บทที่ 2
ทฤษฎีเบื้องต้นและหลักการควอนไทซ์สัญญาณ

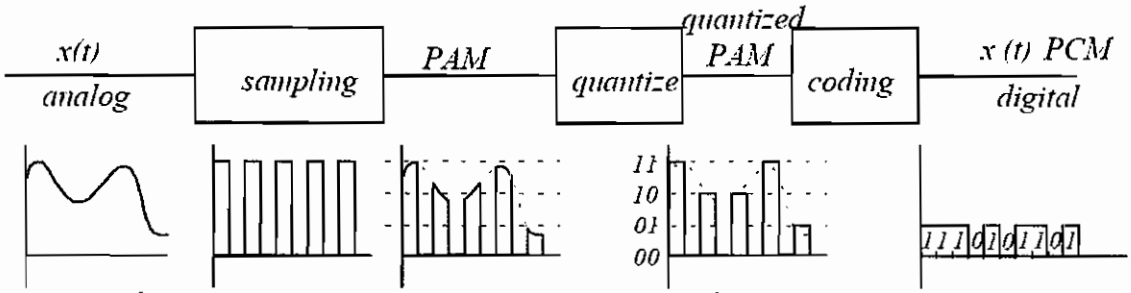
ในการสื่อสารปัจจุบัน โดยส่วนมากแล้วเป็นการสื่อสารแบบดิจิตอล เทคโนโลยีต่างๆที่ผลิตออกมาก็ล้วนแต่ใช้ระบบดิจิตอลทั้งสิ้น ที่เป็นเช่นนี้เพราะในทางโทรคมนาคม สัญญาณดิจิตอลนั้นถึงแม้จะถูกรบกวนจากสัญญาณรบกวน แต่ที่ปลายทางก็ยังสามารถตัดสินได้ว่า สัญญาณที่รับมาจากต้นทางนี้ถือว่ายอมรับได้ ซึ่งต่างจากสัญญาณอนาลอก หากถูกรบกวนจากสัญญาณรบกวนในระดับหนึ่งแล้วสัญญาณจะผิดเพี้ยนไปจากเดิมโดยสิ้นเชิง ทำให้ที่ปลายทางไม่สามารถตัดสินได้ว่าสัญญาณข้อมูลที่ต้นทางส่งมาให้นั้นควรเป็นอย่างไร และในกระบวนการก่อนที่จะได้สัญญาณดิจิตอลออกมานั้นจะต้องนำสัญญาณข้อมูลที่เป็นอนาลอกผ่านกระบวนการ Pulse Amplitude Modulation(PAM) แล้วนำสัญญาณ PAM ที่ได้นี้ไปเข้ากระบวนการ Pulse Code Modulation(PCM) โดยในการทำPCM นี้ จะมีวิธีหนึ่งที่เรียกว่าการควอนไทซ์สัญญาณ (Quantization) จะเป็นการกำหนดให้สัญญาณอนาลอกที่รับมานี้ควรมีเลขดิจิตอลอย่างไร และวิธีการที่กล่าวมาทั้งหมดได้อธิบายไว้ดังนี้

2.1 Pulse Amplitude Modulation (PAM) [1]

PAM คือการมอดูเลตทางแอมปลิจูดของพัลส์ โดยอาศัยหลักการสุ่มตัวอย่างของสัญญาณที่เป็นอนาลอกตามช่วงเวลา ทำให้สัญญาณนั้นขาดจากกันเป็นพัลส์ๆ โดยขนาดของแต่ละพัลส์จะเท่ากับขนาดของสัญญาณเดิมในช่วงเวลานั้นๆ ซึ่งการสุ่มตัวอย่างจะทำด้วยอัตราสองเท่าของสัญญาณอนาลอก หรืออัตราการสุ่มของไนควิสต์(Nyquist rate) หรือกล่าวได้ว่า PAM เป็นการคูณสัญญาณข้อมูลกับสัญญาณ square wave ที่มีความถี่สูงกว่า

2.2 Pulse Code Modulation (PCM) [2]

PCM คือการนำสัญญาณ PAM มาทำการปรับระดับขนาดของพัลส์นี้ให้อยู่ในระดับที่กำหนดไว้ โดยเรียกขั้นตอนนี้ว่าการควอนไทซ์สัญญาณ(Quantization) จากนั้นจึงเข้ารหัสของพัลส์ที่ได้นี้ การที่พัลส์มีขนาดต่างๆเมื่อถูกจัดเข้ากับระดับที่กำหนดไว้จะทำให้เกิดความผิดพลาดหรือความแตกต่างจากการปรับระดับนี้ เรียกว่า สัญญาณรบกวนจากการควอนไทซ์(Quantization noise)



รูปที่ 2.1 กระบวนการ Pulse Code Modulation (PCM) ที่ใช้ 2 บิตในการเข้ารหัส [2]

