

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

ทฤษฎีที่นำมาประยุกต์ใช้ในการตรวจสอบและแสดงค่าวัดที่ผิดพลาดในระบบไฟฟ้ากำลัง ประกอบด้วยวิธีการประมาณสถานะ (state estimation) ความรู้ทางด้านทฤษฎีการไหลของกำลัง (power flow) และการตรวจสอบข้อมูลทางด้านสถิติ

2.1 การถ่ายเทของกำลังไฟฟ้า (power flow)

การศึกษาการถ่ายเทของกำลัง (power flow studies) หรือที่เรียกกันว่า การศึกษาโหลด โฟลว์ (load flow studies) เป็นสิ่งสำคัญต่อการประเมินผลการปฏิบัติงานของระบบไฟฟ้ากำลัง การควบคุมระบบไฟฟ้ากำลัง และการวางแผนสำหรับการขยายระบบในอนาคต การศึกษาการ ถ่ายเทของกำลังจะทำให้ทราบเกี่ยวกับกำลังจริง (real power; P) กำลังรีแอกทีฟ (reactive power; Q) ขนาดแรงดันที่บัส (V) และมุมเฟสของแรงดันที่บัส (δ)

2.1.1 สมการของระบบในรูป Bus admittance matrix

ในระบบไฟฟ้ากำลัง จุดที่อุปกรณ์ต่างๆ เข้ามาต่อถึงกันคือ Busbars ซึ่งจะเทียบได้กับ Nodes ของวงจรไฟฟ้า ดังนั้นเมื่อทำการวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลัง เราจึงใช้คำว่า Bus แทน Node กล่าวคือ เราใช้ Bus admittance matrix, Y_{bus} แทน Node admittance matrix, Y_n ใช้ Bus voltage vector, V_{bus} แทน Node current source vector, E_n และใช้ Bus current vector, I_{bus} แทน Node current source vector, I_n ดังนั้นเราจะเขียนสมการได้เป็น

$$I_{bus} = Y_{bus} V_{bus} \quad (2.1)$$

เราสามารถกระจายสมการที่ (2.1) ออกได้เป็น

$$I_i = \sum_{j=1}^{n_{bus}} Y_{ij} V_j; i = 1, 2, 3, \dots, n_{bus} \quad (2.2)$$

โดยที่ n_{bus} เป็นจำนวน Busbars ของระบบไม่นับรวม Reference bus

เนื่องจากเราสนใจกำลังเชิงซ้อนมากกว่ากระแส เราจะได้กำลังเชิงซ้อนตั้งยุคที่ไหลเข้าสู่บัสที่ i คือ

$$S_i = V_i^* \sum_{j=1}^{n_{bus}} Y_{ij} V_j \quad (2.3)$$

เมื่อ

$$V_i = |V_i| \angle \delta_i = |V_i| (\cos \delta_i + j \sin \delta_i)$$

$$V_j = |V_j| \angle \delta_j = |V_j| (\cos \delta_j + j \sin \delta_j)$$

$$Y_{ij} = |Y_{ij}| \angle \theta_{ij} = |Y_{ij}| (\cos \theta_{ij} + j \sin \theta_{ij})$$

ในที่นี้กำลังไฟฟ้าที่ไหลเข้าสู่บัสหรือเข้าสู่ระบบมีเครื่องหมายบวก และกำลังไฟฟ้าที่ไหลออกจากบัสหรือออกจากระบบมีเครื่องหมายลบ

2.1.2 การจำแนกชนิดของ Busbars และข้อจำกัดบนพิสัยของตัวแปร

เมื่อนำสมการที่ (2.3) มาเขียนใหม่เป็น

$$P_{Gi} - P_{Di} = P_{Ni} = \sum_{j=1}^{n_{bus}} |V_i Y_{ij} V_j| \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) \quad (2.4)$$

และ

$$Q_{Gi} - Q_{Di} = Q_{Ni} = \sum_{j=1}^{n_{bus}} |V_i Y_{ij} V_j| \sin(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) \quad (2.5)$$

เมื่อเขียนแรงดันของ Busbar V_i ในรูป $|V_i| \angle \delta_i$ และ Element ที่ $i - j$ ของ Bus admittance matrix, $Y_{ij} \angle \theta_{ij}$, Y_{bus} ; Y_{ij} ในรูป โดย Subscripts G, D และ N หมายถึง เครื่องกำเนิดไฟฟ้า โหลดและค่าสุทธิ ตามลำดับ

จะเห็นว่าที่แต่ละ Busbar มีตัวแปรรู้อยู่ 4 ตัวแปร และมีจำนวน Busbars อยู่ n_{bus} ทำให้เขียนสมการได้ $2n_{bus}$ สมการ ดังนั้นที่แต่ละ Busbar เราต้องกำหนดค่าตัวแปร 2 ตัวแปร และหาค่าตัวแปรที่เหลืออีก 2 ตัวแปร จึงสามารถแบ่งชนิดของ Busbar ตามลักษณะการกำหนดค่าของตัวแปรของ Busbars นั้นๆ ได้ดังนี้

1) Slack หรือ Swing หรือ Reference busbar กำหนดค่าขนาดและเฟสของแรงดัน และเหลือค่า Active power และ Reactive power เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งต้องหาค่า สมการของระบบ ในการศึกษา Load flow จำเป็นจะต้องมี Slack bus ซึ่งมีอยู่เพียง Busbar เดียวเท่านั้น เพื่อจ่ายกำลังชดเชยให้กับกำลังสูญเสียในระบบ และชดเชยความแตกต่างระหว่างการผลิตกับ Loads ของระบบ ซึ่งในที่นี้รวมทั้ง Real power และ Reactive power โดยปกติมักจะให้เฟสของ Slack busbar มีค่าเป็นศูนย์ เพื่อเป็นจุดอ้างอิงสำหรับแรงดันที่ Busbar อื่นๆ

2) Generation busbars กำหนด Active power และขนาดของแรงดันของ Busbars และเหลือค่า Reactive power และเฟสของแรงดันเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ในบางครั้งเรียก Busbars

