วิเคราะห์

ข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที ผลการวิจัย พบว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นการเชื่อมโยงสถานการณ์ในชีวิตจริงกับโลกคณิตศาสตร์ ขั้นการออกแบบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ให้เป็นทางการและขั้นการสะท้อนคิดสู่ชีวิตจริง และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของ กลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีการเปลี่ยนแปลงของพฤติกรรมที่สัมพันธ์กับการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในทิศทางที่ดีขึ้น

จุฑามาส โจชัยชาญ และ วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล (2562) ได้ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่มีต่อทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อศึกษาทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 2) เพื่อเปรียบเทียบทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ที่ระดับนัยสำคัญ .05 กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนจ่านกร้อง จังหวัดพิษณุโลก ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 27 คน ที่ได้มาด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ 1) แผนการจัดการเรียนรู้ 2) แบบวัดทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ ร้อยละ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าทดสอบที ผลการวิจัย พบว่า 1) ทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างเรียนของนักเรียนเพิ่มขึ้นทั้ง 3 ด้าน 2) ทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

ชรินรัตน์ ด้วงธรรม (2564) ได้ศึกษาการพัฒนาความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ ด้วยการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่พัฒนาความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ และเพื่อศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่มีต่อความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้เข้าร่วมวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 37 คน ของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดเพชรบูรณ์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 ผู้วิจัยใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการ จำนวน 3 วงจรปฏิบัติการ โดยใช้ระยะเวลาทั้งหมด 14 ชั่วโมง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น จำนวน 3 แผน ใบกิจกรรม แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และ

แบบทดสอบวัดความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ของนักเรียน วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหา และตรวจสอบข้อมูลแบบสามเส้า ผลการวิจัยพบว่า 1. แนวทางการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น มีขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ 5 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง ขั้นตอนที่ 2 ขั้นจัด ให้อยู่ในรูปแบบตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และขั้นตอนที่ 5 ขั้นแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กลับเป็นปัญหาในชีวิตจริง มีประเด็นที่ควรเน้น ได้แก่ การใช้สถานการณ์ปัญหาที่น่าสนใจเกี่ยวข้องกับชีวิตจริงใกล้ตัวหรือมีประโยชน์ต่อนักเรียน การใช้คำถามนำเข้าสู่สถานการณ์ปัญหาและคำถามกระตุ้นคิดเพื่อนำสู่การอภิปรายร่วมกัน การทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหาในสถานการณ์ชีวิตจริง การให้คำแนะนำอย่างทันท่วงทีเมื่อนักเรียนติดปัญหาหรือมีข้อสงสัยในการทำกิจกรรมกลุ่มในห้องย่อย (Breakout Room) และการเตรียมความพร้อมของสื่อและโปรแกรมสำหรับการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ 2. นักเรียนมีพัฒนาการของความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ทั้ง 3 กระบวนการ โดยนักเรียนมีพัฒนาการการคิด/แปลงสถานการณ์ของปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์มากที่สุด รองลงมาคือ การใช้หลักการและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา และการตีความและประเมินผลลัพธ์ตามลำดับ

ณัชพล เผ่าทิพย์จันทร์ (2560) ได้ศึกษาผลของการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่สมบูรณ์ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่สมบูรณ์ระหว่างก่อนเรียนกับหลังเรียน 2) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่สมบูรณ์กับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบบปกติ และ 3) ศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่สมบูรณ์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนตะกั่วป่า “เสนานุกูล” ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 เป็นนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมอย่างละ 35 คนเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และใบกิจกรรมวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณโดยหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพโดยวิเคราะห์เชิงเนื้อหา ซึ่งผลการวิจัยพบว่า1) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่

สมบูรณ์มีความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่สมบูรณ์มีความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 3) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่สมบูรณ์มีพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น

ทรงยศ สกุลยา (2562) ได้ศึกษาการวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และเพื่อศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้เข้าร่วมวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 44 คน ของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 ผู้วิจัยใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการ จำนวน 3 วงจรปฏิบัติการ โดยใช้ระยะเวลาทั้งหมด 10 ชั่วโมง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จำนวน 3 แผน ใบสถานการณ์ ใบกิจกรรม แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และแบบทดสอบวัดความสามารถใน การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ของนักเรียน วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหา และตรวจสอบข้อมูลแบบสามเส้า มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้ ผลการวิจัยพบว่า 1. แนวทางการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มีขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ 5 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง มีประเด็นที่ควรเน้น ได้แก่ การออกแบบสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียน การทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหาในสถานการณ์ชีวิตจริง การทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาในบริบทที่มีอยู่ในชีวิตจริงก่อน แล้วจึงมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ การประยุกต์ใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่สร้างสรรค์ การกระตุ้นให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกันอย่างสม่ำเสมอ และการสะท้อนผลหลังการจัดการเรียนรู้ 2. นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์อยู่ในระดับ มาก เมื่อพิจารณาความสามารถรายด้าน พบว่า นักเรียนส่วน

ใหญ่มีความสามารถในการค้นพบความจริง การค้นพบปัญหา การค้นพบวิธีการแก้ปัญหาและอยู่ในระดับมาก สำหรับความสามารถในการค้นพบมโนทัศน์และการสร้างสรรค์ความรู้อยู่ในระดับปานกลาง

ธชินี ไสยรส, สมควร สีชมภู, และ ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (2562) ได้ศึกษาการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปี ที่ 4 จำนวน 15 คน ภาคเรียนที่ 1 ปี การศึกษา 2561 โรงเรียนคูคำพิทยาสรรพ์ จังหวัดขอนแก่น จัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดภายใต้กระบวนการศึกษาชั้นเรียนตามแนวคิดของ Inprasitha (2011) เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องรูปสามเหลี่ยม จำนวน 5 แผน ใบกิจกรรม กล้องวีดีทัศน์และเครื่องบันทึกเสียง วิเคราะห์ข้อมูลโดยการวิเคราะห์โพรโตคอลการแก้ปัญหาของนักเรียนและการสะท้อนผลของทีมวิจัย โดยใช้กรอบการอภิปรายโต้แย้งของ CCSS (2010) ผลการวิจัยพบว่านักเรียนสามารถสร้างการอภิปรายโต้แย้งและวิจารณ์เหตุผลของผู้อื่นได้ ใช้สมมติฐาน / ความรู้ ที่มีก่อนหน้านี้ในการสร้างข้อโต้แย้ง สามารถสร้างการคาดเดาและสร้างข้อสนับสนุนของข้อกล่าวอ้างเพื่อสำรวจความจริงของการคาดคะเนของตนเอง ชี้แจงข้อสรุปของตนเองสื่อสารกับคนอื่น ๆ และตอบข้อโต้แย้งของผู้อื่นได้

ธนวิทย์ วรโพธิ์ และ นิศากร บุญเสนา (2566) ได้ศึกษาการโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่มีการใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อวิเคราะห์โครงสร้างการโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่มีการใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดซึ่งเป็นประโยชน์ในการส่งเสริมการโต้แย้งในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ส่งผลในทางบวกต่อการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอำนวยความสะดวกในการสร้างความรู้และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ ผู้วิจัยใช้การวิจัยเชิงคุณภาพ โดยกลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 16 คน จากโรงเรียนคูคำพิทยาสรรพ์ เครื่องมือในการเก็บรวมรวมข้อมูล คือ แบบสำรวจการโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ โพโตคอล วีดิทัศน์จากการสังเกตชั้นเรียน และใบกิจกรรมของวิเคราะห์ข้อมูลตามกรอบแนวคิดของ Inprasitha (2014). และกรอบแนวคิด การโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Knipping (2008) ผลการศึกษาการโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่มีการใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด หน่วยการเรียนรู้เรื่อง วงกลม จำนวน 5 แผนการจัดการเรียนรู้ นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์การโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Knipping (2008) ตามการศึกษาชั้นเรียน 3 ขั้นตอน ผลการวิจัยพบว่า 1.การร่วมมือกันออกแบบบทเรียนวิจัย (Plan) การร่วมกันวางแผนเป็นการร่วมมือกันระหว่างนักวิจัย ผู้ประสานงานโรงเรียน ผู้ช่วยวิจัย และครูผู้ที่ทำการสอน มุ่งเน้นไป

ที่การเสนอข้อโต้แย้งของนักเรียนหรือการคาดเดา จะพบว่ามีแนวคิดการโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ไม่ได้คาดการณ์ที่สามารถนำไปใช้พัฒนาการของการโต้แย้ง 2.การร่วมมือกันสังเกตบทเรียนวิจัย (Do) ในขั้นตอนนี้ครูจะนำแผนการสอนไปใช้จริงในชั้นเรียนโดยวิธีการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหาด้วยตนเอง พบประเด็นการโต้แย้งของนักเรียนที่แตกต่างกันทั้งประเด็นและเหตุผลที่หลากหลาย แสดงให้เห็นว่าการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเองก่อให้เกิดประเด็นการโต้แย้งของนักเรียนที่หลากหลาย 3.การร่วมมือกันอภิปรายและสะท้อนผลบทเรียนวิจัย (See) จะสะท้อนเกี่ยวกับผลที่ได้จากการสังเกตการณ์สอนเพื่อนำไปสู่การปรับปรุงแผนการสอน พบว่าทั้ง 19 ประเด็นการโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์มีโครงสร้างที่แตกต่าง

นิรัญชลา ทับพุ่ม (2564) ได้ศึกษาการส่งเสริมทักษะการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิด เรื่อง ความคล้าย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยวิธีการแบบเปิดที่ส่งเสริมทักษะการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และ 2) ส่งเสริมทักษะการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง ความคล้าย โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิด กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียน จำนวน 36 คน ในโรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่แห่งหนึ่งในจังหวัดลพบุรี ผู้วิจัยใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน 3 วงจรปฏิบัติการ เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย ได้แก่ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิด แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และแบบสังเกตการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ มี 4 องค์ประกอบ คือ 1) การสร้างข้อคาดการณ์และการให้เหตุผลสนับสนุนข้อมูล 2) การให้หลักฐานสนับสนุนข้อมูล 3) การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป และ 4) การให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ โดยใช้การวิเคราะห์เนื้อหา ผลการวิจัยพบว่า แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิดเพื่อส่งเสริมทักษะการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์มีประเด็นที่ควรเน้น คือ ครูต้องใช้สถานการณ์ปัญหาที่มีวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ต้องใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และต้องสร้างบรรยากาศให้นักเรียนคิดและกล้าแสดงออก ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบเปิดทำให้นักเรียนพัฒนาทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 องค์ประกอบย่อย โดยเรียงลำดับการพัฒนาจากมากไปน้อยได้ดังนี้ การสร้างข้อคาดการณ์และการให้เหตุผลสนับสนุนข้อมูล คิดเป็นร้อยละ 85.19 รองลงมา คือ การให้หลักฐานสนับสนุนข้อมูล และการให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปเท่ากัน คิดเป็นร้อยละ 78.70 และการให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ คิดเป็นร้อยละ 75 ตามลำดับ

วารินทร์ จันทวงษ์ (2564) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้เชิงรุกร่วมกับงานทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล เรื่อง การสร้างทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลการจัดการเรียนรู้เชิงรุกร่วมกับงานทางคณิตศาสตร์

เรื่อง การสร้างทางเรขาคณิต ที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยกลุ่มเป้าหมายของการวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนขยายโอกาสแห่งหนึ่งในจังหวัดพิษณุโลก ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 จำนวน 20 คน และใช้รูปแบบวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรม และแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จะใช้การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงเนื้อหา ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการให้เหตุผลทั้ง 2 ด้าน ได้แก่ ความสามารถในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลและความสามารถในการอธิบายข้อสรุปจัดอยู่ในระดับดี

วรนุช หลวงจันทร์ (2564) ได้ศึกษาการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง ร้อยละและอัตราส่วน สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวทางและผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ร้อยละและอัตราส่วน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ผู้เข้าร่วมวิจัย คือ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 17 คน ของโรงเรียนประถมขนาดกลางในจังหวัดเพชรบูรณ์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 ใช้รูปแบบการวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน จำนวน 3 วงจร เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรม แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และแบบทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหาและการวิเคราะห์แบบแยกประเด็นผลการวิจัย พบว่า แนวทางการเรียนรู้ที่เน้นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 6 ขั้นได้แก่ 1) ระบุปัญหา 2) สร้างสมมติฐานและระบุตัวแปร 3) ลงมือดำเนินการตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 4) วิเคราะห์และประเมินผลลัพธ์ 5) ทำซ้ำ และ 6) ใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ มีประเด็นที่ควรเน้น ได้แก่ ครูควรใช้สถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริงของนักเรียน ทำให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น จากนั้น ครูควรยกตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย แล้วให้นักเรียนลงมือสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของตนเองให้เหมาะสมกับการแก้ปัญหา รวมถึงครูควรใช้คำถามกระตุ้นในแต่ละขั้นตอนเพื่อให้นักเรียนสามารถทำกิจกรรมได้อย่างต่อเนื่อง สำหรับผลการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถพัฒนาการหาข้อสรุปของปัญหาได้ดีที่สุด รองลงมา คือ การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา ตามลำดับ

4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในต่างประเทศ

Chen and Wang (2016) มุ่งเป้าไปที่การศึกษาว่าผ่านการสนทนานิเวศวิทยาของมโนทัศน์ของแต่ละบุคคลไม่เสถียร และอำนวยความสะดวกในการเปลี่ยนแปลงมโนทัศน์และบรรลุการเรียนรู้มโนทัศน์ต่อไปได้อย่างไร ต่อมาโดยใช้แบบจำลองที่เสนอโดย Toulmin นักวิจัยได้วิเคราะห์การแสดงโต้ตอบของนักเรียนทั้งสามในการอภิปรายข้อมูลที่รวบรวมในการวิจัยนี้รวมถึงแผนงานและการถอด

เสียงบันทึกวิดีโอของการเรียนรู้ของนักเรียน ผลการวิจัยเปิดเผยว่า 1) การสอนไม่ได้เป็นเพียงวิธีการแจ้งหรือแสดงให้เห็นถึงการใช้ความรู้แก่นักเรียนเท่านั้น ครูต้องสนับสนุนให้นักเรียนสร้างความหมายผ่านการไต่ตรองและการหักเงินด้วยตนเอง การใช้เหตุผลและการสื่อสาร 2) โดยไม่สมดุลย์กับมโนทัศน์ทางนิเวศวิทยาของนักเรียนเท่านั้น พวกเขาจะปรับเปลี่ยนโครงสร้างมโนทัศน์ปัจจุบันของพวกเขา นอกจากนี้การประถมนิเทศการสาธิตของนักเรียนยังรวมถึงประสบการณ์ที่ใช้งานง่ายและตัวอย่างการโต้แย้ง การโต้แย้งทฤษฎีรูปแบบ ดังนั้น นอกเหนือจากการเตรียมคำถามโต้แย้งที่เหมาะสมสำหรับนักเรียนแล้วครูควรสนับสนุนให้นักเรียนคิดและสร้างบรรยากาศการโต้เถียง ซึ่งสามารถยกระดับความสำคัญของการเรียนรู้ในชั้นเรียนได้

Nugroho, Mulyono, and Hidayah (2020) ทำการศึกษาเพื่อกำหนดคุณภาพของการเรียนรู้ด้วยการเรียนรู้การค้นพบด้วยกลยุทธ์ฐานการตรวจสอบต่อความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน การวิจัยนี้ใช้วิธีการวิจัยแบบผสมผสานกับการออกแบบวิธีการวิจัยแบบพร้อมกันซึ่งผสมผสานการใช้วิธีการวิจัยเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพพร้อมกันหรือร่วมกัน แต่วิธีการถ่วงน้ำหนักที่แตกต่างกัน เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษานี้ในรูปแบบของการทดสอบเครื่องมือและการสัมภาษณ์ การวิเคราะห์ข้อมูลรวมถึงการลดข้อมูล การนำเสนอข้อมูล สรุปผล และความถูกต้องของข้อมูล ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นการวัดในการศึกษานี้จำกัดเฉพาะโดเมนที่เป็นการสื่อสาร กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ การเป็นตัวแทน การให้เหตุผล และการโต้แย้ง การวางแผนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาโดยใช้เครื่องมือเชิงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ตัวชี้วัดในการวัดความสามารถของตนเองได้แก่ ขนาด ความแข็งแรง ลักษณะทั่วไป ผลการวิจัยพบว่า : (1) การเรียนรู้การค้นพบด้วยกลยุทธ์ฐานการตรวจสอบที่มีคุณภาพดีในการวางแผน การดำเนินการ และการประเมินการเรียนรู้ (2) นักเรียนในกลุ่มความสามารถของตนเองต่ำไม่สามารถบรรลุตัวบ่งชี้ที่ดีของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การสื่อสาร กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ การเป็นตัวแทน การวางแผนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาและการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ การใช้เหตุผลและการโต้แย้ง และการใช้ภาษาสัญลักษณ์ เป็นทางการ และภาษาทางเทคนิค (3) นักเรียนที่มีความสามารถของตนเองปานกลางสามารถบรรลุตัวบ่งชี้ที่ดีของการสื่อสาร กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ การเป็นตัวแทน การวางแผนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาและการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลและการโต้แย้ง แต่ก็ยังมีข้อผิดพลาดในการใช้ภาษาสัญลักษณ์ เป็นทางการ และภาษาทางเทคนิค (4) นักเรียนที่มีความสามารถของตนเองสูงสามารถบรรลุตัวบ่งชี้ที่ดีของการสื่อสาร กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ การเป็นตัวแทน การวางแผนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาและการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลและการโต้แย้ง

Susanta, Sumardi, and Susanto (2022) ศึกษาเกี่ยวกับ ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นความสามารถที่สำคัญสำหรับนักเรียนในอินโดนีเซียในการเผชิญกับการดำเนินการประเมิน

ความสามารถขั้นต่ำและการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่ออธิบายทักษะความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับวัสดุรูปแบบในบริบทท้องถิ่นของเบงกูลู การศึกษานี้ใช้การออกแบบเชิงคุณภาพเชิงพรรณนา หัวข้อวิจัยคือนักเรียนเกรด 8 จำนวน 30 คน จากโรงเรียน 5 แห่งในเมืองเบงกูลู การเลือกด้วยเทคนิคการเลือกแบบเจาะจงตามระดับสติปัญญา โดยมีจำนวนโรงเรียนละ 6 คน รวบรวมข้อมูลโดยการสัมภาษณ์และการทดสอบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์โดยใช้คำถามคำอธิบายที่ผ่านการตรวจสอบและทดสอบแล้ว การวิเคราะห์ข้อมูลประกอบด้วย การลดข้อมูล การนำเสนอข้อมูล และการสรุปผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่มีความรู้น้อยถึงปานกลางมีแนวโน้มที่จะมีทักษะความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับ 2 ในทางตรงกันข้าม นักเรียนกลุ่มความรู้สูงมีทักษะความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับ 3 นักเรียนหลายคนใช้การโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ แต่ไม่ได้ใช้มโนทัศน์อย่างถูกต้อง นักเรียนยังไม่ได้ใช้แบบจำลองเชิงโครงสร้างในขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง ซึ่งส่งผลให้เกิดความผิดพลาดในการแก้ปัญหาและการเป็นตัวแทน จากนี้ ครูจำเป็นต้องเน้นมโนทัศน์ของวัสดุและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการเรียนรู้

Hermawan et al. (2019) ศึกษาเกี่ยวกับ ทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งซึ่งเป็นหนึ่งในพื้นฐานความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการรู้เท่าทันทางคณิตศาสตร์ ความสามารถนี้สามารถสอนให้กับนักเรียนผ่านการสอนคณิตศาสตร์ มันเกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดเชิงตรรกะและลึกซึ้งผ่านกระบวนการที่เชื่อมโยงองค์ประกอบของปัญหาเพื่อสรุป โดยมีวัตถุประสงค์เพื่ออธิบายวิธีการสนับสนุนการให้เหตุผลและการโต้แย้งของนักเรียนผ่านปัญหาความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับฟังก์ชันและความสัมพันธ์ การวิจัยดำเนินการผ่านการสังเกตชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นในหัวข้อฟังก์ชันและความสัมพันธ์ด้วยวิธีการทางวิทยาศาสตร์ และการมอบหมายการแก้ปัญหาความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ผ่านแผ่นงานของนักเรียน จากนั้นข้อมูลจะถูกวิเคราะห์โดยเชิงพรรณนาเชิงคุณภาพเพื่ออธิบายกระบวนการสอนและการใช้เหตุผลและการโต้แย้งของนักเรียน ข้อมูลของการวิจัยนี้บ่งชี้ว่าปัญหาความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอผ่านแนวทางทางวิทยาศาสตร์ การเรียนรู้เชิงค้นพบ และการเรียนรู้ตามปัญหาสามารถสนับสนุนการให้เหตุผลและการโต้แย้งของนักเรียนในหัวข้อฟังก์ชันและความสัมพันธ์ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

การวิจัย เรื่อง การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. รูปแบบการวิจัย
2. ผู้เข้าร่วมวิจัย
3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล

รูปแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน (Classroom Action Research) ตามแนวคิดของ Kemmis and McTaggart (2000 อ้างอิงใน สิรินภา กิจเกื้อกูล, 2557, น. 149-151) ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ใน 1 วงจร ได้แก่ ขั้นวางแผน (Plan) ขั้นปฏิบัติการ (Act) ขั้นสังเกตการณ์ (Observe) และขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect) โดยมีลักษณะทำซ้ำเป็นวงจรปฏิบัติการทั้งหมด 3 วงจร ตามแผนการจัดการเรียนรู้ โดยผู้วิจัยจะนำผลที่ได้จากการจัดการเรียนรู้ในแต่ละวงจรปฏิบัติการมาสะท้อนผล เพื่อวางแผนการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการถัดไป จนครบจำนวนวงจรที่กำหนด โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

1. สำรวจสภาพปัญหาในการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ควรได้รับการแก้ไข โดยผู้วิจัยได้สังเกตความสามารถในการเรียนรู้ของนักเรียนและปรึกษากับครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่สอนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยทำการวิเคราะห์ถึงปัญหาและสาเหตุของปัญหาร่วมกัน

2. ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2561) ผลการประเมิน PISA และเอกสารที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ และเพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาในชั้นเรียน

3. ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

4. วางแผนและสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จำนวน 3 แผน แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

5. เตรียมการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ได้แก่ จัดเตรียมสื่อการเรียนรู้และเครื่องมือวัดและประเมินผลการเรียนรู้

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติการ (Act)

ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยผู้วิจัยจะดำเนินการในวงจรปฏิบัติการ วงจรละหนึ่งแผนการจัดการเรียนรู้ จนครบทั้ง 3 แผนการจัดการเรียนรู้ หรือ 3 วงจรปฏิบัติการ

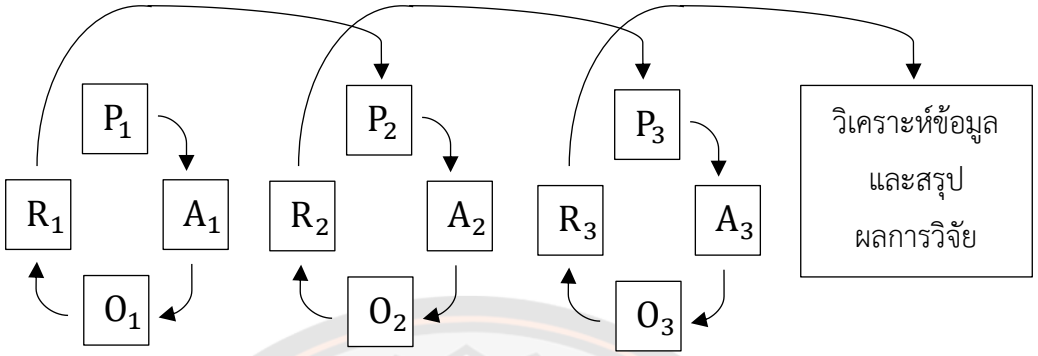
ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ (Observe)

ระหว่างการจัดการเรียนรู้ผู้วิจัยใช้การบันทึกวีดิทัศน์ระหว่างการจัดการเรียนรู้เพื่อประกอบการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และมอบหมายให้นักเรียนทำใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ เพื่อสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งของนักเรียน แล้วหลังการจัดการเรียนรู้ ผู้วิจัยทำการบันทึกผลการจัดการเรียนรู้ลงในแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เมื่อทำครบทุกแผนการจัดการเรียนรู้แล้วนักเรียนจะได้ประเมินทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ด้วยการทำแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เพื่อวัดและประเมินทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และวีดิทัศน์ที่บันทึกระหว่างการจัดการเรียนรู้ มาวิเคราะห์ถึงปัญหาและอุปสรรคที่เกิดขึ้นระหว่างการดำเนินการจัดการเรียนรู้ และนำผลจากการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ให้อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระได้สะท้อนผล เพื่อนำไปปรับปรุงและพัฒนาการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการต่อไปให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยผู้วิจัยจะดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และวิเคราะห์ผลเพื่อนำไปปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้เป็นแบบวงจร โดยการทำซ้ำจนครบทั้ง 3 แผนการจัดการเรียนรู้ หรือ 3 วงจรปฏิบัติการ หลังจากจัดการเรียนรู้ครบทั้งหมดแล้ว ผู้วิจัยจะนำผลที่ได้จากการเก็บรวบรวม

ข้อมูลทั้งหมดไปทำการวิเคราะห์ข้อมูลและสรุปผลการวิจัยในลำดับต่อไป โดยมีลักษณะของการดำเนินการเป็นวงจรปฏิบัติการ ดังภาพ 3



ภาพ 3 แสดงวงจรของการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน

ผู้เข้าร่วมวิจัย

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ - คณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566 จำนวน 33 คน ซึ่งเป็นนักเรียนที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค30206) เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ดังตาราง 9

ตาราง 9 แสดงจุดมุ่งหมายของการวิจัยและเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ที่	จุดมุ่งหมายของการวิจัย	เครื่องมือที่ใช้
1	เพื่อศึกษาแนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์	- แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ - แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้
2	เพื่อศึกษาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์	- ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ - แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ - แบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทาง

1. เพื่อศึกษาแนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยมีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1.1 แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ ใช้เวลาทั้งหมด 8 ชั่วโมง โดยมีขั้นตอนการพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

1.1.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) และหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของโรงเรียนโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตรเกี่ยวกับผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล วิธีการสอน / กิจกรรม และเอกสารที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

1.1.2 ศึกษาเนื้อหาเรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จากหนังสือเรียน เอกสารประกอบการสอน และเว็บไซต์ที่เกี่ยวข้อง

1.1.3 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และหลักการที่เกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำไปสร้างแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

1.1.4 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสร้างแผนการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

1.1.5 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ ใช้เวลาทั้งหมด 8 ชั่วโมง ดังตาราง 10

ตาราง 10 แสดงวงจร แผนการจัดการเรียนรู้ เนื้อหา สถานการณ์ปัญหา และจำนวนชั่วโมง

วงจรที่	แผนการจัดการเรียนรู้ที่	เนื้อหา	สถานการณ์ปัญหา	จำนวนชั่วโมง
1	1	การเคลื่อนที่แนวตรง	ความเร็วของเคลื่อนที่แนวตรง	2

วงจรที่	แผนการจัดการเรียนรู้ที่	เนื้อหา	สถานการณ์ปัญหา	จำนวนชั่วโมง
			ความเร่งการของเคลื่อนที่แนวตรง	
2	2	ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์	3
3	3	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด	ลดหรือเพิ่มเติมกำไร ล้อมรั้วตามงบประมาณ กล่องกระดาษฐานผืนผ้า	3
		รวม		**8**

แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์แต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีรายละเอียด ดังต่อไปนี้

1) ผลการเรียนรู้

2) จุดประสงค์การเรียนรู้

3) สาระสำคัญ

4) สาระการเรียนรู้

5) กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

6) สื่อและแหล่งการเรียนรู้

8) การวัดและประเมินผล

9) แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ (สำหรับผู้วิจัย)

1.1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ประกอบด้วย

ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน

ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน

ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน จำนวน 1 ท่าน

เพื่อพิจารณาและประเมินความเหมาะสมขององค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 5 ด้าน ดังนี้

1) ด้านจุดประสงค์การเรียนรู้

2) ด้านด้านสาระสำคัญ

3) ด้านกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

4) ด้านสื่อและแหล่งการเรียนรู้

5) ด้านการวัดและประเมินผล

โดยผู้วิจัยใช้แบบประเมินความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้แบบมาตราส่วนประมาณค่า 5 ระดับ (Rating Scale) ตามแบบของลิเคิร์ท (Likert) ให้ผู้เชี่ยวชาญลงความเห็นในแบบประเมิน มีเกณฑ์การให้คะแนนความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

เหมาะสมมากที่สุด ให้คะแนน 5 คะแนน

เหมาะสมมาก ให้คะแนน 4 คะแนน

เหมาะสมปานกลาง ให้คะแนน 3 คะแนน

เหมาะสมน้อย ให้คะแนน 2 คะแนน

เหมาะสมน้อยที่สุด ให้คะแนน 1 คะแนน

หลังจากนั้นนำผลการประเมินความเหมาะสมของแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มาคำนวณค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในแต่ละรายการ แล้วนำไปเทียบเกณฑ์การแปลความหมาย ดังนี้

ค่าเฉลี่ย 4.50 – 5.00 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้เหมาะสมมากที่สุด

ค่าเฉลี่ย 3.50 – 4.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้เหมาะสมมาก

ค่าเฉลี่ย 2.50 – 3.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้เหมาะปานกลาง

ค่าเฉลี่ย 1.50 – 2.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้เหมาะสมน้อย

ค่าเฉลี่ย 1.00 – 1.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้เหมาะสมน้อยที่สุด

เกณฑ์การตัดสินผลการประเมิน คือ ใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยไม่ต่ำกว่า 3.50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่เกิน 1.00 ถือว่าแผนการจัดการเรียนรู้มีความเหมาะสม โดยผลการประเมินความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ผลการประเมิน พบว่า ความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้อยู่ในระดับมากที่สุด โดยมีค่าเฉลี่ย 4.79 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.36

1.1.7 ปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ตามข้อแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ ดังนี้

1) การโต้แย้งในกิจกรรมไม่ชัดเจน

2) ข้อคาดการณ์ในแผนอาจมีได้มากกว่า 1 แบบ

1.1.8 สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ฉบับสมบูรณ์ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้ว เพื่อนำไปใช้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้กับนักเรียนต่อไป

1.2 แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ผู้วิจัยจะบันทึกประเด็นปัญหา ข้อดี และข้อเสนอแนะที่ควรปรับปรุงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้วิจัยแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำข้อมูลมาปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้วิจัยในวงจรปฏิบัติการถัดไปโดยมีขั้นตอนการสร้างแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

1.2.1 กำหนดขอบเขตการบันทึกการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

1.2.2 สร้างแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้โดยมีลักษณะเป็นแบบเขียนบันทึกประเด็นตามขั้นตอนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

ขั้นที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

1.2.3 แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ สะท้อนผลโดยครูชำนาญการพิเศษ วิชาคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ในขณะที่ผู้วิจัยทำการสอนทุกครั้ง

นอกจากนี้ ในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยมีการใช้ วีดิทัศน์บันทึกการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อเป็นข้อมูลเพิ่มเติมในกรณีที่การสังเกต และการสะท้อนผลของผู้วิจัยไม่ครบถ้วน

2 เพื่อศึกษาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยมีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

2.1 ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ ผู้วิจัยสร้างใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้เพื่อใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนเขียนบันทึกเป็นรายบุคคลทุกครั้งที่มีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งข้อคำถามในแต่ละใบกิจกรรมจะส่งเสริมให้นักเรียนได้แสดงการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยมีลักษณะของการบันทึกเป็นการเขียนตอบแบบอิสระ ซึ่งแต่ละใบกิจกรรมมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

2.1.1 ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสร้างใบกิจกรรม

2.1.2 ศึกษากรอบโครงสร้างการประเมินทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

2.1.3 ศึกษาลักษณะและขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

2.1.4 ศึกษาเนื้อหารายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

2.1.5 กำหนดขอบข่ายของการบันทึกข้อมูลของนักเรียน

2.1.6 สร้างใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ และทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

2.1.7 นำใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบและปรับปรุงใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ตามคำแนะนำของอาจารย์ปรึกษาและผู้เชี่ยวชาญเพื่อนำไปใช้ประกอบการจัดการเรียนรู้

2.1.8 จัดทำใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ของนักเรียนฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้กับนักเรียนต่อไป ดังตาราง 11

ตาราง 11 แสดงเกณฑ์ทักษะการให้เหตุผลของใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้

ทักษะการให้เหตุผล	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	3	สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
	2	สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถระบุปัญหาและระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุปัญหาได้อย่างถูกต้อง
	1	สามารถระบุปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุปัญหาและระบุมโนทัศน์ทาง

ทักษะการให้เหตุผล	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
		คณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
	0	ไม่สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	3	สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
	2	สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องและอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล แต่ไม่มีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แต่ไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
	1	สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่มีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
	0	ไม่สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง

2.2 แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้ ได้แก่ ครูประจำการ จะร่วมสังเกตนักเรียนขณะทำกิจกรรมการเรียนรู้เป็นรายกลุ่ม เพื่อสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้ง 4 องค์ประกอบ ได้แก่ การสร้างข้อคาดการณ์หรือขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การให้หลักฐานสนับสนุน การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป และการให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ โดยมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

2.2.1 ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบสังเกต

2.2.2 ศึกษาตำราเรียนและเอกสารที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหารายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ เพื่อออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้และสถานการณ์ปัญหาให้นักเรียนแสดงพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

2.2.3 สร้างแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ โดยเน้นให้นักเรียนแสดงพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ใน 4 องค์ประกอบ ได้แก่ การสร้างข้อคาดการณ์หรือขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การให้หลักฐานสนับสนุน การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป และการให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ

2.2.4 นำแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบและปรับปรุงแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ตามคำแนะนำของอาจารย์ปรึกษาและผู้เชี่ยวชาญเพื่อนำไปใช้ประกอบการจัดการเรียนรู้

2.2.5 จัดทำแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้กับนักเรียน ดังตาราง 12

ตาราง 12 แสดงเกณฑ์ทักษะการโต้แย้งของแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการโต้แย้ง	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3	สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล
	2	สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล
	1	สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน แต่ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
	0	ไม่สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	3	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน
	2	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้เพียง 1 หลักฐาน
	1	สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จาก

ทักษะการโต้แย้ง	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
		สถานการณ์ปัญหาได้ แต่หลักฐานมาจากอารมณ์ความรู้สึก
	0	ไม่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	3	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล
	2	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล
	1	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน แต่ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
	0	ไม่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน
	2	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้เพียง 1 หลักฐาน
	1	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้ แต่

ทักษะการโต้แย้ง	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
		หลักฐานมาจากอารมณ์ความรู้สึก
	0	ไม่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้

2.3 แบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นข้อสอบแบบอัตนัยซึ่งประกอบไปด้วยข้อคำถามเกี่ยวกับความสามารถในการหาข้อสรุปของปัญหาและความสามารถในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุป รวมถึงการสร้างข้อคาดการณ์หรือขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การให้หลักฐานสนับสนุน การให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไป และการให้เหตุผลสนับสนุนการโต้แย้งกลับ ที่มีแนวคำถามให้นักเรียนได้เขียนแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริงที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ เขียนอธิบายปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แปลงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ เขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พร้อมตอบสถานการณ์ปัญหาในบริบทของชีวิตจริง ดังนี้