2.3 Quantization [2]

เป็นหนึ่งในกระบวนการทำ PCM เพื่อให้ได้สัญญาณดิจิตอลที่ใกล้เคียงกับสัญญาณอนาลอกเดิมมากที่สุด โดยใช้จำนวนบิตในการแทนสัญญาณต้องมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ในจำนวนบิตที่จำกัดค่าหนึ่งจะได้จำนวนระดับที่จำกัดเช่นกัน ตัวอย่างเช่น จำนวนบิตที่เราจะใช้มี 3 บิต จะมีจำนวนระดับเท่ากับ 8 ระดับ ในการควอนไทซ์สัญญาณอนาลอกเท่าใดก็ตาม จะถูกจัดเข้าเป็นระดับ 8 ระดับนี้เท่านั้น ในขั้นตอนการแปลงสัญญาณกลับเป็นสัญญาณอนาลอกอาจทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างสัญญาณอนาลอกเดิมกับสัญญาณอนาลอกที่แปลงกลับจากสัญญาณดิจิตอลดังกล่าวจะมีเพียง 8 ค่า

เพื่อลด Quantization noise เราสามารถปรับระดับ Quantization level ได้ตามความเหมาะสมกับการกระจายทางสถิติของสัญญาณอินพุต เพื่อให้ได้อัตราส่วนระหว่างกำลังของสัญญาณต่อกำลังของสัญญาณรบกวน เราควรทราบความสัมพันธ์ระหว่าง

1. การกระจายทางสถิติ (PDF) ของสัญญาณอินพุต
2. จำนวนระดับในการควอนไทซ์สัญญาณ(Number of quantization level : M)
3. ระดับการควอนไทซ์ (Quantization level, $\tilde{x}_k$)

ทั้งสามค่าดังกล่าวมีความสำคัญสำหรับการควอนไทซ์สัญญาณ เมื่อทราบค่าเหล่านี้แล้วสามารถทำการหาค่าอัตราส่วนอัตราส่วนระหว่างกำลังของสัญญาณต่อกำลังของสัญญาณรบกวนได้จากสมการที่(2.1)

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \tag{2.1}$$

เนื่องจากทราบ Quantization level ($\tilde{x}_k$) แล้ว ต่อไปควรทราบขอบเขตในการอินทิเกรท (boundary of quantization)ของแต่ละระดับขั้นสามารถหาได้จากสมการที่ (2.2)

$$x_i = \begin{cases} \min\{x\} & ;i=0 \\ \dfrac{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}}{2} & ;i=1,2,...,M-1 \\ \max\{x\} & ;i=M \end{cases} \tag{2.2}$$

ซึ่งจะได้ ขอบเขต (boundaries, x_k)เท่ากับ $\{M+1\ levels\}$

การหากำลังของสัญญาณ (P_{signal}) หาได้จากสมการที่(2.3)

$$P_{signal} = E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \tag{2.3}$$

โดยที่ $f_X(x)$ คือ PDFของสัญญาณ

และกำลังของสัญญาณรบกวน (P_{noise}) หาได้จากสมการที่(2.4)

$$P_{noise} = \sum_{k=1}^{M} \overline{e_k^2} \tag{2.4}$$

โดยที่ $$\overline{e_k^2} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-\tilde{x}_k)^2 f_X(x)dx \tag{2.5}$$

เมื่อ $f_X(x)$ คือ PDFของสัญญาณ

เมื่อทำการคำนวณหา P_{signal} และ P_{noise} ได้แล้ว นำไปแทนค่าในสมการที่ (2.1) ก็จะได้ค่า SNR แล้วแปลงค่า SNR นี้ให้อยู่ในหน่วยเดซิเบล ดังสมการที่(2.6)

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR) \tag{2.6}$$

ในการควอนไทซ์สัญญาณ มีอยู่สองแบบ คือ

1. Uniform Quantization คือ การควอนไทซ์สัญญาณที่มีระยะห่างของระดับการควอนไทซ์ (Quantization level , $\tilde{x}_k$) ที่เท่ากัน

2. Non-Uniform Quantization คือ การควอนไทซ์สัญญาณที่มีระยะห่างของระดับการควอนไทซ์(Quantization level , $\tilde{x}_k$) ที่ไม่เท่ากัน

เนื่องจากสัญญาณอินพุตมี PDF ทั้งที่เป็นแบบ Uniform และ Non-Uniform ในการออกแบบการควอนไทซ์สัญญาณเราจึงต้องวางตำแหน่งของ Quantization level ($\tilde{x}_k$) ให้เหมาะสม

ว่าควรเลือกการควอนไทซ์แบบไหน ตามสัญญาณอินพุตนั้นเพื่อให้เกิด Quantization noise น้อยที่สุด นั่นหมายถึงการได้ค่า SNR ที่มากที่สุดนั่นเอง

เพื่อให้เห็นถึงวิธีการเลือก Quantization level ที่เหมาะสม ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างวิธีการคำนวณการควอนไทซ์สัญญาณ มีสองตัวอย่าง แล้วจะนำตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างนี้มาเปรียบเทียบกันว่าควรจะเลือกวิธีการใดให้เหมาะสมกับ PDF ของสัญญาณ

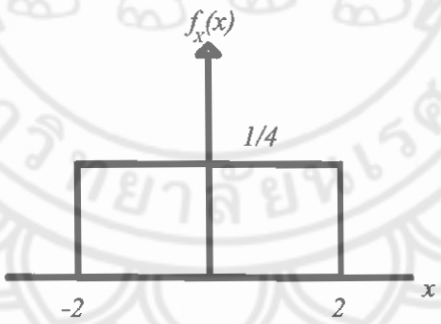
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดPDF ของสัญญาณ ดังสมการที่ (2.7)