เหล่านี้ว่า Voltage controlled busbars การควบคุมขนาดของแรงดันนั้นทำได้โดยการลดหรือเพิ่มการผลิต Reactive power ของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าหรือ Synchronous condenser ที่ต่ออยู่กับ Busbar นั้นๆ บ่อยครั้งที่ค่า Reactive power มากกว่าค่าสูงสุด หรือน้อยกว่าค่าสูงสุดของ Capacity ของ Synchronous machines ที่ต่ออยู่ซึ่งทำให้ต้องแทน Reactive power ของ Bus นั้นๆ ด้วยค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดแล้วแต่กรณี และเปลี่ยนให้ขนาดของแรงดันเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า กรณีหลังนี้จะต้องเปลี่ยนชนิดของ Busbar จาก Generator busbar เป็น Load busbar ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

3) Load busbar กำหนดค่า Real power และ Reactive power ของ Busbars เหล่านี้และเหลือค่าขนาดและเฟสของแรงดันเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

ตารางที่ 2.1 สรุปปัญหาการไหลของกำลัง

Bus type	No. of buses	Quantities specified	No. of available equations	No. of $ V_i , \delta_i$ state variables
Slack: $i=1$	1	δ_i, V_i	0	0
Voltage controlled ($i=2, \dots, N_g+1$)	N_g	P_i, V_i	N_g	N_g
Load ($i=N_g+2, \dots, N$)	$N - N_g - 1$	P_i, Q_i	$2(N - N_g - 1)$	$2(N - N_g - 1)$
Totals	N	$2N$	$2N - N_g - 2$	$2N - N_g - 2$

2.1.3 การคำนวณ Load Flow โดยวิธี Newton-Raphson

การคำนวณโหลดไฟฟ้าสามารถคำนวณ Load Flow โดยการกระจายสมการที่ (2.4) และสมการที่ (2.5) โดยอนุกรมของ Taylor รอบจุดทำงานที่แรงดันปกติของระบบ โดยถือว่าเกิดการเบี่ยงเบนของกำลังไฟฟ้าและแรงดันของบัสออกไปจากจุดทำงานปกติเล็กน้อย และไม่นำพจน์ของกำลังสองขึ้นไปของการเปลี่ยนแปลงแรงดันมาคิด เนื่องจากถือได้ว่าการเปลี่ยนแปลงแรงดันเหล่านี้มีค่าน้อยมาก เมื่อให้ n เป็นจำนวน Busbars ทั้งหมดของระบบและเมื่อให้ Busbar

หมายเลขที่หนึ่งคือ Slack busbar จะทำให้ไม่มีการเบี่ยงเบนของกำลังเชิงซ้อนและแรงดัน Busbar หมายเลขที่หนึ่ง สมการที่ได้มีเฉพาะค่าเบี่ยงเบนของกำลังและแรงดันตั้งแต่ Busbar หมายเลขสอง ขึ้นไป (โดยขั้นตอนนี้ถือว่าบัสบาร์ที่เหลือเป็น Load busbars) เราจะได้สมการในรูปเมตริกซ์เป็น

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} & H_{24} & \dots & H_{2n} & N_{22} & N_{23} & N_{24} & \dots & N_{2n} \\ H_{32} & H_{33} & H_{34} & \dots & H_{3n} & N_{32} & N_{33} & N_{34} & \dots & N_{3n} \\ H_{42} & H_{43} & H_{44} & \dots & H_{4n} & N_{42} & N_{43} & N_{44} & \dots & N_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n2} & H_{n3} & H_{n4} & \dots & H_{nn} & N_{n2} & N_{n3} & N_{n4} & \dots & N_{nn} \\ J_{22} & J_{23} & J_{24} & \dots & J_{2n} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & \dots & L_{2n} \\ J_{32} & J_{33} & J_{34} & \dots & J_{3n} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & \dots & L_{3n} \\ J_{42} & J_{43} & J_{44} & \dots & J_{4n} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & \dots & L_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n2} & J_{n3} & J_{n4} & \dots & J_{nn} & L_{n2} & L_{n3} & L_{n4} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta \delta_4 \\ \vdots \\ \Delta \delta_n \\ \Delta v_2 / v_2 \\ \Delta v_3 / v_3 \\ \Delta v_4 / v_4 \\ \vdots \\ \Delta v_n / v_n \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

โดยที่

$$\Delta P_i = P_{Gi} - P_{ni} - P_i = \text{เศษเหลือของ Real Power}$$

$$\Delta Q_i = Q_{Gi} - Q_{ni} - Q_i = \text{เศษเหลือของ Reactive Power}$$

$$\Delta \delta_i = \text{ผลต่างเฟสของแรงดัน (ค่าที่คำนวณได้ที่ต่างจากค่าผลลัพธ์ที่แท้จริง)}$$

$$\Delta V_i = \text{ผลต่างขนาดของแรงดัน (ค่าที่คำนวณได้ที่ต่างจากค่าผลลัพธ์ที่แท้จริง)}$$

และเมื่อ

$$P_i = \sum_{j=1}^n |V_i Y_{ij} V_j| \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) \quad (2.7)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n |V_i Y_{ij} V_j| \sin(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) \quad (2.8)$$

$$H_{ik} = \partial P_i / \partial \delta_k \quad (2.9)$$

$$N_{ik} = V_k (\partial P_i / \partial V_k) \quad (2.10)$$

$$J_{ik} = \partial Q_i / \partial \delta_k \quad (2.11)$$

$$L_{ik} = V_k (\partial Q_i / \partial V_k) \quad (2.12)$$

เมตริกซ์ของ H_{ik} , N_{ik} , J_{ik} และ L_{ik} คือ Jacobian matrix และเมื่อให้ $Y_{ij} = Y_{ij} \angle \theta_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$

และ $V_i = V_i \angle \delta_i = e_i + jf_i$ เราสามารถวิเคราะห์หาสูตรเพื่อใช้หา Elements ของ Jacobian matrix โดยได้สูตรดังนี้

ก) พจน์นอกทแยงมุม $i \neq k$

$$\begin{aligned} H_{ik} = L_{ik} &= V_i Y_{ik} V_k \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \\ &= f_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) - e_i (B_{ik} e_k + G_{ik} f_k) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} N_{ik} = -J_{ik} &= V_i Y_{ik} V_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \\ &= e_i (G_{ik} e_k - B_{ik} f_k) - f_i (B_{ik} e_k + G_{ik} f_k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