2.3.1 ศึกษาตำราเรียนและเอกสารที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหารายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

2.3.2 ออกแบบทดสอบที่สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ โดยเน้นให้นักเรียนแสดงการเหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เป็นข้อสอบแบบอัตนัยรวมทั้งสิ้น 14 ข้อ

2.3.3 นำแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบประกอบด้วย

ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน

ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน

ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน จำนวน 1 ท่าน

เพื่อพิจารณาและประเมินความตรงเชิงเนื้อหา (Content Validity) โดยวิเคราะห์หาค่าดัชนีความสอดคล้อง (Index of Congruence : IOC) ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อข้อคำถามแต่ละข้อโดยใช้เกณฑ์การพิจารณา ดังนี้

คะแนน +1 ถ้าเห็นด้วยว่าแบบทดสอบสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน 0 ถ้าไม่แน่ใจว่าแบบทดสอบสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน -1 ถ้าไม่เห็นด้วยว่าแบบทดสอบสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

พิจารณาข้อคำถามที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป มาสร้างแบบทดสอบวัดทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 3 ข้อ โดยผลการประเมินความตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบพบว่า มีค่า IOC เท่ากับ 1 ทุกข้อ ซึ่งสามารถนำไปใช้ได้ ผลการประเมินความตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบ

2.3.4 ปรับปรุงแก้ไขแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ตามคำแนะนำของอาจารย์ปรึกษาและผู้เชี่ยวชาญตามประเด็น ดังนี้

1) เนื้อหาในสถานการณ์ปัญหามีความเหมาะสม แต่อาจต้องปรับข้อคำถามให้สอดคล้องกับนิยามศัพท์ของตัวแปรตามเฉพาะ

2.3.5 จัดทำแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์ ที่มีการปรับปรุงแก้ไขตามที่ผู้เชี่ยวชาญแนะนำ

2.3.6 นำแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ไปใช้วิเคราะห์ทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์จากการเขียนตอบและแสดงวิธีคิดของนักเรียนเป็นรายบุคคล ใช้เวลาในการทำแบบทดสอบ 2 ชั่วโมง เนื่องจากมีบางข้อที่นักเรียนจำเป็นต้องใช้เวลาในการเขียนแสดงวิธีทำ เหตุผล หรือหาคำตอบ ดังตาราง 13 และตาราง 14

ตาราง 13 แสดงเกณฑ์ทักษะการให้เหตุผลของแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการให้เหตุผล	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	3	สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
	2	สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถระบุปัญหาและระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา

ทักษะการให้เหตุผล	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
		และสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุปัญหาได้อย่างถูกต้อง
	1	สามารถระบุปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุปัญหาและระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
	0	ไม่สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	3	สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
	2	สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องและอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล แต่ไม่มีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แต่ไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
	1	สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่มีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
	0	ไม่สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง

ตาราง 14 แสดงเกณฑ์ทักษะการโต้แย้งของแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ทักษะการโต้แย้ง	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3	สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล
	2	สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล
	1	สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน แต่ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
	0	ไม่สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	3	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน
	2	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้เพียง 1 หลักฐาน
	1	สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ แต่หลักฐานมาจากอารมณ์ความรู้สึก
	0	ไม่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	3	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล
	2	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อ

ทักษะการโต้แย้ง	ระดับ	พฤติกรรมที่แสดงออก
		คาดการณ์เพียง 1 เหตุผล
	1	สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน แต่ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้
	0	ไม่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน
	2	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้เพียง 1 หลักฐาน
	1	สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้ แต่หลักฐานมาจากอารมณ์ความรู้สึก
	0	ไม่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามรูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน (Classroom Action Research) โดยใช้เครื่องมือในการวิจัย 5 เครื่องมือ เพื่อตอบคำถามวิจัย 2 คำถาม มีขั้นตอนการดำเนินการ ดังนี้

1. ปฐมนิเทศและชี้แจงจุดประสงค์การจัดการเรียนรู้ให้กับนักเรียน

2. ดำเนินการตามแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จำนวน 3 แผน ใช้เวลาทั้งหมด 8 ชั่วโมง

3. ระหว่างทำการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ในแต่ละแผน ผู้วิจัยสังเกตการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ บันทึกวีดิทัศน์ระหว่างการจัดการเรียนรู้ และนักเรียนเขียนบันทึกลงใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้

4. เมื่อจบการจัดการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ ผู้วิจัยเก็บรวบรวมใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ ดูวีดิทัศน์และบันทึกผลการจัดการเรียนรู้ลงแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อทำการสะท้อนผลและปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ในครั้งถัดไป

5. เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ครบทั้ง 3 แผนการจัดการเรียนรู้ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ใช้เวลาทั้งหมด 2 ชั่วโมง

6. นำผลที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลจากเครื่องมือทั้งหมดไปทำการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยนำข้อมูลที่เก็บรวบรวมโดยเครื่องมือต่าง ๆ มาวิเคราะห์ โดยการวิเคราะห์นั้นจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ตามวัตถุประสงค์ทั้ง 2 ข้อ ดังนี้

1. เพื่อศึกษาแนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

2. เพื่อศึกษาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ดังตาราง 15

ตาราง 15 แสดงเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยแยกตามจุดมุ่งหมายของการวิจัยเป็นรายข้อ

จุดมุ่งหมาย	แบบบันทึกหลังแผนการจัดการเรียนรู้	แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้	แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	แบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
ข้อที่ 1	✓	✓			
ข้อที่ 2			✓	✓	✓

ซึ่งมีรายละเอียดการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาแนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

การวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยใช้เครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยการบันทึกหลังแผนการจัดการเรียนรู้และสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ซึ่งจะวิเคราะห์ข้อมูลเมื่อสิ้นสุดในแต่ละวงจรปฏิบัติการและจะวิเคราะห์ภาพรวมทั้งหมดเมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ครบ 3 วงจรปฏิบัติการ โดยมีรายละเอียดการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1.1 ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลจากเครื่องมือ นั่นคือ แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

1.2 ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงเนื้อหา (Content analysis) โดยนำข้อมูลที่ได้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ โดยมีขั้นตอน ดังนี้

1.2.1 ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์และตีความข้อมูลที่ได้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

1.2.2 ผู้วิจัยทำการจัดระเบียบเนื้อหาของข้อมูลตามประเด็นที่ผู้วิจัยต้องการวิเคราะห์ ได้แก่ 1) การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จะมีแนวทางการจัดการเรียนรู้อย่างไร 2) ปัญหาหรืออุปสรรคที่พบจากการจัดการเรียนรู้ 3) แนวทางการปรับปรุงแก้ไขปัญหาหรืออุปสรรคเพื่อการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป โดยประเด็นเหล่านี้จะแสดงถึงความเกี่ยวข้องต่อการปรับปรุงและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ในครั้งต่อไป

1.2.3 ผู้วิจัยทำการสรุปข้อมูล โดยรายงานผลในลักษณะการเขียนบรรยายผลการจัดการเรียนรู้ในแต่ละขั้นถึงข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไข เพื่อทำการปรับปรุงและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

1.2.4 ผู้วิจัยทำการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อมูลเชิงคุณภาพด้วยการตรวจสอบสามเส้าด้านแหล่งข้อมูล (Resource Triangulation) โดยนำแบบสะท้อนการจัดการเรียนรู้ที่ได้มาจากผู้วิจัย และผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้มาวิเคราะห์และสรุปผลการจัดการเรียนรู้ว่าให้ข้อมูลในประเด็นที่สอดคล้องและเป็นไปในทิศทางเดียวกันหรือไม่

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

2.1 การวิเคราะห์ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้

2.1.1 ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงเนื้อหา (Content analysis) โดยนำข้อมูลที่ได้เก็บรวบรวมข้อมูลจากใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้มาทำการวิเคราะห์ข้อมูล

2.1.2 ผู้วิจัยทำการรวบรวมข้อมูลจากใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ โดยวิเคราะห์การเขียนคำตอบเพื่อให้คะแนนตามเกณฑ์ที่ผู้วิจัยกำหนด

2.1.3 ผู้วิจัยทำการรวมคะแนนเพื่อจัดระดับทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ตามองค์ประกอบย่อย 2 องค์ประกอบ และทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ตามองค์ประกอบย่อย 4 องค์ประกอบ

2.1.4 ผู้วิจัยเปรียบเทียบคะแนนทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้จาก ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 1 ถึง 8 ซึ่งถ้าหากผลคะแนนของนักเรียนสูงขึ้นตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ได้จากวงจรปฏิบัติการที่ 1, 2 และ 3 แสดงว่านักเรียนมีการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น สามารถส่งเสริมการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้

2.2 การวิเคราะห์แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

2.2.1 ผู้วิจัยถอดบทสนทนาจากวีดิทัศน์ที่บันทึกขณะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

2.2.2 ผู้วิจัยจัดกลุ่มบทสนทนาจากแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ 4 องค์ประกอบ โดยเทียบกับเกณฑ์การจัดระดับที่ผู้วิจัยกำหนดและคำนวณร้อยละของนักเรียนแต่ละระดับ

2.2.3 ผู้วิจัยตรวจสอบผลการวิเคราะห์ข้อมูลร่วมกับครูประจำการตามเกณฑ์ที่ผู้วิจัยกำหนด ลงข้อสรุปเกี่ยวกับแนวโน้มการพัฒนาทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และเขียนบรรยายเป็นความเรียง

2.3 การวิเคราะห์แบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

2.3.1 ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลจากแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยวิเคราะห์การเขียนคำตอบเพื่อให้คะแนนตามเกณฑ์ที่ผู้วิจัยกำหนด

2.3.2 ผู้วิจัยทำการรวมคะแนนเพื่อจัดระดับทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ตามองค์ประกอบย่อย 2 องค์ประกอบ และทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ตามองค์ประกอบย่อย 4 องค์ประกอบ

เมื่อดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลจากใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์เรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยจึงทำการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อมูลเชิงคุณภาพด้วยการตรวจสอบสามเส้าด้านแหล่งข้อมูล (Resource Triangulation) โดยนำใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์และสรุปผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนว่ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ แบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 แนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ตอนที่ 2 ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ตอนที่ 1 แนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน (Classroom Action Research) ตามแนวคิดของ Kemmis and McTaggart (2000 อ้างอิงใน สิรินภา กิจเกื้อกูล, 2557, น. 149-151) ซึ่งดำเนินการตามแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ จำนวน 3 แผน แผนละ 1 วงจรปฏิบัติการ รวมจำนวนทั้งหมด 3 วงจรปฏิบัติการ แต่ละวงจรปฏิบัติการประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ใน 1 วงจร ได้แก่ ขั้นวางแผน (Plan) ขั้นปฏิบัติการ (Act) ขั้นสังเกตการณ์ (Observe) และขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect) โดยมีผู้วิจัยจะนำผลที่ได้จากการจัดการเรียนรู้ในแต่ละวงจรปฏิบัติการมาสะท้อนผล เพื่อวางแผนการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการถัดไป และจัดกิจกรรมการเรียนรู้สัปดาห์ละ 3 ชั่วโมง รวมเวลาทั้งหมด 8 ชั่วโมง สำหรับแต่ละวงจรปฏิบัติการมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

1. ผู้วิจัยสำรวจสภาพปัญหาในการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ควรได้รับการแก้ไข โดยผู้วิจัยได้สังเกตความสามารถในการเรียนรู้ของนักเรียนและปรึกษากับครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่สอนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยทำการวิเคราะห์ถึงปัญหาและสาเหตุของปัญหาร่วมกัน แล้วศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับ

ปรับปรุง พ.ศ. 2560) หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2561) รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค30206 ซึ่งเป็นรายวิชาเพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566 ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2.8 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ มีเนื้อหาทั้งหมด 3 เรื่อง ได้แก่ การเคลื่อนที่แนวตรง ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดยผู้วิจัยได้จัดทำแผนการเรียนรู้ จำนวน 3 แผน ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ซึ่งแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีขั้นตอนทั้งหมด 3 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน

ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

ขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้

โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีรายละเอียด ดังนี้

1.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันเรียนรู้สถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงเกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ในการเคลื่อนที่แนวตรง เพื่อแก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) ซึ่งนักเรียนแต่ละกลุ่มดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ร่วมกัน ได้แก่ สถานการณ์ที่ 1 ความเร็วของเคลื่อนที่แนวตรง และสถานการณ์ที่ 2 ความเร่งการของเคลื่อนที่แนวตรง นำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล โดยที่นักเรียนกลุ่มอื่นสังเกตคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนมีความน่าเชื่อถือลดลงได้

1.2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันเรียนรู้สถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงเกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ในการพิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เพื่อแก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) ซึ่งนักเรียนแต่ละกลุ่มดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ร่วมกัน ได้แก่ สถานการณ์ที่ 3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด สถานการณ์ที่ 4

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และสถานการณ์ที่ 5 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ นำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล โดยที่นักเรียนกลุ่มอื่นสังเกตคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนมีความน่าเชื่อถือลดลงได้

1.3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันเรียนรู้สถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงเกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาในชีวิตจริงของค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เพื่อแก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) ซึ่งนักเรียนแต่ละกลุ่มดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ร่วมกัน ได้แก่ สถานการณ์ที่ 6 ลดหรือเพิ่มเติมกำไร สถานการณ์ที่ 7 ล้อมรั้วตามงบประมาณ และสถานการณ์ที่ 8 กล่องกระดาษฐานผืนผ้า นำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล โดยที่นักเรียนกลุ่มอื่นสังเกตคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนมีความน่าเชื่อถือลดลงได้

2. ผู้วิจัยเตรียมเอกสารโดยจำแนกเป็น 3 ส่วน ได้แก่ ส่วนที่ 1 เอกสารสำหรับผู้วิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ จำนวน 3 แผน เกณฑ์การประเมินใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ส่วนที่ 2 เอกสารสำหรับผู้ร่วมสังเกตการณ์เรียนรู้ ประกอบด้วย แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และส่วนที่ 3 เอกสารสำหรับผู้เข้าร่วมวิจัยหรือนักเรียน ประกอบด้วย ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยจะแจกใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ให้นักเรียนตรงตามแผนการจัดการเรียนรู้ ชั่วโมงละ 1 ใบกิจกรรม เพื่ออำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ของนักเรียน

3. ผู้วิจัยเตรียมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) ซึ่งมีลักษณะการเรียนแบบให้นักเรียนแบ่งเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน แล้วร่วมกันดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยแจกให้นักเรียนแต่ละชั่วโมง โดยในห้องเรียนจะจัดโต๊ะเรียนแบบกลุ่ม และมีกระดานไวท์บอร์ดให้นักเรียนเขียนนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนให้นักเรียนกลุ่มอื่นสังเกตได้ง่าย เพื่ออำนวยความสะดวกให้กับนักเรียนแสดงการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติการ (Act)

ผู้วิจัยปฏิบัติการโดยการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เรื่อง การเคลื่อนที่แนวตรง ใช้ระยะเวลา 2 ชั่วโมง ประกอบด้วยขั้นการจัดการเรียนรู้ 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้ และขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้ มีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน ผู้วิจัยแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนได้รับรู้ ให้ตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวกับความเร็วของการเคลื่อนที่แนวตรงที่มีลักษณะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และความเร็วไม่คงที่ โดยนักเรียนร่วมกันสังเกต เปรียบเทียบจากกราฟความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา และการคำนวณด้วยสูตรความเร็วเฉลี่ย แล้วทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาความชันของเส้นโค้งที่จุดใด ๆ ด้วยการหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เพื่อเรียนรู้การหาความเร็วและความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่แนวตรง

ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง ผู้วิจัยแบ่งกลุ่มนักเรียนเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน แล้วดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ร่วมกันโดยนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ โจทย์กำหนดอะไร และโจทย์ถามอะไร

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ นักเรียนในกลุ่มเดียวกันร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาและสามารถใช้สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล และนักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกตข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนที่แตกต่างออกไปมีความน่าเชื่อถือลดลง

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ สร้างสมการแทนความสัมพันธ์และเพราะเหตุใด และหลักฐานสนับสนุน ดังภาพ 4

ภาพ 4 แสดงนักเรียนปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม เพื่อหาคำตอบของปัญหาในรูปผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ในส่วนของขั้นตอนวิธีทำ

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง นักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง โดยนักเรียนต้องพิจารณาจากบริบทของสถานการณ์ปัญหาประกอบการตัดสินใจเพื่อตอบปัญหาอย่างถูกต้องตรงประเด็นและมีเหตุผลในการตอบที่เหมาะสม แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 3 ส่วน ได้แก่ เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า จึงได้ข้อสรุป และเพราะเหตุใด

ขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้ นักเรียนทุกคนร่วมกันสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการหาความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่แนวตรงโดยมีครูคอยให้คำแนะนำเพื่อความเข้าใจในมโนทัศน์ที่ถูกต้อง ครบถ้วน

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ (Observe)

ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เรื่อง การเคลื่อนที่แนวตรง โดยเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้หรือครูประจำการ และบันทึกวีดิทัศน์ระหว่างการจัดการเรียนรู้เพื่อประกอบการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งของนักเรียนระหว่างการจัดการเรียนรู้ มีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น พบว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มมีการอภิปรายร่วมกันภายในกลุ่มและถามผู้วิจัยบ้างในส่วนที่ไม่เข้าใจ และนักเรียนสามารถระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้ด้วยตัวเองอย่างถูกต้อง แต่อาจมีรายละเอียดบางส่วนที่ไม่ครบถ้วน ซึ่งมี

นักเรียนบางส่วนที่ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามมาเป็นรายข้อ แสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหา

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตัวเอง จำเป็นต้องถามผู้วิจัยอยู่บ่อยครั้ง ผู้วิจัยจึงต้องมีการยกตัวอย่างให้นักเรียนเห็นถึงวิธีการแสดงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา ซึ่งนักเรียนสามารถระบุมโนทัศน์ด้วยตัวเองได้มากขึ้นในชั่วโมงต่อมา ทำให้สามารถสร้างข้อคาดการณ์ได้แต่ไม่สามารถให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการ พบว่า นักเรียนไม่สามารถสร้างสมการได้ด้วยตัวเองในชั่วโมงแรก แต่เมื่อนักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์ได้ในชั่วโมงต่อมา นักเรียนสามารถสร้างสมการได้โดยดูจากแบบรูปของลำดับว่าระยะทางกับระยะเวลามีความสัมพันธ์กันอย่างไรและเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนสามารถดำเนินขั้นตอนวิธีทำได้อย่างถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ แต่มีบางส่วนใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง จากการสังเกตนักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง พบว่า นักเรียนสะท้อนผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สู่ชีวิตจริงได้ถูกต้อง แต่นักเรียนระบุเหตุผลไม่สอดคล้องกับคำตอบของสถานการณ์ปัญหา ไม่สามารถระบุได้อย่างละเอียดว่าคำตอบที่ได้เป็นผลมาจากค่าใดในคำตอบที่เป็นผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังภาพ 5

ภาพ 5 แสดงนักเรียนสะท้อนปัญหาทางคณิตศาสตร์สู่ชีวิตจริง

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์นำข้อมูลที่ได้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และวีดิทัศน์ที่บันทึกระหว่างการจัดการเรียนรู้ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง มาวิเคราะห์ข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไข ในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 1 มีรายละเอียด ดังตาราง 16

ตาราง 16 แสดงการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 1

ขั้นตอน	ข้อดี	สภาพปัญหา	แนวทางการปรับปรุงแก้ไข
ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง	นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง	ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามโดยที่ไม่มีรายละเอียดที่ครบถ้วน	ผู้วิจัยแนะนำนักเรียนให้ระบุเป็นรายข้อ ทีละประเด็น
ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์	นักเรียนระบุมโนทัศน์ได้ ถ้าผู้วิจัยคอยให้คำแนะนำ	นักเรียนไม่สามารถระบุได้ด้วยตัวเองว่ามีมโนทัศน์ใดสอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา	- ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนลองแปลงสถานการณ์ปัญหาเป็นสมการคณิตศาสตร์แล้วสังเกตว่าสมการที่ได้ ได้มาจากมโนทัศน์ใด - ผู้วิจัยกำหนดแนวทางการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เป็น 2 ประเด็น ได้แก่ มโนทัศน์ที่ทำให้นักเรียนสามารถแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหา

ขั้นตอน	ข้อดี	สภาพปัญหา	แนวทางการปรับปรุงแก้ไข
			ในขั้นตอนวิธีทำ
ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ได้โดยดูแบบรูปความสัมพันธ์ของลำดับ	นักเรียนไม่มีความมั่นใจในสมการทางคณิตศาสตร์ที่ตัวเองสร้าง	- ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนลองแทนค่าตัวแปรจากสิ่งที่โจทย์กำหนดเพื่อตรวจสอบความถูกต้องจากโจทย์ - ผู้วิจัยกำหนดแนวทางการระบุตัวแปรให้ชัดเจน
ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนสามารถดำเนินขั้นตอนวิธีทำได้อย่างถูกต้อง	นักเรียนใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง	- ผู้วิจัยแนะนำวิธีการใช้สัญลักษณ์ที่ถูกต้องเป็นรายกรณี - ผู้วิจัยเตรียมตัวอย่างที่ถูกต้องให้นักเรียนศึกษา
ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง	นักเรียนสะท้อนปัญหาเพื่อตอบปัญหาในชีวิตจริงได้ถูกต้อง	นักเรียนระบุเหตุผลในการตอบปัญหาไม่ถูกต้อง	ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนระบุเหตุผลในการตอบปัญหาจากการระบุว่าตัวแปรแต่ละตัวแทนค่าของอะไรและระบุที่มาของคำตอบที่ได้

จากตารางสรุปข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไขในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เพื่อนำไปพัฒนาการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

จากการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 1 ทำให้ผู้วิจัยเห็นแนวทางการปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ผู้วิจัยนำผลการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 1 มาปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เพื่อให้การจัดการเรียนรู้บรรลุตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด ซึ่งผู้วิจัยได้กระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาให้เกี่ยวกับเรื่องใกล้ตัวของนักเรียนมากยิ่งขึ้น และกระตุ้นนักเรียนให้มีการแสดงเหตุผลและโต้แย้งกัน เพื่อให้สามารถหาแนวทางการแก้สถานการณ์ปัญหาที่เหมาะสมที่สุด โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง ผู้วิจัยได้ปรับสถานการณ์ปัญหาให้มีความชัดเจนและใกล้เคียงกับบริบทชีวิตจริงของนักเรียนมากยิ่งขึ้น เพื่อให้นักเรียนสามารถแยกประเด็นของสถานการณ์ปัญหาเพื่อตอบคำถาม “โจทย์กำหนดอะไร” และ “โจทย์ถามอะไร” เป็นรายข้อได้ชัดเจน

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา โดยกำหนดให้นักเรียนระบุมโนทัศน์โดยแยกเป็น 2 ประเด็น ได้แก่ มโนทัศน์ที่ทำให้นักเรียนสามารถแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหาในขั้นตอนวิธีทำ เพื่อให้นักเรียนสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาได้ด้วยตัวเอง

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางการแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการระบุตัวแปร $f(x)$ แทนค่าที่ต้องการให้เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และระบุตัวแปร x แทนค่าอีกค่าที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรนั้น

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้เตรียมตัวอย่างขั้นตอนวิธีทำจากแบบเรียนให้นักเรียน เพื่อให้นักเรียนสังเกตและเปรียบเทียบการใช้สัญลักษณ์ที่ถูกต้องในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากแบบเรียนและใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางการระบุเหตุผลในการตอบปัญหาจากการระบุว่าตัวแปรแต่ละตัวแทนค่าของอะไร และระบุที่มาของคำตอบที่ได้ เพื่อให้นักเรียนระบุเหตุผลที่สอดคล้องกับคำตอบปัญหาในชีวิตจริงได้ถูกต้องและชัดเจน

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติการ (Act)

ผู้วิจัยปฏิบัติการโดยการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เรื่อง ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ใช้ระยะเวลา 3 ชั่วโมง ประกอบด้วยขั้นการจัดการเรียนรู้ 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้ และขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้ มีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน ผู้วิจัยแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนได้รับรู้ ทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนเกี่ยวกับขั้นตอนกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์และการหาความชันของเส้นโค้งที่จุดใด ๆ ด้วยการหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เพื่อเรียนรู้การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน แล้วให้นักเรียนพิจารณากราฟของเส้นโค้งแล้วอภิปรายร่วมกันโดยมีประเด็นคำถามเกี่ยวกับจุดวิกฤต ลักษณะของกราฟที่ถูกแบ่งด้วยจุดวิกฤต และกราฟนั้นแสดงให้เห็นถึงฟังก์ชันแบบใด

ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง ผู้วิจัยแบ่งกลุ่มนักเรียนเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน แล้วดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ร่วมกัน โดยนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ โจทย์กำหนดอะไร และโจทย์ถามอะไร ซึ่งผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนระบุเป็นรายข้อ ทีละประเด็น ดังภาพ 6

ภาพ 6 แสดงนักเรียนระบุคำตอบแยกเป็นรายข้อ

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ นักเรียนในกลุ่มเดียวกันร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาและสามารถใช้สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของ

กลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล และนักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกตข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนที่แตกต่างออกไปมีความน่าเชื่อถือลดลง ซึ่งผู้วิจัยแนะนำแนวทางการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็น 2 ประเด็น ได้แก่ มโนทัศน์ที่ทำให้นักเรียนสามารถแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหาในขั้นตอนวิธีทำ

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ สร้างสมการแทนความสัมพันธ์และเพราะเหตุใด และหลักฐานสนับสนุน ซึ่งผู้วิจัยแนะนำแนวทางการแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการระบุตัวแปร $f(x)$ แทนค่าที่ต้องการให้เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และระบุตัวแปร x แทนค่าอีกค่าที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรนั้น และให้นักเรียนลองแทนค่าตัวแปรเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของสมการที่ได้

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม เพื่อหาคำตอบของปัญหาในรูปผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ในส่วนของขั้นตอนวิธีทำ ซึ่งผู้วิจัยให้นักเรียนศึกษาการเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และขั้นตอนวิธีทำจากการดูตัวอย่างที่ถูกต้องในแบบเรียน

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง นักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง โดยนักเรียนต้องพิจารณาจากบริบทของสถานการณ์ปัญหาประกอบการตัดสินใจเพื่อตอบปัญหาอย่างถูกต้องตรงประเด็นและมีเหตุผลในการตอบที่เหมาะสม แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 3 ส่วน ได้แก่ เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า จึงได้ข้อสรุป และเพราะเหตุใด ซึ่งผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนระบุเหตุผลในการตอบปัญหาจากการระบุว่าตัวแปรแต่ละตัวแทนค่าของอะไร และระบุที่มาของคำตอบที่ได้

ขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้ นักเรียนทุกคนร่วมกันสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันโดยมีครูคอยให้คำแนะนำเพื่อความเข้าใจในมโนทัศน์ที่ถูกต้องครบถ้วน

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ (Observe)

ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เรื่อง ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน โดยเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้หรือครูประจำการ และ

บันทึกวีดิทัศน์ระหว่างการจัดการเรียนรู้เพื่อประกอบการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งของนักเรียนระหว่างการจัดการเรียนรู้ มีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น พบว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มมีการอภิปรายร่วมกันภายในกลุ่ม และนักเรียนสามารถระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้ด้วยตัวเองอย่างถูกต้องและครบถ้วน โดยมีนักเรียนส่วนใหญ่ที่ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามเป็นรายข้อ แสดงให้เห็นถึงความเข้าใจมากยิ่งขึ้นในสถานการณ์ปัญหาของนักเรียน

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตัวเอง โดยมีนักเรียนบางส่วนไม่สามารถระบุมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหาได้ ทำให้นักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สนับสนุนข้อคาดการณ์ได้บางส่วน ส่งผลให้นักเรียนบางส่วนนั้นสามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อคาดการณ์ของคนอื่นได้ นำไปสู่การแสดงการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในบางกลุ่ม ดังภาพ 7

ภาพ 7 แสดงนักเรียนแสดงการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการ พบว่า นักเรียนสามารถสร้างสมการได้ด้วยตัวเองมากยิ่งขึ้น โดยนักเรียนมีการวาดรูปทางเรขาคณิตเพื่อประกอบการตัดสินใจในการสร้างสมการ แต่เมื่อนักเรียนต้องสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน นอกจากการสร้างสมการจะต้องมีการระบุช่วงของค่า x ที่เป็นไปได้ ซึ่งมีนักเรียนระบุช่วงของค่า x ได้ถูกต้องเพียงบางส่วนเท่านั้น

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนสามารถดำเนินขั้นตอนวิธีทำและใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น และสามารถเลือกใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง ทำให้นักเรียนสามารถดำเนินขั้นตอนวิธีทำได้ด้วยตัวเองอย่างต่อเนื่อง

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง จากการสังเกตนักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง พบว่า นักเรียนสะท้อนผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สู่ชีวิตจริงได้ถูกต้องและครบถ้วนทุกประเด็นคำถาม สามารถระบุเหตุผลที่สอดคล้องกับคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้ แต่ไม่สามารถระบุได้อย่างละเอียดว่าคำตอบที่ได้เป็นผลมาจากค่าใดในคำตอบที่เป็นผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์นำข้อมูลที่ได้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และวีดิทัศน์ที่บันทึกระหว่างการจัดการเรียนรู้ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน มาวิเคราะห์ข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไข ในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 2 มีรายละเอียด ดังตาราง 17

ตาราง 17 แสดงการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 2

ขั้นตอน	ข้อดี	สภาพปัญหา	แนวทางการปรับปรุงแก้ไข
ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง	นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง ระบุรายละเอียดครบถ้วนเป็นรายข้อ ในทีละประเด็น		
ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์	นักเรียนสามารถระบุมโนทัศน์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา	นักเรียนไม่สามารถระบุมโนทัศน์ใดที่ใช้แก้สถานการณ์ปัญหา	ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนแยกประเด็นการระบุมโนทัศน์เป็น 2 ประเด็น ได้แก่ มโนทัศน์เกี่ยวกับสมการและช่วงของค่า x

ขั้นตอน	ข้อดี	สภาพปัญหา	แนวทางการปรับปรุงแก้ไข
			และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหาในขั้นตอนวิธีทำ
ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ได้โดยใช้การแสดงรูปภาพประกอบการตัดสินใจ	นักเรียนระบุช่วงของค่า x ที่เป็นไปได้ ไม่ถูกต้อง	ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนดูบริบทของปัญหาในชีวิตจริง พิจารณาว่าค่าของ x ไม่ควรเป็นอย่างไรบ้าง
ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนดำเนินขั้นตอนวิธีทำและสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น และเลือกใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง		
ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง	นักเรียนสะท้อนปัญหาเพื่อตอบปัญหาในชีวิตจริงได้ถูกต้อง และให้เหตุผลที่สอดคล้องกับคำตอบได้	นักเรียนไม่สามารถระบุได้อย่างละเอียดว่าคำตอบที่ได้เป็นผลมาจากค่าใดในคำตอบที่เป็นผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนระบุว่าตัวแปรแต่ละตัวแทนค่าของอะไร และระบุที่มาของคำตอบที่ได้

จากตารางสรุปข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไขในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เพื่อนำไปพัฒนาการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

จากการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ทำให้ผู้วิจัยเห็นแนวทางการปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ผู้วิจัยนำผลการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 2 มาปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เพื่อให้การจัดการเรียนรู้บรรลุตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างสถานการณ์ปัญหาที่แตกต่างจากในวงจรปฏิบัติการที่ 2 เล็กน้อยและมีรายละเอียดมากกว่าในวงจรปฏิบัติการที่ 2 เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนมีการแสดงเหตุผลและโต้แย้งกัน โดยใช้ประสบการณ์จากในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ประกอบการตัดสินใจและสร้างข้อคาดการณ์เพื่อคาดเดาแนวทางการแก้สถานการณ์ปัญหาให้นักเรียนสามารถแสดงเหตุผลและการโต้แย้งได้อย่างชัดเจน โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง ผู้วิจัยได้ปรับสถานการณ์ปัญหาให้มีรายละเอียดมากกว่าในวงจรปฏิบัติการที่ 2 เล็กน้อย เพื่อให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการแยกประเด็นของสถานการณ์ปัญหาเพื่อตอบคำถาม “โจทย์กำหนดอะไร” และ “โจทย์ถามอะไร” เป็นรายข้อได้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางการระบุมโนทัศน์ โดยให้นักเรียนแยกประเด็นการระบุมโนทัศน์เป็น 2 ประเด็น ได้แก่ มโนทัศน์เกี่ยวกับสมการแสดงความสัมพันธ์และช่วงของค่า x และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหาในขั้นตอนวิธีทำ เพื่อให้นักเรียนสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาได้ด้วยตัวเอง

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางให้นักเรียนดูบริบทของปัญหาในชีวิตจริง โดยพิจารณาว่าค่าของ x ไม่ควรเป็นอย่างไรบ้าง เพื่อให้นักเรียนระบุช่วงของค่า x ที่เป็นไปได้อย่างถูกต้อง

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้เตรียมตัวอย่างขั้นตอนวิธีทำจากแบบเรียนที่มีความคล้ายกับวงจรปฏิบัติการที่ 2 ให้นักเรียน เพื่อให้นักเรียนสังเกตและเปรียบเทียบการใช้สัญลักษณ์ที่ถูกต้องในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากแบบเรียนและใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางการระบุเหตุผลในการตอบปัญหาจากการระบุว่าตัวแปรแต่ละตัวแทนค่าของอะไร และระบุที่มาของคำตอบที่ได้ เพื่อให้นักเรียนระบุเหตุผลที่สอดคล้องกับคำตอบปัญหาในชีวิตจริงได้ถูกต้องและชัดเจนมากยิ่งขึ้น

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติการ (Act)

ผู้วิจัยปฏิบัติการโดยการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ใช้ระยะเวลา 3 ชั่วโมง ประกอบด้วยขั้นการจัดการเรียนรู้ 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้ และขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้ มีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน ผู้วิจัยแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนได้รับรู้ และทบทวนความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์และการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันให้กับนักเรียน เพื่อเรียนรู้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง ผู้วิจัยแบ่งกลุ่มนักเรียนเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน แล้วดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ร่วมกันโดยนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ โจทย์กำหนดอะไร และโจทย์ถามอะไร ซึ่งผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนระบุเป็นรายข้อ ทีละประเด็น โดยสถานการณ์ปัญหาจะมีรายละเอียดมากกว่าในวงจรปฏิบัติการที่ 2 เล็กน้อย เพื่อใช้กระตุ้นการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์จากประสบการณ์ของนักเรียนในวงจรปฏิบัติการที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ นักเรียนในกลุ่มเดียวกันร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาและสามารถใช้สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล และนักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกตข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนที่แตกต่างออกไปมีความน่าเชื่อถือลดลง ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางการระบุมโนทัศน์ โดยให้นักเรียนแยกประเด็นการระบุมโนทัศน์เป็น 2 ประเด็น ได้แก่ มโนทัศน์เกี่ยวกับสมการแสดงความสัมพันธ์และช่วงของค่า x และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหาในขั้นตอนวิธีทำ

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ สร้างสมการแทน

ความสัมพันธ์และเพราะเหตุใด และหลักฐานสนับสนุน ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางให้นักเรียนดูบริบทของปัญหาในชีวิตจริง โดยพิจารณาว่าค่าของ x ไม่ควรเป็นอย่างไรบ้าง

