

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

2.1 บทนำ

ตามปกติเมื่อของสิ่งใดอยู่ต่างระดับกันโดยปกติแล้ว ธรรมชาติมักปรับให้อยู่ในสภาวะสมดุลเสมอ กล่าวคือ จะมีแรงเกิดขึ้นเพื่อดันให้ส่วนที่อยู่ในระดับเหนือกว่าไหลลงไปยังส่วนที่อยู่ต่ำกว่า ฉะนั้นเมื่อดินอยู่ในระดับต่างกัน ก็จะมีแรงกระทำให้ดินที่อยู่ระดับเหนือกว่าไหลหรือไหลลงไปสู่ระดับที่ต่ำกว่า แรงที่กระทำนี้ เช่น แรงดึงดูดของโลก แรงที่เกิดจากการซึมผ่านของน้ำ ซึ่งแรงประเภทนี้พยายามทำให้ดินเกิดการเคลื่อนที่ เรียกว่า Disturbing force หรือ Actuating force แต่เนื่องจากภายในมวลดินเองมีแรงต้านทานต่อแรงกระทำนี้ ตัวอย่างแรงต้านทาน เช่น แรงเสียดทาน แรงยึดเหนี่ยว และกำลังต้านทานแรงเฉือน แรงประเภทนี้รวมเรียกว่า resisting force ดังนั้นคราบไคที่ค่าแรงต้านมีมากกว่าค่าแรงที่กระทำ หรืออัตราส่วนแรงต้านต่อแรงที่กระทำเรียกอัตราส่วนนี้ว่า “ค่าลดส่วนความปลอดภัย” (Factor Safety: FS) มีค่ามากกว่าหนึ่งดินจะไม่เลื่อนไหลหรือไหลลง

2.2 ปัจจัยของเสถียรภาพความลาด

2.2.1 การเพิ่มขึ้นของความเค้น

ตัวอย่างของการเพิ่มขึ้นของความเค้นที่ทำให้เสถียรภาพของความลาดลดลง เช่น

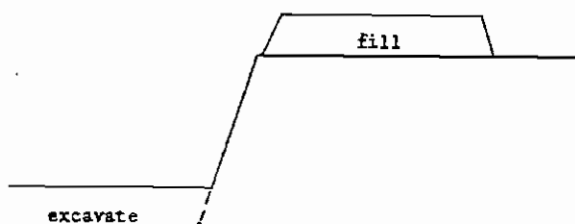
- การเพิ่มขึ้นของเปอร์เซ็นต์น้ำในดิน (Water Content)

รูปที่ 2.1 ผนตกทำเปอร์เซ็นต์น้ำในดินเพิ่มขึ้น



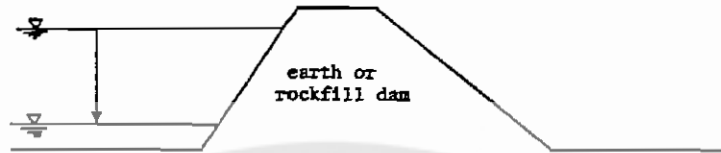
- การขุดดินบริเวณปลายด้านล่างทางลาดหรือการถมดินบริเวณปลายด้านบนทางลาด

รูปที่ 2.2 แสดงตัวอย่างการเพิ่มขึ้นของความเค้นเนื่องจากการขุดและการถมดิน



- การลดหรือเพิ่มระดับน้ำอย่างรวดเร็ว เช่น ทางลาดบริเวณเขื่อน

รูปที่ 2.3 แสดงตัวอย่างการเพิ่มขึ้นของความเค้นเนื่องจากการขุดและการถมดิน



- แรงดันน้ำในรอยแยก (Crack)

รูปที่ 2.4 แสดงตัวอย่างแรงดันน้ำในรอยแยก (Crack)



- การเพิ่มขึ้นของแรงดันบนทางลาดเนื่องจากโครงสร้างต่างๆ บนทางลาด

ฯลฯ

2.2.2 การลดลงของความแข็งแรงดิน

ตัวอย่างสาเหตุที่ทำให้ความแข็งแรงของดินลดลงที่ทำให้เสถียรภาพของความลาดลดลง เช่น

- การเพิ่มของความดันน้ำในดิน
- การเพิ่มขึ้นของเปอร์เซ็นต์น้ำในดิน (Water Content)
- การขุดดินบริเวณปลายด้านล่างทางลาด
- การสูญเสียความละเอียดของดินเนื่องจากการสั่นสะเทือน (Liquefaction)
- เกิดความเครียดในดิน

ฯลฯ

2.3 ค่าสัดส่วนปลอดภัย (Factor of Safety; FS)

วิธีวิเคราะห์เสถียรภาพมีขีดความสามารถของการวิเคราะห์ในวงกว้างและหลายรูปแบบ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพจะแสดงอยู่ในรูปตัวเลขค่าสัดส่วนปลอดภัย (Factor of Safety; FS) โดยค่าสัดส่วนปลอดภัยสามารถหาได้จาก

$$\text{สัดส่วนความปลอดภัยของความลาด (FS)} = \frac{\text{โมเมนต์หรือแรงที่ต้านทาน}}{\text{โมเมนต์หรือแรงที่กระทำ}} \quad (2.1)$$

ถ้าส่วนปลอดภัยน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับ 1 หมายความว่าใกล้จะถึงจุดอันตราย ที่ดินจะเริ่มเคลื่อนตัว ถ้าให้ดินทรงตัวอยู่ได้ ส่วนปลอดภัยต้องมีค่ามากกว่า 1 แต่ในทางปฏิบัติต้องพิจารณาความแตกต่างระหว่างสมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณ รวมทั้งความผิดพลาดของค่าคงที่ ที่ใช้กับค่าที่แท้จริงของดินด้วย ปกติใช้ $FS = 1.2$ โดยประมาณ

ตัวเลขค่าสัดส่วนความปลอดภัยของความลาดหนึ่งๆ นั้นสามารถมีได้หลายค่า ตัวเลขค่าสัดส่วนปลอดภัยที่มีค่าน้อยที่สุดคือวัตถุประสงค์หลักในการวิเคราะห์เสถียรภาพของความลาด วิธีหาค่าสัดส่วนปลอดภัยที่มีค่าน้อยที่สุดที่นิยมกันมากที่สุดคือการสมมติพื้นผิววิกฤตขึ้นหลายๆ พื้นผิว พื้นผิวที่ให้สัดส่วนปลอดภัยน้อยที่สุดจะเป็นคำตอบของการวิเคราะห์

2.4 การวิเคราะห์เสถียรภาพของทางลาดวิธี Equilibrium Equation Method

2.4.1 ความลาดไม่มีขอบเขตจำกัด (Infinite Slope)