ข) พจน์ทแยงมุม $i = k$

$$H_{ii} = -Q_i + V_i^2 Y_{ii} \sin(-\theta_{ii}) = -Q_i - B_{ii} V_i^2 \quad (2.15)$$

$$N_{ii} = P_i + V_i^2 Y_{ii} \cos(-\theta_{ii}) = P_i + G_{ii} V_i^2 \quad (2.16)$$

$$J_{ii} = P_i - V_i^2 Y_{ii} \cos(-\theta_{ii}) = P_i - G_{ii} V_i^2 \quad (2.17)$$

$$L_{ii} = Q_i + V_i^2 Y_{ii} \sin(-\theta_{ii}) = Q_i - B_{ii} V_i^2 \quad (2.18)$$

สำหรับ Load busbar จะคำนวณ Power และ Reactive power residuals ได้ และจะต้องคำนวณ Jacobian elements ใน columns และ rows ที่ตรงกันกับ Load busbar นั้นๆ สำหรับใช้ในการแก้สมการเมตริกซ์เพื่อหาค่าการเปลี่ยนแปลงขนาดและเฟสของแรงดันของ Busbar

ในกรณี Generator bus คำนวณ Real power residual ได้ แต่ว่า Reactive power ของ Busbar เป็นค่าที่ไม่ทราบ ทำให้คำนวณค่า Reactive power residual ไม่ได้ และขนาดของแรงดันถูกกำหนด

เป็นค่าคงที่ ค่าการเปลี่ยนแปลงขนาดของแรงดันจึงเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงไม่ต้องนำ Column ของ Jacobian matrix, N_{ij} , L_{ij} และ Row ของ J_{ij} , L_{ij} ที่ตรงกับ Generator bus นั้นๆมาคิดด้วยตอนแก้สมการสำหรับ Reactive power เราใช้สมการที่ (2.8) คำนวณหาค่าแล้วนำไป ตรวจสอบกับ Limits หากไม่ออกไปนอกขอบเขตแสดงว่าสามารถควบคุมแรงดันได้ ในทางตรงกันข้ามถ้า Reactive power ออกนอกขอบเขตจะกำหนดให้ Reactive power เป็นค่าที่ขอบเขตและนำขั้นตอนการคำนวณของ Load bus มาใช้สำหรับ Generator bus ที่คุมขนาดแรงดันไม่ได้มันๆ และเมื่อเกิดกรณีนี้ขึ้นจะต้องคำนวณ Elements ของ Jacobian matrix ใน row และ column ของ Generator bus นั้นทุก Element

การคำนวณ Load flow ทำโดยสมมติแรงดันที่ Busbars ต่างๆ ปกติจะให้ เป็น 1.0 p.u. และเฟสเป็นศูนย์องศา จากนั้นจะคำนวณค่า Complex power และ power residuals ที่ Busbars ต่างๆ ตามด้วยการคำนวณหารูป Jacobian matrix และแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V/V \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

จากนั้นนำค่าการเปลี่ยนแปลงเฟสและขนาดแรงดันที่แก้สมการได้ไปแก้ไขค่าแรงดันเดิม

$$\delta_i^{k+1} = \delta_i^k + \Delta \delta_i^k, i = 2, 3, \dots, n_{bus} \quad (2.20)$$

$$V_i^{k+1} = V_i^k \left[1 + (\Delta V_i / V_i)^k \right], i = \text{Load busbars} \quad (2.21)$$

เมื่อปรับปรุงค่าแรงดันแล้วจะคำนวณค่า Complex power และ Power residuals หลังจากนั้นทำการทดสอบ Convergence หาก Power residuals ยังมีค่าสูงกว่าค่าที่กำหนดจะต้องทำการคำนวณซ้ำโดยเริ่มคำนวณ Jacobian matrix และแก้สมการที่ (2.19) ใหม่ หลังจากนั้นก็ปรับปรุงแรงดันใหม่ การคำนวณจะวนซ้ำรอบจน Power residuals มีค่าต่ำกว่า Maximum power mismatch ที่กำหนดไว้ตั้งแต่ต้นจากนั้นก็คำนวณหา Swing bus power และ Line power flow

2.2 การหาค่าประมาณสถานะด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Squares State Estimation)

การหาค่าประมาณสถานะเป็นการนำข้อมูลหรือค่าวัดที่ได้มาหาค่าประมาณที่ดีที่สุดของตัวแปรสถานะ (state variables) หรือทำให้ได้ค่าที่มีความผิดพลาดน้อยที่สุด โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (weighted least squares) ดังสมการที่ (2.22)

$$\min J(x^{est}) = \sum_{i=1}^{Nm} \frac{\{z_i^{meas} - f_i(x^{est})\}^2}{\sigma_i^2} \quad (2.22)$$

เมื่อ

$J(x^{est})$: ผลรวมของค่าความผิดพลาดยกกำลังสอง

x^{est} : ตัวแปรสถานะ (state variables)

z_i^{meas} : ค่าวัดที่ได้จากอุปกรณ์วัด

f_i : ค่าฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ

σ_i^2 : ค่าความแปรปรวน (variance) ของอุปกรณ์วัด

N_m : จำนวนค่าวัด

สำหรับตัวอย่างบางเทอมในสมการที่ (2.22) เช่น ถ้าค่าวัดเป็นกำลังไฟฟ้าจริงที่ไหลจากบัส i ไปบัส j จะมีเทอมเป็น

$$\frac{\{P_{ij}^{meas} - (-V_i^2 G_{ij} + V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j))\}^2}{\sigma_{Pij}^2}$$

หรือถ้าค่าวัดเป็นค่าแรงดันของบัส i จะมีเทอมเป็น

$$\frac{\{V_i^{meas} - V_i\}^2}{\sigma_{Vi}^2}$$

ซึ่งในระบบไฟฟ้ากำลังขนาด N บัส ตัวแปรสถานะคือขนาดแรงดันไฟฟ้าและมุมเฟสของทุกบัสดังสมการที่ (2.23)

$$X^{est} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_N \ V_1 \ V_2 \ \dots \ V_N]^T \quad (2.23)$$

โดยปกติแล้วจำนวนค่าวัดจะมีมากกว่าตัวแปรสถานะอยู่มาก และเมื่อให้ δ_i เป็นมุมอ้างอิง ($\delta_i=0$) ดังนั้นจำนวนตัวแปรสถานะ (N) จะเท่ากับ $2N-1$ จากสมการที่ (2.22) และ (2.23) สามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการที่ (2.24)

$$\min J(x^{est}) = [z^{meas} - f(x^{est})]^T R^{-1} [z^{meas} - f(x^{est})] \quad (2.24)$$