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม เพื่อหาคำตอบของปัญหาในรูปผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ในส่วนของขั้นตอนวิธีทำ ซึ่งผู้วิจัยได้เตรียมตัวอย่างขั้นตอนวิธีทำจากแบบเรียนที่มีความคล้ายกับวงจรปฏิบัติการที่ 2 ให้นักเรียน เพื่อให้นักเรียนเห็นความแตกต่างของวงจรปฏิบัติการที่ 2 และวงจรปฏิบัติการที่ 3 ว่าควรเพิ่มเติมส่วนใดจึงจะทำให้การแก้ปัญหามีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ดังภาพ 8

ภาพ 8 แสดงนักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่มเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีทำ

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง นักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง โดยนักเรียนต้องพิจารณาจากบริบทของสถานการณ์ปัญหาประกอบการตัดสินใจเพื่อตอบปัญหาอย่างถูกต้องตรงประเด็นและมีเหตุผลในการตอบที่เหมาะสม แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 3 ส่วน ได้แก่ เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า จึงได้ข้อสรุป และเพราะเหตุใด ซึ่งผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนระบุเหตุผลในการตอบปัญหาจากการระบุว่าตัวแปรแต่ละตัวแทนค่าของอะไร และระบุที่มาของคำตอบที่ได้

ขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้ นักเรียนทุกคนร่วมกันสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดโดยมีครูคอยให้คำแนะนำเพื่อความเข้าใจในมโนทัศน์ที่ถูกต้อง ครบถ้วน

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ (Observe)

ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดยเก็บรวบรวมข้อมูล

จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้หรือครูประจำการและบันทึกวีดิทัศน์ระหว่างการจัดการเรียนรู้เพื่อประกอบการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งของนักเรียนระหว่างการจัดการเรียนรู้ มีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น พบว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มมีการอภิปรายร่วมกันภายในกลุ่ม และนักเรียนสามารถระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้ด้วยตัวเองอย่างถูกต้องและครบถ้วน โดยมีนักเรียนส่วนใหญ่ที่ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามเป็นรายข้อ แสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหาของนักเรียน

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับสมการแสดงความสัมพันธ์และช่วงของค่า x ได้ด้วยตัวเอง โดยมีนักเรียนส่วนน้อยไม่สามารถระบุมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหาได้ ทำให้นักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สนับสนุนข้อคาดการณ์ได้เป็นส่วนใหญ่ ส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่นั้นสามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อคาดการณ์ของคนอื่นได้ นำไปสู่การแสดงการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลายกลุ่ม โดยที่ครูต้องคอยกระตุ้นให้นักเรียนแสดงการโต้แย้งบ่อยครั้ง

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการ พบว่า นักเรียนสามารถสร้างสมการได้ด้วยตัวเองและระบุช่วงของค่า x ที่เป็นไปได้ ได้ถูกต้องและชัดเจน ซึ่งมีนักเรียนระบุช่วงของค่า x ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนสามารถดำเนินขั้นตอนวิธีทำและใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น และสามารถเลือกใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง ทำให้นักเรียนสามารถดำเนินขั้นตอนวิธีทำได้ด้วยตัวเองอย่างต่อเนื่อง แม้ว่าโจทย์ปัญหาจะมีการเพิ่มเติมรายละเอียดของสถานการณ์ปัญหามากขึ้น

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง จากการสังเกตนักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง พบว่า นักเรียนสะท้อนผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สู่ชีวิตจริงได้ถูกต้องและครบถ้วนทุกประเด็นคำถาม สามารถระบุเหตุผลที่สอดคล้องกับคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้ แต่สามารถระบุได้อย่างละเอียดว่าคำตอบที่ได้เป็นผลมาจากค่าใดในคำตอบที่เป็นผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพียงบางส่วน ดังภาพ 9

ภาพ 9 แสดงการอภิปรายร่วมกันเพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ที่เหมาะสมกับการหาข้อสรุป

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์นำข้อมูลที่ได้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และวีดิทัศน์ที่บันทึกระหว่างการจัดการเรียนรู้ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดมาวิเคราะห์ข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไข ในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 3 มีรายละเอียด ดังตาราง 18

ตาราง 18 แสดงการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 3

ขั้นตอน	ข้อดี	สภาพปัญหา	แนวทางการปรับปรุงแก้ไข
ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง	นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง ระบุรายละเอียดครบถ้วนเป็นรายข้อ ทีละประเด็น		
ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์	นักเรียนระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับสมการแสดงความสัมพันธ์และช่วงของค่า x ที่เป็นไปได้	นักเรียนไม่สามารถระบุมโนทัศน์ใดที่ใช้แก้สถานการณ์ปัญหาได้บางส่วน	ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทเพิ่มเติม เพื่อให้นักเรียนเพิ่มตัวเลือก

ขั้นตอน	ข้อดี	สภาพปัญหา	แนวทางการปรับปรุงแก้ไข
	ได้ถูกต้อง		ในการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนสามารถสร้างสมการได้ด้วยตัวเอง และระบุช่วงของค่า x ที่เป็นไปได้ ได้ถูกต้องและชัดเจน		
ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	นักเรียนดำเนินขั้นตอนวิธีทำและสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น และเลือกใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง แม้ว่าโจทย์สถานการณ์ปัญหาจะมีรายละเอียดมากขึ้น		
ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง	นักเรียนสะท้อนปัญหาเพื่อตอบปัญหาในชีวิตจริงได้ถูกต้อง ให้เหตุผลที่สอดคล้องกับคำตอบได้ และระบุว่าตัวแปรแต่ละตัวแทนค่าของอะไรได้ถูกต้อง	นักเรียนระบุที่มาของคำตอบไม่ครบถ้วน	ผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนตรวจสอบการระบุที่มาของคำตอบว่าครบถ้วนหรือไม่

จากตารางสรุปข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไขในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematising Process) แต่ละวงจรปฏิบัติการ พบว่า ทั้ง 3

วงจรปฏิบัติการมีประเด็นที่ครูผู้สอนควรเน้น เมื่อนำแนวทางดังกล่าวไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ โดยจำแนกตามบทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจนำการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไปใช้ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ ดังตาราง 19

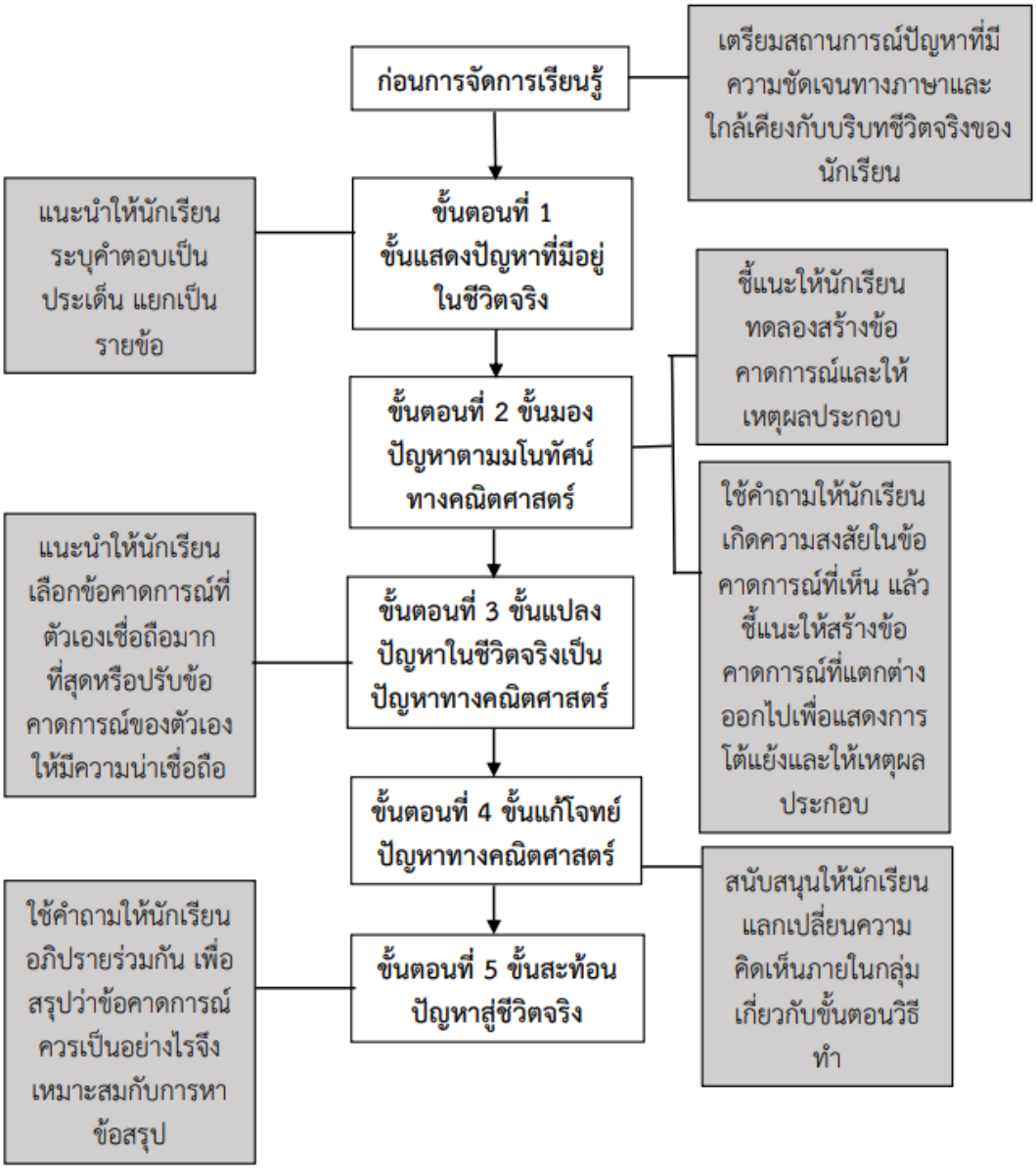
ตาราง 19 แสดงประเด็นที่ควรเน้นในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง	
บทบาทของครู	**บทบาทของนักเรียน**
- ครูให้ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้เกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยสถานการณ์ปัญหาในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้เป็นสถานการณ์ปัญหาที่มีความชัดเจนทางภาษา สถานการณ์ปัญหาควรใกล้เคียงกับบริบทชีวิตจริงของนักเรียน และเหมาะสมต่อการเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ - ครูใช้คำถามนำเข้าสู่สถานการณ์ปัญหา กระตุ้นให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน และแนะนำให้นักเรียนระบุคำตอบเป็นประเด็น แยกเป็นรายข้อ	- นักเรียนแบ่งเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน - นักเรียนอ่านสถานการณ์ปัญหาในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้เรียบเรียงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แล้วเขียนระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ โจทย์กำหนดอะไร และโจทย์ถามอะไร
ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์	
บทบาทของครู	**บทบาทของนักเรียน**
- ครูชี้แนะให้นักเรียนทดลองสร้างข้อคาดการณ์ ได้แก่ สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ ระบุช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหา พร้อมเหตุผลประกอบข้อคาดการณ์นี้ให้มีความน่าเชื่อถือ - ครูเลือกหนึ่งกลุ่มที่มีข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ ให้นักเรียนออกมานำเสนอ	- นักเรียนในกลุ่มเดียวกันร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาที่สามารถใช้สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ - นักเรียนนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล - นักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกตข้อคาดการณ์หน้าชั้น

- ครูใช้คำถามให้นักเรียนเกิดความสงสัยในข้อคาดการณ์ที่เห็น แล้วชี้แนะให้นักเรียนแสดงการโต้แย้ง ได้แก่ สร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน พร้อมให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบข้อคาดการณ์นั้น	เรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน พร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนมีความน่าเชื่อถือลดลงได้
ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์	
บทบาทของครู	**บทบาทของนักเรียน**
- ครูแนะนำให้นักเรียนเลือกข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุดหรือปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ - ครูให้คำแนะนำนักเรียนในการระบุข้อคาดการณ์ของตัวเองในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ สร้างสมการแทนความสัมพันธ์และเพราะเหตุใด และหลักฐานสนับสนุน และย้ำเตือนนักเรียนไม่ให้ลืมให้เหตุผลและหลักฐานสนับสนุนประกอบการตอบในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้	- นักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุดในขั้นตอนที่ 2 หรือปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ แล้วเขียนระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่สร้างสมการแทนความสัมพันธ์และเพราะเหตุใด และหลักฐานสนับสนุน ซึ่งจะต้องระบุสมการแทนความสัมพันธ์ ระบุช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ และระบุมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหา เพื่อแสดงเหตุผลที่มาของสมการแทนความสัมพันธ์และช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ โดยมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นหลักฐานสนับสนุน
ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	
บทบาทของครู	**บทบาทของนักเรียน**
- ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนแสดงขั้นตอนวิธีทำเพื่อหาคำตอบในรูปผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ และสนับสนุนให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่มเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีทำ โดยที่ครูคอยให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนเกิดปัญหาในการหาคำตอบ	- นักเรียนเขียนแสดงขั้นตอนวิธีทำ โดยนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในสมการแทนความสัมพันธ์และหลักฐานสนับสนุน ที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหา เพื่อตอบคำถามว่า โจทย์ถามอะไร
ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง	

บทบาทของครู	บทบาทของนักเรียน
- ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนแปลผลลัพธ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ปัญหาในชีวิตและตรวจสอบผลลัพธ์ของนักเรียน - ครูใช้คำถามให้นักเรียนร่วมแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกัน เพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ที่สามารถใช้หาข้อสรุปได้ถูกต้องควรเป็นอย่างไรจึงเหมาะสมกับการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	- นักเรียนเรียนเขียนแปลผลลัพธ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง โดยระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 3 ส่วน ได้แก่ เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า จึงได้ข้อสรุป และเพราะเหตุใด เพื่อแสดงเหตุผลที่มาของคำตอบในสถานการณ์ปัญหาในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ - นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอผลการแก้สถานการณ์ปัญหาและข้อคาดการณ์ที่สามารถใช้หาข้อสรุปของกลุ่มตัวเอง แล้วแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อประเมินผลว่าข้อคาดการณ์ใดเหมาะสมที่สุดในการแก้สถานการณ์ปัญหานั้น

สรุปได้ว่า แนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ มีประเด็นที่ควรเน้นในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ ได้แก่ 1) การเตรียมสถานการณ์ปัญหาที่มีความชัดเจนทางภาษาและใกล้เคียงกับบริบทชีวิตจริงของนักเรียน 2) การแนะนำให้นักเรียนระบุคำตอบเป็นประเด็น แยกเป็นรายข้อ 3) การชี้แนะให้นักเรียนทดลองสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลประกอบ 4) การใช้คำถามให้นักเรียนเกิดความสงสัยในข้อคาดการณ์ที่เห็นแล้วชี้แนะให้สร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างออกไปเพื่อแสดงการโต้แย้งและให้เหตุผลประกอบ 5) การแนะนำให้นักเรียนเลือกข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุดหรือปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ 6) การสนับสนุนให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่มเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีทำ และ 7) การใช้คำถามให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน เพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ควรเป็นอย่างไรจึงเหมาะสมกับการหาข้อสรุป ดังภาพ 10



ภาพ 10 แสดงประเด็นที่ควรเน้นในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2 ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

1. ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์การส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของนักเรียนจากเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ และแบบทดสอบทักษะการให้

เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งเป็น 2 ส่วน ได้แก่ ระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ และหลังจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

1.1 ทักษะการให้เหตุผลระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนมีการแสดงทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้

ดังตาราง 20

ตาราง 20 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการให้เหตุผลแต่ละวงจรปฏิบัติการ

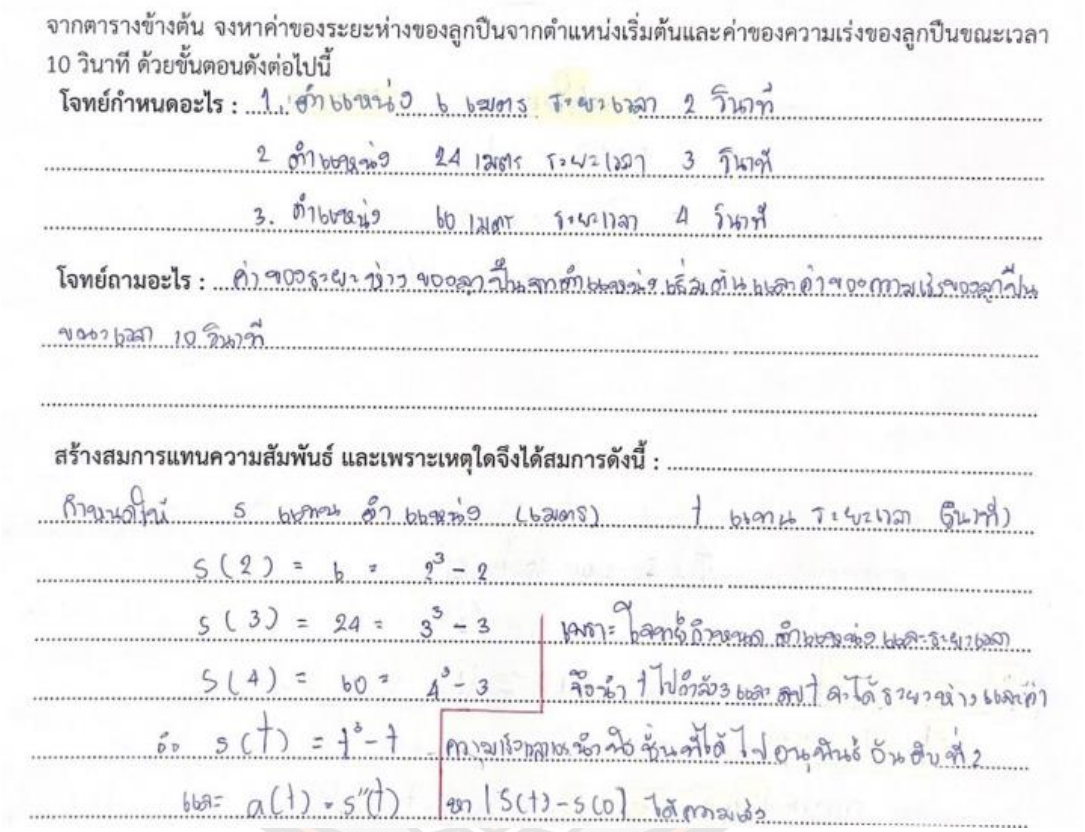
องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล	ระดับของทักษะการให้เหตุผล	จำนวนนักเรียน (ร้อยละ)		
		วงจรปฏิบัติการที่ 1	วงจรปฏิบัติการที่ 2	วงจรปฏิบัติการที่ 3
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	3	14 (42.43)	7 (21.21)	26 (78.79)
	2	13 (39.39)	26 (78.79)	7 (21.21)
	1	6 (18.18)	0	0
	0	0	0	0
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	3	0	20 (60.61)	19 (57.57)
	2	20 (60.61)	13 (39.39)	14 (42.43)
	1	13 (39.39)	0	0
	0	0	0	0

จากตาราง พิจารณาระดับของทักษะการให้เหตุผลของนักเรียนระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ตามองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล จากใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ โดยจำแนกองค์ประกอบ ดังนี้

ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา

วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง เมื่อพิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 14

คน คิดเป็นร้อยละ 42.43 สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและอยู่ในระดับ 2 จำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 39.39 ไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่มีนักเรียนบางส่วนอยู่ในระดับ 1 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถระบุปัญหาและมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ดังภาพ 11


จากตารางข้างต้น จงหาค่าของระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้นและค่าของความเร็วของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

โจทย์กำหนดอะไร : 1. ตำแหน่ง 6 เมตร ระยะเวลา 2 วินาที
2 ตำแหน่ง 24 เมตร ระยะเวลา 3 วินาที
3. ตำแหน่ง 60 เมตร ระยะเวลา 4 วินาที

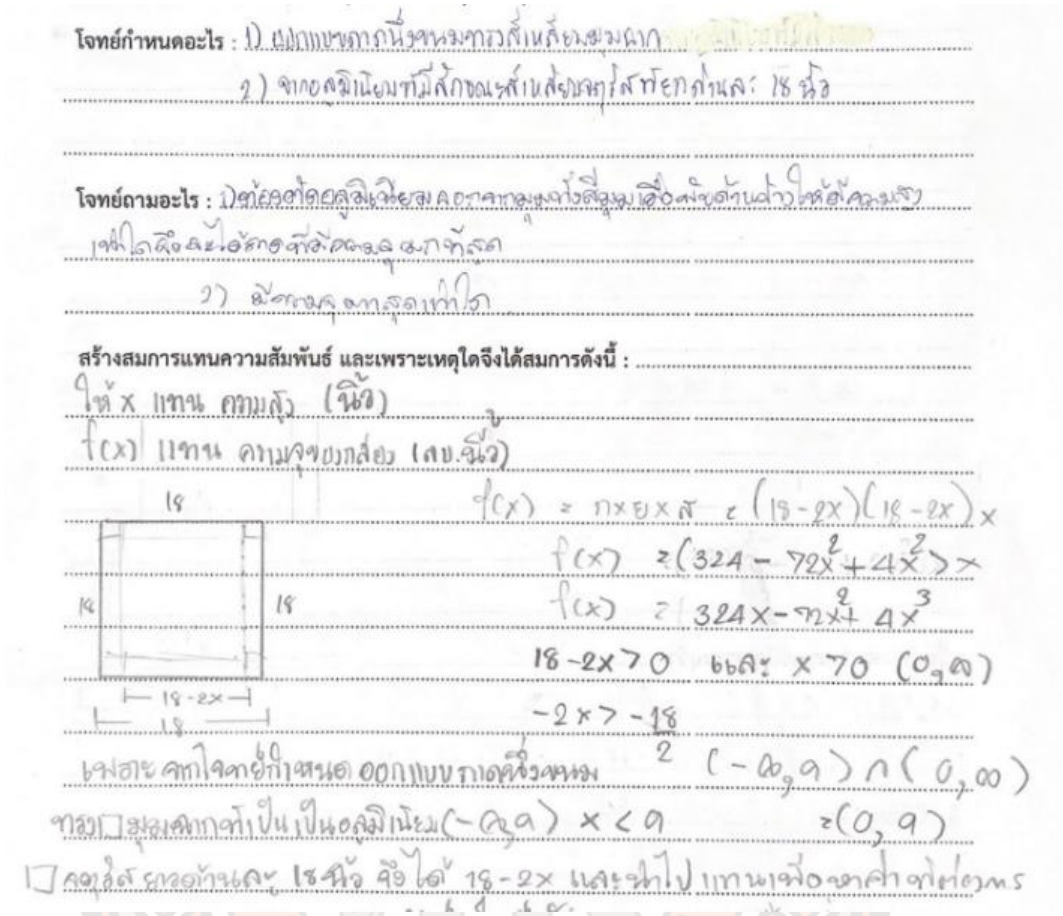
โจทย์ถามอะไร : ค่าของระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้น และค่าของความเร็วของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :
กำหนดให้ s แทน ตำแหน่ง (เมตร) t แทน ระยะเวลา (วินาที)
$s(2) = 6 = 2^3 - 2$
$s(3) = 24 = 3^3 - 3$
$s(4) = 60 = 4^3 - 3$
ดังนั้น $s(t) = t^3 - t$
และ $a(t) = s''(t)$

เพราะ ใช้สมการตำแหน่งและระยะเวลา จึงแทน t ไปด้วย 3 และ สมการ ได้ระยะห่าง และค่าความเร็วออกมาเป็นค่าคงที่ที่ใช้ไปอนุพันธ์อันดับที่ 2 หา $|s(t) - s(0)|$ ได้ระยะห่าง

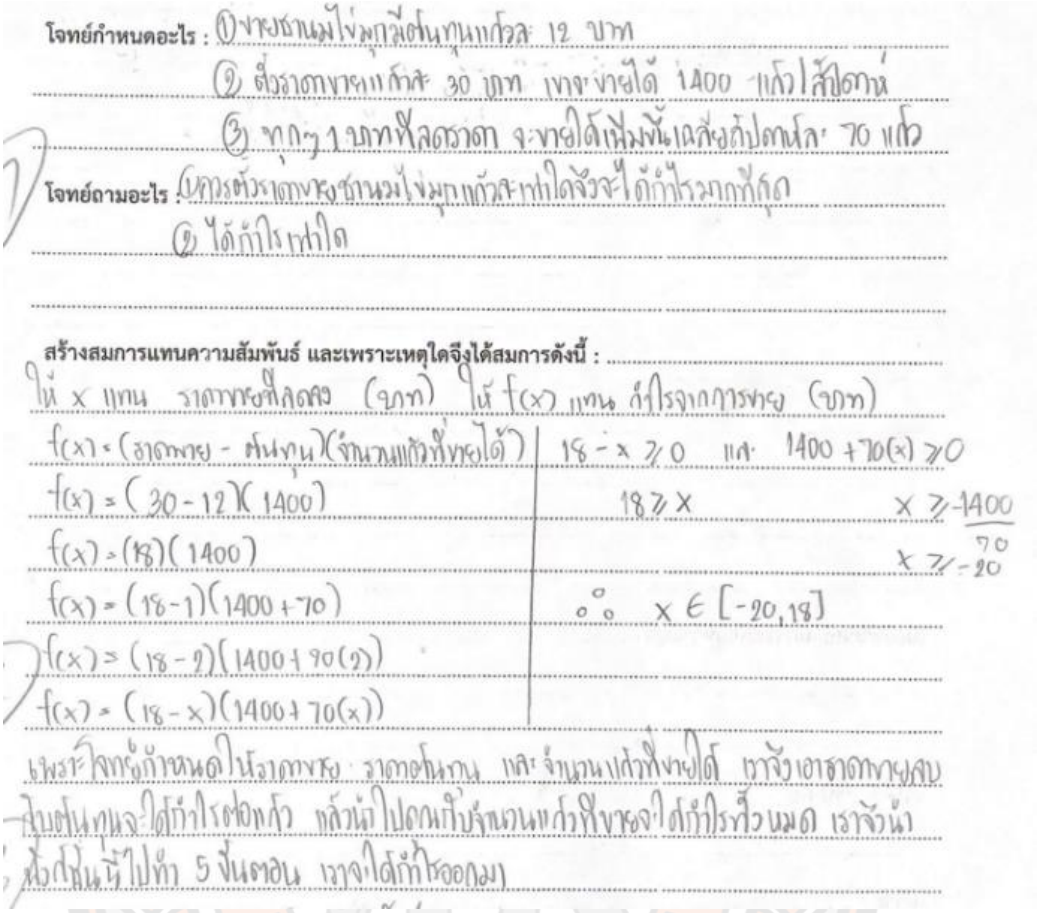
ภาพ 11 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 2

วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เมื่อพิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 26 คน คิดเป็นร้อยละ 78.79 ไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 1 เนื่องจากไม่มีนักเรียนอยู่ในระดับ 1 เหมือนวงจรปฏิบัติการที่ 1 ดังภาพ 12



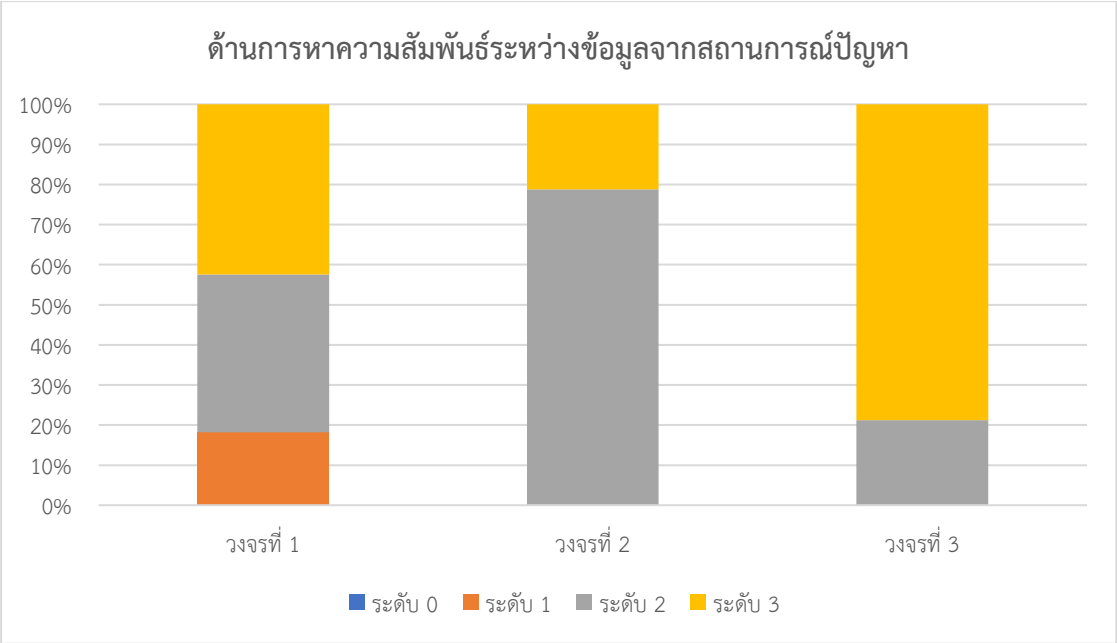
ภาพ 12 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 2

วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เมื่อพิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถระบุปัญหาและเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 26 คน คิดเป็นร้อยละ 78.79 สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 ไม่สามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 2 เนื่องจากมีนักเรียนอยู่ในระดับ 3 มากกว่าวงจรปฏิบัติการที่ 2 ดังภาพ 13



ภาพ 13 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 3

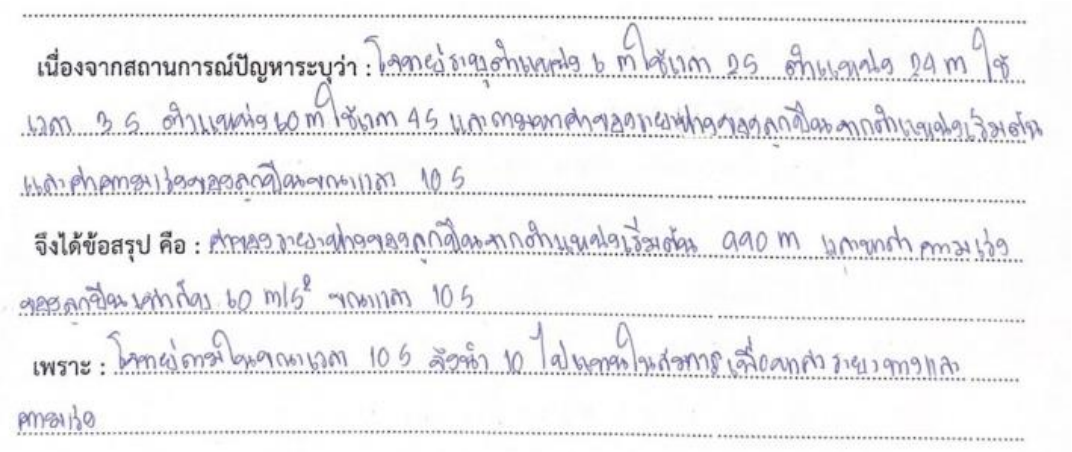
โดยสรุปทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการ เมื่อจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ตามลำดับ เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา ดังภาพ 14



ภาพ 14 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา

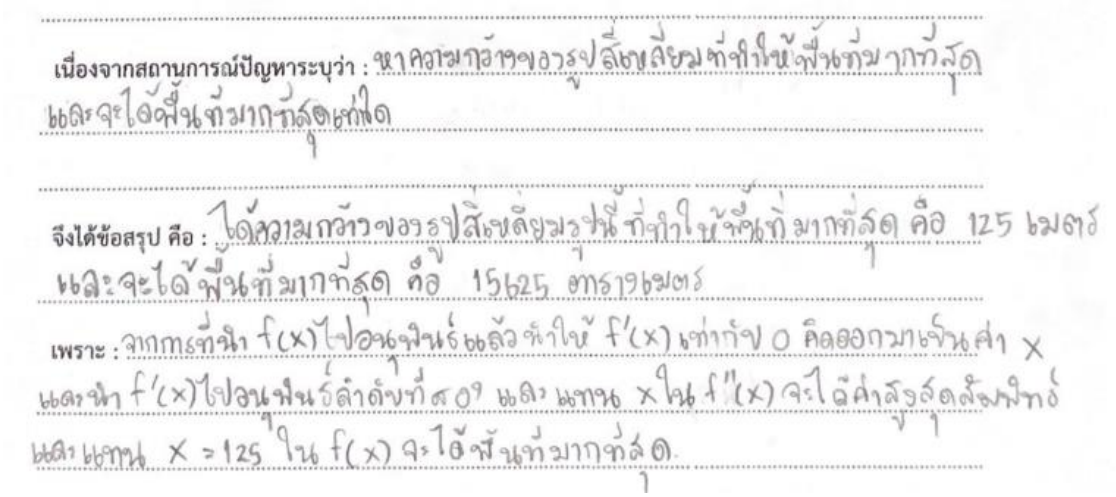
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา

วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง เมื่อพิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง ซึ่งอยู่ในระดับ 2 จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 60.61 มีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แต่ไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล และอยู่ในระดับ 1 จำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 39.39 ไม่มีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ดังภาพ 15



ภาพ 15 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 2

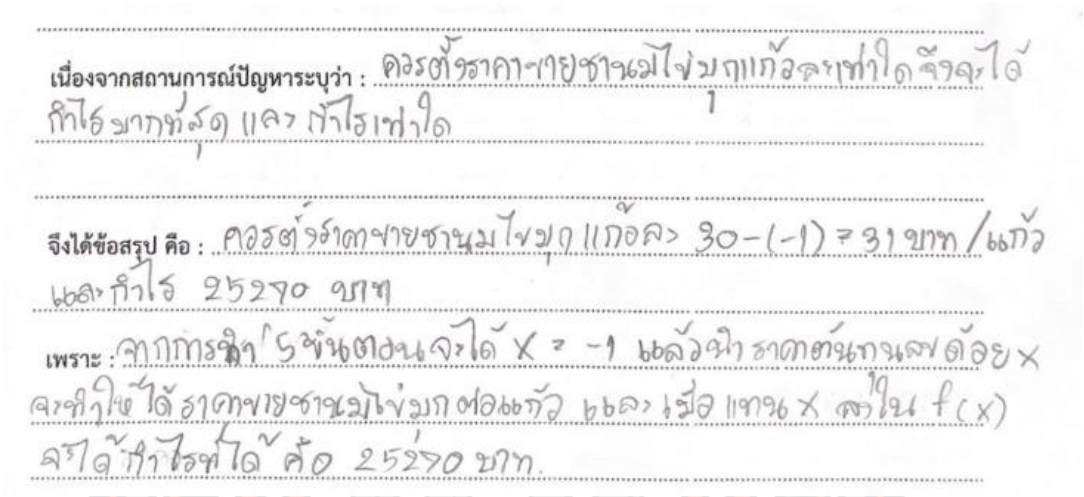
วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เมื่อพิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 60.61 อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 39.39 ไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 1 เนื่องจากมีนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับ 3 และไม่มีนักเรียนอยู่ในระดับ 1 ดังภาพ 16



