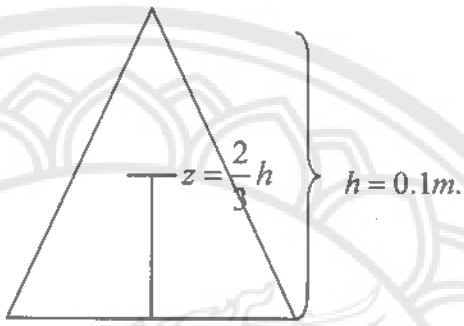
บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 หาสมการคณิตศาสตร์ของตุ๊กตาล้มลุก



รูปที่ 3.1 ส่วนบนของตุ๊กตาล้มลุก

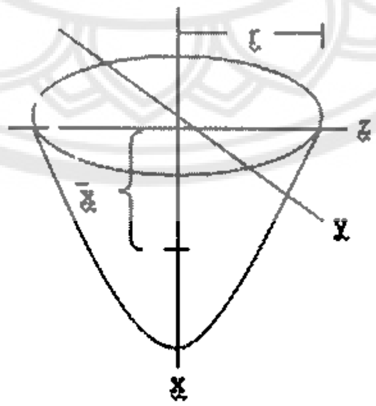
หาค่า Z

จากรูปที่ 3.1

$$z = \frac{2}{3}h = \frac{2(0.1)}{3} = 0.067 \text{ m}$$

กำหนดให้ $r = 0.05$ m

$$r + Z = 0.05 + 0.067 = 0.117 \text{ m}$$



รูปที่ 3.2 ส่วนด้านล่างของตุ๊กตาล้มลุก

หาค่า $\bar{x}$

จากรูปที่ 3.2

$$\bar{x} = \frac{3r}{8} = \frac{3(0.05)}{8} = 0.0187 \text{ m}$$

จะได้ $r - \bar{x} = 0.05 - 0.0187 = 0.0313$ m

$$\frac{\left(z+\bar{x}\right)}{2} = \frac{(0.116+0.0313)}{2} = 0.07365 \text{ m}$$

กำหนดให้ส่วนล่างของตุ๊กตาล้มลุก มีมวล = 0.8 kg

หา I_{XX}

จากรูปที่ 3.2

$$I_{XX} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(0.8)(0.05)^2 = 0.0001$$

กำหนดให้ส่วนบนของตุ๊กตาล้มลุก มีมวล = 0.2 kg

หา I_{ZZ}

จากรูปที่ 3.1

$$I_{ZZ} = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{2}{5}(0.2)(0.05)^2 = 0.0002$$

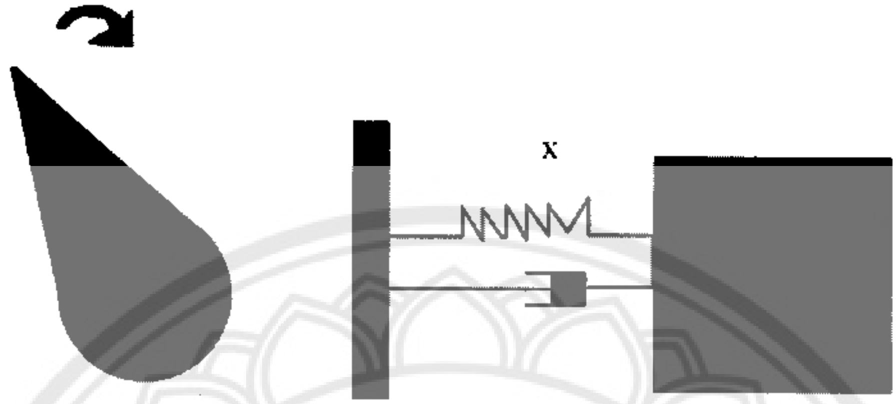
นำค่า I ที่ได้มารวมกัน

I_{ZZ} ของสามเหลี่ยมบน + I_{XX} ของครึ่งวงกลมล่าง = 0.0002 + 0.0001

= 0.0012

3.2 วิธีการคำนวณ

กำหนดให้



รูปที่ 3.3 แสดงรูปของตุ๊กตาล้มลุกเอียงเป็นมุม θ ก่อนที่จะปล่อย

จากสมการพลังงานจลย์

$$(K.E.)_{max} = \frac{1}{2} I_A \omega_n^2 = mr(r-\bar{x})\omega_n^2$$

ที่ $I_A = I_{cg.} + m(r-\bar{x})^2 = I_0 - m\bar{x}^2 + m(r-\bar{x})^2 = 2mr(r-\bar{x})^2$

จากสมการอนุรักษ์พลังงาน

$$(K.E.)_{max} = (P.E.)_{max}$$

แทนค่าตัวแปร **จะได้**

$$mr(r-\bar{x})\omega_n^2 = mg\bar{x}(1-\cos\theta)$$

ย้ายข้างสมการ

$$\therefore \omega_n = \sqrt{g\bar{x}(1-\cos\theta / r(r-\bar{x})} \quad \text{rad/sec} \qquad (3.1)$$