ความลาดที่ไม่มีขอบเขตเป็นความลาดที่มีแนวลาดเอียงยาวมาก ในการวิเคราะห์จะสมมติให้ดินที่อยู่ลึกจากผิวดินเท่ากันมีคุณสมบัติเหมือนกันและมีระนาบการพังทลายขนานกับผิวดิน ซึ่งสามารถแบ่งออกได้ 2 ประเภท คือ

2.4.1.1 ความลาดไม่มีขอบเขตจำกัดที่ไม่มีน้ำไหลซึมผ่าน

การวิเคราะห์ในกรณีนี้จะสมมติให้แรงดันน้ำ (Pore Water Pressure) เท่ากับศูนย์ พิจารณารูปที่ 2.5 ให้ดินตามแนว AB เอียงทำมุมกับแนวราบเป็นมุม α ถ้าคุณสมบัติและหน่วยแรงในดินระนาบใดๆ ที่เอียงขนานกับแนว AB มีค่าเหมือนกันหมด สมมติให้เกิดการเลื่อนไถลตามแนว CD ซึ่งอยู่ลึกจากผิวดินเป็นระยะ H

พิจารณาแท่งดินที่มีความยาวตามเอียง เป็น b และลึก H ถ้าหน่วยน้ำหนักของดินเท่ากับ γ

น้ำหนักของแท่งดินนี้ ; $W = \gamma H b \cos \alpha$

หน่วยแรงในแนวตั้ง ; $\sigma_v = \frac{W}{b} \gamma H \cos \alpha$

ดังนั้นหน่วยแรงตั้งฉากกับ CD; $N = \sigma_v \cos \alpha = \gamma H \cos^2 \alpha$

หน่วยแรงเฉือนกับ CD: $S_m = \sigma_v \sin \alpha = \gamma H \cos \alpha \sin \alpha$

กำลังรับแรงเฉือนของดิน : $S = c + N \tan \phi$

กรณี (ข.) ดินมีความเชื่อมั่น

$$\text{จากสัดส่วนพลอคภัยของความลาด ; } FS = \frac{c + (\gamma H \cos^2 \alpha) \tan \phi}{\gamma H \cos \alpha \sin \alpha}$$

จะเห็นว่าที่ระยะลึก H ใดๆ จากผิวดิน ถ้ามุมลาดเอียงของดิน (α) น้อยกว่าหรือเท่ากับมุมเสียดทานภายในของดิน (ϕ) จะได้ค่าหน่วยแรงเฉือนซึ่งยังน้อยกว่าค่าของหน่วยแรงเฉือนของดิน (τ_f) แสดงว่ายังไม่เกิดการเลื่อนไถล แต่ถ้ามุมลาดเอียงของดิน (α) มากกว่าหรือเท่ากับมุมเสียดทานภายในของดิน (ϕ) จะต้องพิจารณาถึงระยะลึก H ด้วย

จะพิจารณาเมื่อ $FS = 1$ (ดินจะเริ่มเลื่อนไถล) และให้ระยะวิกฤต $H = h_{cr}$ จะได้

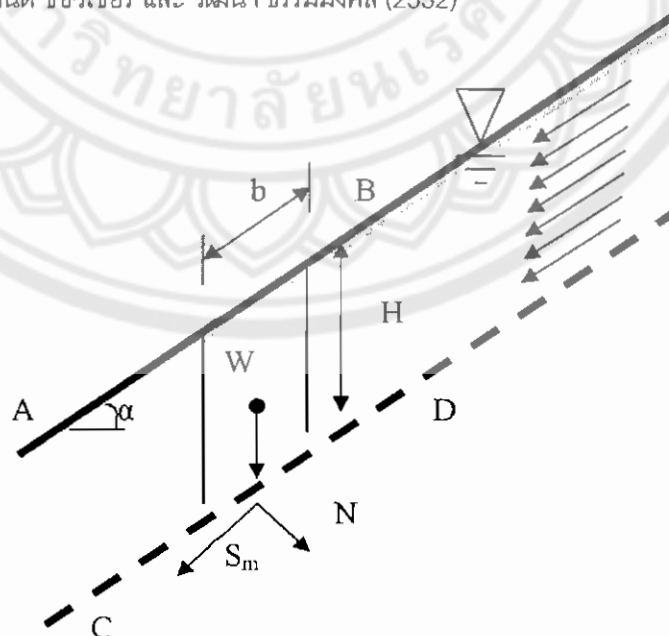
$$h_{cr} = \frac{c}{\gamma \cos^2 \alpha (\tan \alpha - \tan \phi)} \quad (2.4)$$

ฉะนั้นในกรณีนี้หากมุมลาดเอียงของดิน (α) มากกว่าหรือเท่ากับมุมเสียดทานภายในของดิน (ϕ) ค่าระยะ H ต้องไม่เกินกว่าระยะวิกฤต h_{cr} จึงจะไม่เกิดการไถล

2.4.1.2 ความลาดไม่มีขอบเขตจำกัดที่มีน้ำไหลซึมผ่าน

ในการวิเคราะห์จะสมมติให้มีน้ำไหลซึมผ่านและระดับน้ำใต้ดินอยู่ที่ระดับผิวดิน พิจารณารูปที่ 2.6 ถ้าหน่วยน้ำหนักดินอิ่มตัวเท่ากับ γ_{sat}

รูปที่ 2.6 แสดงตัวแปรต่างๆ ของความลาดไม่มีขอบเขตจำกัดที่มีน้ำไหลซึมผ่าน
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร และ วัฒนา ธรรมมงคล (2532)



น้ำหนักของแท่งดินนี้ ;

$$W = \gamma_{sat} H b \cos \alpha$$

หน่วยแรงในแนวตั้ง ;

$$\sigma_v = \frac{W}{b} \gamma_{sat} H \cos \alpha$$

ดังนั้นหน่วยแรงตั้งฉากกับ CD ;

$$N = \sigma_v \cos \alpha = \gamma_{sat} H \cos^2 \alpha$$

หน่วยแรงเฉือนกับ CD ;

$$S_m = \sigma_v \sin \alpha = \gamma_{sat} H \cos \alpha \sin \alpha$$

แรงดันน้ำกระทำกับ CD ;

$$u = \gamma_w H \cos^2 \alpha$$

สัดส่วนปลอดภัยของความลาด ;

$$FS. = \frac{c + (\gamma_{sat} H \cos^2 \alpha - u) \tan \phi}{\gamma_{sat} H \cos \alpha \sin \alpha}$$

$$= \frac{c + (\gamma_{sat} H \cos^2 \alpha - \gamma_w H \cos^2 \alpha) \tan \phi}{\gamma_{sat} H \cos \alpha \sin \alpha}$$

$$= \frac{c}{\gamma_{sat} H \cos^2 \alpha \tan \alpha} + \frac{\gamma' \tan \phi}{\gamma_{sat} \tan \alpha} \quad (2.5)$$