ภาพ 16 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 3

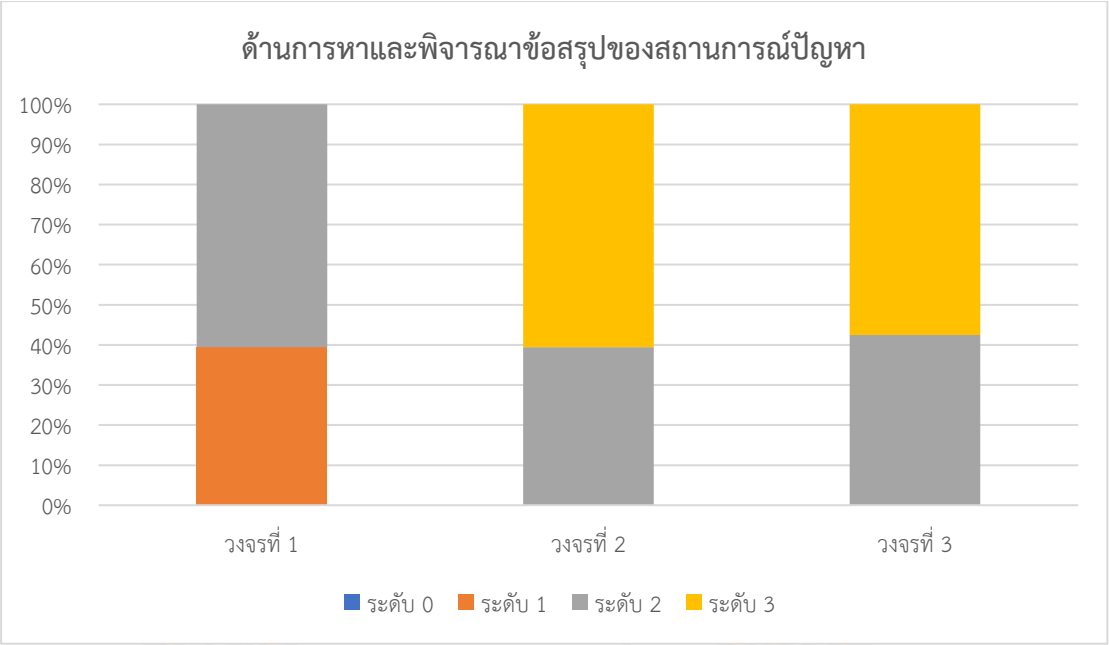
วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เมื่อพิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถหา

ข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 19 คน คิดเป็นร้อยละ 57.57 อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 42.43 ไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการอยู่ในระดับใกล้เคียงกับวงจรปฏิบัติการที่ 2 เนื่องจากมีนักเรียนอยู่ในระดับ 3 และระดับ 2 เหมือนกัน ซึ่งแต่ละระดับมีจำนวนต่างกับวงจรปฏิบัติการที่ 2 เพียง 1 คน คิดเป็นร้อยละ 3.03 เท่านั้น ดังภาพ 17



ภาพ 17 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 3

โดยสรุปทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการ เมื่อจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ตามลำดับเมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา ดังภาพ 18



ภาพ 18 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา

1.2 ทักษะการให้เหตุผลหลังจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนมีการแสดงทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังการจัดการเรียนรู้ด้วยแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังตาราง 21

ตาราง 21 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการให้เหตุผลในแบบทดสอบ

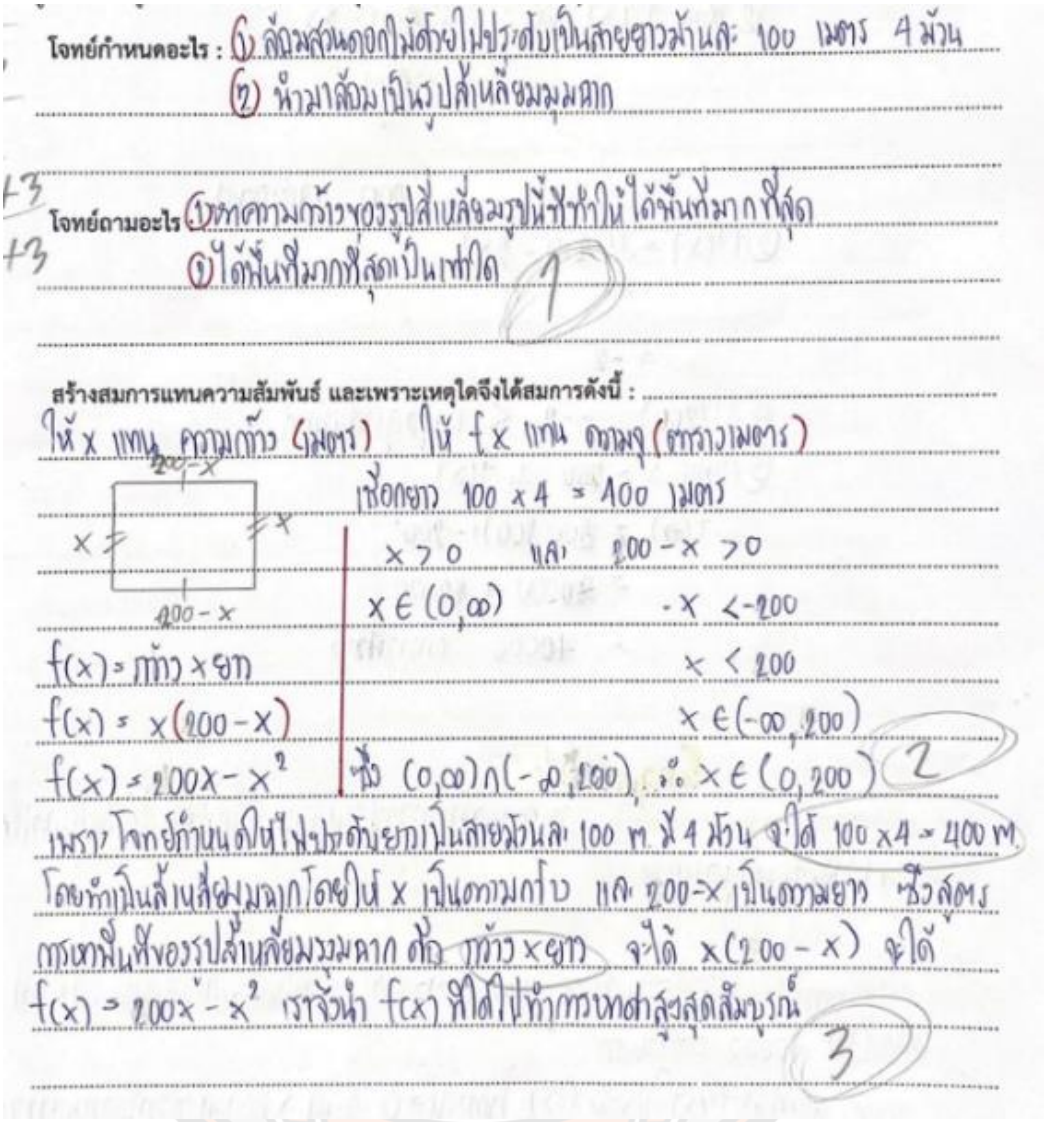
องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล	ระดับของทักษะการให้เหตุผล	จำนวนนักเรียน (ร้อยละ) สถานการณ์ที่ 2 “ล้อมสวนดอกไม้วันปีใหม่”
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	3	20 (60.61)
	2	11 (33.33)
	1	1 (3.03)
	0	1 (3.03)
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	3	16 (48.49)
	2	13 (39.39)
	1	1 (3.03)

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล	ระดับของทักษะการให้เหตุผล	จำนวนนักเรียน (ร้อยละ) สถานการณ์ที่ 2 “ล้อมสวนดอกไม้วันปีใหม่”
	0	3 (9.09)

จากตาราง พิจารณาระดับของทักษะการให้เหตุผลของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ตามองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล จากแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยจำแนกองค์ประกอบ ดังนี้

ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา

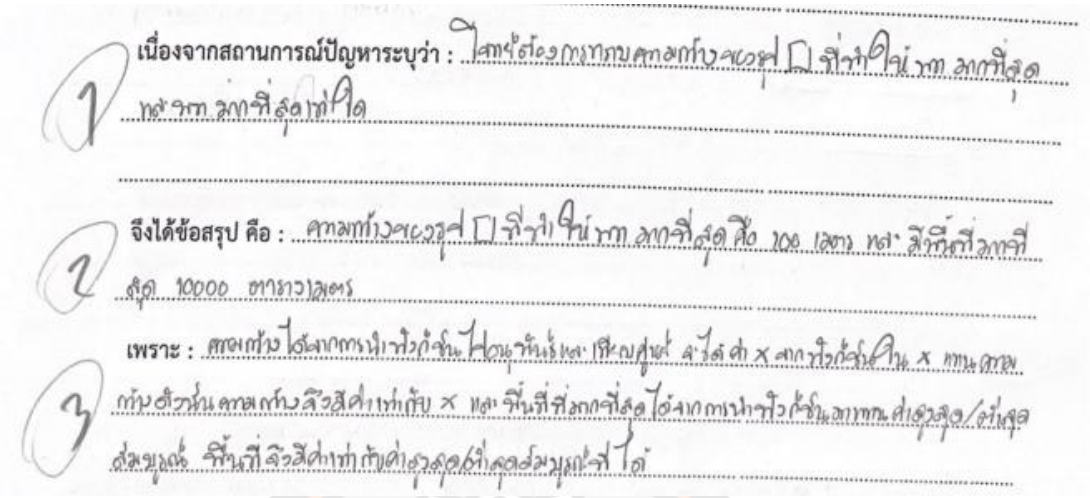
พิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 31 คน คิดเป็นร้อยละ 93.94 สามารถระบุปัญหาและระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 60.61 เขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้อง และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 11 คน คิดเป็นร้อยละ 33.33 เขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาไม่ถูกต้อง ดังภาพ 19



ภาพ 19 แสดงด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาระดับ 3

ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา

พิจารณาทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 29 คน คิดเป็นร้อยละ 87.88 สามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 16 คน คิดเป็นร้อยละ 48.49 อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 39.39 ไม่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ดังภาพ 20



ภาพ 20 แสดงด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาระดับ 3

2. ผลการส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์การส่งเสริมทักษะการโต้แย้งของนักเรียนจากเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งเป็น 2 ส่วน ได้แก่ ระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ และหลังจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

2.1 ทักษะการโต้แย้งระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนมีการแสดงทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างบทสนทนาและตาราง 22

ตัวอย่างบทสนทนาของกลุ่มนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง ดังนี้

Item 1 S4 : เราต้องแยกสมการเป็น 2 วงเล็บก่อนไหม

ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ระดับ 1

Item 2 S19 : มันต้องเป็น 1 วงเล็บนะ S4

(S19 ชี้ที่ $(t-2)^2$)

ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ระดับ 1

Item 3 S4 : ไม่ใช่ อันนี้มันต้องเป็น $(s-3)^2$ เอ้ย ต้องเป็น $(t-3)^2$ แล้วต้องทำแบบนี้

(S4 เขียน $(t-3)(t-3)$)

ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป ระดับ 1

Item 4 S19 : อ๋อ มันต้องทำเป็น 2 วงเล็บ ก็คือทำแบบนี้

(S19 เขียน $(t-3)(t-3)$)

มันจะได้แบบนี้ใช่ไหม

Item 5 S4 : ใช่ แล้วมันต้องคูณนี่ และคูณนี่

(S4 ชี้แจกแจง $(t-3)(t-3)=t^2-6t+9$)

ตัวอย่างบทสนทนาของกลุ่มนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ดังนี้

Item 1 T : ไหนนักเรียน อธิบายหน่อยว่าได้สมการเป็นอย่างไร

Item 2 S12 : $f(x)=(200-4x)(10+x)$ เพราะโจทย์กำหนดจำนวนแซนวิช 200 ชิ้น ขายชิ้นละ 10 บาท และเพิ่มราคาทุก ๆ 1 บาทต่อชิ้น แซนวิชจะขายไม่ได้เพิ่ม 4 ชิ้น เราจึงนำ 10 บวกราคาที่เพิ่มต่อชิ้น คูณกับจำนวนแซนวิชที่ขายได้ โดยทุก ๆ 1 บาท จะขายไม่ได้ 4 ชิ้น แล้วนำ $f(x)$ ไปหาช่วงของราคาขายที่ทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ระดับ 3

Item 3 T : แล้วนำไปหาช่วงของฟังก์ชันเพิ่มอย่างไร

Item 4 S12 : หาด้วยการหาอนุพันธ์ แล้วเอาไปทำอันนี้

(S12 ชี้ที่เส้นจำนวนของการแก้อสมการในแบบเรียน)

Item 5 T : โอเค ถ้าอย่างนั้น นักเรียนเขียนในหลักฐานได้เลยนะ

(S12 เขียนในหลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : การหาอนุพันธ์ และเส้นจำนวน)

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา ระดับ 3

Item 6 T : เวลาตอบเราตอบ 20 ได้ไหม

Item 7 S21 : ไม่ได้ เพราะ 20 เพราะกำหนดให้เป็นราคาขายที่เพิ่มขึ้น

ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป ระดับ 2

Item 8 S12 : ต้องเอาไปบวกก่อนค่ะ

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ ระดับ 2

Item 9 T : บวกกับอะไร

Item 10 S16 : 10 บาทค่ะ ราคาขายเดิม

Item 11 T : ดังนั้นราคาขายเป็นเท่าไร

Item 10 S12 : 30 บาทค่ะ

ตัวอย่างบทสนทนาของกลุ่มนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ดังนี้

Item 1 S20 : ครู ถ้าเราคิดแล้วได้มากกว่า 0 แล้วมันจะเป็นค่าต่ำสุดใช่ไหม ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ระดับ 1

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา ระดับ 2

Item 2 T : ค่าต่ำสุดเหรอ แต่โจทย์เขาถามความจุที่มากที่สุดนะ

Item 3 S27 : หรือว่า พวกเราหาตรงนี้ผิด

(S27 ชี้ที่ $(30,\infty) \cap (49,\infty) \cap (0,\infty)$)

Item 4 T : ผิดเพราะอะไร

Item 5 S20 : ผิดที่ $x > 30$ หรือเปล่า ครู เพราะตอนย้าย -2 มาหาร -60

เครื่องหมายอสมการเปลี่ยน

ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป ระดับ 3

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ ระดับ 2

Item 6 T : เปลี่ยนอย่างไร

Item 7 S20 : เปลี่ยนเป็น $x < 30$

Item 8 T : มีผิดอีกไหม

Item 9 S20 : $x > 49$ ค่ะ ต้องเป็น 48

Item 10 T : เครื่องหมายเปลี่ยนไหม

Item 11 S20 : เปลี่ยนด้วยค่ะ เปลี่ยนเป็น $x < 48$

ตาราง 22 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการโต้แย้งแต่ละวงจรปฏิบัติการ

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง	ระดับของทักษะการโต้แย้ง	จำนวนนักเรียน (ร้อยละ)		
		วงจรปฏิบัติการที่ 1	วงจรปฏิบัติการที่ 2	วงจรปฏิบัติการที่ 3
ด้านการสร้างข้อ	3	0	13 (39.39)	6 (18.18)
คาดการณ์และให้	2	6 (18.18)	0	20 (60.61)

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง	ระดับของทักษะการโต้แย้ง	จำนวนนักเรียน (ร้อยละ)		
		วงจรปฏิบัติการที่ 1	วงจรปฏิบัติการที่ 2	วงจรปฏิบัติการที่ 3
เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	1	27 (81.82)	20 (60.61)	7 (21.21)
	0	0	0	0
ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	3	0	6 (18.18)	6 (18.18)
	2	6 (18.18)	14 (42.43)	27 (81.82)
	1	0	6 (18.18)	0
	0	27 (81.82)	7 (21.21)	0
ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	3	0	0	20 (60.61)
	2	0	19 (57.58)	13 (39.39)
	1	6 (18.18)	7 (21.21)	0
	0	27 (81.82)	7 (21.21)	0
ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3	0	0	6 (18.18)
	2	0	12 (36.36)	20 (60.61)
	1	0	7 (21.21)	7 (21.21)
	0	33 (100)	14 (42.43)	0

จากตาราง พิจารณาระดับของทักษะการโต้แย้งของนักเรียนระหว่างการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ตามองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุลโต้แย้ง จากแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยจำแนกองค์ประกอบ ดังนี้

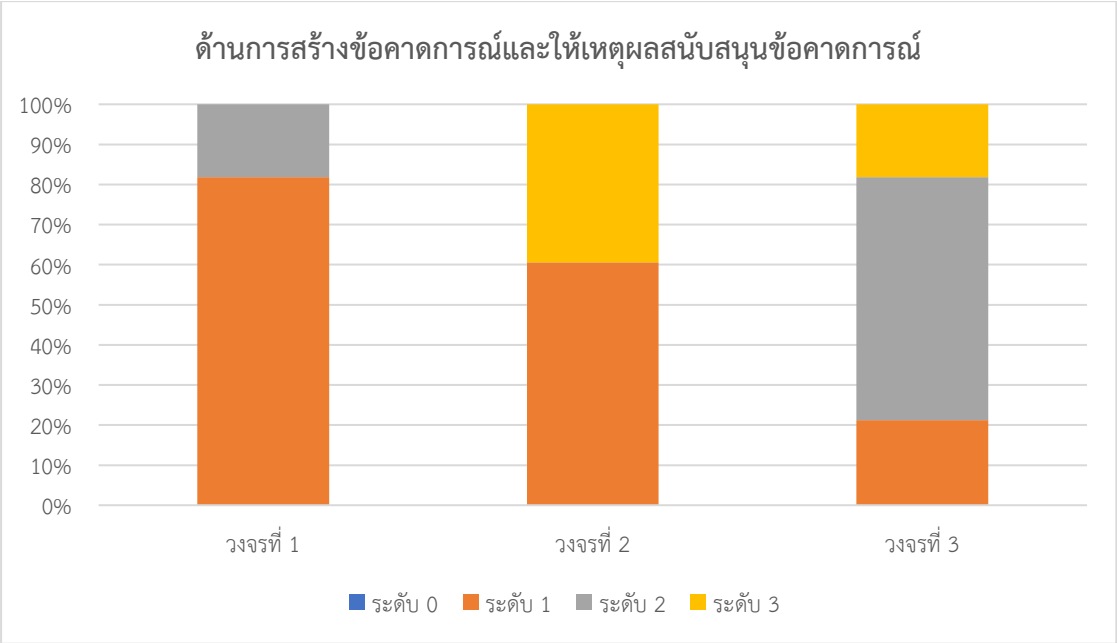
ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์

วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน ซึ่งอยู่ในระดับ 2 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 มีการให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล และอยู่ในระดับ 1 จำนวน 27 คน คิดเป็นร้อยละ 81.82 ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้

วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ พบว่า นักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 39.39 มีการให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล และอยู่ในระดับ 1 จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 60.61 ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 1 เนื่องจากมีนักเรียนอยู่ในระดับ 3 และจำนวนนักเรียนอยู่ในระดับ 1 ลดลง

วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 มีการให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 60.61 มีการให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล แต่อยู่ในระดับ 1 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 2 เนื่องจากจำนวนนักเรียนอยู่ในระดับ 1 ลดลง แม้ว่าจำนวนนักเรียนอยู่ในระดับที่ 3 จะลดลง แต่จำนวนนักเรียนอยู่ในระดับ 2 และ 3 เพิ่มขึ้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้

โดยสรุปทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการ เมื่อจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ดังภาพ 21



ภาพ 21 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา

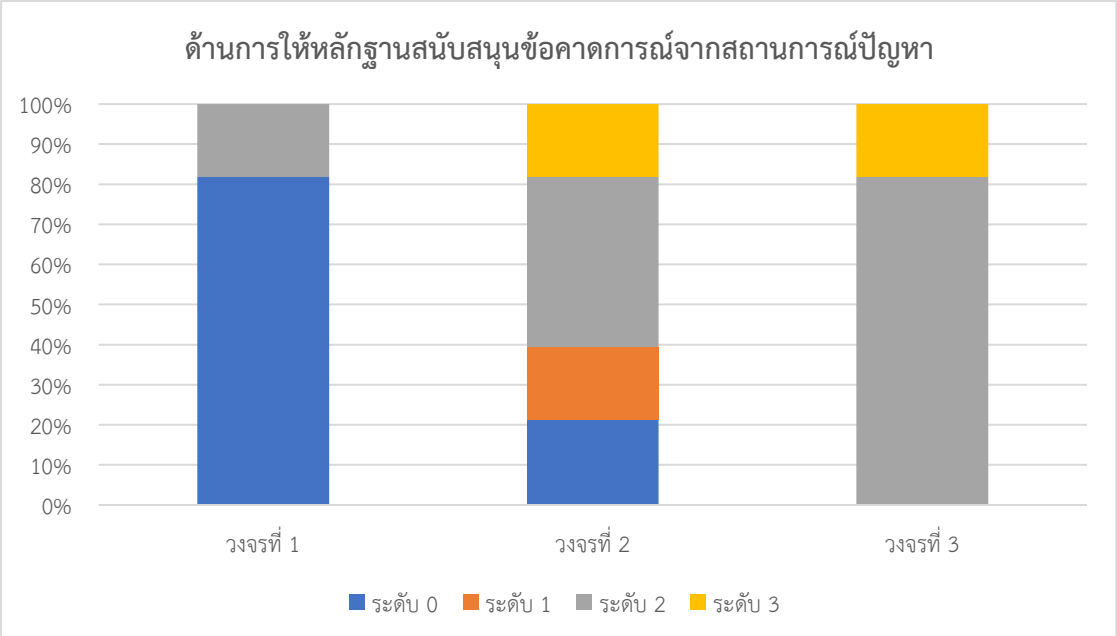
วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนบางส่วนสามารถให้หลักฐานซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้เพียง 1 หลักฐาน ซึ่งอยู่ในระดับ 2 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 0 จำนวน 27 คน คิดเป็นร้อยละ 81.82

วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน อยู่ในระดับ 2 จำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 42.43 สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้เพียง 1 หลักฐาน และอยู่ในระดับ 1 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 สามารถให้หลักฐานมาจากอารมณ์ความรู้สึกได้ แต่มีนักเรียนบางส่วนไม่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ อยู่ในระดับ 0 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจร

ปฏิบัติการที่ 1 เนื่องจากนักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ และมีนักเรียนเพียงบางส่วนที่ไม่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้

วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 27 คน คิดเป็นร้อยละ 81.82 สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้เพียง 1 หลักฐาน แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 2 เนื่องจากนักเรียนทุกคนสามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 1 หลักฐาน

โดยสรุปทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการ เมื่อจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา ดังภาพ 22



ภาพ 22 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา

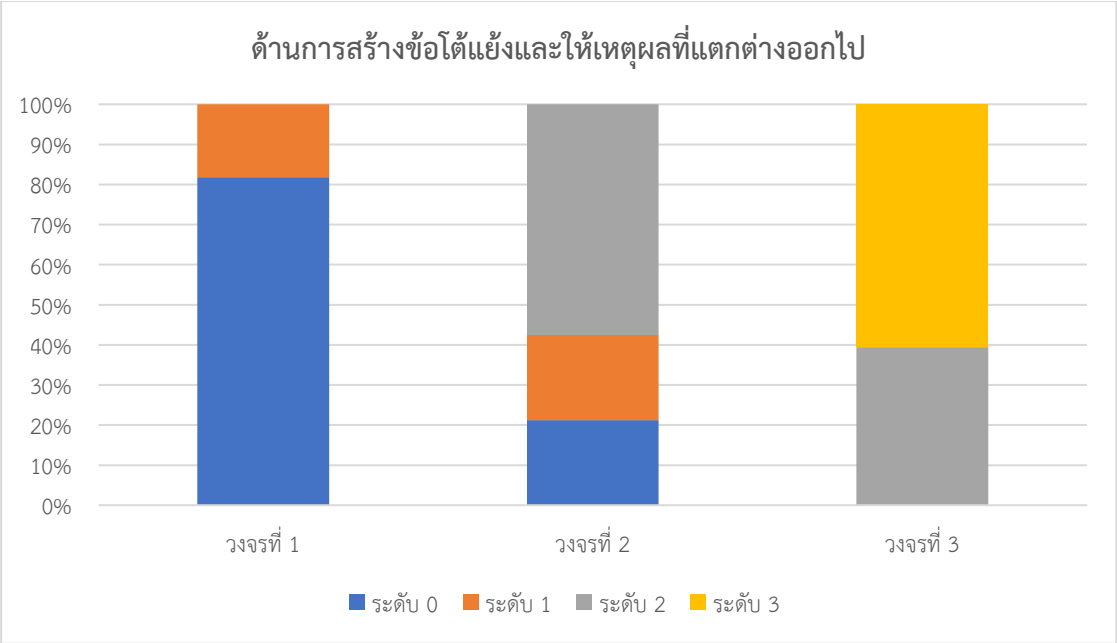
ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป

วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป พบว่า นักเรียนบางส่วนสามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน แต่ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 1 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้ อยู่ในระดับ 0 จำนวน 27 คน คิดเป็นร้อยละ 81.82

วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน ซึ่งอยู่ในระดับ 2 จำนวน 19 คน คิดเป็นร้อยละ 57.58 สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล และอยู่ในระดับ 1 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 ไม่สามารถให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ แต่มีนักเรียนบางส่วนไม่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้ อยู่ในระดับ 0 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 1 เนื่องจากมีนักเรียนส่วนใหญ่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน

วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจนและให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 60.61 ให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 39.39 ให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 2 เนื่องจากนักเรียนทุกคนสามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจนและให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้อย่างน้อย 1 เหตุผล

โดยสรุปทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการ เมื่อจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป ดังภาพ 23



ภาพ 23 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ

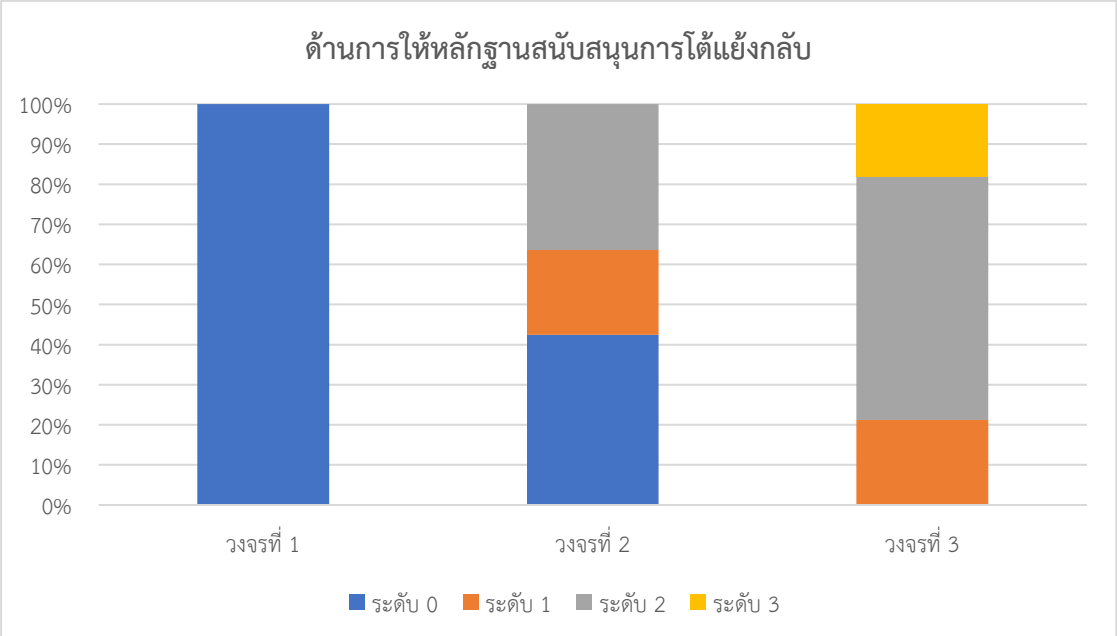
วงจรปฏิบัติการที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ พบว่า นักเรียนทุกคนไม่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 0 จำนวน 33 คน คิดเป็นร้อยละ 100

วงจรปฏิบัติการที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 2 จำนวน 12 คน คิดเป็นร้อยละ 36.36 สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ได้เพียง 1 หลักฐาน และอยู่ในระดับ 1 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ได้แต่หลักฐานมาจากอารมณ์ความรู้สึก แต่มีนักเรียนบางส่วนไม่สามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ได้ อยู่ในระดับ 0 จำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 42.43 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 1 เนื่องจากมีนักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย

ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้

วงจรปฏิบัติการที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เมื่อพิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 ให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 60.61 ให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ได้เพียง 1 หลักฐาน แต่ให้หลักฐานมาจากอารมณ์ความรู้สึก ซึ่งอยู่ในระดับ 1 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 21.21 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการจากวงจรปฏิบัติการที่ 2 เนื่องจากนักเรียนทุกคนสามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้

โดยสรุปทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการ เมื่อจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ ดังภาพ 24



ภาพ 24 แสดงร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีทักษะการโต้แย้งด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ

2.2 ทักษะการโต้แย้งหลังจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนมีการแสดงทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์หลังการจัดการเรียนรู้ด้วยแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังตาราง 23

ตาราง 23 แสดงองค์ประกอบและระดับของทักษะการโต้แย้งในแบบทดสอบ

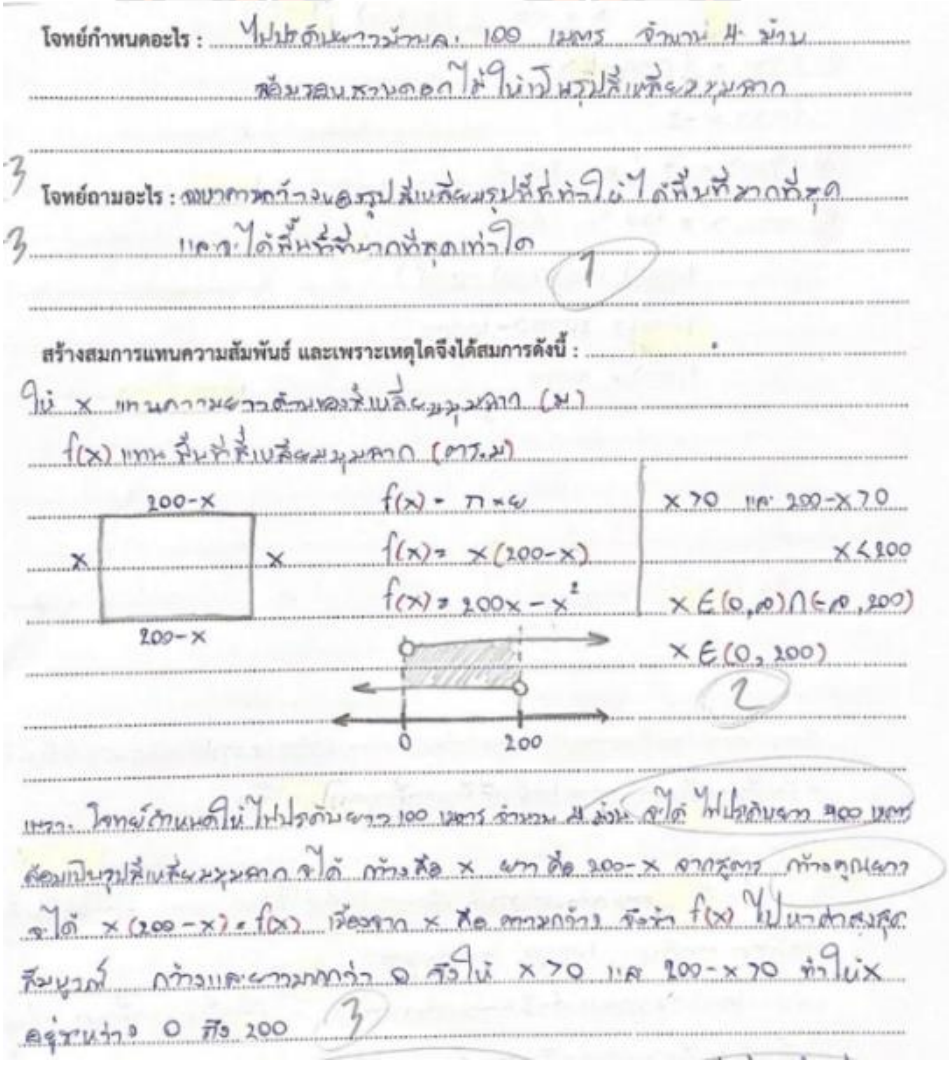
องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง	**ระดับของทักษะการโต้แย้ง**	**จำนวนนักเรียน (ร้อยละ)**
		สถานการณ์ที่ 2 “ล้อมสวนดอกไม้วันปีใหม่”
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3	27 (81.82)
	2	6 (18.18)
	1	0
	0	0
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	3	27 (81.82)
	2	5 (15.15)
	1	1 (3.03)
	0	0

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง	**ระดับของทักษะการโต้แย้ง**	**จำนวนนักเรียน (ร้อยละ)**	
		สถานการณ์ที่ 1 “แนวโน้มราคาขายลูกชิ้น”	**สถานการณ์ที่ 3 “กล่องจับสลากจากกระดาษแข็ง”**
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	3	16 (48.49)	25 (75.76)
	2	15 (45.45)	6 (18.18)
	1	1 (3.03)	2 (6.06)
	0	1 (3.03)	0
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3	20 (60.61)	22 (66.67)
	2	8 (24.24)	9 (27.27)
	1	5 (15.15)	2 (6.06)
	0	0	0

จากตาราง พิจารณาระดับของทักษะการโต้แย้งของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ตามองค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งจากแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยจำแนกองค์ประกอบ ดังนี้

ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์

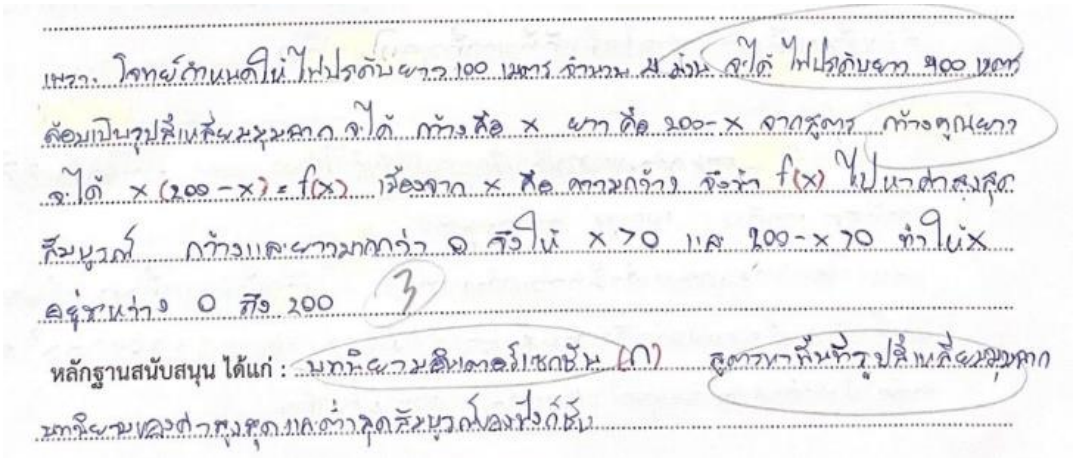
พิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 27 คน คิดเป็นร้อยละ 81.82 ให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 18.18 ให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล ดังภาพ 25