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ;-2\le x\le 2\\ 0 & ;otherwise\end{cases} \tag{2.7}$$

ต่อไปจะแสดงวิธีการหาค่า SNR_{dB} ของสัญญาณอินพุตดังกล่าวนี้ โดยมีจำนวนระดับของการควอนไทซ์เท่ากับ 4 ระดับ และกำหนดขั้นระดับในการควอนไทซ์($\tilde{x}_k$) ดังนี้

- Uniform Quantization level $\Rightarrow \tilde{x}_k=\{-1.5,-0.5,0.5,1.5\}$
- Non uniform Quantization level $\Rightarrow \tilde{x}_k=\{-1.8,-0.4,0.4,1.8\}$

วิธีทำ จาก PDFของสัญญาณ ที่โจทย์กำหนดให้ สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป ที่ 2.2



รูปที่ 2.2 PDF ของสัญญาณ ตัวอย่างที่ 1

- จาก Uniform Quantization level $\tilde{x}_k=\{-1.5,-0.5,0.5,1.5\}$
- ขอบเขตหรือ boundary of quantization ของการอินทิเกรทซึ่งหาได้จากสมการที่(2.2)

ดังนั้น จะได้ boundaries

$$x_k=\{-2,-1,0,1,2\} \tag{2.8}$$

- กำลังของสัญญาณสามาหาได้จาก PDFของสัญญาณ ที่โจทย์กำหนดมาให้ ดังสมการที่ (2.3)

$$P_{signal} = E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x^2 dx = 1.333 \text{ watts} \qquad (2.9)$$

- กำลังของสัญญาณรบกวนสำหรับ 4 ระดับ หาได้จากสมการ (2.4) และ (2.5) และ boundaries จากสมการที่ (2.8) ดังนี้

ที่ $k=1$ จะได้ $\overline{e_1^2} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{-1}(x+1.5)^2 dx = 0.02083$ (2.10)

ที่ $k=2$ จะได้ $\overline{e_2^2} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}(x+0.5)^2 dx = 0.02083$ (2.11)

ที่ $k=3$ จะได้ $\overline{e_3^2} = \frac{1}{4}\int_{0}^{1}(x-0.5)^2 dx = 0.02083$ (2.12)

ที่ $k=4$ จะได้ $\overline{e_4^2} = \frac{1}{4}\int_{1}^{2}(x-1.5)^2 dx = 0.02083$ (2.13)

$$\therefore P_{noise} = \sum_{k=1}^{4} \overline{e_k^2} = 0.083 \quad \text{watts} \qquad (2.14)$$

เมื่อทราบค่าดังนั้นค่า P_{signal} จากสมการที่ (2.9) และ P_{noise} จากสมการที่ (2.14)แล้ว ดังนั้นสามารถหาค่า *SNR* สำหรับ Uniform quantization นี้ได้จากดังสมการที่ (2.1) และแปลงให้เป็นหน่วยเดซิเบลได้ดังสมการที่ (2.6)

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{1.333}{0.083} = 16.060 \qquad (2.15)$$

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR) = 12.06dB \qquad (2.16)$$

จาก Non-uniform Quantization level $\tilde{x}_k = \{-1.8, -0.4, 0.4, 1.8\}$

- ขอบเขตหรือ boundary of quantization ของการอินทิเกรตซึ่งหาได้จากสมการที่(2.2) ดังนั้น จะได้

$$x_k = \{-2, -1.1, 0, 1.1, 2\} \tag{2.17}$$

- กำลังของสัญญาณรบกวนสำหรับ 4 ระดับ หาได้จากสมการ(2.4) และ (2.5) และ boundaries จากสมการที่ (2.17) ดังนี้

ที่ $k=1$ จะได้ $$\overline{e_1^2} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{-1.1}(x+1.8)^2 dx = 0.02925 \tag{2.18}$$

ที่ $k=2$ จะได้ $$\overline{e_2^2} = \frac{1}{4}\int_{-1.1}^{0}(x+0.4)^2 dx = 0.0339 \tag{2.19}$$

ที่ $k=3$ จะได้ $$\overline{e_3^2} = \frac{1}{4}\int_{0}^{1.1}(x-0.4)^2 dx = 0.0339 \tag{2.20}$$

ที่ $k=4$ จะได้ $$\overline{e_4^2} = \frac{1}{4}\int_{1.1}^{2}(x-1.8)^2 dx = 0.02925 \tag{2.21}$$

$$\therefore P_{noise} = \sum_{k=1}^{4}\overline{e_k^2} = 0.1268 \quad \text{watts} \tag{2.22}$$

- เมื่อทราบค่าดังนั้นค่า P_{signal} จากสมการที่ (2.9) และ P_{noise} จากสมการที่ (2.22)แล้ว ดังนั้นสามารถหาค่า *SNR* สำหรับ Non- Uniform quantization นี้ได้จากดังสมการที่ (2.1) และทำให้เป็นหน่วยเดซิเบลได้ดังสมการที่ (2.6)

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{1.333}{0.1268} = 10.51 \tag{2.23}$$