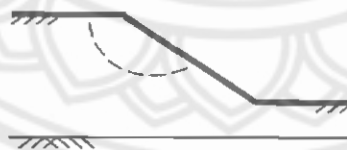
เมื่อ $\gamma' = \text{หน่วยน้ำหนักประสิทธิภาพ} = \gamma_{sat} - \gamma_w$

2.4.2 ความลาดมีขอบเขตจำกัด (Finite Slope)

ความลาดความยาวมีขอบเขตจำกัด (Finite Slope) เป็นความลาดของดินที่มีความสูงอยู่ในขอบเขตจำกัด รูปแบบของการพังทลาย (Types of Failures) เกิดขึ้นในลักษณะที่ดินเคลื่อนตัวเป็นแนวโค้ง (Rotational slide) ลักษณะพังทลายมีอยู่หลายแบบด้วยกัน คือ

รูปที่ 2.7 แสดงรูปแบบการพังทลายแบบต่างๆ

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร และ วัฒนา ธรรมมงคล (2532)



Slope or Face Failure



Toe Failure



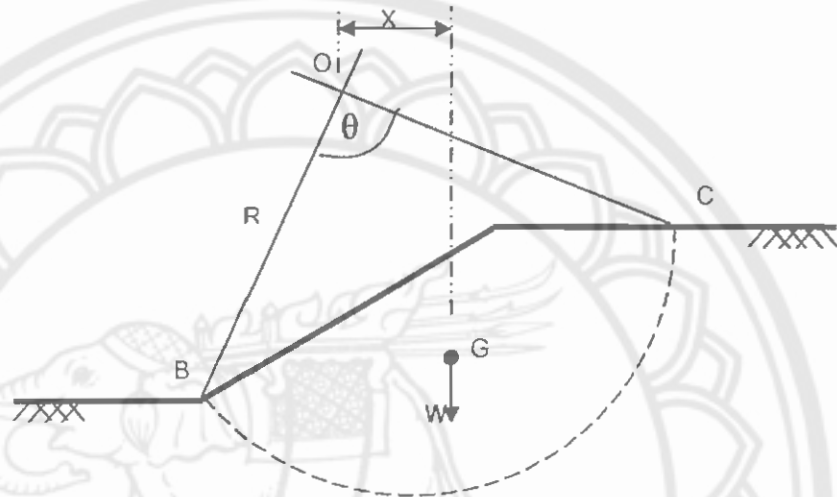
Base Failure

2.4.2.1 การวิเคราะห์เสถียรภาพความลาดวิธี Circular Arc Method.

นิยมใช้การวิเคราะห์กับดินที่มีความเชื่อมแน่น ($\phi = 0$) เช่น ดินเหนียว ในกรณีนี้ เสถียรภาพของความลาดซึ่งขึ้นอยู่กับกำลังต้านทานของดินเหนียว (ที่อิ่มตัว) จะขึ้นอยู่กับแรงยึดเหนี่ยวของดินเหนียว

รูปที่ 2.8 แสดงตัวแปรในการวิเคราะห์วิธี Circular Arc Method.

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร และ วัฒนา ธรรมมงคล (2532)



พิจารณารูปที่ 2.8 เลือกส่วนโค้งของวงกลม BC ซึ่งเป็นระนาบที่คิดว่าดินจะพังตามแนวนี้ โดยมี O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีความโค้งเท่ากับ R ให้ W เป็นน้ำหนักของดินที่จะพังลงตามแนว BC ซึ่งกระทำที่จุดศูนย์กลางของดินส่วนนี้ ดังรูป 2.8

โมเมนต์รอบจุด O เนื่องจากน้ำหนักดินที่จะพังลงมา $= Wx$

โมเมนต์ต้านทานรอบจุด O เนื่องจากแรงยึดเหนี่ยวตามแนว BC $= (c)(l)(R)$

เมื่อ c = หน่วยแรงยึดเหนี่ยวของดิน

l = ความยาวของแนวโค้ง BC

แทนค่า $l = \theta R$ จะได้

$$\text{ส่วนปลอดภัยของความลาด ; (FS) = } \frac{cR^2\theta}{Wx} \quad (2.6)$$

ในกรณีที่ความลาดไม่เป็นเส้นตรงเดียวกันหรือถ้าดินมีแรงยึดเหนี่ยวในแต่ละชั้นไม่เท่ากัน ให้แบ่งการคำนวณออกเป็นส่วนชิ้นเล็กๆ ที่ขนานกัน (Parallel Strip) ตามแนวตั้งหรือแนวนอนก็ได้ ดังรูป และถ้าดินแยกออกจากแรงดึง (tension crack) ความยาวของส่วนโค้งของวงกลม (l) ที่ต้านทานต่อการเลื่อนไถล ให้วัดจากปลายของรอยแยกนี้ (ความลึกของรอยแยกของดิน h_c ประมาณเท่ากับ $\frac{2c}{\gamma} \left(\tan 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$)

ปัญหาความลาดที่วิเคราะห์จะสมมติเป็นแบบสองมิติ Plane Strain Condition นั่นคือความหนาของชั้นแนวตั้งเท่ากับหนึ่งหน่วยความยาว และเมื่อใช้หลักสถิตยศาสตร์ในการวิเคราะห์ รวมทั้งตั้งสมมติฐานเพิ่มเติมอีก ทำให้สามารถลดจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา ซึ่งจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าและเงื่อนไขต่างๆแสดงในตาราง 2.1 และ 2.2

ตารางที่ 2.1 จำนวนตัวแปรในการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาดวิธี Slice Method

จำนวนตัวแปรของระบบ	
คำอธิบาย	จำนวนตัวแปร
ขนาดของแรง N	N
ตำแหน่งของแรง N	N
ขนาดของแรง E	$N-1$
ตำแหน่งของแรง E	$N-1$
ขนาดของแรง X	$N-1$
ตำแหน่งของแรง S_m	N
ค่าสัดส่วนความปลอดภัย (Factor of Safety, FS)	1
ค่า λ	1
จำนวนตัวแปรทั้งหมด	$6N-1$

ตารางที่ 2.2 จำนวนสมการในการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาดวิธี Slice Method

จำนวนสมการของระบบ	
คำอธิบาย	จำนวนสมการ
ผลรวมแรงตามแนวราบ ($\sum F_x = 0$)	N
ผลรวมแรงตามแนวตั้ง ($\sum F_y = 0$)	N
ผลรวมโมเมนต์ ($\sum M = 0$)	N
สมการของวัสดุแบบ Mohr-Coulomb	N
ตำแหน่งของแรง N ถูกสมมติให้อยู่กึ่งกลางฐานชั้นส่วนย่อย	N
ความสัมพันธ์ระหว่าง แรง E และแรง X	$N-1$
สมการทั้งหมด	$6N-1$