ภาพ 25 ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ระดับ 3

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา

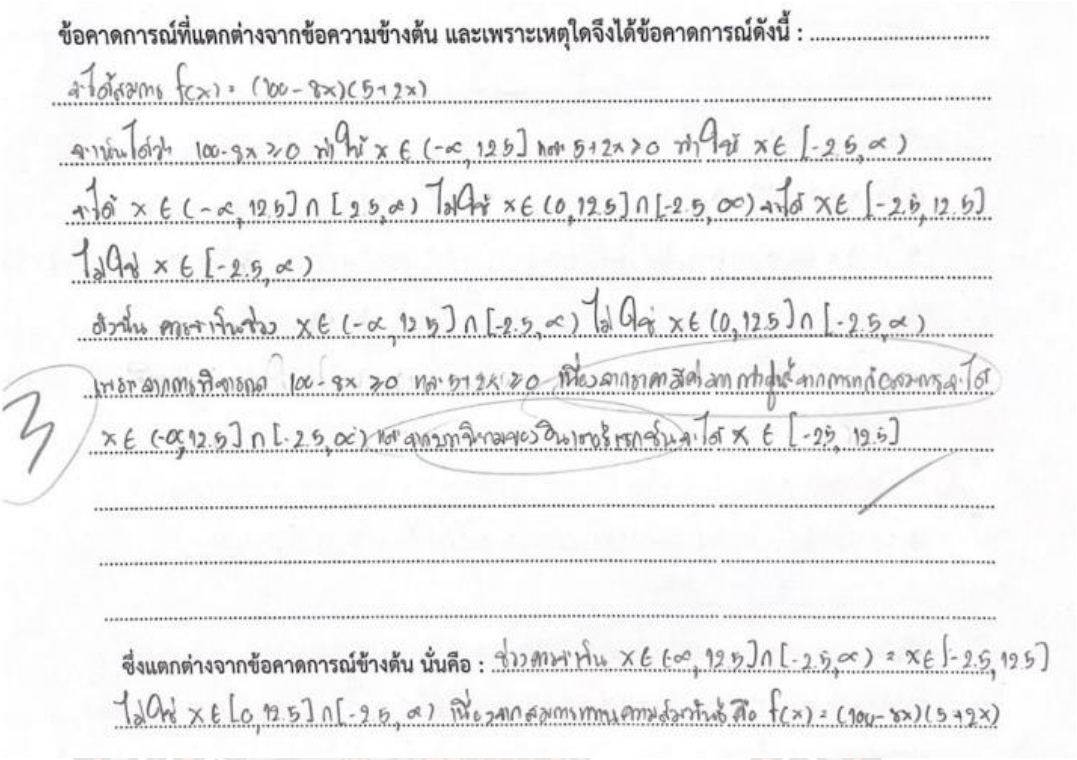
พิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่จำนวน 32 คน คิดเป็นร้อยละ 96.97 สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ ซึ่งอยู่ในระดับ 3 จำนวน 27 คน คิดเป็นร้อยละ 81.82 ให้หลักฐานได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 5 คน คิดเป็นร้อยละ 15.15 ให้หลักฐานได้อย่างเพียง 1 หลักฐาน ดังภาพ 26



ภาพ 26 แสดงด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาระดับ 3

ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป

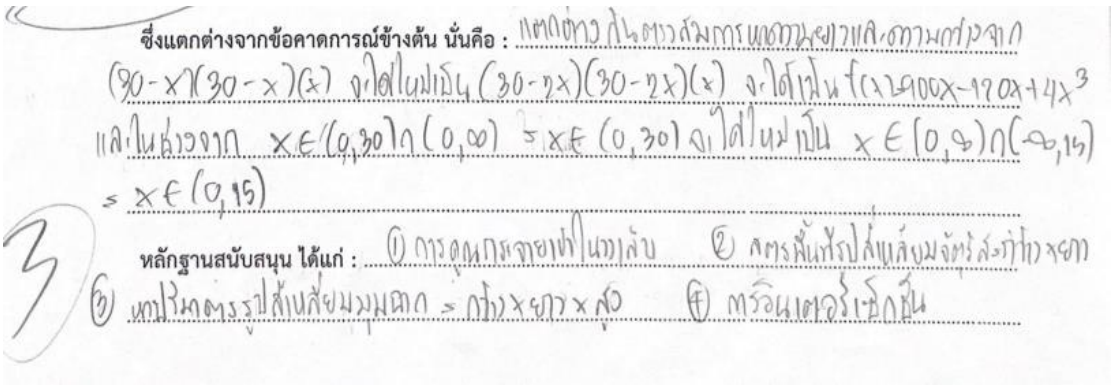
พิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้ทั้ง 2 สถานการณ์ปัญหา ซึ่งอยู่ในระดับ 3 และระดับ 2 รวมกันจำนวน 31 คน คิดเป็นร้อยละ 93.94 ดังภาพ 27



ภาพ 27 แสดงด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไประดับ 3

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ

พิจารณาทักษะการโต้แย้ง ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้อย่างน้อย 1 หลักฐานได้ทั้ง 2 สถานการณ์ปัญหา ซึ่งอยู่ในระดับ 3 และระดับ 2 รวมกันอย่างน้อย จำนวน 28 คน คิดเป็นร้อยละ 84.85 ดังภาพ 28



ภาพ 28 แสดงด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับระดับ 3

บทที่ 5
บทสรุป

การวิจัยเชิงปฏิบัติการเพื่อศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาแนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ และเพื่อศึกษาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566 จำนวน 33 คน ของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร ซึ่งดำเนินการจัดการเรียนรู้จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 การเคลื่อนที่แนวตรง แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ใช้เวลาจัดการเรียนรู้แผนละ 2 – 3 ชั่วโมง รวมทั้งหมด 8 ชั่วโมง โดยมีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยมีผลการวิจัยดังนี้

สรุปผลการวิจัย

1. แนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งแนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้จากแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ และแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ โดยมีประเด็นที่ควรเน้น ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

เป็นขั้นตอนที่นักเรียนศึกษาสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยนักเรียนทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น แล้วระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ โจทย์กำหนดอะไร และโจทย์ถามอะไร ซึ่งใน

ขั้นตอนนี้ครูควรใช้สถานการณ์ปัญหาที่มีความชัดเจนและใกล้เคียงกับบริบทชีวิตจริงของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนสามารถแยกประเด็นของสถานการณ์ปัญหาเป็นรายข้อได้ชัดเจน นอกจากนี้ครูอาจเตรียมสื่อการจัดการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาเพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียน รวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน และแนะนำให้นักเรียนระบุคำตอบเป็นประเด็น แยกเป็นรายข้อ เพื่อให้ง่ายต่อการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สร้างข้อคาดการณ์ในขั้นตอนถัดไป

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

เป็นขั้นตอนที่นักเรียนระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง โดยทำความเข้าใจข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาตามสถานการณ์ปัญหานั้น รวมทั้งสร้างความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษาสัญลักษณ์ และกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา แล้วทดลองสร้างข้อคาดการณ์ ได้แก่ สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ ระบุช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหา พร้อมเหตุผลประกอบข้อคาดการณ์นี้ให้มีความน่าเชื่อถือ และนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ทดลองสร้างได้ โดยนักเรียนส่วนที่เหลือพิจารณาข้อคาดการณ์นั้นแล้วสร้างข้อคาดการณ์ของตัวเองที่แตกต่างออกไปเพื่อโต้แย้ง โดยมีจุดมุ่งหมายให้ข้อคาดการณ์ของตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์ที่ทดลองสร้างมีความน่าเชื่อถือลดลงได้ ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนทดลองสร้างข้อคาดการณ์ให้ได้ แล้วสังเกต ค้นหาข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ ให้นักเรียนออกมานำเสนอ และครูจึงกระตุ้นให้นักเรียนส่วนที่เหลือแสดงการโต้แย้งซึ่งในทุกการแสดงออกของนักเรียน ทั้งการสร้างข้อคาดการณ์และการโต้แย้งจะต้องมีการให้เหตุผลประกอบ โดยครูต้องคอยกระตุ้นให้นักเรียนมีการแสดงเหตุผลและหลักฐานสนับสนุนที่เชื่อมโยงกันอย่างสม่ำเสมอ

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

เป็นขั้นตอนที่นักเรียนใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อน โดยนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหานั้น เช่น มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การเขียนนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ การเขียนแผนภาพ เป็นต้น เพื่อแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้การประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งนักเรียนแปลงสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการและช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด หรือปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ แล้วเขียนระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 2 ส่วน ได้แก่ สร้างสมการแทนความสัมพันธ์และเพราะเหตุใด และหลักฐานสนับสนุน ซึ่งจะต้องระบุสมการแทนความสัมพันธ์ ระบุช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ และระบุมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหา เพื่อแสดงเหตุผลที่มาของสมการแทนความสัมพันธ์และช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ โดยมีมโนทัศน์

ทางคณิตศาสตร์เป็นหลักฐานสนับสนุน ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนเลือกข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุดหรือปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ คอยให้คำแนะนำนักเรียนในการระบุข้อคาดการณ์ของตัวเองในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ โดยดูความเชื่อมโยงของข้อคาดการณ์กับสถานการณ์ปัญหา และย้ำเตือนนักเรียนไม่ให้ลืมให้เหตุผลและหลักฐานสนับสนุนประกอบการตอบในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เป็นขั้นตอนที่นักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จนได้คำตอบของปัญหาในรูปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนเขียนแสดงขั้นตอนวิธีทำ โดยนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในสมการแทนความสัมพันธ์และหลักฐานสนับสนุนที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหาเพื่อตอบคำถามว่า โจทย์ถามอะไร ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรอำนวยความสะดวกให้นักเรียนแต่ละคนเขียนแสดงขั้นตอนวิธีทำ และกระตุ้นให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่มเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีทำของตัวเอง โดยที่ครูคอยให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนเกิดปัญหาในการแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

เป็นขั้นตอนที่นักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง และนำเสนอผลการแก้ปัญหาให้อยู่ในบริบทชีวิตจริง เพื่อตอบปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งนักเรียนเขียนแปลผลลัพธ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ปัญหาในชีวิต โดยระบุในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จำนวน 3 ส่วน ได้แก่ เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า จึงได้ข้อสรุป และเพราะเหตุใด เพื่อแสดงเหตุผลที่มาของคำตอบในสถานการณ์ปัญหาในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ แล้วแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อประเมินผลว่าข้อคาดการณ์ใดเหมาะสมที่สุดในการแก้สถานการณ์ปัญหานั้น ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรตรวจสอบผลลัพธ์ในสถานการณ์ปัญหาในชีวิตของนักเรียน และกระตุ้นให้นักเรียนร่วมแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกัน เพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ที่สามารถใช้หาข้อสรุปได้ถูกต้องควรเป็นอย่างไรจึงเหมาะสมกับการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา

2. ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่ได้จากใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

2.1 ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พิจารณาจากใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ ดังนี้

ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา พบว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่สามารถระบุปัญหา ระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้อง แต่นักเรียนบางส่วนเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาไม่ถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถระบุปัญหาและมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง แต่การเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหามีโอกาสเกิดข้อผิดพลาดเป็นส่วนน้อย

ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา พบว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา ทำให้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แต่สามารถอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปและไม่สามารถอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลได้จำนวนใกล้เคียงกัน แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แต่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลได้เป็นบางครั้ง

จากผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ แสดงให้เห็นว่าทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ตามลำดับ เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผล ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา

2.2 ผลการส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ผลการส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พิจารณาจากแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 4 องค์ประกอบ ดังนี้

ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ พบว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ทำให้นักเรียนทุกคนสามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน โดยส่วนใหญ่ให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล และบางส่วนให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจนและให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้อย่างน้อย 1 เหตุผล

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา พบว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา ทำให้นักเรียนทุกคนสามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ โดยส่วนใหญ่ให้หลักฐานได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน และบางส่วนให้หลักฐานได้อย่างเพียง 1 หลักฐาน แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 1 หลักฐาน

ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป พบว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้อย่างน้อย 1 เหตุผล

ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ พบว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้อย่างน้อย 1 หลักฐาน

จากผลการส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ แสดงให้เห็นว่าทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นทุก ๆ แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ตามลำดับ เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของทักษะการโต้แย้ง ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป และด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ

อภิปรายผลการวิจัย

1. แนวทางการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

จากผลการวิจัย ผู้วิจัยได้ค้นพบแนวทางที่เหมาะสมในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ซึ่งอภิปรายผลได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

การใช้สถานการณ์ปัญหาที่มีความชัดเจนและใกล้เคียงกับบริบทชีวิตจริงของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนสามารถแยกประเด็นของสถานการณ์ปัญหาเป็นรายข้อได้ชัดเจน และการเตรียมสื่อการจัดการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาเพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียน รวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน และแนะนำให้นักเรียนระบุคำตอบเป็นประเด็น แยกเป็นรายข้อ เพื่อให้ง่ายต่อการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สร้างข้อคาดการณ์ในขั้นตอนถัดไป สอดคล้องกับงานวิจัยของวงนุช หลวงจันทร์ (2564) ที่ระบุว่า เมื่อนักเรียนสามารถระบุประเด็นปัญหาที่สำคัญของสถานการณ์ปัญหาได้ จะสามารถนำไปใช้กำหนดตัวแปรได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม ซึ่งจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนสามารถระบุความสัมพันธ์ของปัญหาโดยใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ ทั้งนี้เพราะการระบุประเด็นปัญหาจากสถานการณ์ปัญหา จะทำให้นักเรียนสามารถระบุตัวแปรที่เหมาะสม ซึ่งจะนำไปสู่การสร้างข้อคาดการณ์ที่มีความความสัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

กระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาแล้วทดลองสร้างข้อคาดการณ์ ได้แก่ สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ ระบุช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ และมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหา พร้อมเหตุผลประกอบข้อคาดการณ์นี้ให้มีความน่าเชื่อถือ สอดคล้องกับงานวิจัยของสกล ตั้งเก้าสกุล (2560) ที่ระบุว่า การร่วมกันพิจารณาความเชื่อมโยงกันระหว่างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และสถานการณ์ปัญหาด้วยการให้เหตุผล จะช่วยให้นักเรียนได้ฝึกระบุและอธิบายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาอย่างเต็มที่ พร้อมฝึกวางแผน ขั้นตอนการประยุกต์ใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ทั้งนี้เพราะการให้เหตุผลประกอบข้อคาดการณ์ นอกจากจะทำให้นักเรียนได้อธิบายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา แล้วยังทำให้นักเรียนสร้างข้อคาดการณ์โดยมีการวางแผนถึงการใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาด้วย และส่งเสริมให้นักเรียนนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ทดลองสร้างได้ โดยนักเรียนส่วนที่เหลือพิจารณาข้อคาดการณ์นั้น แล้วสร้างข้อคาดการณ์ของตัวเองที่แตกต่างออกไปเพื่อโต้แย้ง โดยมีจุดมุ่งหมายให้ข้อคาดการณ์ของตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น

หรือทำให้ข้อคาดการณ์ที่ทดลองสร้างมีความน่าเชื่อถือลดลงได้ ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนทดลองสร้างข้อคาดการณ์ให้ได้ แล้วสังเกต ค้นหาข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ ให้นักเรียนออกมานำเสนอ และครูจึงกระตุ้นให้นักเรียนส่วนที่เหลือแสดงการโต้แย้งซึ่งในทุกการแสดงออกของนักเรียน ทั้งการสร้างข้อคาดการณ์และการโต้แย้งจะต้องมีการให้เหตุผลประกอบ โดยครูต้องคอยกระตุ้นให้นักเรียนมีการแสดงเหตุผลและหลักฐานสนับสนุนที่เชื่อมโยงกันอย่างสม่ำเสมอ สอดคล้องกับงานวิจัยของธัญญารัตน์ สุวรรณไตรย์ (2565) ที่ระบุว่า การให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน ผลัดกันนำเสนอข้อคิดเห็น ถกเถียงในประเด็นต่าง ๆ ร่วมกันทั้งที่เห็นตรงกันหรือเห็นขัดแย้งกัน โดยใช้ข้อมูลมาสร้างข้อคาดการณ์แล้วเลือกเหตุผลสนับสนุนและหลักฐานที่มีความเชื่อมโยงกัน ซึ่งการดำเนินกิจกรรมการโต้แย้งที่นักเรียนได้ประเมินความน่าเชื่อถือของหลักฐานได้ ครูผู้สอนต้องมีคำถามที่ช่วยให้นักเรียนเกิดการโต้แย้งและสืบเสาะหาหลักฐาน เพื่อนำไปสู่การสรุปที่ถูกต้องและเหมาะสม ทั้งนี้เพราะการให้เหตุผลสนับสนุนและหลักฐานที่มีความเชื่อมโยงกัน จะทำให้นักเรียนสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างออกไปเพื่อโต้แย้งกับเพื่อนร่วมชั้นเรียน โดยข้อคาดการณ์นั้นจะมีความน่าเชื่อถือค่อนข้างมาก เนื่องจากมีการให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์และมีหลักฐานที่เชื่อมโยงกับเหตุผลนั้น จึงทำให้ข้อคาดการณ์มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ให้นักเรียนแปลงสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการและช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ที่แก้ปัญหาได้ โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด หรือปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ ซึ่งจะต้องระบุสมการแทนความสัมพันธ์ ระบุช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ และระบุมโนทัศน์ที่ใช้แก้ปัญหา เพื่อแสดงเหตุผลที่มาของสมการแทนความสัมพันธ์และช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ โดยมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นหลักฐานสนับสนุน ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนเลือกข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุดหรือปรับข้อคาดการณ์ของตัวเองให้มีความน่าเชื่อถือ คอยให้คำแนะนำนักเรียนในการระบุข้อคาดการณ์ของตัวเองในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ โดยดูความเชื่อมโยงของข้อคาดการณ์กับสถานการณ์ปัญหา และย้ำเตือนนักเรียนไม่ให้ลืมให้เหตุผลและหลักฐานสนับสนุนประกอบการตอบในใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ ซึ่งนักเรียนสามารถนำเสนอข้อคาดการณ์ผ่านการแสดงแทนด้วยวิธีที่หลากหลาย เช่น ใช้ตาราง หรือแผนภาพแสดงแทนความสัมพันธ์ของตัวแปรในสถานการณ์ปัญหา สอดคล้องกับงานวิจัยของกันตภณ สอนซิว (2563) ที่ระบุว่า สำหรับการให้เหตุผลของนักเรียน เมื่อนักเรียนเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกับสถานการณ์ปัญหาที่ผ่านมา จะสามารถระลึกและประมาณการหรือทดลองซ้ำ เพื่อให้สามารถอธิบายได้ว่าข้อคาดการณ์ที่ได้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ ส่วนการนำเสนอตัวแทนความคิด นักเรียนสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดได้หลากหลาย เช่น ใช้รูปภาพหรือใช้สัญลักษณ์แสดงแทนสถานการณ์ปัญหา ทั้งนี้เพราะการให้เหตุผลและหลักฐานสนับสนุนการ

ตอบข้อคาดการณ์ด้วยการนำเสนอผ่านการแสดงแทนด้วยวิธีที่หลากหลาย นอกจากจะทำให้ข้อคาดการณ์มีความน่าเชื่อถือ แล้วยังทำให้นักเรียนมีโอกาสระลึกถึงสถานการณ์ปัญหาที่ผ่านมาและได้ทดลองซ้ำเพื่อให้สามารถประเมินได้ว่า จากการให้เหตุผลและหลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์นั้นมีความสมเหตุสมผลหรือไม่ นำไปสู่การปรับปรุงข้อคาดการณ์ให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้นกว่าเดิม

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ให้นักเรียนเขียนแสดงขั้นตอนวิธีทำ โดยนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในสมการแทนความสัมพันธ์และหลักฐานสนับสนุน ที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหา เพื่อตอบคำถามว่า โจทย์ถามอะไร ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรอำนวยความสะดวกให้นักเรียนแต่ละคนเขียนแสดงขั้นตอนวิธีทำ และสนับสนุนให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่มเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีทำของตัวเอง โดยที่ครูคอยให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนเกิดปัญหาในการแก้ปัญหา สอดคล้องกับงานวิจัยของรสกมลรัตน์ ศรีภิรมย์ และ สิทธิพล อาจอินทร์ (2563) ที่ระบุว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ การที่นักเรียนได้วิเคราะห์โจทย์ แยกแยะและระบุประเด็นปัญหาให้ชัดเจน มีการวางแผนการแก้ปัญหา ดำเนินการแก้ปัญหาตามแผน และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันเพื่อหาข้อสรุป ซึ่งเป็นกระบวนการที่นักเรียนควรเรียนรู้ ฝึกฝนให้ทักษะพัฒนาขึ้นในตนเอง เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ รู้จักตรวจสอบและสะท้อนกระบวนการแก้ปัญหาสู่การบูรณาการเข้ากับกระบวนการเรียนรู้กับวิชาอื่น ทั้งนี้เพราะการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันของนักเรียน จะทำให้นักเรียนค้นพบวิธีการแก้ปัญหารูปแบบอื่นที่สามารถแก้ปัญหาเพื่อตอบในสิ่งที่โจทย์ถามได้จากการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ นำไปสู่การสร้างองค์ความรู้ใหม่ที่สามารถแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาที่พบได้

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

ให้นักเรียนเขียนแปลผลลัพธ์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ปัญหาในชีวิต โดยระบุประเด็นคำถามของสถานการณ์ปัญหา ข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา และที่มาของข้อสรุปเพื่อแสดงเหตุผลที่มาของคำตอบในสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อประเมินผลว่าข้อคาดการณ์ใดเหมาะสมที่สุดในการแก้สถานการณ์ปัญหานั้น ซึ่งในขั้นตอนนี้ครูควรตรวจสอบผลลัพธ์ในสถานการณ์ปัญหาในชีวิตของนักเรียน และกระตุ้นให้นักเรียนร่วมแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกัน เพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ที่สามารถใช้หาข้อสรุปได้ถูกต้องควรเป็นอย่างไรจึงเหมาะสมกับการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา สอดคล้องกับงานวิจัยของธชินี ไสยรส และคณะ (2562) ที่ระบุว่า การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียน เป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญซึ่งจะทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจร่วมกันจากมโนทัศน์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน โดยสำคัญที่การยอมรับความคิดเห็นที่แตกต่างกันจากการโต้แย้งด้วยเหตุผลจนได้มโนทัศน์ที่สามารถแบ่งปันและพัฒนาเป็นหลักเกณฑ์ทั่วไปทางคณิตศาสตร์ได้ ทั้งนี้เพราะการแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน จะทำให้นักเรียนได้แสดงการค้นพบว่าข้อคาดการณ์ใดบ้างที่สามารถ

ใช้หาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้ และเปรียบเทียบข้อคาดการณ์เพื่อประเมินผลว่าข้อคาดการณ์ที่เหมาะสมกับการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาควรมีลักษณะเป็นอย่างไร ซึ่งนำไปสู่การพัฒนาหลักเกณฑ์ทั่วไปทางคณิตศาสตร์ได้

แนวทางที่เหมาะสมในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ สอดคล้องกับงานวิจัยของ Lai, Kinnear, & Fung (2019) ที่ระบุว่า การให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการคิดค้นแนวคิดใหม่ ครูต้องให้ความสำคัญกับรายละเอียดของกระบวนการเรียนรู้และงานที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดค้นแนวคิดใหม่ที่มีความสัมพันธ์กับชีวิตจริงและสะท้อนการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้งจะต้องมีการให้เหตุผลประกอบกระบวนการแก้ปัญหา เพื่อให้การเรียนรู้เหล่านี้เกิดขึ้นจึงต้องมีการส่งเสริมการพัฒนาการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพราะการพัฒนาการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการเพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนได้รับการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้งและพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แต่ละขั้นตอน

2. ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

จากผลการวิจัย ผู้วิจัยได้ค้นพบผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งอภิปรายผลได้ดังนี้

2.1 ผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

เมื่อพิจารณาผลการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ ผู้วิจัยจึงอภิปรายผลได้ดังนี้

การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่สามารถระบุปัญหา ระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้อง แต่นักเรียนบางส่วนเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาไม่ถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถระบุปัญหาในขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง แล้วสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา

ในขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง แต่ในขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาของนักเรียนมีโอกาสเกิดข้อผิดพลาดเป็นส่วนน้อย เนื่องจากนักเรียนไม่สามารถแปลงสถานการณ์ปัญหาให้เป็นสมการแทนความสัมพันธ์หรือช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้อย่างถูกต้อง เพราะขาดพื้นฐานการแก้สมการ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการสร้างสมการแทนความสัมพันธ์และช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ สอดคล้องกับงานวิจัยของทรงยศ สกุลยา (2562) ที่ระบุว่า นักเรียนที่มีพื้นฐานการแก้สมการ จะสามารถตัดสินใจเลือกใช้สมการเพื่อหาคำตอบได้ถูกต้อง ซึ่งในขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ นักเรียนได้ฝึกเลือกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาที่เหมาะสมที่สุด โดยร่วมพิจารณาความคิดเห็นสนับสนุน และโต้แย้ง เพื่อให้ได้มโนทัศน์ที่จะนำมาใช้แก้ปัญหา ทั้งนี้เพราะการสร้างสมการแทนความสัมพันธ์จะต้องรู้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาเพื่อแปลงให้เป็นตัวแปรและทำอยู่ในรูปสมการ ซึ่งนักเรียนที่มีพื้นฐานการแก้สมการจะบอกได้ว่าสมการที่สร้างสามารถใช้หาคำตอบได้ถูกต้องหรือไม่ และการระบุช่วงของค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้จำเป็นต้องมีพื้นฐานการแก้อสมการ ซึ่งต้องเรียนรู้การแก้สมการมาก่อนจึงจะสามารถระบุช่วงของค่าของตัวแปรได้

การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา ทำให้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แต่สามารถอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปและไม่สามารถอธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลได้จำนวนใกล้เคียงกัน แสดงให้เห็นว่าในขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง นักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้อย่างถูกต้องโดยมีการอ้างอิงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา แต่อธิบายเพื่อสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลได้เป็นบางครั้ง เนื่องจากนักเรียนไม่เห็นความสำคัญของการอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปที่นักเรียนได้มา สอดคล้องกับงานวิจัยของณัชพล เผ่าทิพย์จันทร์ (2560) ที่ระบุว่า นักเรียนที่ไม่ได้ให้ความสำคัญกับเหตุผลที่นำมายืนยันข้อสรุป ทำให้นักเรียนระบุข้อสรุปได้ถูกต้อง แต่เขียนยืนยันข้อสรุปโดยอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์มาประกอบการอธิบายไม่ชัดเจน เพราะนักเรียนไม่คุ้นเคยกับวิธีการสอนและไม่สามารถดึงความรู้และหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องมาปรับใช้กับสถานการณ์ใหม่ ๆ ได้อย่างเหมาะสม ทั้งนี้เพราะการอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปจะเกิดขึ้นได้เมื่อนักเรียนเห็นความสำคัญของการยืนยันข้อสรุปด้วยเหตุผล ซึ่งจะต้องอาศัยการดึงความรู้และหลักการทางคณิตศาสตร์มาประกอบการอธิบาย โดยคำนึงถึงความเกี่ยวข้องกับการปรับใช้ในสถานการณ์ปัญหา

2.2 ผลการส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

เมื่อพิจารณาผลการส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 4 องค์ประกอบ ผู้วิจัยจึงอภิปรายผลได้ดังนี้

การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ ทำให้นักเรียนทุกคนสามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจนในขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยส่วนใหญ่ให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล และบางส่วนให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์เพียง 1 เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจนและให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้อย่างน้อย 1 เหตุผล เนื่องจากนักเรียนสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา ทำให้สามารถสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนได้จากมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้น สอดคล้องกับงานวิจัยของปัญญาพร เชื้อมั่ง (2562) ที่ระบุว่า ขณะที่นักเรียนทำการสำรวจความสัมพันธ์และองค์ประกอบต่าง ๆ นักเรียนจะพยายามหาเหตุผลหรือทฤษฎีบทควบคู่กันไปด้วยเพื่อเป็นเครื่องมือที่จะนำมาอ้างอิงในการพิสูจน์ข้อคาดการณ์ว่าเป็นจริง ทั้งนี้เพราะการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาเป็นการสำรวจความสัมพันธ์ที่นักเรียนจะต้องหาเหตุผลให้เป็นเครื่องมือในการสนับสนุนข้อคาดการณ์ที่นักเรียนสร้างขึ้น เพื่อยืนยันว่าข้อคาดการณ์ที่เป็นความจริง

การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา ทำให้นักเรียนทุกคนสามารถให้หลักฐาน ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้ โดยส่วนใหญ่ให้หลักฐานได้อย่างน้อย 2 หลักฐาน และบางส่วนให้หลักฐานได้เพียง 1 หลักฐาน แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 1 หลักฐาน เนื่องจากนักเรียนสามารถระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา ซึ่งเป็นหลักฐานสนับสนุนเพื่อประกอบการให้เหตุผลของนักเรียน สอดคล้องกับงานวิจัยของนิรัญชลา ทับพุ่ม (2564) ที่ระบุว่า เมื่อนักเรียนร่วมกันสืบค้นข้อมูล และนำข้อมูลมาอภิปรายร่วมกัน โดยให้ข้อมูลเป็นหลักฐาน เพื่อประกอบการตัดสินใจในการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์แลกเปลี่ยนความคิดเห็นให้ได้เรียนรู้ร่วมกัน ซึ่งจะทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจร่วมกัน ก่อให้เกิดการทบทวนและเชื่อมโยงระหว่างความคิดเห็นต่าง ๆ ส่งเสริมความอยากรู้อยากเห็นและความท้าทายในการเรียนรู้ ทั้งนี้เพราะการให้หลักฐานสนับสนุนเพื่อประกอบการให้เหตุผล ทำให้เกิดการทบทวนและเชื่อมโยงมโนทัศน์ที่นักเรียนอภิปรายร่วมกัน ซึ่งส่งเสริมให้นักเรียนเชื่อมโยงระหว่างข้อคาดการณ์กับเหตุผลโดยมีหลักฐานหรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนการให้เหตุผลนั้น จะทำให้ข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหามีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น

การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่สามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายได้อย่างชัดเจน และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้อย่างน้อย 1 เหตุผลในขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากนักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจนและให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์ได้อย่างน้อย 1 เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายเพื่อโต้แย้งกับอีกฝ่ายอย่างมีเหตุผลได้ ซึ่งนักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อโน้มน้าวเพื่อนร่วมชั้นเรียนให้เชื่อมั่นในข้อคาดการณ์ของตนเองมากขึ้นหรือทำให้ข้อคาดการณ์ของอีกฝ่ายมีความน่าเชื่อถือลดลง สอดคล้องกับงานวิจัยของกัญชลิตา เจริญผล (2566) ที่ระบุว่า การแสดงข้อคาดการณ์ของตนเองและแลกเปลี่ยนข้อคาดการณ์กับเพื่อนร่วมชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนได้พิจารณาถึงความสมเหตุสมผลของข้อคาดการณ์ที่หลากหลาย นักเรียนจะสามารถแสดงเหตุผลของตนเองเพื่อโน้มน้าวให้เพื่อนร่วมชั้นเรียนเชื่อในข้อคาดการณ์ของตนเอง และในขณะเดียวกันก็สามารถแสดงเหตุผลโต้แย้งเพื่อคัดค้านข้อคาดการณ์ของเพื่อนร่วมชั้นเรียน ทั้งนี้เพราะการให้เหตุผลประกอบการสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่าย จะแสดงให้เห็นถึงความน่าเชื่อถือของข้อคาดการณ์ที่แตกต่างที่สามารถโน้มน้าวให้เพื่อนร่วมชั้นเรียนเชื่อในข้อคาดการณ์ของนักเรียนและอาจทำให้ข้อคาดการณ์ของอีกฝ่ายมีความน่าเชื่อถือลดลงด้วย ซึ่งการมีเหตุผลรองรับข้อคาดการณ์ จะทำให้ข้อคาดการณ์มีความน่าเชื่อถือมากกว่าข้อคาดการณ์ที่ไม่มีเหตุผลใด ๆ รองรับ

การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ด้านการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้หลักฐานซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎี นิยาม หรือข้อเท็จจริงที่สนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลงได้อย่างน้อย 1 หลักฐาน เนื่องจากนักเรียนสามารถให้หลักฐานที่สนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหาได้อย่างน้อย 1 หลักฐาน แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์ของเราให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้นหรือทำให้ข้อโต้แย้งที่แตกต่างออกไปให้มีความน่าเชื่อถือลดลง ซึ่งการให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับของนักเรียนจะเกิดขึ้นเมื่อการให้เหตุผลที่แตกต่างออกไปมีความน่าเชื่อถือไม่เพียงพอที่จะทำให้เพื่อนร่วมชั้นเรียนเชื่อในข้อคาดการณ์ที่แตกต่างออกไปของตนเองได้ สอดคล้องกับงานวิจัยของธนวิทย์ วรโพธิ์ และ นิศากร บุญเสนา (2566) ที่ระบุว่า นักเรียนหนึ่งคนสามารถทำได้หลากหลายหน้าที่ในการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ซึ่งองค์ประกอบที่มักขาดหายไป นั่นคือการให้หลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อยืนยันให้น่าเชื่อถือยิ่งขึ้น ซึ่งหลักฐานสนับสนุนจะถูกนำมาใช้เมื่อข้อยืนยันนั้นไม่น่าเชื่อถือเพียงพอสำหรับผู้อ่านหรือผู้ฟัง และนักเรียนมักให้ข้อยืนยันเพียงอย่างเดียวในแต่ละประเด็นการโต้แย้ง เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในแต่ละประเด็นการโต้แย้ง ทั้งนี้เพราะการให้เหตุผล

ประกอบการสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากของอีกฝ่ายเพียงอย่างเดียวไม่สามารถทำให้ข้อคาดการณ์มีความน่าเชื่อถือเพียงพอต่อการเป็นที่ยอมรับ ดังนั้นจึงต้องมีการให้หลักฐานสนับสนุนเพื่อยืนยันการให้เหตุผลประกอบข้อคาดการณ์ให้มีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น เพื่อให้สามารถโต้แย้งกับข้อคาดการณ์ของอีกฝ่ายได้

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้จัดการเรียนรู้

1.1 การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการแก้สถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งนักเรียนให้ความสนใจกับสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับบริบทชีวิตจริงของนักเรียนมากกว่าสถานการณ์ปัญหาที่นักเรียนไม่คุ้นเคยและนักเรียนอาจไม่สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่มีความซับซ้อนทางภาษาได้ ดังนั้นการเลือกใช้สถานการณ์ปัญหาของครู ควรใช้สถานการณ์ปัญหาที่มีความชัดเจนทางภาษาและสถานการณ์ปัญหาควรใกล้เคียงกับบริบทชีวิตจริงของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนสามารถแยกประเด็นของสถานการณ์ปัญหาเป็นรายข้อได้ชัดเจน และง่ายต่อการระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สร้างข้อคาดการณ์

1.2 การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่มีขั้นตอนการมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่เพียงพอในการมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นครูควรทบทวนความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้เพียงพอต่อการเรียนรู้สถานการณ์ปัญหาที่กำหนดและอำนวยความสะดวกให้นักเรียนแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกับเพื่อนร่วมชั้นเรียน เพราะการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันจะทำให้นักเรียนค้นพบวิธีการแก้ปัญหารูปแบบอื่นที่นำไปสู่การสร้างองค์ความรู้ใหม่ที่สามารถแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาที่พบได้

1.3 การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ครูมีบทบาทสำคัญที่จะกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา แล้วทดลองสร้างข้อคาดการณ์ด้วยตัวเอง ซึ่งจะนำไปสู่การโต้แย้งของนักเรียนที่มีข้อคาดการณ์ที่แตกต่างกัน ดังนั้นครูควรเลือกใช้คำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสงสัยในข้อคาดการณ์ของตัวเองหรือข้อคาดการณ์ของเพื่อนร่วมชั้นเรียน ให้นักเรียนเกิดการคิด แลกเปลี่ยนเรียนรู้ และอภิปรายร่วมกันโดยใช้เหตุผลและหลักฐานสนับสนุน ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

1.4 การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์สามารถใช้เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ที่เกี่ยวข้องกับการนำความรู้

จำนวนและพีชคณิตไปใช้แก้โจทย์ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ เช่น โจทย์ปัญหาการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โจทย์ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เป็นต้น

2. ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ผู้วิจัยศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งมีการเชื่อมโยงกับสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงและได้ใช้โปรแกรม Desmos ช่วยในการจำลองสถานการณ์ปัญหาให้มีความเหมาะสมกับนักเรียน ทำให้นักเรียนสามารถเข้าใจสถานการณ์ปัญหาได้ง่ายยิ่งขึ้น ผู้วิจัยจึงเสนอว่า ควรศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ร่วมกับกระบวนการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงหรือชุดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยโปรแกรม Desmos เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วยกระบวนการที่หลากหลายในเนื้อหาอื่นที่เกี่ยวข้องกับแคลคูลัสเบื้องต้น เช่น ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ปริพันธ์จำกัดเขต และพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

2.2 ผู้วิจัยได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้แล้ว ทำให้นักเรียนพัฒนาทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในการมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น แต่ผู้วิจัยยังไม่ได้ศึกษาการส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในขั้นตอนอื่นของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยจึงเสนอว่า ควรส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในขั้นตอนอื่น ๆ เพิ่มเติม ได้แก่ ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง ซึ่งเป็นขั้นตอนที่มีการแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันของนักเรียน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กมลวรรณ ใจอารีย์. (2556). *ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยวิธีการเรียนแบบร่วมมือ เทคนิคเพื่อนเรียน เรื่อง ปฏิยานุพันธ์ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6* (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. สืบค้นจาก https://ir.swu.ac.th/jspui/bitstream/123456789/3952/1/Kamonwan_J.pdf

กัญชลิตา เจริญผล. (2566). *การส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง รูปสามเหลี่ยม โดยการจัดการเรียนรู้แบบการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก. มหาวิทยาลัยนเรศวร. สืบค้นจาก https://so02.tci-thaijo.org/index.php/JRKSA/article/view/262719

กันตภณ สอนชิว. (2563). *การพัฒนาความสามารถการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์ โดยวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3* (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิตย์. สืบค้นจาก https://libdoc.dpu.ac.th/thesis/Kantapon.Son.pdf

กาญจนา อรอินทร์, ทรงชัย อักษรคิด, ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์, และ สกล ตั้งเก้าสกุล. (2566). การพัฒนาความสามารถในการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ด้วยการจัดการเรียนรู้โดยวิธีการแบบเปิด. *วารสารการบริหารนิติบุคคลและนวัตกรรมท้องถิ่น, 9*(7), 215-231.