เมื่อ กำหนดให้

$$z^{meas} = [z_1^{meas} \ z_2^{meas} \ \dots \ z_{Nm}^{meas}]^T \quad (2.25)$$

เมตริกซ์ของฟังก์ชันตัวแปรสภาวะ

$$f(x^{est}) = [f_1(x^{est}) \ f_2(x^{est}) \ \dots \ f_{Nm}(x^{est})]^T \quad (2.26)$$

และเมตริกซ์ variance ของอุปกรณ์วัด

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_{Nm}^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

หาค่า $\min J(x^{est})$ โดยหาค่าเกรเดียนต์และให้เท่ากับศูนย์
จะได้

$$\nabla_x J(x^{est}) = -2H^T R^{-1} e = 0 \quad (2.28)$$

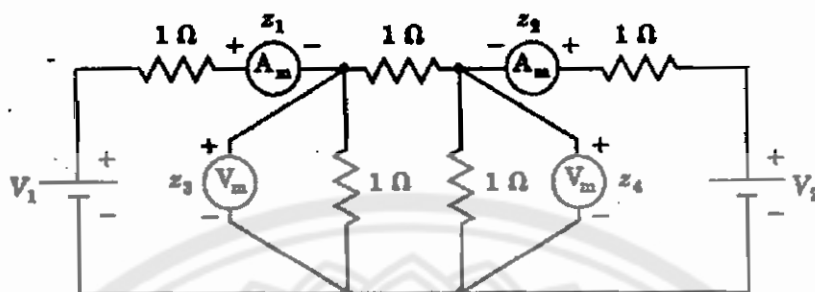
เมื่อ H คือ จาคอบีเมตริกซ์

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{Nm}(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{Nm}(x)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{Ni}} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_{Ni}} & \dots & \frac{\partial f_{Nm}(x)}{\partial x_{Ni}} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

และ e คือผลต่างของค่าที่วัดได้กับค่าประมาณ

$$e = \begin{bmatrix} z_1 - f_1(x) \\ z_2 - f_2(x) \\ \vdots \\ z_{Nm} - f_{Nm}(x) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

พิจารณาวงจรไฟฟ้าดังรูป ซึ่งประกอบด้วยตัวต้านทานขนาด 1Ω 5 ตัวและแหล่งจ่ายแรงดัน V_1 และ V_2 (ค่าที่เราไม่รู้) แอมมิเตอร์อ่านค่า z_1 และ z_2 โวลต์มิเตอร์อ่านค่า z_3 และ z_4



รูปที่ 2.1 วงจรไฟฟ้ากระแสตรง

สมการแสดงลักษณะค่าวัดและค่าผิดพลาดจากวงจรสามารถแสดงได้เป็น

$$Z_1 = \frac{5}{8}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + e_1 \quad (2.31)$$

$$Z_2 = -\frac{1}{8}x_1 + \frac{5}{8}x_2 + e_2 \quad (2.32)$$

$$Z_3 = \frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + e_3 \quad (2.33)$$

$$Z_4 = \frac{1}{8}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + e_4 \quad (2.34)$$

เมื่อกำหนด

z = ค่าวัดที่ได้จากอุปกรณ์วัด

e = ค่าวัดที่ผิดพลาด

$$x_1 = V_1, x_2 = V_2$$

เรานำสมการข้างต้นมาเขียนรูปสัมประสิทธิ์จาค็อบเป็นได้เป็น

$$Z_i = h_{i1}x_1 + h_{i2}x_2 + e_i = Z_{i,true} + e_i \quad (2.35)$$

$$Z_2 = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + e_2 = Z_{2,true} + e_2 \quad (2.36)$$

$$Z_3 = h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + e_3 = Z_{3,true} + e_3 \quad (2.37)$$

$$Z_4 = h_{41}x_1 + h_{42}x_2 + e_4 = Z_{4,true} + e_4 \quad (2.38)$$

หรือเป็นรูปเมตริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{1,true} \\ z_{2,true} \\ z_{3,true} \\ z_{4,true} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

เมื่อ $z_{j,true} = \text{ค่าจริง}$

จัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้

$$e = z - z_{true} = z - Hx \quad (2.40)$$

จากสมการที่กล่าวมาข้างต้น จะทราบค่าที่วัดได้จากอุปกรณ์วัด (z) แต่ไม่สามารถคำนวณหาค่า x_1 และ x_2 ได้จากวงจร จึงใช้วิธีการประมาณสถานะขึ้นมา จึงกำหนดให้ x_1^{est} และ x_2^{est} เป็นตัวแปรสถานะ ดังนั้นจะได้สมการใหม่ในสถานะประมาณ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \\ \hat{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

หรือ

$$\hat{e} = z - \hat{z} = z - Hx^{est} \quad (2.42)$$

เมื่อ

$Z = \text{ค่าที่ได้จากอุปกรณ์วัด}$

$$\hat{Z} = \text{ค่าประมาณ} \left(\sum \hat{H} x^{est} \right)$$

คำนวณหาค่าตัวแปรสถานะ (x^{est})

ซึ่ง

$$\mathbf{x}^{est} = \begin{bmatrix} x_1^{est} \\ x_2^{est} \end{bmatrix} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{z} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{z} \quad (2.43)$$

เมื่อ x_1^{est} และ x_2^{est} เป็นค่าประมาณสภาวะกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก

$\mathbf{W}$ คือ เมตริกซ์ทแยงค่าตัวประกอบถ่วงน้ำหนัก

$\mathbf{G}$ คือ ค่าเมตริกซ์เกน (gain matrix)

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}$$

2.2.1 ตัวอย่างและผลการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 1

วงจรไฟฟ้ากระแสตรงแสดงดังรูป 2.1 มีเตอร์อ่านค่า z_1, z_2, z_3 และ z_4 มีค่าเท่ากับ 9.01 A, 3.02 A, 6.98 V และ 5.01 V ตามลำดับ กำหนดให้แอมมิเตอร์มีความแม่นยำกว่าโวลต์มิเตอร์ และค่าถ่วงน้ำหนัก $W_1=100, W_2=100, W_3=50$ และ $W_4=50$ ตามลำดับ คำนวณหาค่าประมาณสภาวะกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของแหล่งจ่ายแรงดัน V_1 และ V_2 เรากำหนดให้ค่าประมาณ V_1 และ V_2 เท่ากับ x_1^{est} และ x_2^{est} ตามลำดับ