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR) = 10.22\,dB \tag{2.24}$$

เปรียบเทียบค่า SNR_{dB} ที่ได้จากการคำนวณ เมื่อ PDFของสัญญาณ นั้นUniform จะเห็นได้ว่า การควอนไทซ์แบบ Uniform Quantization จะได้ค่า SNR_{dB} ที่สูงกว่าแบบ Non-Uniform Quantization

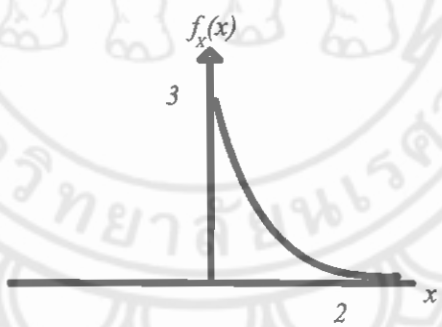
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดPDF ของสัญญาณ ดังสมการที่ (2.25)

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & ;x \geq 0 \\ 0 & ;otherwise \end{cases} \tag{2.25}$$

ต่อไปจะแสดงวิธีการหาค่า SNR_{dB} ของสัญญาณอินพุตดังกล่าวนี้ โดยมีจำนวนระดับของการควอนไทซ์เท่ากับ 4 ระดับ และกำหนดขั้นระดับในการควอนไทซ์($\tilde{x}_k$) ดังนี้

- Uniform Quantization level $\Rightarrow \tilde{x}_k = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$
- Non uniform Quantization level $\Rightarrow \tilde{x}_k = \{0.2, 0.8, 1.5, 3\}$

วิธีทำ จาก PDFของสัญญาณ ที่โจทย์กำหนดให้ สามารถเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 PDFของสัญญาณ ตัวอย่างที่ 2

- จาก Uniform Quantization level $\tilde{x}_k = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$
- ขอบเขตหรือ boundary of quantization ของการอินทริเกรตซึ่งหาได้จากสมการที่ (2.2) ดังนั้น จะได้ boundaries

$$x_k = \{0, 0.75, 1.25, 1.75, \infty\} \tag{2.26}$$

- กำลังของสัญญาณสามารถหาได้จาก PDF ที่โจทย์กำหนดมาให้ ดังสมการที่ (2.3)

$$P_{signal} = E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = 3\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-3x}dx = \frac{2}{9}\text{ watts} \qquad (2.27)$$

- กำลังของสัญญาณรบกวนสำหรับ 4 ระดับ หาได้จากสมการ(2.4) และ (2.5) และ boundaries จากสมการที่ (2.26)

ที่ $k=1$ จะได้ $\overline{e_1^2} = 3\int_{0}^{0.75} (x-0.5)^2 e^{-3x}dx = 0.0913128$ (2.28)

ที่ $k=2$ จะได้ $\overline{e_2^2} = 3\int_{0.75}^{1.25} (x-1)^2 e^{-3x}dx = 0.00182733$ (2.29)

ที่ $k=3$ จะได้ $\overline{e_3^2} = 3\int_{1.25}^{1.75} (x-1.5)^2 e^{-3x}dx = 0.004073$ (2.30)

ที่ $k=4$ จะได้ $\overline{e_4^2} = 3\int_{1.75}^{\infty} (x-2)^2 e^{-3x}dx = 0.00062952$ (2.31)

$$\therefore P_{noise} = \sum_{k=1}^{4} \overline{e_k^2} = 0.09417695 \text{ watts} \qquad (2.32)$$

เมื่อทราบค่าดังนั้นค่า P_{signal} จากสมการที่ (2.27) และ P_{noise} จากสมการที่ (2.32)แล้ว ดังนั้นสามารถหาค่า *SNR* สำหรับ Uniform quantization นี้ได้จากดังสมการที่ (2.1) และแปลงให้เป็นหน่วยเดซิเบลได้ดังสมการที่ (2.6)

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{2/9}{0.09417695} = 2.3596 \qquad (2.33)$$

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR) = 3.73\,dB \qquad (2.34)$$

จาก Non-uniform Quantization level $\tilde{x}_k = \{0.2, 0.8, 1.5, 3\}$

- ขอบเขตหรือ boundary of quantization ของการอินทริเกรตซึ่งหาได้จากสมการที่ (2.2)ดังนั้น จะได้

$$x_k = \{0, 0.5, 1.15, 2.25, \infty\} \tag{2.35}$$

- กำลังของสัญญาณรบกวนสำหรับ 4 ระดับ หาได้จากสมการที่ (2.4)และ(2.5) และ boundaries ได้จากสมการที่ (2.35)

ที่ $k=1$ จะได้ $$\overline{e_1^2} = 3\int_0^{0.5} (x-0.2)^2 e^{-3x} dx = 0.0146 \tag{2.36}$$

ที่ $k=2$ จะได้ $$\overline{e_2^2} = 3\int_{0.5}^{1.15} (x-0.8)^2 e^{-3x} dx = 0.0067 \tag{2.37}$$

ที่ $k=3$ จะได้ $$\overline{e_3^2} = 3\int_{1.15}^{2.25} (x-1.5)^2 e^{-3x} dx = 0.00203 \tag{2.38}$$