กิติโรจน์ ปัณฑรนนทกะ, วิชัย เสวกงาม, และ อัมพร ม้าคนอง. (2563). การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนตามแนวคิดกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์และการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. *วารสารครุศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 48*(3), 21-40. สืบค้นจาก http://eresource.car.chula.ac.th/chula-ejournals/openpdf/openpdf.php?id=12712

จุฑามาส โจชัยชาญ, และ วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล. (2562). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่มีต่อทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. *วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร, 21*(3), 37-47. สืบค้นจาก https://so06.tci-thaijo.org/index.php/edujournal_nu/article/view/91313?fbclid=IwZXh0bgNhZW

0CMTAAAR10w38YZaGMo5eqVLS-dLu3J5Wu18a5xMGrKxu42nX2k6SSZRWqKJPpSS8_aem_AcUex4BF3FbjvGSKzK97dS98CkzLQUN6ivPk_WzbSiznlVDDQTFtyFokTEhkIjDHK51zYFy5UFzSBaWePMJ6dotC

เฉลิมพงษ์ เหมืองห้า. (2558). *ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ชรินรัตน์ ด้วงธรรม. (2564). *การพัฒนาความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ ด้วยการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก. มหาวิทยาลัยนเรศวร. สืบค้นจาก https://so02.tci-thaijo.org/index.php/JRKSA/article/view/256343/174126?fbclid=IwAR1I-jwgxNZOUnz3V9aid1v86HYKQSp4jUyAcjGOhOlKZpl9hI3DBh_uB78

ณัชพล เผ่าทิพย์จันทร์. (2560). *ผลของการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพจากความไม่สมบูรณ์ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2* (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นจาก https://so01.tci-thaijo.org/index.php/OJED/article/view/202424

ทรงยศ สกุลยา. (2562). *การวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก. มหาวิทยาลัยนเรศวร. สืบค้นจาก http://www.edu.nu.ac.th/th/news/docs/download/2020_06_09_12_12_12.pdf?fbclid=IwAR2mu415qkx57IwbCKb7suOMq67pOImqez-Al5coYs4vz8LD_C71jNi2yVk

ธชินี ไสยรส, สมควร สีชมภู, และ ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2562). การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. *การประชุมวิชาการเสนอผลงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษาแห่งชาติ ครั้งที่ 20*, มหาวิทยาลัยขอนแก่น. สืบค้นจาก https://app.gs.kku.ac.th/gs/th/publicationfile/item/20th-ngrc-2019/HMP2/HMP2.pdf

ธนวิทย์ วรโพธิ์, และ นิศากร บุญเสนา. (2566). การโต้แย้งของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่มีการใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. *วารสาร มจร พุทธปัญญาปริทรรศน์, 8*(4), 218-228. สืบค้นจาก https://so03.tci-thaijo.org/index.php/jmbr/article/view/263008

ธัญญารัตน์ สุวรรณไตรย์. (2565). *การพัฒนาทักษะการโต้แย้งทางวิทยาศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ด้วยการจัดการเรียนรู้แบบสืบเสาะที่ขับเคลื่อนด้วยกลวิธีการโต้แย้งร่วมกับการใช้คำถามระดับสูง เรื่อง ทรัพยากรพลังงาน* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. สืบค้นจาก http://ir-ithesis.swu.ac.th/dspace/bitstream/123456789/2212/1/gs621130223.pdf

นิรัญชลา ทับพุ่ม. (2564). *การส่งเสริมทักษะการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิด เรื่อง ความคล้าย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก. มหาวิทยาลัยนเรศวร. สืบค้นจาก http://www.edu.nu.ac.th/th/news/docs/download/2021_06_23_12_04_16.pdf?fbclid=IwAR1U-xRFd_H1SIqLsG-B06wOltSlujwMvYEE-j_1QRydvQpRKxafn3TGWFw

ปัญญาพร เชื้อมั่ง. (2562). *การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. สืบค้นจาก http://ir-ithesis.swu.ac.th/dspace/bitstream/123456789/584/1/gs601110141.pdf

แพรไหม สามารถ. (2555). *การพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์* (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นจาก https://dric.nrct.go.th/Search/ShowFulltext/2/280699?fbclid=IwAR1vTHeXOgnKDncG2NHPK4MSdFXsgCnh2DrZuDWQ8qUyaWQM8mRG1e6-4rY

มะลิวรรณ งามยิ่ง. (2563). *การพัฒนาหลักสูตรความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา* (วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต). กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. สืบค้นจาก http://ir-ithesis.swu.ac.th/dspace/bitstream/123456789/1273/1/gs571150010.pdf

รสกมลรัตน์ ศรีภิรมย์, และ สิทธิพล อาจอินทร์. (2563). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ด้วยการ

จัดการเรียนรู้รูปแบบ SSCS ร่วมกับแนวคิด DAPIC. *การประชุมวิชาการเสนอผลงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษาแห่งชาติ ครั้งที่ 21*, มหาวิทยาลัยขอนแก่น. สืบค้นจาก https://app.gs.kku.ac.th/gs/th/publicationfile/item/21th-ngrc-2020/HMP9/HMP9.pdf

วรุฒ หล้าบือ. (2565). *ผลการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนร่วมกับกลวิธีเชิงอภิปัญญาที่มีต่อสมรรถนะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยนเรศวร.

วารินทร์ จันทวงษ์. (2564). *การจัดการเรียนรู้เชิงรุกร่วมกับงานทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล เรื่อง การสร้างทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยนเรศวร.

วรนุช หลวงจันทร์. (2564). *การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง ร้อยละและอัตราส่วน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต). พิษณุโลก. มหาวิทยาลัยนเรศวร. สืบค้นจาก http://www.edu.nu.ac.th/th/news/docs/download/2021_07_19_14_45_22.pdf

สกล ตั้งเก้าสกุล. (2560). *การพัฒนาชุดกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดการใช้บริบทเป็นฐานร่วมกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3* (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นจาก https://so01.tci-thaijo.org/index.php/OJED/article/view/141974

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2566). *เกี่ยวกับ PISA*. PISA THAILAND. สืบค้นจาก https://pisathailand.ipst.ac.th/about-pisa/

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). *ตัวอย่างข้อสอบการประเมินผลนานาชาติ PISA : คณิตศาสตร์*. (พิมพ์ครั้งที่ 2). สืบค้นจาก https://pisathailand.ipst.ac.th/isbn-9786167235325/

สาธินี วารีศรี. (2564). การจัดการเรียนรู้วิชาแคลคูลัสของนักศึกษาชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา ด้วยรูปแบบการเรียนรู้แบบย้อนกลับร่วมกับการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD. *วารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา, 16*(1), 120-128.

สิรินภา กิจเกื้อกูล. (2557). *การจัดการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ทิศทางสำหรับครูศตวรรษที่ 21*. เพชรบูรณ์: จุลดิสการพิมพ์.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). สืบค้นจาก http://academic.obec.go.th/images/document/1580786328_d_1.pdf

Susanta, Agus, Sumardi, Hari, & Susanto, Edi. (2022). Students' Mathematical Literacy Ability in Solving Problems on Pattern Material Using the Bengkulu Local Contexts. *Journal Didaktik Matematika, 9*(2), 343-357. doi:10.24815/jdm.v9i2.26741

Hermawan, L I, Lestari, N D S, Rahmawati, A F, & Suwarno (2019). Supporting Students' Reasoning and Argumentation Skills Through Mathematical Literacy Problem on Relation and Function Topic. *Earth and Environmental Science, 243*, 1-8. doi:10.1088/1755-1315/243/1/012106

Nugroho, Hartomo Adhi, Mulyono, & Hidayah, Isti. (2020). Mathematical Literacy in Discovery Learning with Scaffolding Strategy Reviewed from Self Efficacy. *Unnes Journal of Mathematics Education Research, 9*(1), 44-51. Retrieved from https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujmer/article/view/30455

Chen, Y T, & Wang, J H. (2016). Analyzing with Posner’s Conceptual Change Model and Toulmin’s Model of Argumentative Demonstration in Senior High School Students’ Mathematic Learning. *International Journal of Information and Education Technology, 6*(6), 457-464. Retrieved from https://www.ijiet.org/vol6/732-M04.pdf

Lai, Mun Yee, Kinnear, Virginia, & Fung, Chun Ip. (2019). Teaching mathematics for understanding in primary schools: could teaching for mathematising be a solution?. *International journal for mathematics teaching and learning, 20*(1), 1-17. Retrieved from https://dro.deakin.edu.au/articles/journal_contribution/Teaching_mathematics_for_understanding_in_primary_schools_could_teaching_for_mathematising_be_a_solution_/20725165

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก รายชื่อผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย การค้นคว้าอิสระ เรื่อง การจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ มีรายชื่อผู้เชี่ยวชาญดังนี้

1. ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์

อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

2. ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ / คณิตศาสตร์ศึกษา

ดร.อาทร นกแก้ว

อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

3. ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษา

นางสาววรีย์ วงราช

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ชำนาญการพิเศษ

โรงเรียนโพธิธรรมสุวัฒน์ จังหวัดพิจิตร

ภาคผนวก ข ผลการประเมินความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ตาราง 24 แสดงผลการประเมินความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

รายการประเมิน	ระดับความเหมาะสม					ผลการประเมิน
	5	4	3	$\bar{x}$	$S.D.$	
1. ด้านจุดประสงค์การเรียนรู้						
1.1 สอดคล้องกับตัวชี้วัด / ผลการเรียนรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้	5	5	5	5	0	มากที่สุด
1.2 ชัดเจน นำไปสู่การจัดกิจกรรมการเรียนรู้	5	5	5	5	0	มากที่สุด
1.3 ชัดเจน นำไปสู่การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้	5	5	5	5	0	มากที่สุด
ค่าเฉลี่ย				**5**	**0**	**มากที่สุด**
2. ด้านสาระสำคัญ						
2.1 สอดคล้องกับเรื่องที่สอน	5	5	5	5	0	มากที่สุด
2.2 เขียนสาระสำคัญในลักษณะของความคิดรวบยอดหรือแก่นของความรู้ที่สำคัญ	5	5	5	5	0	มากที่สุด
ค่าเฉลี่ย				**5**	**0**	**มากที่สุด**
3. ด้านกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์						
3.1 สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	5	5	5	5	0	มากที่สุด
3.2 เหมาะสมกับระดับชั้นของผู้เรียน	5	5	5	5	0	มากที่สุด
3.3 มีความน่าสนใจ	5	5	5	5	0	มากที่สุด

3.4 มีความเป็นไปได้ในการนำไปใช้สอนจริง	5	5	5	5	0	มากที่สุด
3.5 ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	4	5	5	4.67	0.82	มากที่สุด
ค่าเฉลี่ย				**4.93**	**0.16**	**มากที่สุด**
4. ด้านสื่อและแหล่งการเรียนรู้						
4.1 สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้	4	5	5	4.67	0.82	มากที่สุด
4.2 ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	4	5	5	4.67	0.82	มากที่สุด
ค่าเฉลี่ย				**4.67**	**0.82**	**มากที่สุด**
5. ด้านการวัดและประเมินผล						
5.1 สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	4	5	4	4.33	0.82	มาก
5.2 วิธีการและเครื่องมือวัดผลเหมาะสมกับจุดประสงค์การเรียนรู้	4	5	4	4.33	0.82	มาก
5.3 เกณฑ์การประเมินผลการเรียนรู้มีความชัดเจน	4	5	4	4.33	0.82	มาก
ค่าเฉลี่ย				**4.33**	**0.82**	**มาก**

ตัวอย่างแบบประเมินแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

แผนการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การเคลื่อนที่แนวตรง

(สำหรับผู้เชี่ยวชาญ)

<u>คำชี้แจง</u> แบบประเมินแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ฉบับนี้ ใช้สำหรับผู้เชี่ยวชาญประเมินเพื่อพิจารณาความเหมาะสมตามองค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้ โดยทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของท่าน ซึ่งระดับความคิดเห็นมี 5 ระดับ ดังต่อไปนี้

เหมาะสมมากที่สุด ให้คะแนน 5 คะแนน
เหมาะสมมาก ให้คะแนน 4 คะแนน
เหมาะสมปานกลาง ให้คะแนน 3 คะแนน
เหมาะสมน้อย ให้คะแนน 2 คะแนน
เหมาะสมน้อยที่สุด ให้คะแนน 1 คะแนน

รายการประเมิน	ระดับความเหมาะสม 5	4	3	2	1	ข้อเสนอแนะ
1. ด้านจุดประสงค์การเรียนรู้						
1.1 สอดคล้องกับตัวชี้วัด / ผลการเรียนรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้						
1.2 ชัดเจน นำไปสู่การจัดกิจกรรมการเรียนรู้						
1.3 ชัดเจน นำไปสู่การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้						
2. ด้านสาระสำคัญ						
2.1 สอดคล้องกับเรื่องที่สอน						
2.2 เขียนสาระสำคัญในลักษณะของความคิดรวบยอดหรือแก่นของความรู้ที่สำคัญ						
3. ด้านกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์						
3.1 สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้						

รายการประเมิน	ระดับความเหมาะสม 5	4	3	2	1	ข้อเสนอแนะ
3.2 เหมาะสมกับระดับชั้นของผู้เรียน						
3.3 มีความน่าสนใจ						
3.4 มีความเป็นไปได้ในการนำไปใช้สอนจริง						
3.5 ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์						
4. ด้านสื่อและแหล่งการเรียนรู้						
4.1 สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้						
4.2 ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์						
5. ด้านการวัดและประเมินผล						
5.1 สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้						
5.2 วิธีการและเครื่องมือวัดผลเหมาะสมกับจุดประสงค์การเรียนรู้						
5.3 เกณฑ์การประเมินผลการเรียนรู้มีความชัดเจน						

บันทึกความคิดเห็นเพิ่มเติม

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้เชี่ยวชาญ

(.....)

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ภาคผนวก ค ผลการประเมินความตรงเชิงเนื้อหาของความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ตาราง 25 แสดงผลการประเมินความตรงเชิงเนื้อหาของความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ชื่อสถานการณ์	ข้อที่	ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
			คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
แนวโน้มราคาขายลูกชิ้น	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
		องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 4	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
ชื่อสถานการณ์	**ข้อที่**	**ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
ล้อมสวนดอกไม้วันปี	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

ใหม่		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
		องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 4	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
ชื่อสถานการณ์	**ข้อที่**	**ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
กล่องจับสลากจากกระดาษแข็ง	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
		องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบ	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

		ที่ 4						
ชื่อสถานการณ์	**ข้อที่**	**ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
กำไรจากพวงกุญแจ	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
		องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 4	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
ชื่อสถานการณ์	**ข้อที่**	**ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
กำไรจากผลไม้อบแห้ง	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
		องค์ประกอบ	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

		ที่ 1						
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 4	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

ชื่อสถานการณ์	**ข้อที่**	**ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
ล้อมเชือกรอบต้นไม้ใหญ่	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 4	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

ชื่อสถานการณ์	**ข้อที่**	**ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
ล้อมเชือกรอบต้นไม้ใหญ่	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 4	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

ชื่อสถานการณ์	**ข้อที่**	**ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
กล่องสะสมจากกระดาษ	1	องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

แข็ง		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		ทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**รวม**	**ค่า IOC**	**สรุปผล**
			คนที่ 1	**คนที่ 2**	**คนที่ 3**			
		องค์ประกอบที่ 1	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 2	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
	2	องค์ประกอบที่ 3	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง
		องค์ประกอบที่ 4	+1	+1	+1	3	1	สอดคล้อง

แบบประเมินความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์
(สำหรับผู้เชี่ยวชาญ)

<u>คำชี้แจง</u> 1. แบบประเมินฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสอบถามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบข้อนั้นกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

2. แบบประเมินความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบข้อนั้นกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 รายการประเมินเกี่ยวกับความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบข้อนั้นกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ แบ่งตามระดับค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) โดยทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างที่ตรงกับความคิดเห็นของท่าน โดยใช้เกณฑ์พิจารณาดังต่อไปนี้

คะแนน +1 ถ้าเห็นด้วยว่าแบบทดสอบข้อนั้นสอดคล้องกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

คะแนน 0 ถ้าไม่แน่ใจว่าแบบทดสอบข้อนั้นสอดคล้องกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

คะแนน -1 ถ้าไม่เห็นด้วยว่าแบบทดสอบข้อนั้นสอดคล้องกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ส่วนที่ 2 ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะเพิ่มเติม หากมีข้อเสนอแนะเพิ่มเติม กรุณาเขียนลงในช่องว่างที่กำหนด

ส่วนที่ 1 รายการประเมินเกี่ยวกับความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ในแบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม : แคลคูลัสเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ : หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

สถานการณ์ที่ 1 **“แนวโน้มราคาขายลูกชิ้น”**

1. เจ้าของร้านขายลูกชิ้นร้านหนึ่งขายลูกชิ้นได้วันละ 100 ไม้ ไม้ละ 5 บาท จะขายหมดทุกวัน แต่ถ้าเจ้าของร้านขึ้นราคาลูกชิ้น พบว่าทุก 2 บาทที่เพิ่มขึ้น จะมีลูกชิ้นที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 8 ไม้ จงหาว่าควรตั้งราคาขายลูกชิ้นอยู่ในช่วงใด ที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	1) โจทย์กำหนดอะไร : ... 2) โจทย์ถามอะไร : ... 3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	6) เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ... 7) จึงได้ข้อสรุป คือ : ... 8) เพราะ : ...				

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อ	4) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

คาดการณ์จาก สถานการณ์ปัญหา

2. เจ้าของร้านขายลูกชิ้นร้านหนึ่งขายลูกชิ้นได้วันละ 100 ไม้ ไม้ละ 5 บาท จะขายหมดทุกวัน แต่ถ้าเจ้าของร้านขึ้นราคาลูกชิ้น พบว่าทุก 2 บาทที่เพิ่มขึ้น จะมีลูกชิ้นที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 8 ไม้ จงหาว่าควรตั้งราคาขายลูกชิ้นอยู่ในช่วงใด ที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น

กำหนดให้ $f(x)$ แทนรายได้ของเจ้าของร้านหน่วยเป็นบาท

และ x แทนราคาขายลูกชิ้นที่เพิ่มขึ้นหน่วยเป็น 2 บาทต่อไม้

จะได้ สมการแทนความสัมพันธ์ คือ $f(x) = (100 - 8x)(5 + 2x) = 500 + 160x - 16x^2$

โดยที่ $x \in (0,12.5) \cup (-2.5, \infty)$ นั่นคือ $x \in (-2.5, \infty)$

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	1) ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : ... 2) ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม : แคลคูลัสเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ : หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

สถานการณ์ที่ 2 **“ล้อมสวนดอกไม้วันปีใหม่”**

1. คนสวนต้องการล้อมสวนดอกไม้ด้วยไฟประดับที่มีลักษณะเป็นสายยาวม้วนละ 100 เมตร จำนวน 4 ม้วน เพื่อตกแต่งสวนดอกไม้ในวันปีใหม่โดยล้อมรอบสวนดอกไม้ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเพียงหนึ่งรูป จงหาความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	1) โจทย์กำหนดอะไร : ... 2) โจทย์ถามอะไร : ... 3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	6) เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ... 7) จึงได้ข้อสรุป คือ : ... 8) เพราะ : ...				

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	4) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

2. คนสวนต้องการล้อมสวนดอกไม้ด้วยไฟประดับที่มีลักษณะเป็นสายยาวม้วนละ 100 เมตร จำนวน 4 ม้วน เพื่อตกแต่งสวนดอกไม้ในวันปีใหม่โดยล้อมรอบสวนดอกไม้ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเพียงหนึ่งรูป จงหาความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

กำหนดให้ $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นตารางเมตร

และ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นเมตร

จะได้สมการ $f(x) = (x)(400 - 2x) = 400x - 2x^2$

โดยที่ $x \in (0, \infty) \cap (0,200)$ นั่นคือ $x \in (0,200)$

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	1) ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : ... 2) ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม : แคลคูลัสเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ : หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

สถานการณ์ที่ 3 **“กล่องจับสลากจากกระดาษแข็ง”**

1. กนกพรต้องการทำกล่องจับสลากทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิดและใส่เม็ดโฟมจนเต็มกล่องเพื่อไม่ให้เห็นสลาก จากกระดาษแข็งที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 30 นิ้ว จะต้องตัดกระดาษแข็งออกจากมุมทั้งสี่มุมเพื่อพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูงเท่าใดจึงจะได้กล่องที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	1) โจทย์กำหนดอะไร : ... 2) โจทย์ถามอะไร : ... 3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	6) เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ... 7) จึงได้ข้อสรุป คือ : ... 8) เพราะ : ...				

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	4) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

2. กนกพรต้องการทำกล่องจับสลากทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิดและใส่เม็ดโฟมจนเต็มกล่องเพื่อไม่ให้เห็นสลาก จากกระดาษแข็งที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 30 นิ้ว จะต้องตัดกระดาษแข็งออกจากมุมทั้งสี่มุมเพื่อพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูงเท่าใดจึงจะได้กล่องที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่องจับสลากหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว

และ x แทนความสูงของกล่องจับสลากหน่วยเป็นนิ้ว

จะได้สมการ $f(x) = (30-x)(30-x)(x) = x^3 - 60x^2 + 900x$

โดยที่ $x \in (0,30) \cap (0,\infty)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง** -1	0	$+1$	**ข้อเสนอแนะ**
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	1) ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : ... 2) ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม : แคลคูลัสเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ : หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

สถานการณ์ที่ 4 **“กำไรจากพวงกุญแจ”**

1. พ่อค้าขายพวงกุญแจซึ่งมีต้นทุนพวงละ 10 บาท เขาพบว่า ถ้าตั้งราคาขายพวงละ 25 บาท เขาจะขายได้ 500 พวงต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 20 พวง เขาควรตั้งราคาขายพวงกุญแจ พวงละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	1) โจทย์กำหนดอะไร : ... 2) โจทย์ถามอะไร : ... 3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	6) เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ... 7) จึงได้ข้อสรุป คือ : ... 8) เพราะ : ...				

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	4) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

2. พ่อค้าขายพวงกุญแจซึ่งมีต้นทุนพวงละ 10 บาท เขาพบว่า ถ้าตั้งราคาขายพวงละ 25 บาท เขาจะขายได้ 500 พวงต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 20 พวง เขาควรตั้งราคาขายพวงกุญแจ พวงละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

กำหนดให้ $f(x)$ แทนกำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์หน่วยเป็นบาท

และ x แทนราคาขายพวงกุญแจที่ลดลงหน่วยเป็นบาทต่อพวง

จะได้สมการ $f(x) = (25 - x)(500 + 20x) = 12500 - 20x^2$

โดยที่ $x \in (0,25) \cap (-25, \infty)$ นั่นคือ $x \in (0,25)$

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	1) ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : ... 2) ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม : แคลคูลัสเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ : หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

สถานการณ์ที่ 5 **“กำไรจากผลไม้อบแห้ง”**

1. แม่ค้าขายผลไม้อบแห้งมีต้นทุนถุงละ 20 บาท ถ้าตั้งราคาขายถุงละ 50 บาท แม่ค้าจะขายได้ 120 ถุงต่อวัน และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา แม่ค้าจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยวันละ 5 ถุง แม่ค้าควรตั้งราคาขายผลไม้อบแห้งถุงละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	1) โจทย์กำหนดอะไร : ... 2) โจทย์ถามอะไร : ... 3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	6) เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ... 7) จึงได้ข้อสรุป คือ : ... 8) เพราะ : ...				

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	4) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

2. แม่ค้าขายผลไม้อบแห้งมีต้นทุนถุงละ 20 บาท ถ้าตั้งราคาขายถุงละ 50 บาท แม่ค้าจะขายได้ 120 ถุงต่อวัน และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา แม่ค้าจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยวันละ 5 ถุง แม่ค้าควรตั้งราคาขายผลไม้อบแห้งถุงละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

กำหนดให้ $f(x)$ แทนกำไรของแม่ค้าในหนึ่งวันหน่วยเป็นบาท

และ x แทนราคาขายผลไม้อบแห้งที่ลดลงหน่วยเป็นบาทต่อถุง

จะได้สมการ $f(x) = (20 - x)(120 + 5x) = 2400 - 20x - 5x^2$

โดยที่ $x \in (0,20) \cap (-24, \infty)$ นั่นคือ $x \in (0,20)$

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	1) ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : ... 2) ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม : แคลคูลัสเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ : หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

สถานการณ์ที่ 6 **“ล้อมเชือกรอบต้นไม้ใหญ่”**

1. คุณประทีปต้องการล้อมเชือกรอบต้นไม้ใหญ่ให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมเชือกฝั่งที่ติดกับป่ากล้วย เพื่ออนุรักษ์ต้นไม้ใหญ่และป่ากล้วย ถ้าคุณประทีปมีงบประมาณ 500 บาท จะต้องล้อมเชือกให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดจะเป็นเท่าใด ถ้าเชือกราคาเมตรละ 5 บาท

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	1) โจทย์กำหนดอะไร : ... 2) โจทย์ถามอะไร : ... 3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	6) เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ... 7) จึงได้ข้อสรุป คือ : ... 8) เพราะ : ...				

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	4) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

2. คุณประทีปต้องการล้อมเชือกรอบต้นไม้ใหญ่ให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมเชือกฝั่งที่ติดกับป่ากล้วย เพื่ออนุรักษ์ต้นไม้ใหญ่และป่ากล้วย ถ้าคุณประทีปมีงบประมาณ 500 บาท จะต้องล้อมเชือกให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดจะเป็นเท่าใด ถ้าเชือกราคาเมตรละ 5 บาท

กำหนดให้ $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นตารางเมตร

และ x แทนความยาวด้านที่ไม่ขนานกับป่ากล้วยของเชือกที่ล้อมเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นเมตร

จะได้สมการ $f(x) = (x)\left(\frac{100-2x}{2}\right) = 50x - x^2$

โดยที่ $x \in (0,\infty) \cap (0,100)$ นั่นคือ $x \in (0,100)$

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	1) ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : ... 2) ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม : แคลคูลัสเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ : หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

สถานการณ์ที่ 7 **“กล่องสะสมจากกระดาษแข็ง”**

1. นายจิรายุต้องการสร้างกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 20 นิ้ว และความยาว 32 นิ้ว โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออก แล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิดเพื่อเก็บสะสมตั๋วชมภาพยนตร์ของเขา กล่องจะมีความสูงเท่าใดจึงจะมีความจุที่มากที่สุด และความจุที่มากที่สุดของกล่องเป็นเท่าใด

องค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา	1) โจทย์กำหนดอะไร : ... 2) โจทย์ถามอะไร : ... 3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
ด้านการหาและพิจารณาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	6) เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ... 7) จึงได้ข้อสรุป คือ : ... 8) เพราะ : ...				

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง**			**ข้อเสนอแนะ**
		-1	0	$+1$	
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	3) สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการ ดังนี้ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	4) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

2. นายจิรายุต้องการสร้างกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 20 นิ้ว และความยาว 32 นิ้ว โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออก แล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิดเพื่อเก็บสะสมตั๋วชมภาพยนตร์ของเขา กล่องจะมีความสูงเท่าใดจึงจะมีความจุที่มากที่สุด และความจุที่มากที่สุดของกล่องเป็นเท่าใด

กำหนดให้ กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่องหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว

และ x แทนความสูงของกล่องหน่วยเป็นนิ้ว

จะได้สมการ $f(x) = (20-2x)(20-2x)(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$

โดยที่ $x \in (0,10) \cap (0,\infty)$ นั่นคือ $x \in (0,10)$

องค์ประกอบของทักษะการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	**ข้อคำถาม**	**คะแนนการพิจารณาความสอดคล้อง** -1	0	$+1$	**ข้อเสนอแนะ**
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	1) ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : ... 2) ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : ...				
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	3) หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : ...				

ส่วนที่ 2 ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

โดยภาพรวมคุณภาพระหว่างแบบทดสอบข้อนั้นกับองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในแบบทดสอบการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ อยู่ในระดับ

☐ ดีมาก ☐ ดี ☐ ปานกลาง ☐ ปรับปรุง

ลงชื่อ.....ผู้เชี่ยวชาญ

(.....)