จากตารางที่ 2.1 และ 2.2 จะเห็นได้ว่าการคำนวณหาค่าสัดส่วนความปลอดภัยสามารถทำได้โดยตั้งสมมติฐานเพิ่มเติม สมมติฐานที่นิยมใช้คือ ความสัมพันธ์ระหว่างแรง E และแรง X ความแตกต่างของวิธีย่อยต่างๆ จะขึ้นอยู่กับสมมติฐานข้อนี้ และขึ้นอยู่กับสมการสถิติศาสตร์ที่จะใช้ ค่าสัดส่วนความปลอดภัยที่หาได้มีสองค่า คือสัดส่วนความปลอดภัยที่ได้จากสมการสมดุลแรง และสัดส่วนความปลอดภัยที่ได้จากสมการสมดุลโมเมนต์

สมการค่าสัดส่วนความปลอดภัย

เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.1) และสมการแรงเฉือนของดิน ให้เป็นไปข้อสมมติฐาน ที่ว่า ความสัมพันธ์ค่าสัดส่วนความปลอดภัยในส่วนของความเชื่อมแน่น (Cohesive component) และค่าสัดส่วนความปลอดภัยในส่วน of แรงเสียดทาน (Frictional component) มีค่าเท่ากันดังสมการที่ (2.9)

$$S_m = \frac{s\beta}{FS} = \frac{c'\beta + (N - u\beta)\tan(\phi')}{FS} \quad (2.9)$$

สมการค่าสัดส่วนความปลอดภัย จากสมการสมดุลโมเมนต์

พิจารณารูปที่ 2.10 ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดพื้นผิววิบัติ ผลรวมของโมเมนต์ในทุุกๆชิ้นส่วน โดยให้โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกาเป็นบวก แสดงดังสมการ (2.10)

$$\Sigma W \cdot x - \Sigma S_m R - \Sigma N \cdot f + \Sigma kW \cdot e \pm \Sigma D \cdot d = 0 \quad (2.10)$$

ตัวเลขสัดส่วนความปลอดภัยหาได้โดยการแทนสมการที่ (2.9) ลงในสมการ (2.10) และจัดรูปแบบค่าสัดส่วนความปลอดภัยจากสมการสมดุลโมเมนต์ดังสมการที่ (2.11)

$$FS_m = \frac{\Sigma(c'\beta R + (N - u\beta)R\tan(\phi'))}{\Sigma W \cdot x - \Sigma N \cdot f + \Sigma kW \cdot e \pm \Sigma D \cdot d} \quad (2.11)$$

สมการค่าสัดส่วนความปลอดภัยจากสมการสมดุลแรง

พิจารณารูปที่ 2.10 ผลรวมของแรงแนวราบในทุุกๆชิ้นส่วน แสดงในสมการ (2.12)

$$\Sigma(E_L - E_R) + \Sigma S_m \cdot \cos(\alpha) - \Sigma N \cdot \sin(\alpha) + \Sigma kW \pm \Sigma D \cdot \cos(\omega) = 0 \quad (2.12)$$

ตัวเลขสัดส่วนความปลอดภัยหาได้โดยการแทนสมการที่ (2.9) ลงในสมการ (2.12) และจัดรูปแบบค่าสัดส่วนความปลอดภัยจากสมการสมดุลแรงดังสมการที่ (2.13)

$$FS_f = \frac{\Sigma(c'\beta \cos(\alpha) + (N - u\beta)\tan(\phi')\cos(\alpha))}{\Sigma N \cdot \sin(\alpha) + \Sigma kW \pm D \cdot \cos(\omega)} \quad (2.13)$$

สมการของแรง N

พิจารณารูปที่ 2.10 ผลรวมของแรงในแนวดิ่งในชั้นส่วนย่อยแสดงได้ดังสมการ (2.14)

$$-W + (X_L - X_R) + N \cos(\alpha) + S_m \sin(\alpha) + D \cdot \sin(\omega) = 0 \quad (2.14)$$

สมการของแรง N สามารถหาได้โดยแทนสมการที่ (2.9) ลงในสมการที่ (2.14) จะได้สมการที่ (2.15) ดังนี้

$$N = \frac{W + (X_R - X_L) + D \cdot \sin(\omega) + \frac{\beta \sin(\alpha)(c' - u \tan(\phi'))}{FS}}{\cos(\alpha) - \frac{\sin(\alpha \tan(\phi'))}{FS}} \quad (2.15)$$

สมการของแรงลัพท์ระหว่างชั้นส่วนดิน

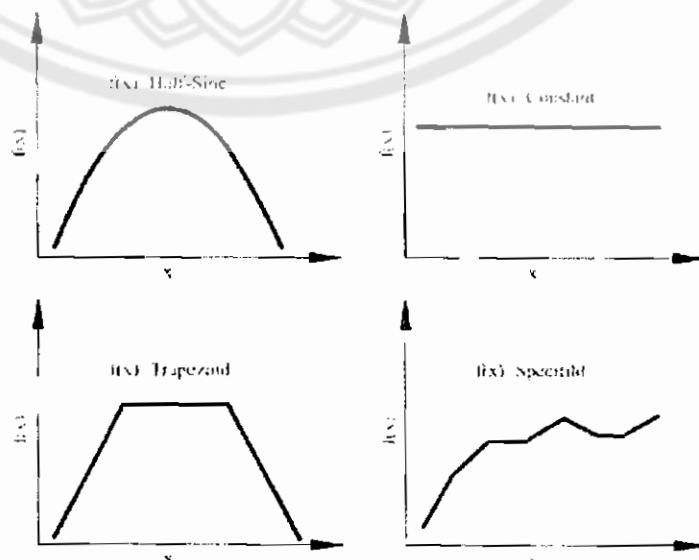
ความสัมพันธ์ของแรง X และแรง E เป็นสิ่งที่ต้องสมมติขึ้นเพื่อให้สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของความลาดและคำนวณค่าสัดส่วนความปลอดภัยได้ ดังที่กล่าวมาแล้วความสัมพันธ์ของแรง X และแรง E จะสมมติให้อยู่ในรูปฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์และตัวคูณเลขจำนวนจริง ดังแสดงในสมการที่ (2.16) คือ

$$X = \lambda \cdot f(x) \cdot E \quad (2.16)$$

โดย λ = ตัวคูณเลขจำนวนจริง

$f(x)$ = ฟังก์ชันคณิตศาสตร์ที่กำหนดความชันของแรงลัพท์ระหว่างแรง X และแรง E

รูปที่ 2.11 แสดงลักษณะของฟังก์ชัน $f(x)$ บางรูปแบบที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาดด้วยวิธี Morgenstern & Price's (1965) ที่มา