ที่ $k=4$ จะได้ $$\overline{e_4^2} = 3\int_{2.25}^{\infty} (x-3)^2 e^{-3x} dx = 0.00032 \tag{2.39}$$

$$\therefore P_{noise} = \sum_{k=1}^{4} \overline{e_k^2} = 0.02365 \quad \text{watts} \tag{2.40}$$

- เมื่อทราบค่าดังนั้นค่า P_{signal} จากสมการที่ (2.27) และ P_{noise} จากสมการที่ (2.38)แล้ว ดังนั้นสามารถหาค่า *SNR* สำหรับ Non-Uniform quantization นี้ได้จากดังสมการที่ (2.1) และแปลงให้เป็นหน่วยเดซิเบลได้ดังสมการที่ (2.6)

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{2/9}{0.02365} = 9.3963 \tag{2.41}$$

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR) = 9.73dB \tag{2.42}$$

เปรียบเทียบค่า SNR_{dB} ที่ได้จากการคำนวณ เมื่อ PDFของสัญญาณ เป็นแบบNon-Uniform จะเห็นได้ว่า การควอนไทซ์แบบ Non-Uniform Quantization จะได้ค่า SNR_{dB} ที่สูงกว่าแบบ Uniform Quantization

จากทั้ง 2 ตัวอย่าง สามารถเปรียบเทียบค่า SNR_{dB} ได้ดังนี้

ตารางที่ 2.1 เปรียบเทียบผลการควอนไทซ์สัญญาณจากตัวอย่างที่1 และตัวอย่างที่2

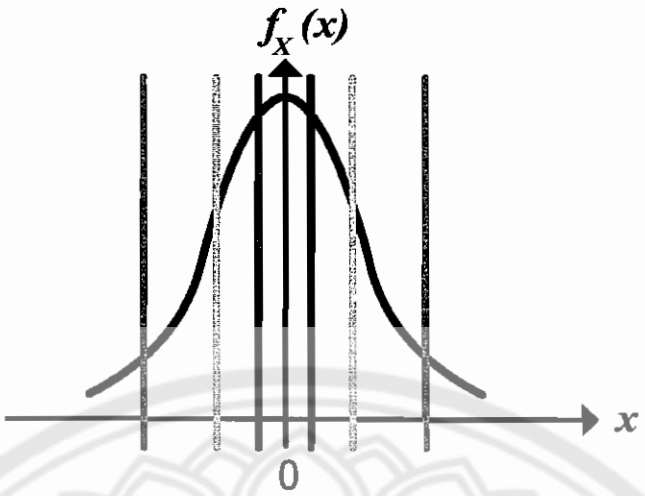
	***SNR* (in dB)**	
$f_X(x)$	**Uniform Quantization**	**Non-Uniform Quantization**
Uniform	12.06	10.22
Non-Uniform (exponential)	3.73	9.73

จากตารางที่ 2.1 หากทราบว่าPDFของสัญญาณมีการกระจายทางสถิติแบบ Uniform แล้วควรเลือกควอนไทซ์สัญญาณแบบ Uniform Quantization จึงจะได้ค่า SNR_{dB} ที่สูงกว่า และเช่นเดียวกัน ถ้าPDFของสัญญาณมีการกระจายทางสถิติแบบNon-uniformแล้ว ก็ควรที่จะควอนไทซ์สัญญาณแบบ Non-Uniform Quantization จึงจะได้ค่า SNR_{dB} ที่สูงกว่า

แต่อย่างไรก็ตามค่าที่เราได้จากตารางที่ 2.1 ยังไม่สามารถบอกได้ว่าค่า SNR ที่ได้จากการคำนวณนั้นเป็นค่าที่ดีที่สุดแล้วหรือไม่ บอกได้เพียงว่าควรเลือกใช้การควอนไทซ์ชนิดใดให้เหมาะสมกับPDFของสัญญาณ ดังนั้นควรใช้วิธีการควอนไทซ์ที่เหมาะสมเพื่อลดกำลังสัญญาณรบกวน

2.4 Lloyd-Max Quantization[3]

ในกระบวนการควอนไทซ์ต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่าง PDFของสัญญาณ จำนวนระดับการควอนไทซ์ และระดับการควอนไทซ์ เพื่อที่จะลดกำลังของสัญญาณรบกวน (P_{noise})หรือ Mean Square Error (MSE) ให้น้อยที่สุด ควรวางระดับการควอนไทซ์ห่างกันเป็นช่วงแคบ ที่บริเวณ PDFของสัญญาณ มีการกระจายมาก หรือบริเวณ $f_X(x)$ มีค่าสูงๆ และวางระดับการควอนไทซ์เป็นช่วงห่างกันเป็นช่วงกว้าง ที่ PDFของสัญญาณ มีการกระจายน้อย หรือบริเวณ $f_X(x)$ มีค่าต่ำๆ ดังรูปที่ 2.4