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ภาคผนวก ง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
2. แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้
3. ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้
4. แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
5. แบบทดสอบทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค30206**
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 **ภาคเรียนที่ 2**
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ **จำนวน 8 ชั่วโมง**
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เวลา 3 ชั่วโมง
ครูผู้สอน พงศกร พุฒฟัก

ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้(K)

1. นักเรียนอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
2. นักเรียนหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ด้านทักษะกระบวนการ(P)

1. นักเรียนสามารถให้เหตุผลประกอบการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลและตอบคำถามได้
2. นักเรียนสามารถสร้างข้อโต้แย้งที่แตกต่างจากคนอื่นได้

ด้านคุณลักษณะ(A)

1. นักเรียนทำงานเป็นระเบียบ รอบคอบ และตรงต่อเวลา

สาระสำคัญ

หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1) ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา

2) ใช้วิธีการที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้วในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

<u>ชั่วโมงที่ 1</u>

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน

1. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนได้รับรู้ ได้แก่
   - นักเรียนอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
   - นักเรียนหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
   - นักเรียนสามารถให้เหตุผลประกอบการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลและตอบคำถามได้
   - นักเรียนสามารถสร้างข้อโต้แย้งที่แตกต่างจากคนอื่นได้

2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 5 ขั้นตอนโดยมีใจความสำคัญ คือ ขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มีทั้งหมด 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

3. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันโดยมีใจความสำคัญ คือ

บทนิยาม 8 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก xในโดเมนของ f

และ ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f

ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้

4. นำเสนอสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหา ว่าฟังก์ชันดังกล่าวมีแนวทางการแก้ปัญหาอย่างไร มีแนวทางที่แตกต่างกันแล้วหาคำตอบได้ถูกต้องเหมือนกันหรือไม่ โดยใช้มโนทัศน์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการหาค่าสูงสุด

และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินการด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 5 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

5. ให้นักเรียนแบ่งเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน แล้วดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6 ร่วมกันทีละขั้นตอน โดยนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจ ระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น ได้แก่

พ่อค้าขายชานมไข่มุกซึ่งมีต้นทุนแก้วละ 12 บาท เขาพบว่า ถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว เขาควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : พ่อค้าขายชานมไข่มุกซึ่งมีต้นทุนแก้วละ 12 บาท
ถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์
และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว

โจทย์ถามอะไร : ควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

6. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6 โดยนักเรียนในกลุ่มเดียวกันร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาและสามารถใช้สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล เช่น

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :

กำหนดให้ $f(x)$ แทนกำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์หน่วยเป็นบาท
และ x แทนราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงหน่วยเป็นบาทต่อแก้ว

กำไรแก้วละ $= 30 - 12 = 18$ บาท

จากโจทย์กำหนด $f(0) = (18-0)(1400+0) = [18-(0)][1400+70(0)]$

$$f(1) = (18-1)(1400+70) = [18-(1)][1400+70(1)]$$
$$f(2) = (18-2)(1400+140) = [18-(2)][1400+70(2)]$$

จะได้สมการ $f(x) = (18-x)(1400+70x) = 25200 - 140x - 70x^2$

จะเห็นว่า $18 - x > 0$ ทำให้ $x \in (0,18)$ และ $1400 + 70x > 0$ ทำให้ $x \in (-20, \infty)$
ดังนั้น $x \in (0,18) \cap (-20, \infty)$ นั่นคือ $x \in (0,18)$

เพราะ จาก กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน จะได้ กำไรแก้วละ $= 30 - 12 = 18$ บาท จากถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา จะขายได้

เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว ทำให้ กำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์ $= (18 - x)(1400 + 70x) = 25200 - 140x - 70x^2$ และกำไรต่อแก้วต้องมากกว่า 0 บาท ทำให้ $18 - x > 0$ หรือ $x \in (0,18)$ และ จำนวนแก้วที่ขายได้ในหนึ่งสัปดาห์มากกว่า 0 แก้ว ทำให้ $1400 + 70x > 0$ หรือ $x \in (-20, \infty)$ ดังนั้น จากการดำเนินการของเซตจะได้ว่า $x \in (0,18) \cap (-20, \infty)$ นั่นคือ $x \in (0,18)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าควรลดราคาขายชานมไข่มุกลงเท่าใด ที่ทำให้กำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์มากที่สุดและและได้กำไรมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,18)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

7. นักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกตข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนที่แตกต่างออกไปมีความน่าเชื่อถือลดลงได้ เช่น

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :

กำหนดให้ $f(x)$ แทนกำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์หน่วยเป็นบาท

และ x แทนราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงหน่วยเป็นบาทต่อแก้ว

กำไรแก้วละ $= 30 - 12 = 18$ บาท

จากโจทย์กำหนด $f(0) = (18 - 0)(1400 + 0) = [18 - (0)][1400 + 70(0)]$

$f(1) = (18 - 1)(1400 + 70) = [18 - (1)][1400 + 70(1)]$

$f(2) = (18 - 2)(1400 + 140) = [18 - (2)][1400 + 70(2)]$

จะได้สมการ $f(x) = (18 - x)(1400 + 70x) = 25200 - 140x - 70x^2$

จะเห็นว่า $18 - x > 0$ ทำให้ $x \in (-\infty, 18)$ และ $1400 + 70x > 0$ ทำให้ $x \in (-20, \infty)$ ดังนั้น $x \in (-\infty, 18) \cap (-20, \infty)$ นั่นคือ $x \in (-20,18)$

เพราะ จาก กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน จะได้ กำไรแก้วละ $= 30 - 12 = 18$ บาท จากถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา จะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว ทำให้ กำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์ $= (18 - x)(1400 + 70x) = 25200 - 140x - 70x^2$ และกำไรต่อแก้วต้องมากกว่า 0 บาท ทำให้ $18 - x > 0$ หรือ $x \in (-\infty, 18)$ และ จำนวนแก้วที่ขายได้ในหนึ่งสัปดาห์มากกว่า 0 แก้ว ทำให้ $1400 + 70x > 0$ หรือ $x \in (-20, \infty)$ ดังนั้น จากการดำเนินการของเซตจะได้ว่า $x \in (-\infty, 18) \cap (-20, \infty)$ นั่นคือ $x \in (-20,18)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าควรลดราคาขายชานมไข่มุกลงเท่าใด ที่ทำให้กำไรของ

พ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์มากที่สุดและและได้กำไรมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(-20,18)$ ประกอบการตัดสินใจ

ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน ที่กำไรต่อแก้วต้องมากกว่า 0 บาท ทำให้ $18-x>0$ แล้วจากหลักการแก้อสมการจะต้องได้ $x<18$ ดังนั้น $x\in(-\infty,18)$ ดังนั้น จากการดำเนินการของเซตจะได้ว่าช่วงของ x เป็น $x\in(-\infty,18)\cap(-20,\infty)$ ทำให้ $x\in(-20,18)$ ไม่ใช่ $x\in(0,18)$

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

8. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6 โดยนักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด ได้แก่

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :

กำหนดให้ $f(x)$ แทนกำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์หน่วยเป็นบาท

และ x แทนราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงหน่วยเป็นบาทต่อแก้ว

กำไรแก้วละ $=30-12=18$ บาท

จากโจทย์กำหนด $f(0)=(18-0)(1400+0)=[18-(0)][1400+70(0)]$

$f(1)=(18-1)(1400+70)=[18-(1)][1400+70(1)]$

$f(2)=(18-2)(1400+140)=[18-(2)][1400+70(2)]$

จะได้สมการ $f(x)=(18-x)(1400+70x)=25200-140x-70x^2$

จะเห็นว่า $18-x>0$ ทำให้ $x\in(-\infty,18)$ และ $1400+70x>0$ ทำให้ $x\in(-20,\infty)$ ดังนั้น $x\in(-\infty,18)\cap(-20,\infty)$ นั่นคือ $x\in(-20,18)$

เพราะ จาก กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน จะได้ กำไรแก้วละ $=30-12=18$ บาท จากถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา จะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว ทำให้ กำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์ $=(18-x)(1400+70x)=25200-140x-70x^2$ และกำไรต่อแก้วต้องมากกว่า 0 บาท ทำให้ $18-x>0$ หรือ $x\in(-\infty,18)$ และ จำนวนแก้วที่ขายได้ในหนึ่งสัปดาห์มากกว่า 0 แก้ว ทำให้ $1400+70x>0$ หรือ $x\in(-20,\infty)$ ดังนั้น จากการดำเนินการของเซตจะได้ว่า $x\in(-\infty,18)\cap(-20,\infty)$ นั่นคือ $x\in(-20,18)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าควรลดราคาขายชานมไข่มุกลงเท่าใด ที่ทำให้กำไรของ

พ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์มากที่สุดและและได้กำไรมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(-20,18)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

9. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6 โดยนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ได้แก่

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 25200 - 140x - 70x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(25200 - 140x - 70x^2)$$
$$f'(x) = 0 - 140 - 140x$$
$$f'(x) = -140 - 140x$$
$$0 = -140 - 140x$$
$$x = -1$$

จะเห็นว่า $-1 \in (-20,18)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-140 - 140x)$$
$$f''(x) = 0 - 140$$
$$f''(x) = -140$$
$$f''(-1) = -140 < 0$$

ดังนั้น $f(-1)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

$$f(-1) = 25200 - 140(-1) - 70(-1)^2$$
$$f(-1) = 25200 - 140(-1) - 70(1)$$
$$f(-1) = 25200 + 140 - 70(1)$$
$$f(-1) = 25200 + 140 - 70$$
$$f(-1) = 25270$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = -1$ คือ $25,270$

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

10. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6 โดยนักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง ได้แก่

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : พ่อค้าขายชานมไข่มุกซึ่งมีต้นทุนแก้วละ 12 บาท ถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว แล้วพ่อค้าควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : พ่อค้าควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละ 31 บาท จึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรมากที่สุด $25,270$ บาทต่อสัปดาห์

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = -1$ คือ $25{,}270$ ดังนั้น ราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงแก้วละ -1 บาท แสดงว่าราคาขายเพิ่มขึ้นแก้วละ 1 บาท จึงต้องขายชานมไข่มุกแก้วละ $30 + 1 = 31$ บาท ที่ทำให้ได้กำไรมากที่สุด เนื่องจาก x แทนราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงต่อแก้ว และกำไรมากที่สุด $25{,}270$ บาทต่อสัปดาห์ เนื่องจาก $f(x)$ แทนกำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์

11. นักเรียนร่วมแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันเพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ใดที่สามารถหาข้อสรุปได้ถูกต้องหรือข้อคาดการณ์ใดมีจุดเด่นและจุดด้อยอะไรบ้าง เพื่อปรับปรุงข้อคาดการณ์ของนักเรียนแต่ละคนให้มีความถูกต้องเหมาะสมกับการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้มากขึ้น

ขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้

12. นักเรียนทุกคนร่วมกันสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหา โดยมีครูคอยให้คำแนะนำเพื่อความเข้าใจในมโนทัศน์ที่ถูกต้อง ครบถ้วน ดังนี้

หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1) ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา

2) ใช้วิธีการที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้วในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน

<u>ชั่วโมงที่ 2</u>

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน

1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 5 ขั้นตอนโดยมีใจความสำคัญ คือ ขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มีทั้งหมด 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหาโดยมีใจความสำคัญ คือ หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1) ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา

2) ใช้วิธีการที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้วในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน

ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้

3. นำเสนอสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหา ว่าฟังก์ชันดังกล่าวมีแนวทางการแก้ปัญหาอย่างไร มีแนวทางที่แตกต่างกันแล้วหาคำตอบได้ถูกต้องเหมือนกันหรือไม่ โดยใช้มโนทัศน์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินการด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 5 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

4. ให้นักเรียนแบ่งเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน แล้วดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7 ร่วมกันทีละขั้นตอน โดยนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น ได้แก่

คุณเฉลิมพรต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดคูน้ำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ เพื่อนำที่ดินส่วนนี้ไปทำเป็นร้านอาหาร ถ้าคุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท จะต้องล้อมรั้วให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดจะเป็นเท่าใด ถ้าค่าล้อมรั้วราคาเมตรละ 8 บาท

โจทย์กำหนดอะไร : คุณเฉลิมพรต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดคูน้ำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ เพื่อนำที่ดินส่วนนี้ไปทำเป็นร้านอาหาร ถ้าคุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท และค่าล้อมรั้วเมตรละ 8 บาท

โจทย์ถามอะไร : จะต้องล้อมรั้วให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดจะเป็นเท่าใด

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

5. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7 โดยนักเรียนในกลุ่มเดียวกันร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาและสามารถใช้สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล เช่น

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นตารางเมตร และ x แทนความยาวด้านที่ไม่ขนานกับคูน้ำของรั้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นเมตร

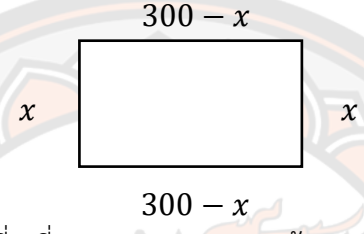
จากโจทย์กำหนด คุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท

จะได้ว่า $4800 = 8(2x + 2y)$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่คู่ขนานกับคูน้ำ

ดังนั้น $2y = \frac{4800}{8} - 2x$

$2y = 600 - 2x$

และ $y = \frac{600-2x}{2} = 300 - x$ ทำให้การล้อมรั้วมีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว $= (x)(300 - x)$

โดยที่ $x \in (0,300)$

จะได้สมการ $f(x) = (x)(300 - x) = 300x - x^2$

เพราะ จากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันจะได้ว่าสี่เหลี่ยมรูปนี้มีด้านยาว x เมตร จำนวน 2 ด้าน และมีงบประมาณ 4,800 บาท ค่าล้อมรั้วราคาเมตรละ 8 บาท จะได้ว่า $4800 = 8(2x + 2y)$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่คู่ขนานกับคูน้ำ จะเห็นว่า $y = 300 - x$ ดังนั้น จากสมบัติการแจกแจงและสูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว จะได้ว่า $f(x) = (x)(300 - x) = 300x - x^2$ และความยาวด้านมากกว่า 0 ทำให้ $x > 0$ และ $300 - x > 0$ เมื่อพิจารณาจากการแก้อสมการ จะได้ว่า $0 < x < 300$ ดังนั้น $x \in (0,300)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุดและจะได้พื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด โดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,300)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน, สูตรหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, การแก้อสมการ, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

6. นักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกตข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนที่แตกต่างออกไปมีความน่าเชื่อถือลดลงได้ เช่น

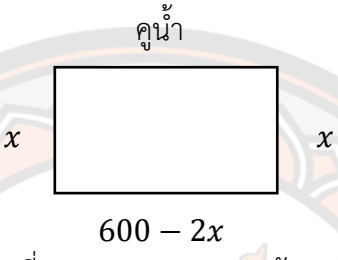
สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นตารางเมตร และ x แทนความยาวด้านที่ไม่ขนานกับคูน้ำของรั้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นเมตร

จากโจทย์กำหนด คุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท

จะได้ว่า $4800 = 8(2x) + 8y$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่ขนานกับคูน้ำ

ดังนั้น $y = \frac{4800}{8} - 2x$

$y = 600 - 2x$ ทำให้การล้อมรั้วมีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว $= (x)(600 - 2x)$

โดยที่ $x \in (0,300)$

จะได้สมการ $f(x) = (x)(600 - 2x) = 600x - 2x^2$

เพราะ จากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันจะได้ว่าสี่เหลี่ยมรูปนี้มีด้านยาว x เมตร จำนวน 2 ด้าน และมีงบประมาณ 4,800 บาท ค่าล้อมรั้วราคาเมตรละ 8 บาท จะได้ว่า $4800 = 8(2x) + 8y$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่ขนานกับคูน้ำ จะเห็นว่า $y = 600 - 2x$ ดังนั้น จากสมบัติการแจกแจงและสูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว จะได้ว่า $f(x) = (x)(600 - 2x) = 600x - 2x^2$ และความยาวด้านมากกว่า 0 ทำให้ $x > 0$ และ $600 - 2x > 0$ เมื่อพิจารณาจากการแก้อสมการ จะได้ว่า $0 < x < 300$ ดังนั้น $x \in (0,300)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุดและจะได้พื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด โดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,300)$ ประกอบการตัดสินใจ

ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนที่ y แทนความยาวด้านที่ขนานกับคูน้ำ โดยโจทย์กำหนดว่าจะไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ จึงทำให้ $4800 = 8(2x) + 8y = 8(2x + y) \neq 8(2x + 2y)$ จะได้ $y = 600 - 2x$ ไม่ใช่ $y = 300 - x$ อย่างข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน จึงได้สมการแทนความสัมพันธ์ที่แตกต่างออกไป นั่นคือ $f(x) = (x)(600 - 2x) = 600x - 2x^2$ และค่าของ x คือ $x \in (0,300)$

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน, สูตรหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, การแก้อสมการ, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

7. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7 โดยนักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด ได้แก่

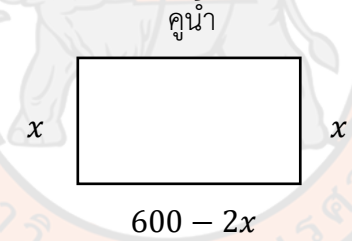
สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นตารางเมตร และ x แทนความยาวด้านที่ไม่ขนานกับคูน้ำของรั้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นเมตร

จากโจทย์กำหนด คุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท

จะได้ว่า $4800 = 8(2x) + 8y$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่ขนานกับคูน้ำ

ดังนั้น $y = \frac{4800}{8} - 2x$

$y = 600 - 2x$ ทำให้การล้อมรั้วมีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $= (x)(600 - 2x)$

โดยที่ $x \in (0,300)$

จะได้สมการ $f(x) = (x)(600 - 2x) = 600x - 2x^2$

เพราะ จากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันจะได้ว่าสี่เหลี่ยมรูปนี้มีด้านยาว x เมตร จำนวน 2 ด้าน และมีงบประมาณ 4,800 บาท ค่าล้อมรั้วราคาเมตรละ 8 บาท จะได้ว่า $4800 = 8(2x) + 8y$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่ขนานกับคูน้ำ จะเห็นว่า $y = 600 - 2x$ ดังนั้น จากสมบัติการแจกแจงและสูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว จะได้ว่า $f(x) = (x)(600 - 2x) = 600x - 2x^2$ และความยาวด้านมากกว่า 0 ทำให้ $x > 0$ และ $600 - 2x > 0$ เมื่อพิจารณาจากการแก้อสมการ จะได้ว่า $0 < x < 300$ ดังนั้น $x \in (0,300)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุดและจะได้พื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด โดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,300)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน, สูตรหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, การแก้อสมการ, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

8. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7 โดยนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ได้แก่

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 600x - 2x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(600x - 2x^2)$$
$$f'(x) = 600 - 4x$$
$$0 = 600 - 4x$$
$$x = 150$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(600 - 4x)$$
$$f''(x) = 0 - 4$$
$$f''(x) = -4$$
$$f''(150) = -4$$
$$f''(150) = -4 < 0$$

ดังนั้น $f(150)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

และ $f(150) = 600(150) - 2(150)^2$

$$f(150) = 90{,}000 - 2(150)^2$$
$$f(150) = 90{,}000 - 45{,}000$$
$$f(150) = 45{,}000$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 150$ บนช่วง $(0{,}300)$ คือ $45{,}000$

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

9. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7 โดยนักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง ได้แก่

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : คุณเฉลิมพรต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดคูน้ำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ เพื่อนำที่ดินส่วนนี้ไปทำเป็นร้านอาหาร ถ้าคุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท และค่าล้อมรั้วเมตรละ 8 บาท จะต้องล้อมรั้วให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : จะต้องล้อมรั้วให้ด้านกว้างยาว 150 เมตร และด้านยาวยาว 300 เมตร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดเป็น $45{,}000$ ตารางเมตร

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 150$ คือ $45{,}000$ ดังนั้น ความยาวของด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหาได้จาก $600 - 2(150) = 300$ เมตร โดยที่ความยาวของด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ 150 เมตร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด เนื่องจาก x แทนความยาวด้านที่ไม่ขนานกับคู

น้ำของรั้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และพื้นที่มากที่สุด $45{,}000$ ตารางเมตร เนื่องจาก $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

10. นักเรียนร่วมแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันเพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ใดที่สามารถหาข้อสรุปได้ถูกต้องหรือข้อคาดการณ์ใดมีจุดเด่นและจุดด้อยอะไรบ้าง เพื่อปรับปรุงข้อคาดการณ์ของนักเรียนแต่ละคนให้มีความถูกต้องเหมาะสมกับการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้มากขึ้น

ขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้

11. นักเรียนทุกคนร่วมกันสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหา โดยมีครูคอยให้คำแนะนำเพื่อความเข้าใจในมโนทัศน์ที่ถูกต้อง ครบถ้วน ดังนี้

หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1) ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา

2) ใช้วิธีการที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้วในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน

<u>ชั่วโมงที่ 3</u>

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน

1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 5 ขั้นตอนโดยมีใจความสำคัญ คือ ขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มีทั้งหมด 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหาโดยมีใจความสำคัญ คือ หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1) ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา

2) ใช้วิธีการที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้วในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน

ขั้นที่ 2 การจัดการเรียนรู้

3. นำเสนอสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหา ว่าฟังก์ชันดังกล่าวมีแนวทางการแก้ปัญหาอย่างไร มีแนวทางที่แตกต่างกันแล้วหาคำตอบได้ถูกต้องเหมือนกันหรือไม่ โดยใช้มโนทัศน์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินการด้วยกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ 5 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

4. ให้นักเรียนแบ่งเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 6 – 7 คน แล้วดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8 ร่วมกันทีละขั้นตอน โดยนักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น ได้แก่

ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเท่าใด เมื่อกล่องทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 60 เซนติเมตร และความยาว 96 เซนติเมตร โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกแล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิด และกล่องจะมีความสูงเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : กล่องทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 60 เซนติเมตร และความยาว 96 เซนติเมตร โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกแล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิด

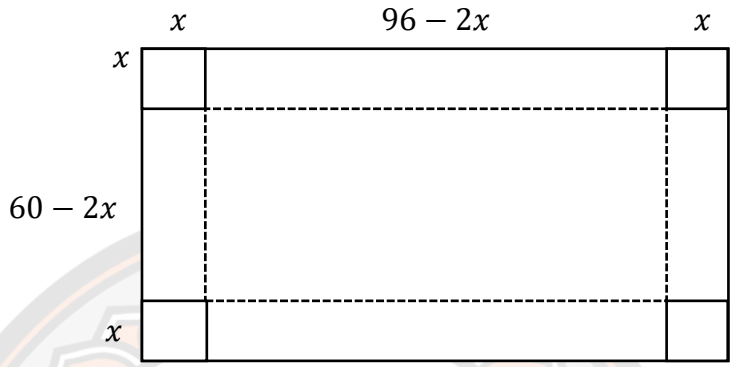
โจทย์ถามอะไร : ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเท่าใด และกล่องจะมีความสูงเท่าใด

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

5. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8 โดยนักเรียนในกลุ่มเดียวกันร่วมกันระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาและสามารถใช้สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวเองหน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผล เช่น

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่องหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร และ x แทนความสูงของกล่องหน่วยเป็นเซนติเมตร

จากโจทย์กำหนด จะได้กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า $60-2x$ แล้ว $x \in (0,30)$ และ $96-2x$ แล้ว $x \in (0,48)$

ดังนั้น $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,48)$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง

จะได้สมการ $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$

เพราะ จากโจทย์กำหนดและสูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง จะได้ว่า ด้านกว้างมีความยาว $60-2x$ เซนติเมตร, ด้านยาวมีความยาว $96-2x$ เซนติเมตร และ ด้านสูงมีความยาว x เซนติเมตร ทำให้ได้สมการแทนความสัมพันธ์เป็น $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x)$ และจากสมบัติการแจกแจง จะได้ $f(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$ และความยาวด้านของทรงสี่เหลี่ยมมีค่ามากกว่า 0 เซนติเมตร จะเห็นว่านอกจาก $x > 0$ แล้วยังทำให้ $60-2x > 0$ และ $96-2x > 0$ จากการแก้อสมการจะได้ว่า $x \in (0,30)$ และ $x \in (0,48)$ และด้วยการดำเนินการของเซต จะได้ $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,48)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความสูงของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้ปริมาตรมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,48)$ ประกอบการตัดสินใจ

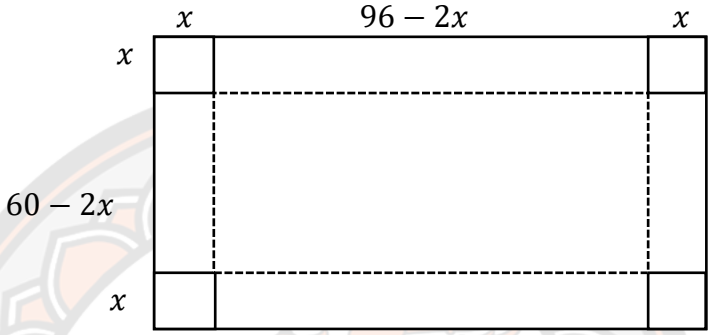
หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน, และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

6. นักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกตข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน แล้วนำเสนอข้อคาดการณ์ของกลุ่มตัวเองที่แตกต่างออกไปจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนพร้อมให้เหตุผลที่ทำให้ข้อคาดการณ์ของกลุ่ม

ตัวเองมีความน่าเชื่อถือเพิ่มมากขึ้น หรือทำให้ข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียนที่แตกต่างออกไปมีความน่าเชื่อถือลดลงได้ เช่น

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่องหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร และ x แทนความสูงของกล่องหน่วยเป็นเซนติเมตร

จากโจทย์กำหนด จะได้กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า $60-2x$ แล้ว $x \in (0,30)$ และ $96-2x$ แล้ว $x \in (0,48)$

ดังนั้น $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง

จะได้สมการ $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$

เพราะ จากโจทย์กำหนดและสูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง จะได้ว่า ด้านกว้างมีความยาว $60-2x$ เซนติเมตร, ด้านยาวมีความยาว $96-2x$ เซนติเมตร และ ด้านสูงมีความยาว x เซนติเมตร ทำให้ได้สมการแทนความสัมพันธ์เป็น $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x)$ และจากสมบัติการแจกแจง จะได้ $f(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$ และความยาวด้านของทรงสี่เหลี่ยมมีค่ามากกว่า 0 เซนติเมตร จะเห็นว่านอกจาก $x > 0$ แล้วยังทำให้ $60-2x > 0$ และ $96-2x > 0$ จากการแก้อสมการจะได้ว่า $x \in (0,30)$ และ $x \in (0,48)$ และด้วยการดำเนินการของเซต จะได้ $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความสูงของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้ปริมาตรมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,30)$ ประกอบการตัดสินใจ

ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน ที่การดำเนินการของเซต จะได้ $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ โดยบทนิยามของอินเตอร์เซกชัน จะได้ว่า $(0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ จะได้เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซตทั้งสาม ได้แก่ $(0,\infty)$, $(0,30)$ และ $(0,48)$ ทำให้ได้เซตจากการ

อินเตอร์เซกชัน คือ $(0,30)$ เนื่องจาก $(0,30) \subset (0,48) \subset (0,\infty)$ จึงได้ค่าของ x บนช่วง $(0,30)$ ไม่ใช่ $x \in (0,48)$ ดังข้อคาดการณ์หน้าชั้นเรียน

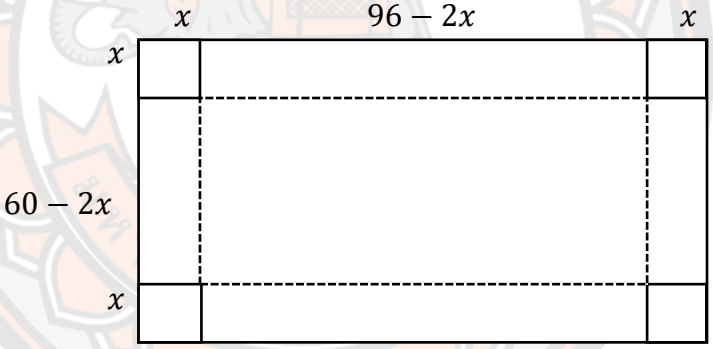
หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต เรื่อง บทนิยามของอินเตอร์เซกชัน, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน, และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

7. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8 โดยนักเรียนแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการที่แก้ปัญหาได้โดยใช้ข้อคาดการณ์ที่ตัวเองเชื่อถือมากที่สุด ได้แก่

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่องหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร และ x แทนความสูงของกล่องหน่วยเป็นเซนติเมตร

จากโจทย์กำหนด จะได้กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า $60-2x$ แล้ว $x \in (0,30)$ และ $96-2x$ แล้ว $x \in (0,48)$

ดังนั้น $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง

จะได้สมการ $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$

เพราะ จากโจทย์กำหนดและสูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง จะได้ว่า ด้านกว้างมีความยาว $60-2x$ เซนติเมตร, ด้านยาวมีความยาว $96-2x$ เซนติเมตร และ ด้านสูงมีความยาว x เซนติเมตร ทำให้ได้สมการแทนความสัมพันธ์เป็น $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x)$ และจากสมบัติการแจกแจง จะได้ $f(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$ และความยาวด้านของทรงสี่เหลี่ยมมีค่ามากกว่า 0 เซนติเมตร จะเห็นว่านอกจาก $x > 0$ แล้วยังทำให้ $60-2x > 0$ และ $96-2x > 0$ จากการแก้อสมการจะได้ว่า $x \in (0,30)$ และ

$x \in (0,48)$ และด้วยการดำเนินการของเซต จะได้ $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความสูงของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้ปริมาตรมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,30)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต เรื่อง บทนิยามของอินเตอร์เซกชัน, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน, และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

8. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8 โดยนักเรียนตัดสินใจใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ได้แก่

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 312x^2 + 5760x)$$
$$f'(x) = 12x^2 - 624x + 5760$$
$$0 = 12x^2 - 624x + 5760$$
$$0 = 12(x^2 - 52x + 480)$$
$$0 = 12(x-12)(x-40)$$

จะได้ $x - 12 = 0$ หรือ $x - 40 = 0$

$$x = 12 \text{ หรือ } x = 40$$

จะเห็นว่า $12 \in (0,30)$ และ $40 \notin (0,30)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 624x + 5760)$$
$$f''(x) = 24x - 624$$
$$f''(12) = 24(12) - 624$$
$$f''(12) = 288 - 624$$
$$f''(12) = -336 < 0$$

ดังนั้น $f(12)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

$$f(12) = 4(12)^3 - 312(12)^2 + 5760(12)$$
$$f(12) = 4(1728) - 312(144) + 5760(12)$$
$$f(12) = 6912 - 312(144) + 5760(12)$$
$$f(12) = 6912 - 44928 + 5760(12)$$
$$f(12) = 6912 - 44928 + 69120$$
$$f(12) = 31{,}104$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 12$ บนช่วง $(0,30)$ คือ $31{,}104$

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

9. นักเรียนดำเนินการแก้ไขสถานการณ์ปัญหาตามใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8 โดยนักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง ได้แก่

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : กล่องทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 60 เซนติเมตร และความยาว 96 เซนติเมตร โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกแล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิด แล้วความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเท่าใดและกล่องจะมีความสูงเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น 31,104 ลูกบาศก์เซนติเมตร และกล่องจะมีความสูง 12 เซนติเมตร

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 12$ บนช่วง $(0,30)$ คือ $31,104$ ดังนั้น ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น 31,104 ลูกบาศก์เซนติเมตร เนื่องจาก $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่อง และกล่องจะมีความสูง 12 เซนติเมตร เนื่องจาก x แทนความสูงของกล่อง

10. นักเรียนร่วมแสดงความคิดเห็นและอภิปรายร่วมกันเพื่อสรุปว่าข้อคาดการณ์ใดที่สามารถหาข้อสรุปได้ถูกต้องหรือข้อคาดการณ์ใดมีจุดเด่นและจุดด้อยอะไรบ้าง เพื่อปรับปรุงข้อคาดการณ์ของนักเรียนแต่ละคนให้มีความถูกต้องเหมาะสมกับการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาได้มากขึ้น

ขั้นที่ 3 สรุปผลการเรียนรู้

11. นักเรียนทุกคนร่วมกันสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากสถานการณ์ปัญหา โดยมีครูคอยให้คำแนะนำเพื่อความเข้าใจในมโนทัศน์ที่ถูกต้อง ครบถ้วน ดังนี้

หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1) ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา

2) ใช้วิธีการที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้วในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6 “ลดหรือเพิ่มเติมกำไร”
3. ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7 “ล้อมรั้วตามงบประมาณ”
4. ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8 “กล่องกระดาษฐานผืนผ้า”

การวัดและการประเมินผล

รายการประเมิน	วิธีการวัดผล	เครื่องมือที่ใช้	เกณฑ์
1. ด้านความรู้ (K) 1.1) นักเรียนอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด 1.2) นักเรียนหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด	ตรวจใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6, 7 และ 8	ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6, 7 และ 8	1.1) ระบุขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องครบถ้วน 1.2) หาคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้อง
2. ด้านทักษะ/กระบวนการ (P) 2.1) นักเรียนสามารถให้เหตุผลประกอบการตอบคำถาม 2.2) นักเรียนสามารถระบุข้อโต้แย้งที่แตกต่างจากคนอื่นได้	ตรวจใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6, 7 และ 8 ตรวจแบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6, 7 และ 8 แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์	2.1) ทักษะการให้เหตุผลระดับ 2 ขึ้นไป 2.2) ทักษะการโต้แย้งระดับ 2 ขึ้นไป
3. ด้านคุณลักษณะ (A)	สังเกตพฤติกรรมนักเรียน และบันทึกลงแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	

แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เวลา 3 ชั่วโมง
ครูผู้สอน พงศกร พุฒฟัก

ผู้สังเกตการณ์จัดการเรียนรู้ ☐ **อาจารย์** ☐ **ครูประจำการ**
วิธีการสังเกต ☐ **โดยตรง** ☐ **โดยวีดิทัศน์บันทึกภาพและเสียง**

<u>คำชี้แจง</u> เขียนบรรยายข้อดี สภาพปัญหา และแนวทางการปรับปรุงแก้ไข จากการสังเกตพฤติกรรมการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยในครั้งนี้ เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปใช้ในการปรับปรุง และพัฒนาการจัดการเรียนรู้ ในครั้งต่อไป

ขั้นที่ 1 ขั้นแสดงปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

(นักเรียนระบุข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหา)

.....

.....

.....

.....

ขั้นที่ 2 ขั้นมองปัญหาตามมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

(นักเรียนระบุมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับ สถานการณ์ปัญหา)

.....

.....

.....

.....

ขั้นที่ 3 ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

(นักเรียนตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อนแล้วนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหา)

.....

.....

.....

.....

ขั้นที่ 4 ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

(นักเรียนใช้มโนทัศน์หรือวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสม จนได้คำตอบของปัญหาในรูปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์)

.....

.....

.....

.....

ขั้นที่ 5 ขั้นสะท้อนปัญหาสู่ชีวิตจริง

(นักเรียนแปลผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับเป็นปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง และนำเสนอผลการแก้ปัญหาให้อยู่ในบริบทชีวิตจริง)

.....

.....

.....

.....

สรุปปัญหา / แนวทางการแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ผู้สะท้อนผล

(.....)

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 1
เรื่อง ความเร็วการของเคลื่อนที่แนวตรง

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามต่อไปนี้

นักแข่งรถทดสอบการขับรถแข่งด้วยการวิ่งบนทางตรงยาว โดยบันทึกระยะทางและระยะเวลาที่ใช้ดังนี้

ระยะทาง (เมตร)	ระยะเวลา (วินาที)
4	5
49	10
144	15

จากตารางข้างต้น จงหาค่าของระยะห่างของรถแข่งจากตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วของรถแข่งขณะเวลา 1 นาที ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

โจทย์กำหนดอะไร : .....

.....

.....

โจทย์ถามอะไร : .....

.....

.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 1
เรื่อง ความเร็วการของเคลื่อนที่แนวตรง

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามต่อไปนี้

นักแข่งรถทดสอบการขับรถแข่งด้วยการวิ่งบนทางตรงยาว โดยบันทึกระยะทางและระยะเวลาที่ใช้ดังนี้

ระยะทาง (เมตร)	ระยะเวลา (วินาที)
4	5
49	10
144	15

จากตารางข้างต้น จงหาค่าของระยะห่างของรถแข่งจากตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วของรถแข่งขณะเวลา 1 นาที ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

โจทย์กำหนดอะไร : ใน 5 วินาที รถเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 4 เมตร
ใน 10 วินาที รถเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 49 เมตร
ใน 15 วินาที รถเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 144 เมตร

โจทย์ถามอะไร : ระยะห่างของรถแข่งจากตำแหน่งเริ่มต้นถึงขณะเวลา 1 นาที เป็นเท่าไร ความเร็วของรถแข่งขณะเวลา 1 นาที เป็นเท่าไร

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :

กำหนดให้ s แทนระยะทางหน่วยเป็นเมตรและ t แทนระยะเวลาหน่วยเป็นวินาที

จะเห็นว่า $s(5) = 4 = (5-3)^2$

$s(10) = 49 = (10-3)^2$

$s(15) = 144 = (15-3)^2$

จะได้สมการ $s(t) = (t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$

เพราะ โจทย์กำหนดให้ในเวลา 5 วินาที, 10 วินาที และ 15 วินาที รถแข่งเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 4 เมตร, 49 เมตร และ 15 เมตร ตามลำดับ จึงใช้วิธีการสร้างสมการเพื่อหาความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา และเมื่อได้สมการแทนความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลาจึงหาระยะห่างของรถแข่งจากตำแหน่งเริ่มต้นถึงขณะเวลา 1 นาที โดยใช้ค่าสัมบูรณ์เพื่อทำให้ผลต่างของระยะทางจากทั้งสองเวลาเป็นบวกในรูป $|s(0) - s(60)|$ และหาอนุพันธ์ของระยะทางเทียบกับเวลาเพื่อหาความเร็วของรถแข่งขณะเวลา 1 นาที ในรูป $v(t) = s'(t)$

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : วิธีการสร้างสมการ, สมบัติของค่าสัมบูรณ์ และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ขั้นตอนวิธีทำ : $s(t) = t^2 - 6t + 9$

$$|s(60) - s(0)| = |[(60)^2 - 6(60) + 9] - [(0)^2 - 6(0) + 9]|$$
$$= |[3{,}600 - 360 + 9] - [9]|$$
$$|s(60) - s(0)| = |3{,}240| = 3{,}240$$
$$s'(t) = \frac{d}{dx}(t^2 - 6t + 9)$$
$$= 2t^{2-1} - 6 + 0$$
$$= 2t - 6$$
$$s'(60) = 2(60) - 6 = 120 - 6 = 114$$
$$v(60) = s'(60) = 114$$

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : จากตารางบันทึกการทดสอบการขับรถแข่งด้วยการวิ่งบนทางตรงยาว ค่าของระยะห่างของรถแข่งจากตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วของรถแข่งขณะเวลา 1 นาที เป็นเท่าไร

จึงได้ข้อสรุป คือ : ระยะห่างของรถแข่งจากตำแหน่งเริ่มต้นถึงขณะเวลา 1 นาที เท่ากับ 3,240 เมตร และความเร็วของรถแข่งขณะเวลา 1 นาที เท่ากับ 114 เมตรต่อวินาที

เพราะ : เวลา 1 นาที เท่ากับ 60 วินาที และหน่วยของเวลาคือวินาที ดังนั้นจึงต้องแทน t ด้วย 60 เพื่อตอบระยะห่างและความเร็วของรถแข่งขณะเวลา 1 นาที ไม่ควรแทน t ด้วย 1 เนื่องจาก 1 มีหน่วยเป็นนาทีแต่ t มีหน่วยเป็นวินาที

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 2
เรื่อง ความเร่งการของเคลื่อนที่แนวตรง

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามต่อไปนี้

นักกีฬายิงปืนฝึกโดยการยิงปืนขึ้นฟ้าในแนวดิ่ง และมีการบันทึกตำแหน่งของลูกปืนโดยประมาณและระยะเวลาตั้งแต่เริ่มยิง ดังนี้

ตำแหน่ง (เมตร)	ระยะเวลา (วินาที)
6	2
24	3
60	4

จากตารางข้างต้น จงหาค่าของระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้นและค่าของความเร่งของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

โจทย์กำหนดอะไร : .....

.....

.....

โจทย์ถามอะไร : .....

.....