รูปที่ 2.11 แสดงลักษณะของฟังก์ชัน $f(x)$ บางรูปแบบที่นิยมใช้ในทางปฏิบัติ เมื่อพิจารณา รูปที่ 2.10 ผลรวมแรงของลักษณะแนวราบของชั้นส่วนดินหนึ่งๆแสดงได้ดังสมการที่ (2.17) คือ

$$(E_L - E_R) - N \sin \alpha + S_w \cos \alpha - kW + D \cos \omega = 0 \quad (2.17)$$

เมื่อจัดรูปให้สมการ (2.17) สอดคล้องกับสมการอื่นๆจึงแทนสมการที่ (2.9) ลงในสมการที่ (2.17) จะได้สมการที่ (2.18) ดังนี้

$$E_R = E_L - kW + D \cos \omega + N \sin \alpha + \frac{\cos \alpha (c' \beta + (N - u \beta) \tan \phi)}{FS} \quad (2.18)$$

สมการที่กล่าวมาในบทนี้เป็นสมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของความลาด ด้วยวิธี Slice Method สำหรับวิธีย่อยใดๆก็ล้วนแล้วแต่ใช้สมการพื้นฐานเหล่านี้ในการคำนวณทั้งสิ้น ประโยชน์และความสำคัญของสมการจะแสดงลำดับการใช้งานดังนี้

สมการแรง N หรือสมการที่ (2.15) เป็นสมการแรกที่ต้องทำการคำนวณ โดยรูปของสมการนี้จะแปรเปลี่ยนไปตามสมมติฐานของแรงกัณฑ์ด้านข้างของชั้นส่วนย่อย และหรือแปรเปลี่ยนไปตามสมมติฐานระหว่างแรง X และแรง E

สมการของแรงด้านข้างระหว่างชั้นส่วนดิน หรือสมการที่ (2.16) และสมการที่ (2.18) ประโยชน์ของทั้งสองสมการนี้มีไว้เพื่อช่วยแปรรูปสมการที่ (2.15) โดยจัดให้ทั้งสองสมการเป็นไปตามข้อสมมติฐานของแรงด้านข้างชั้นส่วนย่อย และตามสมมติฐานระหว่างแรง X และแรง E จากนั้นจึงไปแทนในสมการที่ (2.15) เพื่อกำจัดพจน์ $(X_R - X_L)$

สมการค่าสัดส่วนความปลอดภัยจากสมดุลโมเมนต์หรือสมการที่ (2.11) เมื่อคำนวณค่าแรง N ของทุกๆชั้นส่วนดินแล้วจึงสามารถคำนวณค่าสัดส่วนความปลอดภัยจากสมดุลโมเมนต์

สมการค่าสัดส่วนความปลอดภัยจากสมดุลแรงหรือสมการที่ (2.13) เมื่อคำนวณค่าแรง N ของทุกๆชั้นส่วนดินแล้วจึงสามารถคำนวณค่าสัดส่วนความปลอดภัยจากสมดุลแรง

ในหัวข้อถัดไปจะแสดงขั้นตอนและวิธีการคำนวณของวิธีย่อยต่างๆโดยจะอธิบายถึงสมมติฐานเบื้องต้น รูปสมการของแรง N ที่แตกต่างกันไปในแต่ละวิธีย่อย

Fellenius

วิธี Fellenius (1927) หรือวิธี Ordinary Method of Slice (1936) หรือ Swedish's Method เสนอโดย Fellenius (1927) ในปี ค.ศ. 1927 เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดสำหรับวิเคราะห์เสถียรภาพของความลาด โดยค่าตัดส่วนปลอดภัยได้จากสมการสมดุลโมเมนต์ และตั้งสมมติฐานว่า ทิศทางแรงลัพธ์ของแรงด้านข้างระหว่างในชั้นดินจะขนานกับฐานของชั้นดินดังแสดงในรูป 2.12 โดยทั่วไปจะสมมติให้พื้นผิววิกฤติเป็นส่วนโค้งของวงกลม อย่างไรก็ตามพื้นผิววิกฤติในรูปแบบอื่นก็สามารถคำนวณได้

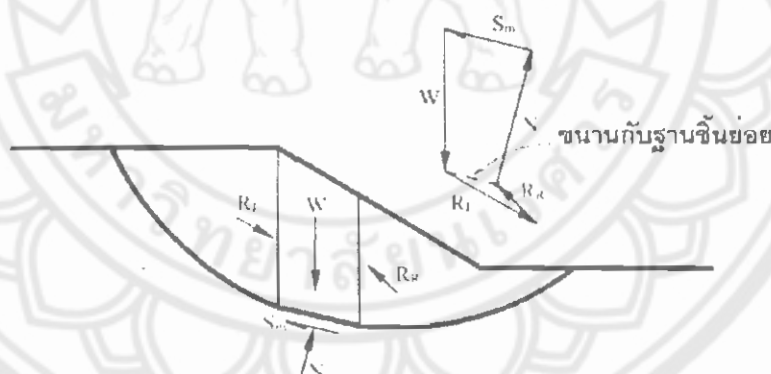
เมื่อพิจารณาสมดุลของแรงในทิศทางตั้งฉากกับฐานของชั้นดิน จะสามารถหาสมการของแรง N ได้ดังนี้

$$N = W \cos \alpha - kW \sin \alpha + D \cos(\alpha + \omega + 90) \quad (2.19)$$

เมื่อได้ค่าของแรง N แล้วขั้นต่อไป คือ นำค่า N ไปแทนในสมการค่าตัดส่วนปลอดภัยจากสมดุลโมเมนต์หรือสมการที่ 2.17

รูป 2.12 สมมติฐานทิศทางแรงลัพธ์ของแรงด้านข้างระหว่างในชั้นดินจะขนานกับฐานของชั้นดินในวิธี Fellenius (1927)

ที่มา ปราโมทย์ จินเอา (2544)



Bishop's Simplified Method (1955)

วิธีนี้เสนอโดย Bishop ในปี ค.ศ. 1955 โดยทั่วไปจะสมมติให้พื้นผิววิกฤติเป็นส่วนโค้งวงกลม แต่พื้นผิววิกฤติในรูปแบบอื่นก็สามารถคำนวณได้ ค่าตัดส่วนปลอดภัยหาได้จากสมการสมดุลโมเมนต์ ข้อสมมติของวิธีนี้คือ แรงลัพธ์ด้านข้างระหว่างชั้นดินมีเพียงแรง E หรือ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ แรงเฉือนด้านข้างระหว่างชั้นดิน $X = 0$ เมื่อพิจารณาสมการที่ 2.15 จะสามารถแปรรูปสมการของแรง N สำหรับวิธี Bishop's Simplified ได้ดังสมการที่ 2.20

$$N = \frac{W + D \sin \omega + \frac{\beta \sin(\alpha)(c' - u \tan(\phi'))}{FS}}{\cos(\alpha) - \frac{\sin(\alpha) \tan(\phi')}{FS}} \quad (2.20)$$