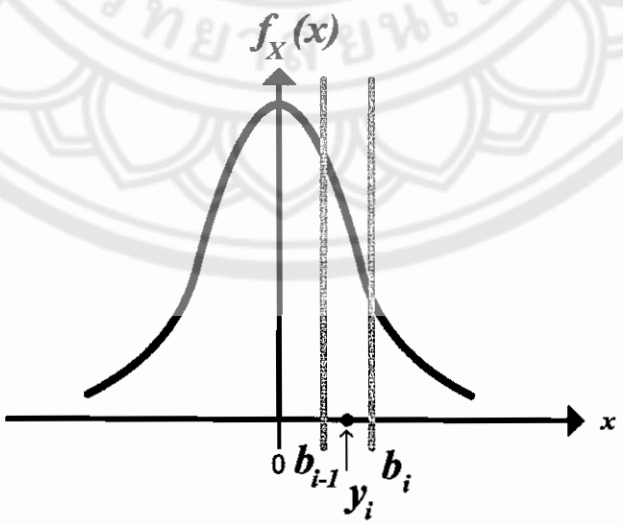
รูปที่ 2.4 ตัวอย่างการวางระดับตามหลักของ Lloyd-Max [3]

เมื่อทราบ PDFของสัญญาณแล้ว สามารถหาค่า MSE ได้จากสมการ (2.43)

$$MSE = \sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\tilde{x})^2 f_X(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \int_{b_{k-1}}^{b_k} (x-y_k)^2 f_X(x)\,dx \qquad (2.43)$$

สังเกตได้ว่า ค่า MSE คือการหา P_{noise} นั่นเอง

ให้ b_i และ y_i เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งทำให้ได้ค่า MSE ที่ต่ำสุด โดยที่ y_i คือค่ากลางระหว่างช่วง $[b_{i-1}, b_i]$ ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงตำแหน่ง y_i [3]

จากเงื่อนไขของ Lagrangian : $$\frac{\partial \sigma_q^2}{\partial y_i} = 0, \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial b_i} = 0 \quad (2.44)$$

จาก สมการ(2.44) $$\frac{\partial \sigma_q^2}{\partial y_i} = 0 \quad (2.45)$$

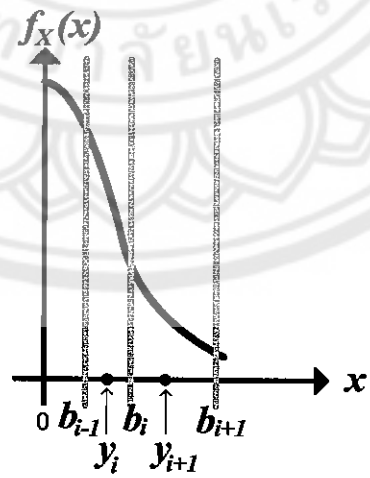
จะได้ $$y_i = \frac{\int_{b_{i-1}}^{b_i} x f_X(x)\,dx}{\int_{b_{i-1}}^{b_i} f_X(x)\,dx} \quad (2.46)$$

y_i คือค่ากึ่งกลางระหว่างช่วง b_{i-1} และ b_i

และจากสมการที่ (2.44) $$\frac{\partial \sigma_q^2}{\partial b_i} = 0 \quad (2.47)$$

จะได้ $$b_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \quad (2.48)$$

b_i คือค่ากึ่งกลางระหว่างช่วง y_i และy_{i+1} ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แสดงตำแหน่ง b_i [3]