จากสมการ (2.35)-(2.38) สามารถแสดงจาโคเบียนเมตริกซ์ ($\mathbf{H}$) ได้ดังนี้

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.125 & 0.625 \\ 0.375 & 0.125 \\ 0.125 & 0.375 \end{bmatrix}$$

คำนวณค่า $\mathbf{H}^T \mathbf{W}$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 & 0.375 & 0.125 \\ -0.125 & 0.625 & 0.125 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & . & . & . \\ . & 100 & . & . \\ . & . & 50 & . \\ . & . & . & 50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 62.50 & -12.50 & 18.75 & 6.25 \\ -12.50 & 62.50 & 6.25 & 18.75 \end{bmatrix}$$

ใช้ผลลัพธ์ของ $H^T W$ คำนวณหาค่าเมตริกซ์เกรน G

$$G = H^T W H = \begin{bmatrix} 62.50 & -12.50 & 18.75 & 6.25 \\ -12.50 & 62.50 & 6.25 & 18.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.125 & 0.625 \\ 0.375 & 0.125 \\ 0.125 & 0.375 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 48.4375 & -10.9375 \\ -10.9375 & 48.4375 \end{bmatrix}$$

ฉะนั้นจะได้ค่าประมาณสภาวะของแหล่งจ่ายแรงดัน ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_1^{est} \\ x_2^{est} \end{bmatrix} = G^{-1} H^T W z$$

$$= \begin{bmatrix} 48.4375 & -10.9375 \\ -10.9375 & 48.4375 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 62.50 & -12.50 & 18.75 & 6.25 \\ -12.50 & 62.50 & 6.25 & 18.75 \end{bmatrix} z$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0218 & 0.0049 \\ 0.0049 & 0.0218 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62.50 & -12.50 & 18.75 & 6.25 \\ -12.50 & 62.50 & 6.25 & 18.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2982 & 0.0351 & 0.4386 & 0.2281 \\ 0.0351 & 1.2982 & 0.2281 & 0.4386 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.01 \text{ A} \\ 3.02 \text{ A} \\ 6.98 \text{ V} \\ 5.01 \text{ V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.0072 \text{ V} \\ 8.0261 \text{ V} \end{bmatrix}$$

และค่าประมาณจากการวัด คำนวณจาก $\hat{z} = H\hat{x}$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.125 & 0.625 \\ 0.375 & 0.125 \\ 0.125 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16.0072 \text{ V} \\ 8.0261 \text{ V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.00123 \text{ A} \\ 3.01544 \text{ A} \\ 7.00596 \text{ V} \\ 5.01070 \text{ V} \end{bmatrix}$$

เราจะได้ค่าผิดพลาดประมาณเนื่องจากการวัดของอุปกรณ์วัดได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \\ \hat{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.01 \\ 3.02 \\ 6.98 \\ 5.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.00123 \\ 3.01544 \\ 7.00596 \\ 5.01070 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00877 \text{ A} \\ 0.00456 \text{ A} \\ -0.02596 \text{ V} \\ -0.00070 \text{ V} \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างที่กล่าวมาเป็นการคำนวณค่าสถานะของระบบโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก

เนื่องจาก $J(X)$ เป็นสมการซึ่งไม่เป็นเชิงเส้นการหาคำตอบจะใช้การทำวนซ้ำด้วยวิธี นิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) ดังนี้ จากวิธีนิวตัน-ราฟสัน

$$\Delta X = \left(\frac{\partial \nabla J(X)}{\partial X} \right)^{-1} (-\nabla J(X)) \quad (2.44)$$

จาก

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla J(X)}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} (-2H^T R^{-1} e) \\ &= -2H^T R^{-1} (-H) \\ &= 2H^T R^{-1} H \end{aligned} \quad (2.45)$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{1}{2} (H^T R^{-1} H)^{-1} (2H^T R^{-1} e) \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} e \end{aligned} \quad (2.46)$$

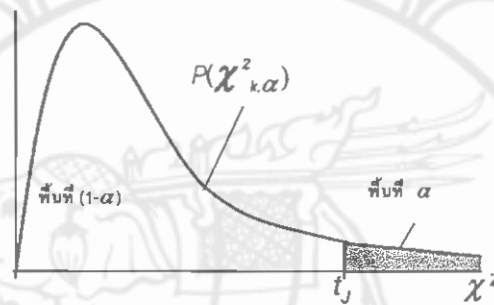
และทำการปรับปรุงค่าตัวแปรสถานะแล้ววนซ้ำเพื่อให้ผู้เข้าสู่ค่าคำตอบ

$$X^{i+1} = X^i + \Delta X \quad (2.47)$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น X^0 ซึ่งก็คือ ขนาดแรงดันและมุมเฟสของทุกบัสให้มีค่าเป็น $1 \angle 0^\circ pu$ แล้วทำกระบวนการวนซ้ำจนได้ค่าที่มากที่สุดของ ΔX^i มีค่าน้อยกว่าค่า ε ที่กำหนด และค่า X สุดท้ายที่ได้ก็คือ ค่าประมาณของตัวแปรสถานะ (estimated state variables) ซึ่งจะนำไปคำนวณหาค่าอื่นๆ เช่น ขนาดกำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่ไหลในสายส่ง

2.3 การตรวจสอบและแสดงค่าวัดที่ผิดพลาด

ในการตรวจสอบหาค่าวัดที่ผิดพลาดนั้น จะอาศัยทฤษฎีการทดสอบทางสถิติ (hypothesis test) เนื่องจากค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากอุปกรณ์วัดนั้นเป็นค่าผิดพลาดสุ่ม (random error) ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ (normal distribution) และค่าของ $J(X^{est})$ ที่ได้ก็จะเป็นค่าสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบ ไค-สแควร์ (Chi-squared distribution) $\chi^2_{k,\alpha}$ โดยที่ k คือ จำนวนองศาอิสระ (degree of freedom) มีค่าเท่ากับ $N_m - N_r$ และ α คือระดับความมีนัยสำคัญ (significant level) ที่มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้โค้ง ดังในรูปที่ 2.2