.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 2
เรื่อง ความเร่งการของเคลื่อนที่แนวตรง

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามต่อไปนี้

นักกีฬายิงปืนฝึกโดยการยิงปืนขึ้นฟ้าในแนวดิ่ง และมีการบันทึกตำแหน่งของลูกปืนโดยประมาณและระยะเวลาตั้งแต่เริ่มยิง ดังนี้

ตำแหน่ง (เมตร)	ระยะเวลา (วินาที)
6	2
24	3
60	4

จากตารางข้างต้น จงหาค่าของระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้นและค่าของความเร่งของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

โจทย์กำหนดอะไร : ใน 2 วินาที ลูกปืนเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 6 เมตร
ใน 3 วินาที ลูกปืนเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 24 เมตร
ใน 4 วินาที ลูกปืนเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 60 เมตร

โจทย์ถามอะไร : ระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้นถึงขณะเวลา 10 วินาที เป็นเท่าไร ความเร่งของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที เป็นเท่าไร

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :

กำหนดให้ s แทนระยะทางหน่วยเป็นเมตรและ t แทนระยะเวลาหน่วยเป็นวินาที

จะเห็นว่า $s(2) = 6 = 2^3 - 2$

$s(3) = 24 = 3^3 - 3$

$s(4) = 60 = 4^3 - 4$

จะได้สมการ $s(t) = t^3 - t$

เพราะ โจทย์กำหนดให้ในเวลา 2 วินาที, 3 วินาที และ 4 วินาที ลูกปืนเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 6 เมตร, 24 เมตร และ 60 เมตร ตามลำดับ จึงใช้วิธีการสร้างสมการเพื่อหาความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา และเมื่อได้สมการแทนความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลาจึงหาระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้นถึงขณะเวลา 10 วินาที โดยใช้ค่าสัมบูรณ์เพื่อทำให้ผลต่างของระยะทางจากทั้งสองเวลาเป็นบวกในรูป $|s(0) - s(10)|$ และหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของระยะทางเทียบกับเวลาเพื่อหาความเร่งของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที ในรูป $a(t) = s''(t)$

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : วิธีการสร้างสมการ, สมบัติของค่าสัมบูรณ์ และหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน

ขั้นตอนวิธีทำ : $s(t) = t^3 - t$

$$|s(10) - s(0)| = |[(10)^3 - 10] - [(0)^3 - 0]|$$
$$= |[1{,}000 - 10] - [0]|$$
$$= |1{,}000 - 10 - 0|$$
$$|s(10) - s(0)| = |990| = 990$$
$$s'(t) = \frac{d}{dt}(t^3 - t)$$
$$= 3t^{3-1} - 1$$
$$= 3t^2 - 1$$
$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 1$$
$$v'(t) = s''(t) = \frac{d}{dt}(3t^2 - 1)$$
$$v'(t) = 3(2t^{2-1}) - 0$$
$$v'(t) = 6t$$
$$a(t) = v'(t) = 6t$$
$$a(10) = 6(10) = 60$$

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : จากตารางบันทึกการทดสอบโดยการฝึกยิงปืนขึ้นฟ้าในแนวดิ่ง ค่าของระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้นและความเร่งของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที เป็นเท่าไร

จึงได้ข้อสรุป คือ : ระยะห่างของลูกปืนจากตำแหน่งเริ่มต้นถึงขณะเวลา 10 วินาที เท่ากับ 990 เมตร และความเร่งของลูกปืนขณะเวลา 10 วินาที เท่ากับ 60 เมตรต่อวินาทีกำลังสอง

เพราะ : ความเร่งของวัตถุคือการเปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลงระหว่างความเร็วกับระยะเวลา ดังนั้นจึงต้องหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันความเร็วเทียบกับระยะเวลาอีกครั้งหลังจากหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันระยะทางกับระยะเวลา จึงเปรียบได้กับการหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของระยะทางเทียบกับระยะเวลา

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 3
เรื่อง ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

เจ้าของร้านขนมปังร้านหนึ่งขายแซนวิชได้วันละ 200 ชิ้น ชิ้นละ 10 บาท จะขายหมดทุกวัน แต่ถ้าเจ้าของร้านขึ้นราคาแซนวิช พบว่าทุก ๆ 1 บาทที่เพิ่มขึ้นต่อชิ้น จะมีแซนวิชที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 4 ชิ้น จงหาว่าควรตั้งราคาขายแซนวิชอยู่ใน ช่วงใด ที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านเพิ่มมากขึ้น

โจทย์กำหนดอะไร : .....

.....

.....

โจทย์ถามอะไร : .....

.....

.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 3
เรื่อง ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

เจ้าของร้านขนมปังร้านหนึ่งขายแซนวิชวันละ 200 ชิ้น ชิ้นละ 10 บาท จะขายหมดทุกวัน แต่ถ้าเจ้าของร้านขึ้นราคาแซนวิช พบว่าทุก ๆ 1 บาทที่เพิ่มขึ้นต่อชิ้น จะมีแซนวิชที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 4 ชิ้น จงหาว่าควรตั้งราคาขายแซนวิชอยู่ในช่วงใด ที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านเพิ่มมากขึ้น

โจทย์กำหนดอะไร : ขายแซนวิชวันละ 200 ชิ้น ชิ้นละ 10 บาท จะขายหมดทุกวัน และทุก ๆ 1 บาทที่เพิ่มขึ้นต่อชิ้น จะมีแซนวิชที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 4 ชิ้น

โจทย์ถามอะไร : ควรตั้งราคาขายแซนวิชอยู่ในช่วงใด ที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านเพิ่มมากขึ้น

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนรายได้ของเจ้าของร้านหน่วยเป็นบาท และ x แทนราคาขายแซนวิชที่เพิ่มขึ้นหน่วยเป็นบาทต่อชิ้น

จากโจทย์กำหนด $f(0) = (200-0)(10+0) = [200-4(0)][10+(0)]$

$f(1) = (200-4)(10+1) = [200-4(1)][10+(1)]$

$f(2) = (200-8)(10+2) = [200-4(2)][10+(2)]$

จะได้สมการ $f(x) = (200-4x)(10+x) = 200+360x-4x^2$

จะเห็นว่า $200-4x$ ทำให้ $x \in (0,50)$ และ $10+x$ และ $x \in (-10,\infty)$

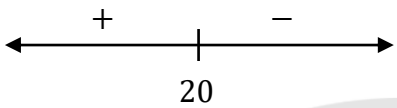
ดังนั้น $x \in (0,50) \cap (-10,\infty)$ นั่นคือ $x \in (0,50)$

เพราะ โจทย์กำหนดให้ทุก ๆ 1 บาทที่เพิ่มขึ้นต่อชิ้น จะมีแซนวิชที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 4 ชิ้น จึงสร้างสมการเพื่อหาความสัมพันธ์ของรายได้ของเจ้าของร้านกับราคาขายแซนวิชที่เพิ่มขึ้น และหาค่าที่เป็นไปได้ของราคาขาย แซนวิชโดยใช้การแก้อสมการในรูป $200-4x>0$ และ $10+x>0$ จะได้ $x<50$ และ $x>-10$ ทำให้ $-10<x<50$ แล้วจึงหาว่าในช่วงใดที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านเพิ่มมากขึ้นโดยใช้การหาอนุพันธ์และการแก้สมการเพื่อหาจุดวิกฤตและระบุช่วงที่ทำให้ $f'(x)>0$ เพื่อบอกว่าช่วงนั้นเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : การหาอนุพันธ์, การแก้สมการเพื่อหาจุดวิกฤต และระบุช่วงที่ทำให้ค่าบนเส้นจำนวนมากกว่าศูนย์

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 200 + 160x - 4x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(200 + 160x - 4x^2)$$
$$f'(x) = 0 + 160 - 8x$$
$$f'(x) = 160 - 8x$$
$$f'(x) = -8(-20 + x)$$
$$0 = -20 + x$$
$$x = 20$$



$f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, 20)$

$f'(x) < 0$ บนช่วง $(20, \infty)$

ดังนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-10,20)$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(20,50)$

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : เจ้าของร้านขนมปังร้านหนึ่งขายแซนวิชวันละ 200 ชิ้น ชิ้นละ 10 บาท จะขายหมดทุกวัน แต่ถ้าเจ้าของร้านขึ้นราคาแซนวิช พบว่าทุก ๆ 1 บาทที่เพิ่มขึ้นต่อชิ้น จะมีแซนวิชที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 4 ชิ้น จงหาว่าควรตั้งราคาขายแซนวิชอยู่ในช่วงใด ที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านเพิ่มมากขึ้น

จึงได้ข้อสรุป คือ : ควรตั้งราคาขายแซนวิชอยู่ในราคามากกว่าชิ้นละ 0 และน้อยกว่าชิ้นละ 30 บาท จึงทำให้รายได้ของเจ้าของร้านมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น

เพราะ : $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-10,20)$ จึงทำให้ มากกว่า -10 และน้อยกว่า 20 เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือก็คือมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้นและด้วย x แทนราคาขายแซนวิชที่เพิ่มขึ้น ทำให้ราคาขายที่เพิ่มขึ้นคือมากกว่า -10 บาทต่อชิ้น ไม่เกิน 20 บาทต่อชิ้น จากราคาปกติ 10 บาทต่อชิ้น ดังนั้น ราคาขายแซนวิชที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น คือมากกว่า 0 บาทต่อชิ้น ไม่เกิน 30 บาทต่อชิ้น

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

คนเลี้ยงวัวต้องการล้อมรั้วกั้นวัวโดยนำเชือกรั้วไฟฟ้ายาว 500 เมตร มาล้อมวัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหาความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : .....

.....

.....

โจทย์ถามอะไร : .....

.....

.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 4
เรื่อง ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

คนเลี้ยงวัวต้องการล้อมรั้วกั้นวัวโดยนำเชือกรั้วไฟฟ้ายาว 500 เมตร มาล้อมวัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหาความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : คนเลี้ยงวัวต้องการล้อมรั้วกั้นวัวโดยนำเชือกรั้วไฟฟ้ายาว 500 เมตร มาล้อมวัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

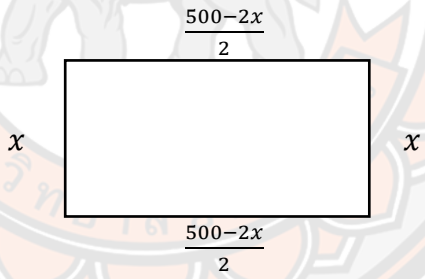
โจทย์ถามอะไร : ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :

กำหนดให้ $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นตารางเมตร

และ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นเมตร

จากโจทย์กำหนด จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวรอบรูป 500 เมตร มีลักษณะ ดังนี้



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว

จะได้สมการ $f(x) = (x)\left(\frac{500-2x}{2}\right) = 250x - x^2$

เพราะนำเชือกรั้วไฟฟ้ายาว 500 เมตร มาตัดออก 2 ด้าน ด้านละ x เมตร แล้วนำเชือกที่เหลือมาทำด้านด้านอีก 2 ด้านที่เหลือจึงได้เป็นด้านละ $\frac{500-2x}{2}$ เมตร หรือ $250 - x$ เมตร เนื่องจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันจึงต้องแบ่งเชือกยาว $500 - 2x$ เมตร เป็น 2 เส้นเท่า ๆ กัน ดังนั้น จากสูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้ $f(x) = (x)(250 - x)$ และจากสมบัติการแจกแจง จะได้ $f(x) = 250x - x^2$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์แล้วหาจุดวิกฤตเพื่อคาดคะเนว่าความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุดและจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สูตรหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, สมบัติการแจกแจง การบวก – ลบพหุนาม และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 250x - x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(250x - x^2)$$
$$f'(x) = 250 - 2x$$
$$0 = 250 - 2x$$
$$x = 125$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(250 - 2x)$$
$$f''(x) = 0 - 2$$
$$f''(x) = -2$$
$$f''(125) = -2$$
$$f''(125) = -2 < 0$$

ดังนั้น $f(125)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

และ $f(125) = 250(125) - (125)^2$

$$f(125) = 31{,}250 - (125)^2$$
$$f(125) = 31{,}250 - 15{,}625$$
$$f(125) = 15{,}625$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ คือ $15{,}625$

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : คนเลี้ยงวัวต้องการล้อมรั้วกั้นวัวโดยนำเชือกรั้วไฟฟ้ายาว 500 เมตร
มาล้อมวัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหาความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็น 125 เมตรจึงทำให้ได้พื้นที่มากที่สุดเป็น 15,625 ตารางเมตร

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ คือ $15{,}625$ โดยที่แทน $x = 125$ ดังนั้น ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็น 125 เมตร เนื่องจาก x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และพื้นที่มากที่สุดเป็น 15,625 ตารางเมตร เนื่องจาก $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ร้านขนมแห่งหนึ่งต้องการออกแบบถาดนึ่งขนมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิด จากอลูมิเนียมที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 18 นิ้ว จะต้องตัดอลูมิเนียมออกจากมุมทั้งสี่มุมเพื่อพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูงเท่าใดจึงจะได้ถาดที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : .....

.....

.....

โจทย์ถามอะไร : .....

.....

.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 5
เรื่อง ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

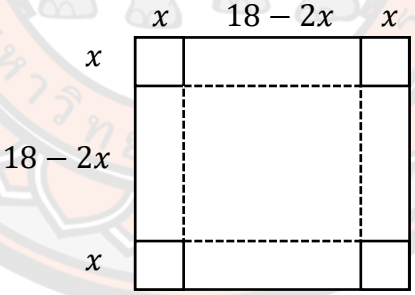
ร้านขนมแห่งหนึ่งต้องการออกแบบถาดนึ่งขนมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิด จากอลูมิเนียมที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 18 นิ้ว จะต้องตัดอลูมิเนียมออกจากมุมทั้งสี่มุมเพื่อพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูงเท่าใดจึงจะได้ถาดที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : ต้องการออกแบบถาดนึ่งขนมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิด จากอลูมิเนียมที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 18 นิ้ว

โจทย์ถามอะไร : จะต้องตัดอลูมิเนียมออกจากมุมทั้งสี่มุมเพื่อพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูงเท่าใดจึงจะได้ถาดที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของถาดนึ่งขนมหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว และ x แทนความสูงของถาดนึ่งขนมหน่วยเป็นนิ้ว

จากโจทย์กำหนด จะได้กล่องใส่โมเดลทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะ ดังนี้



ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว × ความสูง

จะได้สมการ $f(x) = (18-2x)(18-2x)(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$

และ $x \in (0,9)$

เพราะ จากโจทย์กำหนดและสูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว × ความสูง จะได้ว่า $18-2x$ นิ้ว เป็นความยาวของด้านกว้างและด้านยาว ส่วนอีกด้านที่เหลือเป็นความสูงของถาดมีความยาว x นิ้ว ทำให้ได้สมการแทนความสัมพันธ์เป็น $f(x) = (18-2x)(18-2x)(x)$ และจากสมบัติการแจกแจงจะได้ว่า $f(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ และเนื่องจาก $18-2x$ เป็นความยาวด้าน นอกจาก $x > 0$ แล้วยังทำให้ $18-2x > 0$ ซึ่งจะได้ว่า

$x < 9$ ดังนั้น $x \in (0,9)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์แล้วหาจุดวิกฤตเพื่อคาดคะเนว่าความสูงของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้ปริมาตรมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก, สมบัติการแจกแจง การบวก – ลบพหุนาม, หลักการแก้อสมการ และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 72x^2 + 324x)$$
$$f'(x) = 12x^2 - 144x + 324$$
$$0 = 12x^2 - 144x + 324$$
$$f'(x) = 12(x^2 - 12x + 27)$$
$$f'(x) = 12(x-3)(x-9)$$
$$0 = 12(x-3)(x-9)$$

จะได้ $x - 3 = 0$ หรือ $x - 9 = 0$

$x = 3$ หรือ $x = 9$

จะเห็นว่า $3 \in (0,9)$ และ $9 \notin (0,9)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 144x + 324)$$
$$f''(x) = 24x - 144$$
$$f''(3) = 24(3) - 144$$
$$f''(3) = -72 < 0$$

ดังนั้น $f(3)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

$$f(3) = 4(3)^3 - 72(3)^2 + 324(3)$$
$$f(3) = 432$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 3$ บนช่วง $(0,9)$ คือ 432

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ร้านขนมแห่งหนึ่งต้องการออกแบบถาดนึ่งขนมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิด จากอลูมิเนียมที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 18 นิ้ว จะต้องตัดอลูมิเนียมออกจากมุมทั้งสี่มุมเพื่อพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูงเท่าใดจึงจะได้ถาดที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : จะต้องพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูง 3 นิ้ว จึงจะได้ถาดที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุด 432 ลูกบาศก์นิ้ว

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 3$ บนช่วง $(0,9)$ คือ 432 ดังนั้น ความสูงของถาดนึ่งขนมเป็น 3 นิ้ว จึงจะทำให้ถาดมีความจุมากที่สุด เนื่องจาก x แทนความสูงของถาดนึ่งขนม และความจุของถาดนึ่งขนมที่มากที่สุดเป็น 432 ลูกบาศก์นิ้ว เนื่องจาก $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของถาดนึ่งขนม

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง ลดหรือเพิ่มเติมกำไร

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

พ่อค้าขายชานมไข่มุกซึ่งมีต้นทุนแก้วละ 12 บาท เขาพบว่า ถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว เขาควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : .....

.....

.....

โจทย์ถามอะไร : .....

.....

.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 6
เรื่อง ลดหรือเพิ่มเติมกำไร

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

พ่อค้าขายชานมไข่มุกซึ่งมีต้นทุนแก้วละ 12 บาท เขาพบว่า ถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว เขาควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : พ่อค้าขายชานมไข่มุกซึ่งมีต้นทุนแก้วละ 12 บาท
ถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์
และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว

โจทย์ถามอะไร : ควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ :

กำหนดให้ $f(x)$ แทนกำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์หน่วยเป็นบาท
และ x แทนราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงหน่วยเป็นบาทต่อแก้ว

กำไรแก้วละ $= 30 - 12 = 18$ บาท

จากโจทย์กำหนด $f(0) = (18-0)(1400+0) = [18-(0)][1400+70(0)]$

$f(1) = (18-1)(1400+70) = [18-(1)][1400+70(1)]$

$f(2) = (18-2)(1400+140) = [18-(2)][1400+70(2)]$

จะได้สมการ $f(x) = (18-x)(1400+70x) = 25200 - 140x - 70x^2$

จะเห็นว่า $18 - x > 0$ ทำให้ $x \in (-\infty, 18)$ และ $1400 + 70x > 0$ ทำให้ $x \in (-20, \infty)$
ดังนั้น $x \in (-\infty, 18) \cap (-20, \infty)$ นั่นคือ $x \in (-20, 18)$

เพราะ จาก กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน จะได้ กำไรแก้วละ $= 30 - 12 = 18$ บาท จากถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา จะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว ทำให้ กำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์ $= (18-x)(1400+70x) = 25200 - 140x - 70x^2$ และกำไรต่อแก้วต้องมากกว่า 0 บาท ทำให้ $18 - x > 0$ หรือ $x \in (-\infty, 18)$ และ จำนวนแก้วที่ขายได้ในหนึ่งสัปดาห์มากกว่า 0 แก้ว ทำให้ $1400 + 70x > 0$ หรือ $x \in (-20, \infty)$ ดังนั้น จากการดำเนินการของเซตจะได้ว่า $x \in (-\infty, 18) \cap (-20, \infty)$ นั่นคือ $x \in (-20, 18)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าควรลดราคาขายชานมไข่มุกลงเท่าใด ที่ทำให้กำไรของ

พ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์มากที่สุดและและได้กำไรมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(-20,18)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : กำไร $=$ ราคาขาย $-$ ต้นทุน, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 25200 - 140x - 70x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(25200 - 140x - 70x^2)$$
$$f'(x) = 0 - 140 - 140x$$
$$f'(x) = -140 - 140x$$
$$0 = -140 - 140x$$
$$x = -1$$

จะเห็นว่า $-1 \in (-20,18)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-140 - 140x)$$
$$f''(x) = 0 - 140$$
$$f''(x) = -140$$
$$f''(-1) = -140 < 0$$

ดังนั้น $f(-1)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

$$f(-1) = 25200 - 140(-1) - 70(-1)^2$$
$$f(-1) = 25200 - 140(-1) - 70(1)$$
$$f(-1) = 25200 + 140 - 70(1)$$
$$f(-1) = 25200 + 140 - 70$$
$$f(-1) = 25270$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = -1$ คือ $25,270$

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : พ่อค้าขายชานมไข่มุกซึ่งมีต้นทุนแก้วละ 12 บาท ถ้าตั้งราคาขายแก้วละ 30 บาท เขาจะขายได้ 1,400 แก้วต่อสัปดาห์และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายได้เพิ่มขึ้นเฉลี่ยสัปดาห์ละ 70 แก้ว แล้วพ่อค้าควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : พ่อค้าควรตั้งราคาขายชานมไข่มุกแก้วละ 31 บาท จึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรมากที่สุด $25,270$ บาทต่อสัปดาห์

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = -1$ คือ $25,270$ ดังนั้น ราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงแก้วละ -1 บาท แสดงว่าราคาขายเพิ่มขึ้นแก้วละ 1 บาท จึงต้องขายชานมไข่มุกแก้วละ $30 + 1 = 31$ บาท ที่ทำให้ได้กำไรมากที่สุด เนื่องจาก x แทนราคาขายชานมไข่มุกที่ลดลงต่อแก้ว และกำไรมากที่สุด $25,270$ บาทต่อสัปดาห์ เนื่องจาก $f(x)$ แทนกำไรของพ่อค้าในหนึ่งสัปดาห์

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7
เรื่อง ล้อมรั้วตามงบประมาณ

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

คุณเฉลิมพรต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดคูน้ำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ เพื่อที่ดินส่วนนี้ไปทำเป็นร้านอาหาร ถ้าคุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท จะต้องล้อมรั้วให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดจะเป็นเท่าใด ถ้าค่าล้อมรั้วราคาเมตรละ 8 บาท

โจทย์กำหนดอะไร : .....
.....
.....

โจทย์ถามอะไร : .....
.....
.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....
.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 7
เรื่อง ล้อมรั้วตามงบประมาณ

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

คุณเฉลิมพรต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดคูน้ำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ เพื่อที่ดินส่วนนี้ไปทำเป็นร้านอาหาร ถ้าคุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท จะต้องล้อมรั้วให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดจะเป็นเท่าใด ถ้าค่าล้อมรั้วราคาเมตรละ 8 บาท

โจทย์กำหนดอะไร : คุณเฉลิมพรต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดคูน้ำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ ถ้าคุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท และค่าล้อมรั้วเมตรละ 8 บาท

โจทย์ถามอะไร : จะต้องล้อมรั้วให้แต่ละด้านยาวเท่าใดจะพื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดจะเป็นเท่าใด

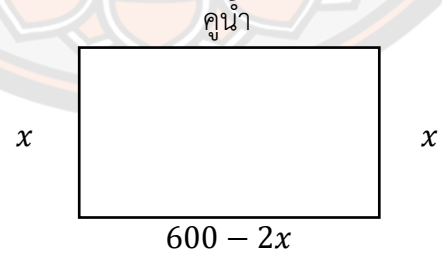
สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นตารางเมตร และ x แทนความยาวด้านที่ไม่ขนานกับคูน้ำของรั้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน่วยเป็นเมตร

จากโจทย์กำหนด คุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท

จะได้ว่า $4800 = 8(2x) + 8y$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่ขนานกับคูน้ำ

ดังนั้น $y = \frac{4800}{8} - 2x$

$y = 600 - 2x$ ทำให้การล้อมรั้วมีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว $= (x)(600 - 2x)$

โดยที่ $x \in (0,300)$

จะได้สมการ $f(x) = (x)(600 - 2x) = 600x - 2x^2$

เพราะ จากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันจะได้ว่าสี่เหลี่ยมรูปนี้มีด้านยาว x เมตร จำนวน 2 ด้าน และมีงบประมาณ 4,800 บาท ค่าล้อมรั้วราคาเมตรละ 8 บาท จะได้ว่า $4800 = 8(2x) + 8y$ เมื่อ y แทนความยาวด้านที่ขนานกับคูน้ำ จะเห็นว่า $y = 600 - 2x$

ดังนั้น จากสมบัติการแจกแจงและสูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว จะได้ว่า $f(x) = (x)(600-2x) = 600x - 2x^2$ และความยาวด้านมากกว่า 0 ทำให้ $x > 0$ และ $600 - 2x > 0$ เมื่อพิจารณาจากการแก้อสมการ จะได้ว่า $0 < x < 300$ ดังนั้น $x \in (0,300)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุดและจะได้พื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด โดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,300)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน, สูตรหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, การแก้อสมการ, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 600x - 2x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(600x - 2x^2)$$
$$f'(x) = 600 - 4x$$
$$0 = 600 - 4x$$
$$x = 150$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(600 - 4x)$$
$$f''(x) = 0 - 4$$
$$f''(150) = -4 < 0$$

ดังนั้น $f(150)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

และ $f(150) = 600(150) - 2(150)^2$

$$f(150) = 45{,}000$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 150$ บนช่วง $(0,300)$ คือ $45{,}000$

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : ต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดคูน้ำเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมรั้วฝั่งคูน้ำ ถ้าคุณเฉลิมพรมีงบประมาณ 4,800 บาท และค่าล้อมรั้วเมตรละ 8 บาท จะต้องล้อมรั้วให้แต่ละด้านยาวเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : จะต้องล้อมรั้วให้ด้านกว้างยาว 150 เมตร และด้านยาวยาว 300 เมตร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่มากที่สุดเป็น $45{,}000$ ตารางเมตร

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 150$ คือ $45{,}000$ ดังนั้น ความยาวของด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหาได้จาก $600 - 2(150) = 300$ เมตร โดยที่ความยาวของด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ 150 เมตร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด เนื่องจาก x แทนความยาวด้านที่ไม่ขนานกับคูน้ำของรั้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และพื้นที่มากที่สุด $45{,}000$ ตารางเมตร เนื่องจาก $f(x)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง กล่องกระดาษฐานผืนผ้า

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเท่าใด เมื่อกล่องทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 60 เซนติเมตร และความยาว 96 เซนติเมตร โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกแล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิด และกล่องจะมีความสูงเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : .....

.....

.....

โจทย์ถามอะไร : .....

.....

.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ตัวอย่างคำตอบใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้ที่ 8
เรื่อง กล่องกระดาษฐานผืนผ้า

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

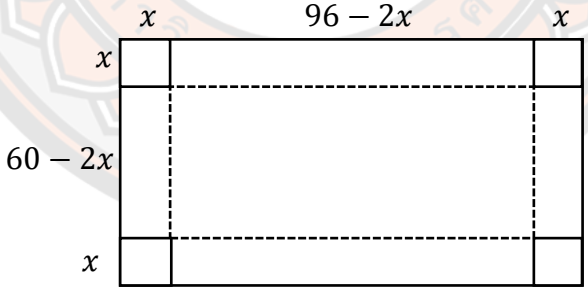
ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเท่าใด เมื่อกล่องทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 60 เซนติเมตร และความยาว 96 เซนติเมตร โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกแล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิด และกล่องจะมีความสูงเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : กล่องทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 60 เซนติเมตร และความยาว 96 เซนติเมตร โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกแล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิด

โจทย์ถามอะไร : ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเท่าใด และกล่องจะมีความสูงเท่าใด

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่องหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร และ x แทนความสูงของกล่องหน่วยเป็นเซนติเมตร

จากโจทย์กำหนด จะได้กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะ ดังนี้



จะเห็นว่า $60-2x$ แล้ว $x \in (0,30)$ และ $96-2x$ แล้ว $x \in (0,48)$

ดังนั้น $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง

จะได้สมการ $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$

เพราะ จากโจทย์กำหนดและสูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก $=$ ความกว้าง $\times$ ความยาว $\times$ ความสูง จะได้ว่า ด้านกว้างมีความยาว $60-2x$ เซนติเมตร, ด้านยาวมีความยาว $96-2x$

เซนติเมตร และ ด้านสูงมีความยาว x เซนติเมตร ทำให้ได้สมการแทนความสัมพันธ์เป็น $f(x) = (60-2x)(96-2x)(x)$ และจากสมบัติการแจกแจง จะได้ $f(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$ และความยาวด้านของทรงสี่เหลี่ยมมีค่ามากกว่า 0 เซนติเมตร จะเห็นว่านอกจาก $x > 0$ แล้วยังทำให้ $60-2x > 0$ และ $96-2x > 0$ จากการแก้อสมการจะได้ว่า $x \in (0,30)$ และ $x \in (0,48)$ และด้วยการดำเนินการของเซต จะได้ $x \in (0,\infty) \cap (0,30) \cap (0,48)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$ แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปหาอนุพันธ์หาจุดวิกฤตและใช้บทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพื่อหาว่าความสูงของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้เป็นเท่าใดที่ทำให้ได้ปริมาตรมากที่สุด และมีความจุมากที่สุดเท่าใดโดยดูค่าของ x บนช่วง $(0,30)$ ประกอบการตัดสินใจ

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : สูตรหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก, สมบัติการแจกแจง, หลักการแก้อสมการ, การดำเนินการของเซต เรื่อง บทนิยามของอินเตอร์เซกชัน, การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน, และบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนวิธีทำ : $f(x) = 4x^3 - 312x^2 + 5760x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 312x^2 + 5760x)$$
$$f'(x) = 12x^2 - 624x + 5760$$
$$0 = 12x^2 - 624x + 5760$$
$$0 = 12(x^2 - 52x + 480)$$
$$0 = 12(x-12)(x-40)$$

จะได้ $x - 12 = 0$ หรือ $x - 40 = 0$

$x = 12$ หรือ $x = 40$

จะเห็นว่า $12 \in (0,30)$ และ $40 \notin (0,30)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 624x + 5760)$$
$$f''(x) = 24x - 624$$
$$f''(12) = 24(12) - 624$$
$$f''(12) = 288 - 624$$
$$f''(12) = -336 < 0$$

ดังนั้น $f(12)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

$$f(12) = 4(12)^3 - 312(12)^2 + 5760(12)$$
$$f(12) = 4(1728) - 312(144) + 5760(12)$$
$$f(12) = 6912 - 44928 + 69120$$
$$f(12) = 31{,}104$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 12$ บนช่วง $(0,30)$ คือ $31{,}104$

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : กล่องทำจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 60 เซนติเมตร และความยาว 96 เซนติเมตร โดยตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแข็งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ขนาดเท่ากันออกแล้วประกอบเป็นกล่องฝาเปิด แล้วความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเท่าใดและกล่องจะมีความสูงเท่าใด

จึงได้ข้อสรุป คือ : ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น 31,104 ลูกบาศก์เซนติเมตร และกล่องจะมีความสูง 12 เซนติเมตร

เพราะ : ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 12$ บนช่วง $(0,30)$ คือ $31,104$ ดังนั้น ความจุที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น 31,104 ลูกบาศก์เซนติเมตร เนื่องจาก $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่อง และกล่องจะมีความสูง 12 เซนติเมตร เนื่องจาก x แทนความสูงของกล่อง

แบบสังเกตพฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

วัน - เดือน - ปี ที่ทำการสังเกต .....

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ..... ชั้น .....

รายการประเมิน	พฤติกรรมการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
การสร้างข้อคาดการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์	
การให้หลักฐานสนับสนุนข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ปัญหา	
การสร้างข้อโต้แย้งและให้เหตุผลที่แตกต่างออกไป	
การให้หลักฐานสนับสนุนการโต้แย้งกลับ	

ลงชื่อ ..... ผู้ประเมิน

(.....)

สมาชิกภายในกลุ่มที่.....

1. ..... เลขที่.....
2. ..... เลขที่.....
3. ..... เลขที่.....
4. ..... เลขที่.....
5. ..... เลขที่.....
6. ..... เลขที่.....
7. ..... เลขที่.....

แบบทดสอบการให้เหตุผลและการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

ส่วนที่ 1 ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้และตอบคำถามด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

สถานการณ์ที่ 2 “ล้อมสวนดอกไม้วันปีใหม่”

1. คนสวนต้องการล้อมสวนดอกไม้ด้วยไฟประดับที่มีลักษณะเป็นสายยาวม้วนละ 100 เมตร จำนวน 4 ม้วน เพื่อตกแต่งสวนดอกไม้ในวันปีใหม่โดยล้อมรอบสวนดอกไม้ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเพียงหนึ่งรูป จงหาความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

โจทย์กำหนดอะไร : .....
.....
.....

โจทย์ถามอะไร : .....
.....
.....

สร้างสมการแทนความสัมพันธ์ และเพราะเหตุใดจึงได้สมการดังนี้ : .....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....
.....

ขั้นตอนวิธีทำ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เนื่องจากสถานการณ์ปัญหาระบุว่า : .....

.....

.....

จึงได้ข้อสรุป คือ : .....

.....

เพราะ : .....

.....

.....

ส่วนที่ 2 ให้นักเรียนสร้างข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความดังต่อไปนี้ และให้เหตุผลสนับสนุนข้อคาดการณ์อย่างน้อย 2 เหตุผล พร้อมระบุหลักฐานสนับสนุนอย่างน้อย 2 หลักฐาน

สถานการณ์ที่ 1 “แนวโน้มราคาขายลูกชิ้น”

2. เจ้าของร้านขายลูกชิ้นร้านหนึ่งขายลูกชิ้นได้วันละ 100 ไม้ ไม้ละ 5 บาท จะขายหมดทุกวัน แต่ถ้าเจ้าของร้านขึ้นราคาลูกชิ้น พบว่าทุก 2 บาทที่เพิ่มขึ้น จะมีลูกชิ้นที่ขายไม่ได้เพิ่มขึ้น 8 ไม้ จงหาว่าควรตั้งราคาขายลูกชิ้นอยู่ในช่วงใด ที่ทำให้รายได้ของเจ้าของร้านมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น

กำหนดให้ $f(x)$ แทนรายได้ของเจ้าของร้านหน่วยเป็นบาท

และ x แทนราคาขายลูกชิ้นที่เพิ่มขึ้นหน่วยเป็น 2 บาทต่อไม้

จะได้ สมการแทนความสัมพันธ์ คือ $f(x) = (100 - 8x)(5 + 2x) = 500 + 160x - 16x^2$

โดยที่ $x \in [0,12.5] \cap [-2.5, \infty)$ นั่นคือ $x \in [-2.5, \infty)$

ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : .....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....

สถานการณ์ที่ 3 “กล่องจับสลากจากกระดาษแข็ง”

2. กนกพรต้องการทำกล่องจับสลากทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิดและใส่เม็ดโฟมจนเต็มกล่องเพื่อไม่ให้เห็นสลาก จากกระดาษแข็งที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 30 นิ้ว จะต้องตัดกระดาษแข็งออกจากมุมทั้งสี่มุมเพื่อพับด้านข้างขึ้นไปให้มีความสูงเท่าใดจึงจะได้กล่องที่มีความจุมากที่สุดและมีความจุมากที่สุดเท่าใด

กำหนดให้ $f(x)$ แทนความจุหรือปริมาตรของกล่องจับสลากหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว

และ x แทนความสูงของกล่องจับสลากหน่วยเป็นนิ้ว

จะได้สมการ $f(x) = (30-x)(30-x)(x) = x^3 - 60x^2 + 900x$

โดยที่ $x \in (0,30) \cap (0,\infty)$ นั่นคือ $x \in (0,30)$

ข้อคาดการณ์ที่แตกต่างจากข้อความข้างต้น และเพราะเหตุใดจึงได้ข้อคาดการณ์ดังนี้ : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ซึ่งแตกต่างจากข้อคาดการณ์ข้างต้น นั่นคือ : .....

.....

.....

หลักฐานสนับสนุน ได้แก่ : .....

.....