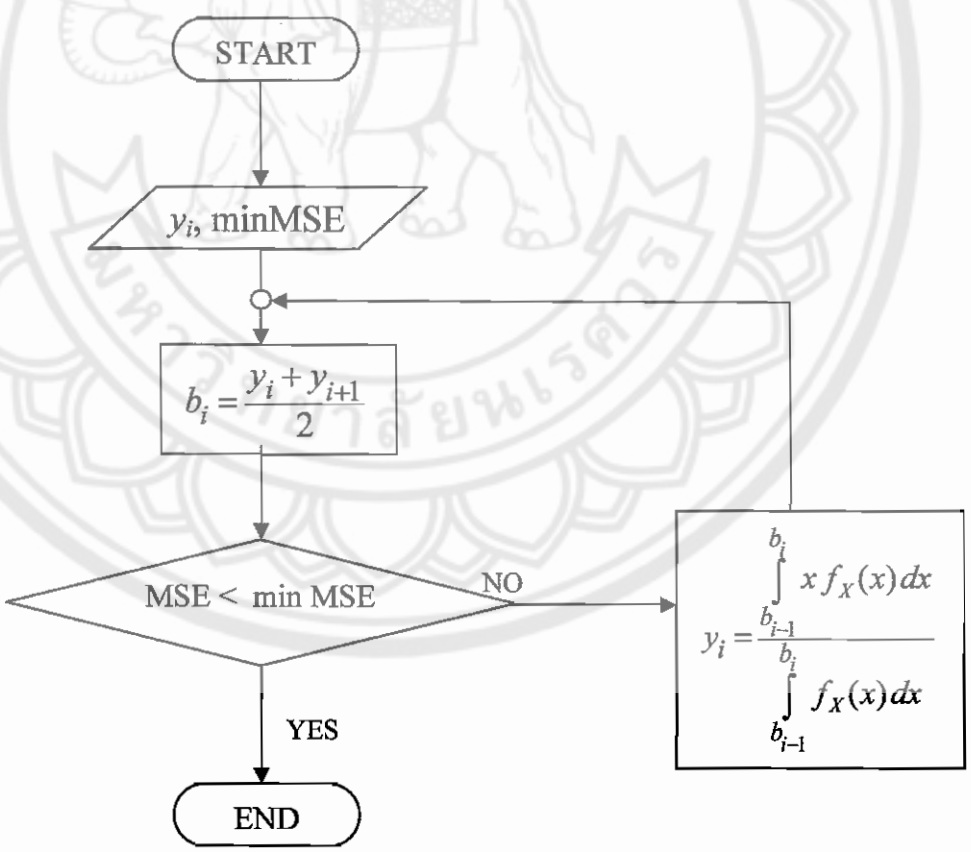
ดังนั้นเงื่อนไขของ Lloyd-Max คือ

$$y_i = \frac{\int_{b_{i-1}}^{b_i} x f_X(x)\,dx}{\int_{b_{i-1}}^{b_i} f_X(x)\,dx} \quad \text{และ} \quad b_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \tag{2.49}$$

ต่อไปจะถึงอธิบายขั้นตอนการหาค่า MSE ที่น้อยที่สุดตามหลักการของ Lloyd-Max [3]

1. กำหนดระดับของการควอนไทซ์(Quantization levels, y_i)
2. หาค่า b_i จากสมการ $b_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$ หรือจากสมการที่ (2.49)
3. คำนวณหาค่า MSE หรือ P_{noise}
4. กำหนดค่า MSE ที่น้อยที่สุดที่สามารถยอมรับได้
5. ทำการอัพเดทค่า y_i จากสมการ (2.49) แล้วกลับไปหาb_iใหม่ ในขั้นตอนที่ 2

จากขั้นตอนการหาค่าMSEข้างต้น สามารถเขียนสรุปเป็น Flow chart ได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 Flow chart ของ Lloyd-Max algorithm

เพื่อพิสูจน์หลักการของ Lloyd-Max จะใช้โจทย์จากตัวอย่างที่ 2 เพื่อดูว่าหลักการนี้สามารถหาค่า MSE หรือ P_{noise} ที่น้อยกว่าได้จริง หรือได้ค่า SNR_{dB} ที่มากกว่า

จากตัวอย่างที่ 2 หรือสมการที่(2.25) กำหนดให้

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & ;x\geq 0\\ 0 & ;otherwise\end{cases} \tag{2.50}$$

$$\text{Quantization level } \Rightarrow \tilde{x}_k=\{0.2,0.8,1.5,3\} \tag{2.51}$$

วิธีทำ จาก Lloyd-Max algorithm

(1) กำหนดระดับของการควอนไทซ์ จะสังเกตุว่า y_i ในที่นี้หมายถึง $\tilde{x}_k$ นั่นเอง

ดังนั้น $y_i=\{0.2,0.8,1.5,3\}$

(2) หาค่า b_i จากสมการที่ (2.48)

ดังนั้น $b_i=\{0,0.5,1.15,2.25,\infty\}$

(3) คำนวณหาค่า MSE หรือ P_{noise}

จากตัวอย่างที่ 2 ทำให้ทราบแล้วว่า $P_{noise}=MSE=0.02365$ watts

และ $SNR_{dB}=9.73\,dB$

(4) กำหนดค่า MSE ที่น้อยที่สุดที่สามารถยอมรับได้

กำหนด $minimum\ MSE=0.021$

(5) ทำการอัพเดทค่า y_i

จากสมการที่(2.46) จะได้ค่า y_i ใหม่ทั้งหมด 4 ระดับ ดังนี้

$$y_1=\frac{\int_0^{0.5} x3e^{-3x}\,dx}{\int_0^{0.5} 3e^{-3x}\,dx}=0.19 \tag{2.52}$$

$$y_2=\frac{\int_{0.5}^{1.15} x3e^{-3x}\,dx}{\int_{0.5}^{1.15} 3e^{-3x}\,dx}=0.73 \tag{2.53}$$

$$y_3 = \frac{\int_{1.15}^{2.25} x3e^{-3x}\,dx}{\int_{1.15}^{2.25} 3e^{-3x}\,dx} = 1.44 \tag{2.54}$$

$$y_4 = \frac{\int_{2.25}^{\infty} x3e^{-3x}\,dx}{\int_{2.25}^{\infty} 3e^{-3x}\,dx} = 2.58 \tag{2.55}$$

ดังนั้นจะได้ Quantization levels ใหม่ คือ $\tilde{x}_k = \{0.19, 0.73, 1.44, 2.58\}$ จากนั้นจะนำ Quantization levels ใหม่นี้ ไปหาค่า P_{noise} หรือ MSE ดังต่อไปนี้

จาก $\tilde{x}_k = \{0.19, 0.73, 1.44, 2.58\}$

จากสมการ(2.48) จะได้ $b_i = \{0, 0.49, 1.065, 2.01, \infty\}$

หรือ $x_k = \{0, 0.49, 1.065, 2.01, \infty\}$

หาค่า P_{noise} จากสมการที่(2.5)

ที่ $k=1$ จะได้ $\overline{e_1^2} = 3\int_0^{0.46} (x-0.19)^2 e^{-3x}dx = 0.0121$ (2.56)

ที่ $k=2$ จะได้ $\overline{e_2^2} = 3\int_{0.46}^{1.065} (x-0.73)^2 e^{-3x}dx = 0.0061$ (2.57)