แทนค่าคงที่ลงในสมการที่ 3.1

จะได้ $\omega_n = \sqrt{9.81(0.0313)(1-\cos\theta / 0.05(0.05\ 0.0313)}$

$= 328.06(1-\cos\theta)$

คูณ 328.06 เข้าไปในวงเล็บ

$$\omega_n = 328.06(328.06 - \cos\theta)$$

Diff ทั้ง 2 ข้าง

$$\therefore \quad \dot{\omega}_n = \alpha = 328.06\sin\theta$$

จากสมการ $\sum M_c = \bar{I}\alpha$

จะได้ $F_x h = \bar{I}\alpha$

แทนค่า h, $\bar{I}$, α ในสมการ จะได้

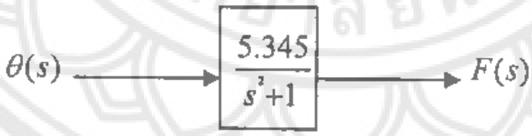
$$F(0.07365) = 0.0012(328.06\sin\theta)$$

$$\therefore F = 5.345\sin\theta$$

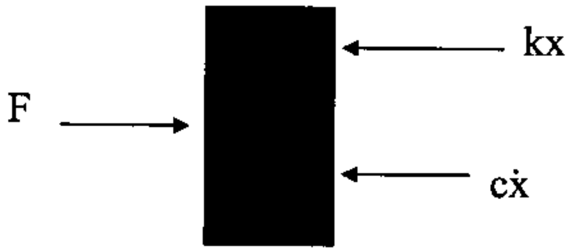
นำค่า F ที่ได้มาแปลงลาปลาซ

จะได้ $$\frac{F(s)}{\theta(s)} = \frac{5.345}{s^2+1} \qquad (3.2)$$

นำมาเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรม



รูปที่ 3.4 การนำสมการทางคณิตศาสตร์ 3.2 มาใส่บล็อกไดอะแกรม



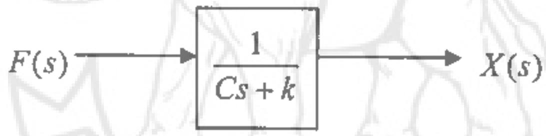
รูปที่ 3.5 แสดงรูปของ controller เมื่อมีแรงมากระทำ

จากรูปที่ 3.5 จะได้สมการ $F = C\dot{x} + kX$

แปลงลาปลาซจะได้

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Cs+k} \tag{3.3}$$

นำมาเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรม



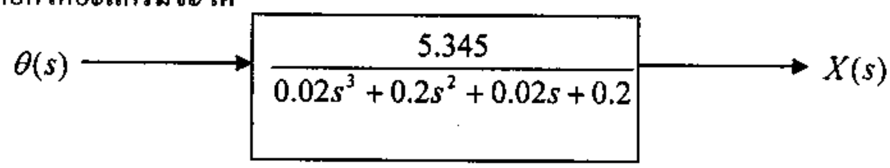
รูปที่ 3.5 การนำสมการทางคณิตศาสตร์ 3.3 มาใส่บล็อกไดอะแกรม

นำสมการที่ 2 และ 3 มารวมกัน จะได้

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = G(s) = \frac{5.345}{(s^2+1)(Cs+k)}$$

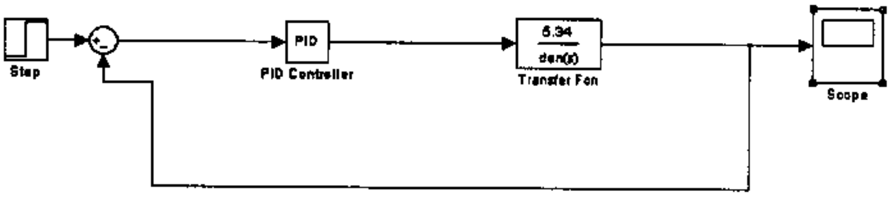
$$= \frac{5.345}{0.02s^3 + 0.2s^2 + 0.02s + 0.2} \tag{3.4}$$

เขียนบล็อกไดอะแกรมจะได้



รูปที่ 3.6 การนำสมการทางคณิตศาสตร์ 3.4 มาใส่บล็อกไดอะแกรม

3.3 การรวมบล็อกระบบควบคุม PID และหา Transfer Function



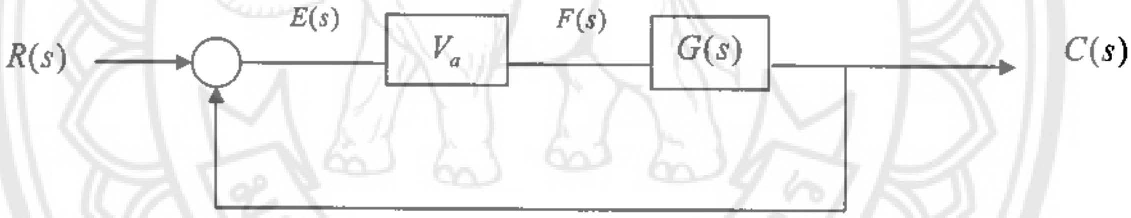
รูปที่ 3.7 การนำสมการทางคณิตศาสตร์มาใส่บล็อกระบบควบคุม PID