สังเกตได้ว่าในสมการที่ 2.20 ยังมีตัวแปรไม่ทราบค่าอยู่คือ FS หรือค่าสัดส่วนปลอดภัย ซึ่งจำเป็นต้องทำการสมมติค่าตัวเลขบางตัวขึ้นมาเพื่อให้คำนวณได้ เมื่อได้ค่าแรง N จากการสมมติ FS แล้ว ขั้นตอนต่อไป คือ นำค่า N ไปแทนในสมการค่าสัดส่วนปลอดภัยจากสมการสมมูลโมเมนต์ หรือสมการที่ 2.11 คำตอบจะถูกต้องเมื่อ ค่า FS ที่สมมติไว้เริ่มต้น มีค่าเท่ากับสัดส่วนปลอดภัยที่ได้จากสมการสมมูลโมเมนต์

Spencer's Method (1967)

วิธีนี้นำเสนอโดย Spencer ในปี ค.ศ. 1967 โดยในขณะนั้นใช้เพื่อวิเคราะห์พื้นผิวการวิบัติเป็นส่วนโค้งของวงกลมแต่ต่อมาได้นำมาวิเคราะห์รูปแบบการวิบัติอื่นๆด้วย ค่าสัดส่วนปลอดภัยได้จากสมการสมมูลโมเมนต์และสมการสมมูลแรง สมมติฐานของวิธีนี้คือความชันของแรงลัพธ์ของแรง X และแรง E มีค่าเท่ากันในทุกๆชั้นตั้ง จากสมการที่ 2.16 เมื่อค่า $f(x) = 1$ จะได้สมการความสัมพันธ์ของแรง x และ E ดังนี้

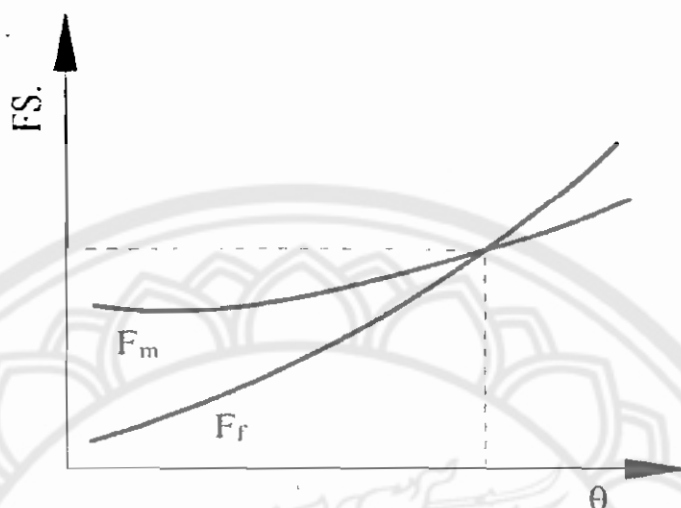
$$X/E = \tan \theta \quad (2.21)$$

สมการ 2.15 สามารถแปรรูปให้สอดคล้องกับสมการที่ 2.21 ได้ดังนี้

$$N = \frac{W + (E_R - E_L) \tan \theta + D \sin(\omega) + \frac{\beta \sin(\alpha)(c' - u \tan(\phi'))}{FS}}{\cos(\alpha) - \frac{\sin(\alpha) \tan(\phi')}{FS}} \quad (2.22)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 2.22 พจน์ E_R สมการแทนได้โดยสมการที่ 2.18 ดังนั้น จึงสามารถหาค่าแรง N ได้ โดยจำเป็นต้องสมมติค่า θ และ FS ขึ้นมาก่อนจากนั้นจึงนำไปแทนในสมการที่ 2.11 และสมการที่ 2.13 โดยขั้นตอนทั่วไปต้องสมมติ θ ก่อน จากนั้นจึงสมมติ FS ซึ่งจะทำได้ค่า F_f และ F_m ซึ่งค่าสมมติ θ ที่เหมาะสมจะทำให้ได้ค่า F_f และ ค่า F_m เท่ากันดังรูปที่ 2.13

รูปที่ 2.13 ค่าความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความปลอดภัยและค่า θ ใน
การวิเคราะห์วิธี Spencer's Method (1967)
ที่มา ปราโมทย์ ชินเฮา (2544)



2.11 Morgenstern & Price's Method (1965)

วิธีนี้เสนอโดย Morgenstern และ Price ในปี ค.ศ. 1965 โดยสมมติฐานว่าแรงที่เกิดขึ้นบนระนาบวิบัติจะต้องต่อเนื่องกันเป็นอย่างดี หรืออาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่าดินตลอดพื้นผิววิบัติจะต้องเป็นวัสดุที่เปลี่ยนแปลงต่อเนื่องกันเป็นอย่างดี สมมติฐานของแรงลัพธ์ของชั้นดินแนวดิ่งคือ ความชันของแรงลัพธ์ของแรงต้านข้างของชั้นย่อยแปรผันไปตามฟังก์ชันที่กำหนดให้ล่วงหน้า ซึ่งเป็นฟังก์ชันคณิตศาสตร์ใดๆ โดยสามารถแสดงได้ดังสมการ 2.23

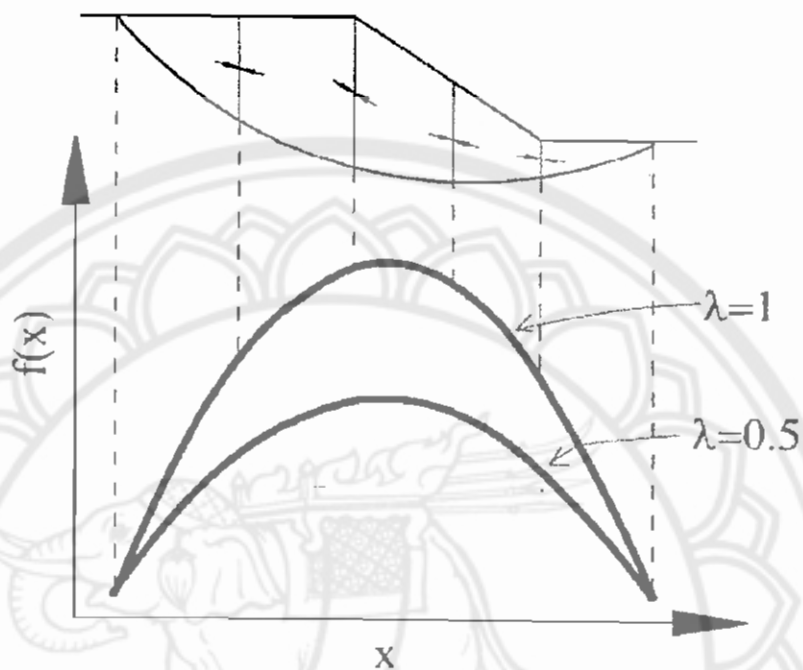
$$X: E = \lambda f(x) \quad (2.23)$$

สมการที่ (2.15) สามารถแปรรูปให้สอดคล้องกับสมการที่ (2.23) ได้ดังนี้

$$N = \frac{W + (E_R \lambda f(x) - E_L \lambda f(x)) + \sin(\omega) + \frac{\beta \sin(\alpha)(c' - u \tan(\phi'))}{FS}}{\cos(\alpha) - \frac{\sin(\alpha) \tan(\phi')}{FS}} \quad (2.24)$$