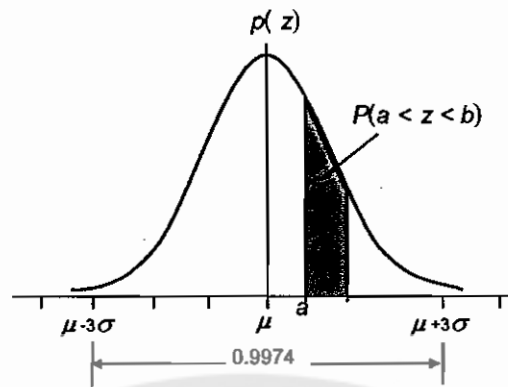
รูปที่ 2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไค-สแควร์

โดยมีค่าเฉลี่ย (mean, μ) เท่ากับ k และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation, σ_{χ^2}) เท่ากับ $\sqrt{2k}$ มีสมการ ความน่าจะเป็นดังสมการที่ (2.48)

$$P(J(X^{est}) < \chi^2_{k,\alpha}) = 1 - \alpha \quad (2.48)$$

ตัวอย่างการทดสอบ เช่น สมมติว่าเลือกระดับความมีนัยสำคัญ $\alpha = 0.01$ ซึ่งมีจำนวนองศาอิสระ k ($N_m - N_r$) โดยมีค่า $\chi^2_{k,\alpha} = t_\gamma$ (สามารถหาค่าได้จากตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไค-สแควร์) นั่นคือความน่าจะเป็นที่ $J(X^{est}) < t_\gamma$ เท่ากับ 0.99 (1-0.01) หรือความน่าจะเป็นที่ไม่มีค่าวัดที่ผิดพลาดเท่ากับ 99% โดยจะเห็นว่าถ้าค่าวัดมีความผิดพลาดมากๆ ค่ายกกำลังสองของเทอมนั้นๆ ก็จะมีค่ามากขึ้น และทำให้ $J(X^{est})$ มีค่ามากกว่า t_γ ซึ่งทำให้สมการที่ (2.48) ไม่เป็นจริง จึงต้องมีการตรวจสอบเพื่อหาค่าวัดที่ผิดพลาดนั้น

สำหรับการตรวจสอบหาค่าวัดที่ผิดพลาดนั้นจะอาศัยคุณสมบัติของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ

เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของค่าวัดที่ได้ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ มีสมการความสัมพันธ์ดังนี้

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.49)$$

สามารถหาค่าความน่าจะเป็น (probability) ของ z ที่อยู่ระหว่าง a ถึง b ได้จากพื้นที่ใต้กราฟ ดังสมการที่ (2.50)

$$P(a < z < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dz \quad (2.50)$$

ดังเช่นในรูปที่ 2.3 พื้นที่แรเงาเท่ากับความน่าจะเป็นที่ z จะอยู่ระหว่าง a ถึง b และ จะเห็นว่าความน่าจะเป็นที่ค่าวัดที่ได้จะอยู่ภายในช่วง $\mu \pm 3\sigma$ (หรือพื้นที่ระหว่าง $\mu - 3\sigma$ ถึง $\mu + 3\sigma$) มากกว่า 0.99 หรือ 99% และ ถ้ากำหนดให้

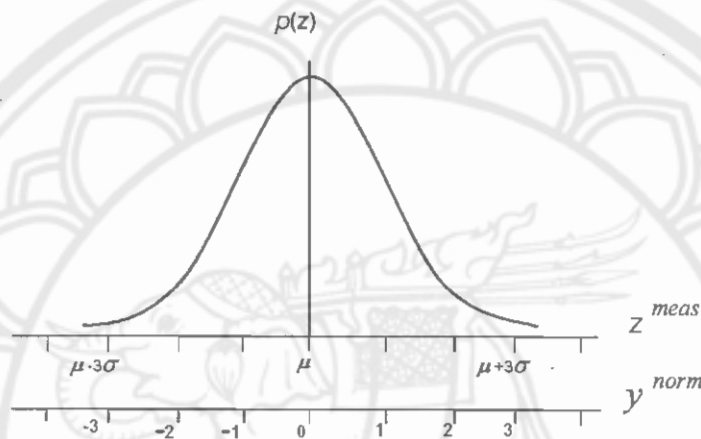
$$y_i^{norm} = \frac{z_i^{meas} - f_i(x^{est})}{\sqrt{R_{ii}'}} \quad (2.51)$$

เมื่อ $\sqrt{R_{ii}'}$ คือ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)

ซึ่งเป็นค่ารากที่สองของค่าตามแนวทแยง(diagonal)ของเมตริกซ์ Covariance matrices, R' ดังในสมการที่ (2.52)

$$R' = R - HG^{-1}H^T \quad (2.52)$$

จะได้ว่า y_i^{norm} มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) ซึ่งมีค่า $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ รูปที่ 2.4 ซึ่งเรียกว่า *normalized measurement residual* โดยถ้า y_i^{norm} น้อยกว่า -3 หรือ y_i^{norm} มากกว่า 3 (หรือเขียนได้เป็น $|y_i^{norm}| > 3$) นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ค่าวัดนั้นจะเป็นค่าวัดที่ผิดพลาดมากกว่า 99%



รูปที่ 2.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน

จากสมการที่ 2.22

$$\min J(x^{est}) = \sum_{j=1}^{Nm} w_j \hat{e}_j^2 = \sum_{j=1}^{Nm} \frac{\hat{e}_j^2}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{Nm} \frac{(z_j - \hat{z}_j)^2}{\sigma_j^2} \quad (2.53)$$