รวมบล็อกของ Controller เข้ากับ Transfer Function

โดยที่แทนค่าตัวแปรต่างๆ เท่ากับ $k_p = 8$, $k_i = 1$, $k_d = 4$ ในบล็อก PID Control Transfer Function คือ

$$\frac{5.345}{0.02s^3 + 0.2s^2 + 0.02s + 0.2}$$

จากบล็อกไดอะแกรมเมื่อนำมารวมกันจะได้



รูปที่ 3.7 การรวมบล็อกไดอะแกรม

กำหนดให้

$$V_a = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

$$= \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s}$$

$$G(s) = \frac{5.345}{0.02s^3 + 0.2s^2 + 0.02s + 0.2}$$

จากรูปที่ 3.7 จะได้สมการ

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

และ

$$F(s) = V_a \, . \, E(s)$$

แทนค่า $E(s)$ ในสมการ $F(s)$ ข้างบน จะได้

$$F(s) = V_a[R(s)-C(s)] \tag{3.5}$$

จากรูปที่3.7จะได้สมการ

$$C(s) = G(s) . F(s)$$

ย้ายข้างสมการ จะได้

$$\frac{C(s)}{G(s)} = F(s) \tag{3.6}$$

แทนค่าสมการที่ 3.5 ในสมการที่ 3.6 จะได้

$$\frac{C(s)}{G(s)} = V_a[R(s)-C(s)]$$

ย้าย $G(s)$ ไปคูณ

$$C(s) = G(s) . V_a[R(s)-C(s)]$$

คูณ $G(s)$ และ V_a เข้าไปในวงเล็บ

$$C(s) = G(s)\cdot V_a\cdot R(s)-G(s)\cdot V_a\cdot C(s)$$

ย้ายข้างสมการ จากนั้นแยก $C(s)$ ออกมานอกวงเล็บ

$$C(s)[1+G(s).V_a] = G(s)\cdot V_a\cdot R(s)$$

ย้ายข้างสมการ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)\cdot V_a}{1+G(s)V_a} \tag{3.7}$$

แทนค่าตัวแปรในสมการที่ 3.7

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\left(\dfrac{5.345}{0.02s^3+0.2s^2+0.02s+0.2}\right)\left(\dfrac{k_p s+k_i+k_d s^2}{s}\right)}{1+\left(\dfrac{5.345}{0.02s^3+0.2s^2+0.02s+0.2}\right)\left(\dfrac{k_p s+k_i+k_d s^2}{s}\right)}$$

คูณ $\dfrac{k_p s+k_i+k_d s^2}{s}$ เข้าไปในวงเล็บ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\left(\dfrac{5.345(k_p s+k_i+k_d s^2)}{0.02s^4+0.2s^3+0.02s^2+0.2s}\right)}{1+\left(\dfrac{5.345(k_p s+k_i+k_d s^2)}{0.02s^4+0.2s^3+0.02s^2+0.2s}\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{5.345(k_p s+k_i+k_d s^2)}{0.02s^4+0.2s^3+0.02s^2+0.2s}\right)}{\left(\dfrac{(0.02s^4+0.2s^3+0.02s^2+0.2s)+5.345(k_p s+k_i+k_d s^2)}{0.02s^4+0.2s^3+0.02s^2+0.2s}\right)}$$

กลับด้านสมการ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5.345(k_p s+k_i+k_d s^2)}{\left((0.02s^4+0.2s^3+0.02s^2+0.2s)+5.345(k_p s+k_i+k_d s^2)\right)}$$

$$= \frac{5.345k_p s+5.345k_i+5.345k_d s^2}{\left(0.02s^4+0.2s^3+0.02s^2+0.2s+5.345k_d s^2+5.345k_p s+5.345k_i\right)}$$

$$= \frac{5.345k_p s+5.345k_i+5.345k_d s^2}{\left(0.02s^4+0.2s^3+(0.02\times 5.345k_d)s^2+(0.2\times 5.345k_p)s+5.345k_i\right)}$$

$$= \frac{5.345k_p s+5.345k_i+5.345k_d s^2}{\left(0.02s^4+0.2s^3+0.1068k_d s^2+1.068k_p s+5.345k_i\right)} \qquad (3.8)$$

จากการสุ่มค่าจากโปรแกรม Matlab จะได้ค่า $k_p = 8$, $k_i = 1$, $k_d = 4$ ที่เสถียรที่สุด แทนค่าในสมการที่ 3.8

$$= \frac{42.76 + 5.345 + 21.38}{\left(0.02s^4 + 0.2s^3 + 0.4272s^2 + 8.544s + 5.345\right)}$$

$$= \frac{69.485}{\left(0.02s^4 + 0.2s^3 + 0.4272s^2 + 8.544s + 5.345\right)} \tag{3.9}$$

นำสมการที่3.9 ไปแปลงลาปลาซผกผันในโปรแกรม Matlab จะได้

$$= 8.2234e^{(-0.6397t)}$$