พิจารณาสมการที่ 2.22 พจน์ E_R สามารถแทนได้โดยสมการที่ 2.18 ดังนั้นจึงสามารถหาค่าแรงของแรง N ได้ โดยจำเป็นต้องสมมติค่า λ และค่า FS จากนั้นจึงนำไปแทนในสมการที่ 2.11 และสมการที่ 2.13 โดยขั้นตอนทั่วไปต้องสมมติ λ ก่อน จากนั้นจึงสมมติ FS ซึ่งจะทำได้ค่า F_r และ F_m ซึ่งค่าสมมติ λ ที่เหมาะสมจะทำให้ได้ค่า F_r และ F_m เท่ากัน รูปที่ 2.11 แสดงตัวอย่างค่าความชัน ถ้าฟังก์ชัน และค่า λ สำหรับวิเคราะห์ด้วยวิธี Morgenstern & Price

รูปที่ 2.14 ค่าความชัน ค่าฟังก์ชัน และค่า λ สำหรับวิเคราะห์ด้วยวิธี Morgenstern & Price
ที่มา ปราโมทย์ ชินเอา (2544)



2.5 หลักการพื้นฐานของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

2.5.1 นิยามของไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite Element)

วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite Element) เริ่มจากการสมมติสมการที่นำมาพิจารณา ซึ่งเป็นสมการต่อเนื่อง สามารถที่จะกำหนดความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปของอนุกรม (Series) โดยจำนวนของอิลิเมนต์ (Element) จะถูกแบ่งเป็นช่วงๆ ซึ่งจำนวนของอิลิเมนต์ (Element) ที่นำมาต่อกันจนมีจำนวนมากที่เรียกว่า จำนวนอนันต์ (Infinity) เพื่อให้ได้คำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง

- การกำหนดช่วงของฟังก์ชัน จะถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ เรียกว่า อิลิเมนต์ (Element)
- จุดที่กำหนดตำแหน่ง ของอิลิเมนต์(Element)เรียกว่าจุดขั้ว (Node)
- โดยที่ฟังก์ชันที่ใช้ควบคุมตำแหน่งของจุดขั้ว (Node) คือ เอกซ์พลิตฟังก์ชัน (Expilcit

Function)

ซึ่งตัวแปรต่างๆของจุดขั้วจะเป็นตัวที่แสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง อิลิเมนต์ (Element) ตัวแปรของจุดขั้วจะมีการอ้างอิงถึง ค่าองศาเสรี (Degrees of freedom) ในเทอมของตัวแปรจะประยุกต์กับการพิจารณาค่าความเค้น ซึ่งจะอยู่ในเทอมของตัวแปรของโหนดที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปไปของโครงสร้าง อย่างไรก็ตามจะได้ว่าเป็นการพิจารณาเพื่อหาความสัมพันธ์อะไรก็ตามก็มักจะเขียนอยู่ในรูปตัวแปรของโหนด

1. หลักการเชื่อมโยงจุด ในสมการ 2 มิติ และ 3 มิติ จะต้องการความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันการประมาณค่า (Interpolation) ซึ่งจะออกมาในเทอมของค่าจุดขั้ว โดยฟังก์ชันประมาณค่าจะอ้างอิงมาจาก สมการของรูปร่าง (Shape Functions)สำหรับชิ้นส่วนย่อย(Element)ที่อยู่ในระบบการกำหนดตำแหน่ง X, Y สามารถหาการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งได้จากสมการ

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot d_i \quad (2.25)$$

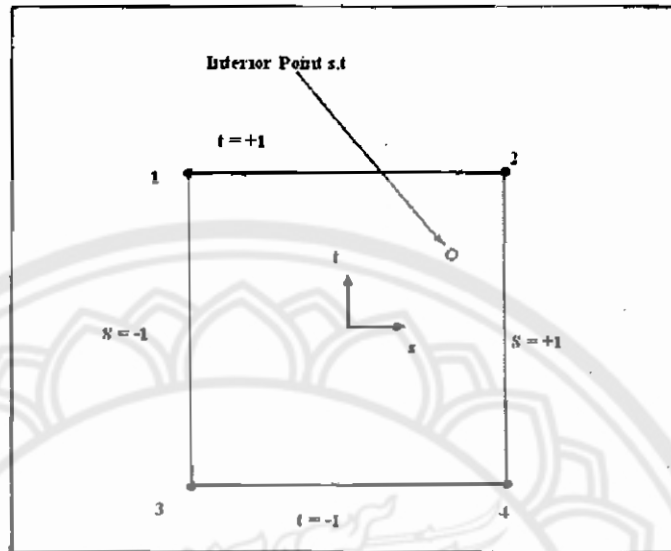
เมื่อ ระยะทาง $d(x, y)$ = การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอ้างอิงกับตำแหน่ง โกลบอล (Global)

d_i = ระยะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของจุดขั้ว (Node)