เมื่อ

$$w_j = 1/\sigma_j^2$$

ผลรวมค่ากำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก ($\min J(x^{est})$) เป็นค่าตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีการกระจายความน่าจะเป็นแบบปกติ ในทางสถิติสามารถที่จะเปิดตารางหาค่าชั้นแห่งความอิสระ (k) ได้ ดังนั้นต้องการที่จะทราบค่าเฉลี่ยของ ($\min J(x^{est})$) ซึ่งจะช่วยให้ง่ายต่อการคำนวณหาค่า k โดยการคูณค่าความแปรปรวน (variance : R'_{jj}) ของค่าวัด และตัวดำเนินการ (expected value : E) ได้เป็น

$$E[\min J(\mathbf{X}^{\text{est}})] = E\left[\sum_{j=1}^{N_m} \frac{R'_{jj} \hat{e}_j^2}{\sigma_j^2 R'_{jj}}\right] = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{R'_{jj}}{\sigma_j^2} E\left[\frac{(Z_j - \hat{Z}_j)^2}{R'_{jj}}\right] \quad (2.54)$$

ตัวดำเนินการ (expected value) ด้านขวาของสมการที่ 2.54 มีค่าเท่ากับ 1

$$E\left[\frac{\left(\frac{\hat{e}_j}{\sqrt{R'_{jj}}}\right)^2}{\sigma_j^2}\right] = E\left[\frac{(Z_j - \hat{Z}_j)^2}{R'_{jj}}\right] = 1$$

เมื่อ R'_{jj} เท่ากับ the j th diagonal element ของ เมตริกซ์ $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}^T$

จะได้

$$E[\min J(\mathbf{X}^{\text{est}})] = E\left[\sum_{j=1}^{N_m} \frac{\hat{e}_j^2}{\sigma_j^2}\right] = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{R'_{jj}}{\sigma_j^2} \quad (2.55)$$

ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นว่าสมการ 2.55 มีค่าเท่ากับค่าชั้นแห่งความอิสระ ($k = N_m - N_s$) ได้ในตัวอย่างที่ 2 ดังนี้

$$E[\min J(\mathbf{X}^{\text{est}})] = E\left[\sum_{j=1}^{N_m} \frac{(Z_j - \hat{Z}_j)^2}{\sigma_j^2}\right] = N_m - N_s$$

จาก

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}^T$$

$$\mathbf{R}' = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1})\mathbf{R}$$

แทนค่า $\mathbf{R}'$ ในสมการที่ 2.55 จะได้

$$\sum_{j=1}^{N_m} \frac{R'_{jj}}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1})_{jj} R_{jj}}{\sigma_j^2}$$

โดยที่

$$R_{jj} = \sigma_j^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N_m} \frac{R'_j}{\sigma_j^2} &= \sum_{j=1}^{N_m} (I - HG^{-1}H^T R^{-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_m} I - \sum_{j=1}^{N_m} (HG^{-1}H^T R^{-1}) \\ &= N_m - N_s\end{aligned}$$

เมื่อ

$$N_s = \sum_{j=1}^{N_m} (HG^{-1}H^T R^{-1})$$

และกำหนดให้ N_m = จำนวนค่าวัด

N_s = จำนวนตัวแปรสถานะ

2.3.1 ตัวอย่างและผลการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 ถึง w_4 เป็นไปตามตัวอย่างที่ 1 ซึ่งมีค่าส่วนเบี่ยงเบนความผิดพลาดที่เกิดจากมิเตอร์ทั้ง 4 ตัวตามรูปที่ 2.1 จำนวนค่าที่ควรจะเป็นของผลรวมของค่าความผิดพลาดยกกำลังสอง

เมื่อ

$$R' = R - HG^{-1}H^T = (I - HG^{-1}H^T R^{-1})R$$

เนื่องจากตัวอย่างที่ 1 เราทราบค่า $HG^{-1}H^T R^{-1}$ เราจึงใช้ $R' = (I - HG^{-1}H^T R^{-1})R$

จะได้

$$HG^{-1}H^T R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 \\ -0.125 & 0.625 \\ 0.375 & 0.125 \\ 0.125 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2982 & 0.0351 & 0.4386 & 0.2281 \\ 0.0351 & 1.2982 & 0.2281 & 0.4386 \end{bmatrix}$$

$$HG^{-1}H^T R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8070 & x & x & x \\ x & 0.8070 & x & x \\ x & x & 0.1930 & x \\ x & x & x & 0.1930 \end{bmatrix}$$

เครื่องหมาย X ไม่ได้เป็นค่าที่ไม่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ เนื่องจากค่าที่นำไปใช้เป็นค่าเฉพาะแนวทแยงของเมทริกซ์ R' เท่านั้น ดังนั้นจะได้

$$\begin{bmatrix} R'_{11} & . & . & . \\ . & R'_{22} & . & . \\ . & . & R'_{33} & . \\ . & . & . & R'_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.807 & . & . & . \\ . & 0.807 & . & . \\ . & . & 0.193 & . \\ . & . & . & 0.193 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & . & . & . \\ . & \sigma_2^2 & . & . \\ . & . & \sigma_3^2 & . \\ . & . & . & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ σ_j^2 คือส่วนเบี่ยงเบนความผิดพลาดของมิเตอร์ ค่าที่ควรจะเป็นของ $\min J(x^{est})$ สามารถคำนวณได้ดังนี้ เมื่อ $N_m = 4$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{R'_j}{\sigma_j^2} &= \frac{(1-0.807)\sigma_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(1-0.807)\sigma_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{(1-0.193)\sigma_3^2}{\sigma_3^2} + \frac{(1-0.193)\sigma_4^2}{\sigma_4^2} \\ &= (1+1+1+1) - (0.807 + 0.807 + 0.193 + 0.193) \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

เมื่อ k คือชั้นแห่งความอิสระ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 3

การนำการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไค-สแควร์ เพื่อใช้ในการตรวจสอบค่าวัดที่ผิดพลาดของข้อมูลในตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 มีค่าวัดทั้งหมด 4 ค่า และ 2 ตัวแปรสถานะ และค่า $k=2$ เราทราบข้อมูลจากตารางว่า $\chi^2_{k,\alpha} = 9.21$ ค่าผลรวมความผิดพลาดกำลังสอง ซึ่งเป็นค่าความผิดพลาดจากการประมาณในตัวอย่างที่ 1