ที่ $k=3$ จะได้ $\overline{e_3^2} = 3\int_{1.065}^{2.01} (x-1.44)^2 e^{-3x}dx = 0.0023$ (2.58)

ที่ $k=4$ จะได้ $\overline{e_4^2} = 3\int_{2.01}^{\infty} (x-2.58)^2 e^{-3x}dx = 0.0004$ (2.59)

$$\therefore P_{noise} = \sum_{k=1}^{4} \overline{e_k^2} = 0.0209 \quad \text{watts} \tag{2.60}$$

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{2/9}{0.0209} = 10.58 \tag{2.61}$$

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR) = 10.24dB \qquad (2.62)$$

เนื่องจากค่า minimum MSEที่กำหนดไว้ คือ 0.021 ในรอบนี้ หาค่า MSEหรือ P_{noise} มีค่าเท่ากับ 0.0209 ซึ่งน้อยกว่า minimum MSEแล้ว จึงหยุดการคำนวณตามวิธีการของ Lloyd-Max algorithm

เปรียบเทียบ SNR_{dB} ที่ได้จากรอบแรกหรือจากสมการที่(2.42) มีค่าเท่ากับ 9.73 dB หลังจากอัพเดทได้ Quantization levels ใหม่ แล้วทำการหาค่า SNR_{dB} ในรอบที่สอง ได้ค่า SNR_{dB} เท่ากับ 10.24 dB จะเห็นได้ว่า มีค่า SNR_{dB} มากขึ้นกว่าเดิม นั่นหมายถึงกำลังของสัญญาณรบกวนหรือ MSE มีค่าลดลงด้วย จากLloyd-Max algorithm ถ้าเรากำหนดค่า MSE ให้น้อยลง ก็จะสามารถหาค่า MSE ได้ลดลงกว่าเดิมหรือได้ค่า SNR ที่มากขึ้น อีกทั้งสามารถทราบตำแหน่งการควอนไทซ์ที่เหมาะสมอีกด้วย เพื่อความสะดวกจึงขอสรุปผลการคำนวณหาค่าMSEและSNR_{dB} ของสมการในข้อนี้ในรอบถัดไปซึ่งได้คำนวณไว้จนถึงรอบที่10 ดังแสดงไว้ในตารางที่2.2

ตารางที่2.2 แสดงผลการควอนไทซ์PDFของสัญญาณ ด้วยวิธีการของ Lloyd-Max

รอบที่	Quantization levels				MSE หรือ P_{noise}(watts)	SNR(in dB)
1	0.20	0.80	1.50	3.00	0.02365	9.73
2	0.19	0.73	1.44	2.58	0.02091	10.24
3	0.18	0.68	1.36	2.35	0.01898	10.68
4	0.17	0.64	1.28	2.18	0.01749	11.04
5	0.16	0.61	1.21	2.06	0.01632	11.34
6	0.16	0.58	1.15	1.97	0.01540	11.59
7	0.15	0.56	1.10	1.89	0.01468	11.80
8	**0.15**	**0.54**	**1.06**	**1.83**	**0.01411**	**11.97**
9	**0.14**	**0.52**	**1.02**	**1.78**	**0.01367**	**12.11**
10	**0.14**	**0.50**	**0.99**	**1.73**	**0.01333**	**12.22**

จากตารางที่2.2 ด้วยวิธีการควอนไทซ์แบบ Lloyd-Max สามารถพิสูจน์ได้ว่าวิธีการนี้สามารถทำให้ได้ค่า MSEที่ลดลง หรือได้ค่า SNR_{dB} ที่มากขึ้นจริง อีกทั้งยังทราบถึงระดับการควอนไทซ์ที่เหมาะสม

แต่กว่าจะได้มาซึ่งค่า SNR แต่ละค่านั้น มีขั้นตอนที่ยุ่งยากและละเอียดซับซ้อนมาก ดังนั้นจึงได้ศึกษาวิธีการออกแบบจำลองการควอนไทซ์สัญญาณโดยใช้โปรแกรม MATLAB เข้ามาช่วยเพื่อหาค่า MSE ที่น้อยที่สุดออกมาโดยไม่ต้องทำการคำนวณเอง และนำวิธีการควอนไทซ์สัญญาณจากหลักการของ Lloyd-Max ซึ่งทำให้สามารถหาค่า SNR ที่เหมาะสมที่สุด

ในบทที่ 2 นี้ได้ทำการศึกษาหลักการพื้นฐานของการควอนไทซ์และวิธีการควอนไทซ์แบบ Lloyd-Max จากวิธีการของ Lloyd-Max จะเห็นได้ว่า ได้มีการอัพเดท Quantization levels ไปจนกว่าจะได้ค่า MSE ที่น้อยกว่า MSEที่ได้กำหนดไว้จึงหยุดการคำนวณผล จากวิธีการนี้จะทำให้ได้ค่า MSE ที่น้อยที่สุด และยังได้ทราบระดับการควอนไทซ์ที่เหมาะสมอีกด้วย

ในบทต่อไปจะอธิบายถึงวิธีการออกแบบดำเนินโครงงาน และการดำเนินโครงงาน รวมถึงขั้นตอนการเขียนโปรแกรม และสร้าง Graphical User Interfaces อย่างละเอียด