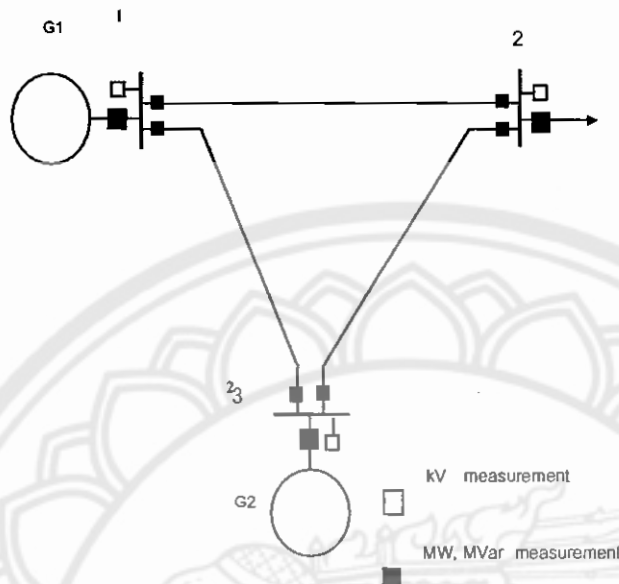
ตารางที่ 2.2 ค่าพื้นที่ α ทางด้านขวาของการแจกแจงแบบไค-สแควร์ในรูปที่ 2.2

k	α			
	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.84	5.02	6.64	7.88
2	5.99	7.38	9.21	10.60
3	7.82	9.35	11.35	12.84
4	9.49	11.14	13.28	14.86
5	11.07	12.83	15.09	16.75
6	12.59	14.45	16.81	18.55
7	14.07	16.01	18.48	20.28
8	15.51	17.54	20.09	21.96
9	16.92	19.02	21.67	23.59
10	18.31	20.48	23.21	25.19
11	19.68	21.92	24.73	26.76
12	21.03	23.34	26.22	28.30
13	22.36	24.74	27.69	29.82
14	23.69	26.12	29.14	31.32
15	25.00	27.49	30.58	32.80
16	26.30	28.85	32.00	34.27
17	27.59	30.19	33.41	35.72
18	28.87	31.53	34.81	37.16
19	30.14	32.85	36.19	38.58
20	31.41	34.17	37.57	40.00

$$\begin{aligned}
 \min J(\mathbf{X}^{cs}) &= \sum_{j=1}^4 \frac{\hat{e}_j^2}{\sigma_j^2} = 100\hat{e}_1^2 + 100\hat{e}_2^2 + 50\hat{e}_3^2 + 50\hat{e}_4^2 \\
 &= 100(0.00877)^2 + 100(0.00456)^2 + 50(0.02596)^2 + 50(0.00070)^2 \\
 &= 0.043507
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าค่าที่ได้จากการคำนวณมีค่าน้อยกว่า 9.21 ซึ่งได้จากตาราง 2.1

ตัวอย่างที่ 4



รูปที่ 2.5 ระบบไฟฟ้ากำลัง 3 บัส

จากรูปที่ 2.5 เป็นตัวอย่างระบบไฟฟ้ากำลัง 3 บัส ที่ทราบค่าคำตอบ หรือขนาดแรงดันและกำลังไฟฟ้าของแต่ละบัส รวมทั้งกำลังไฟฟ้าที่ไหลในสายส่งและเพื่อผลการหาค่าประมาณสถานะสามารถทำได้โดยการรวมค่าความผิดพลาดที่เป็นค่าความผิดพลาดสุ่ม (random error) เข้ากับค่าคำตอบ แล้วให้เสมือนเป็นค่าวัดที่ได้จากอุปกรณ์วัด แล้วนำค่าวัดนี้ไปหาค่าประมาณสถานะ ซึ่งได้ผลการหาค่าประมาณสถานะโดยเปรียบเทียบกับคำตอบและค่าวัด ดังในตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ค่า $J(X)$ ของแต่ละรอบ

รอบที่	ค่า $J(X)$
1	929.46
2	87.97
3	87.90

ตารางที่ 2.4 ผลการหาค่าประมาณสภาวะเปรียบเทียบกับค่าตอบและค่าวัด (มีหน่วยเป็น kV, MW, MVar ตามชนิดของปริมาณทางไฟฟ้าต่างๆ)

Meas.	ค่าตอบ	ค่าวัด	ค่าประมาณ	yi norm
V1	120.8	119	118.1	0.89
V2	119.6	113.4	116.9	-3.56
V3	111.7	108.9	108.9	0.04
PG1	218.4	225.4	221.9	4.5
QG1	140.9	141	142.7	-2.21
PG2	200	198.7	200	-1.64
QG2	146.2	145.2	144.1	1.41
PL	400	402.9	402.4	-0.64
QL	250	249.5	247.6	-2.45
P12	39.1	35.1	40.5	-5.87
Q12	22.1	23.4	23.4	-0.05
P13	179.4	180.6	181.4	-0.89
Q13	118.7	119.9	119.2	0.71
P21	-38.9	-39.2	-40.3	1.19
Q21	-21.6	-23.7	22.8	-0.95
P23	238.9	239.7	240.8	-0.61
Q23	167.7	162.3	167	-5.18
P31	-171	-172.6	-172.5	-0.1
Q31	-101.9	-102.8	-101.4	-1.51
P32	-229	-229.8	-229.9	0.1
Q32	-148.1	-146.9	-146.2	-0.72

จากตารางที่ 2.4 จะเห็นว่าค่าประมาณส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกับค่าตอบมากกว่าค่าวัด หรือมีความถูกต้องมากกว่าค่าวัดที่ได้ ซึ่งโดยหลักของการประมาณสภาวะก็คือ การกรองค่าความผิดพลาดกลุ่มที่มีอยู่ในค่าวัดทิ้ง หรือทำให้มีค่าผิดพลาดน้อยที่สุด และจากตารางที่ 2.3 จะเห็นว่าค่า $J(X)$ ในรอบสุดท้ายมีค่า 87.90 ซึ่งมากกว่า $t_r (= 32.0$: ตารางแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไค-สแควร์ที่ $k=16$ และ $\alpha = 0.01$) แสดงว่ามีค่าวัดที่ผิดพลาด และสามารถตรวจสอบได้โดยจะเห็นว่าค่าวัด V_2 , P_{G1} , P_{12} และ Q_{23} มี $|y_i^{norm}| > 3$ ซึ่งมีความน่าจะเป็นสูงสุดที่จะเป็นค่าวัดที่ผิดพลาด ซึ่งค่าวัดดังกล่าวมีความผิดพลาดหรือคลาดเคลื่อนสูงกว่าค่าวัดอื่นๆ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าตอบ (ดูในตารางที่ 2.4)