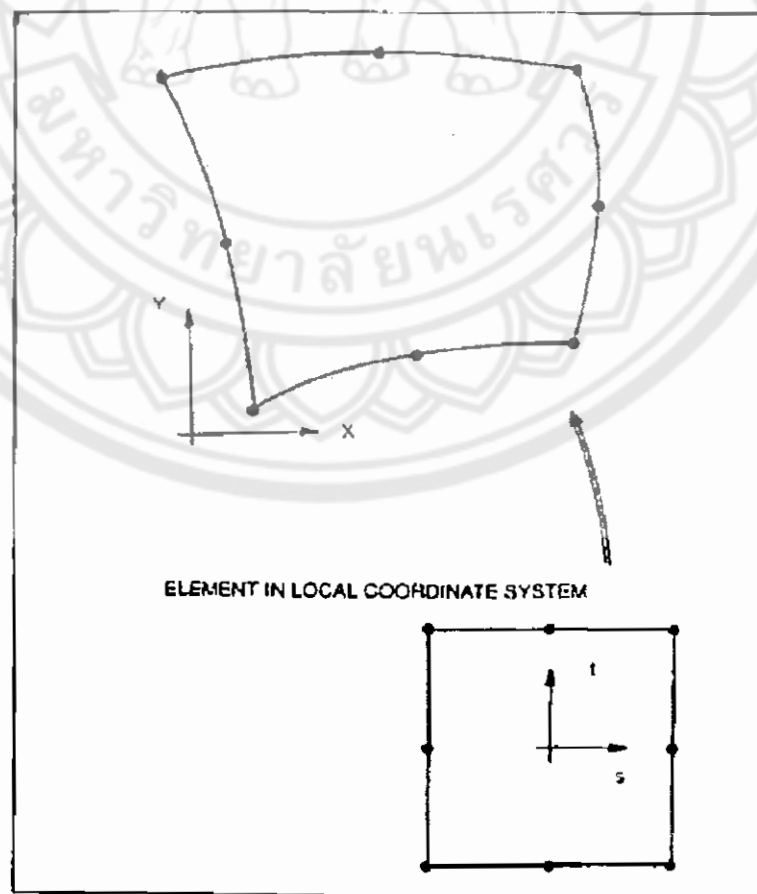
$N_i(x, y)$ = ฟังก์ชันรูปร่างของจุดขั้วและพิกัด x,y

ในทางปฏิบัติของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ การสร้างตำแหน่งจะไม่มีที่เหลื่อมจัดรัศที่แท้จริงหรือรูปตามเหลี่ยมที่แท้จริง ทั้งนี้เนื่องจากการปรับปรุงชิ้นส่วนย่อยให้เข้ากับรูปร่างของปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ จึงต้องพยายาม หาสมการที่จะครอบคลุมทุกๆลักษณะ ระบบตำแหน่งอ้างอิงที่อิลิเมนต์ (Local Coordinate System) จะแสดงให้เห็นรูปที่ 2.15 แต่ในท้ายที่สุดก็สามารถเขียนตำแหน่งให้อ้างอิงที่ตำแหน่งรวม (Global Coordinate System) ดังภาพที่ 2.16

รูปที่ 2.15 แสดงรูปอ้างอิงตำแหน่งที่โหนด
ที่มา ศุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี (2548)



รูปที่ 2.16 แสดงภาพตำแหน่งที่อ้างอิงที่ถูกรวม
ที่มา ศุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี (2548)





จากทั้งสองลักษณะไม่ว่า 2 มิติ หรือ 3 มิติสามารถที่จะกำหนดโครงร่างได้โดยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือ ปริซึม ที่สำคัญคือหากมีการกำหนดจุดข้อในชั้นส่วนย่อย จะต้องใช้สมการเพื่อเขียนให้อยู่ในรูปของตำแหน่งรวม(Global Coordinate) ได้

$$N(s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(s,t) \cdot x_j \quad (2.26)$$

เมื่อ $X(s,t)$ = ตำแหน่งอ้างอิงที่จุด s,t
 N = จำนวนของจุดข้อ (Node)
 $N_i(s,t)$ = ฟังก์ชันโครงร่างของจุดข้อใดๆ
 x_j = ตำแหน่ง X ของจุดข้อใดๆ

และในทำนองเดียวกันการกำหนดตำแหน่ง y คือ

$$Y(s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(s,t) \cdot y_i \quad (2.27)$$

การกำหนดการเชื่อมโยงของอีลิเมนต์ (Element) จะใช้สมการเดียวกันเพื่อที่จะใช้สร้างโครงร่างให้อยู่ในตัวแปรของจุดข้อ (Node) เช่น

$$N'(s,t) = N(s,t) \quad (2.28)$$

3. การเชื่อมโยงฟังก์ชันรูปร่าง สำหรับระบบสองมิติ มุมของอีลิเมนต์ (Element) ที่เป็นจุดข้อดังแสดงในรูปที่ 2.17 โดยการเชื่อมโยงสามารถใช้ความสัมพันธ์

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-S)(1-t) \quad (2.29)$$

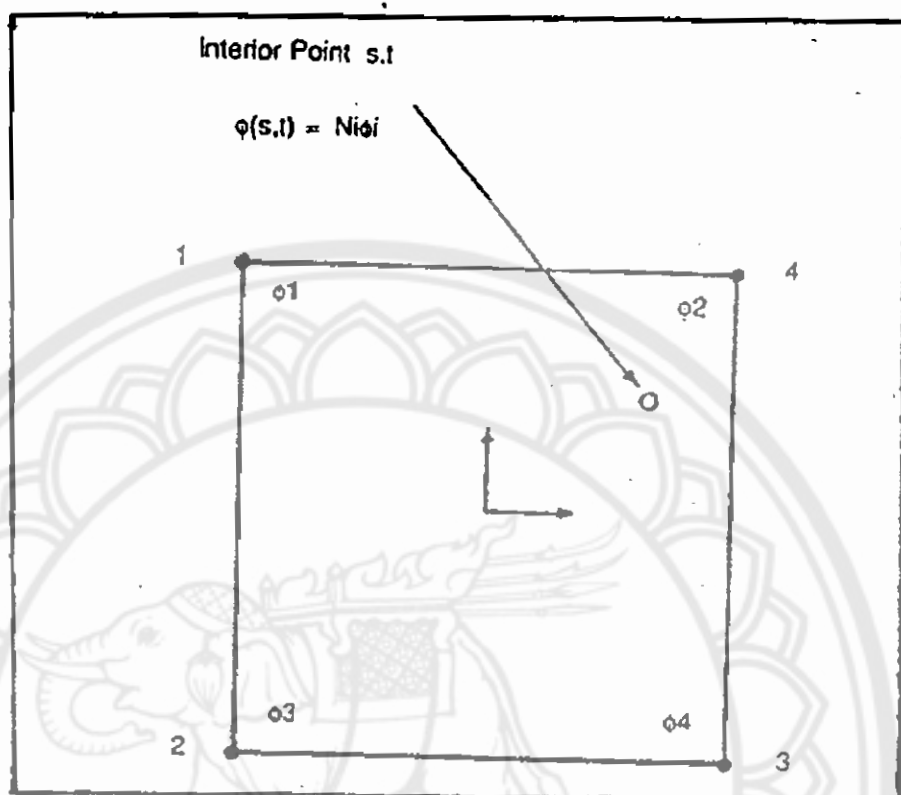
$$N_2 = \frac{1}{4}(1-S)(1-t) \quad (2.30)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-S)(1-t) \quad (2.31)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-S)(1-t) \quad (2.32)$$

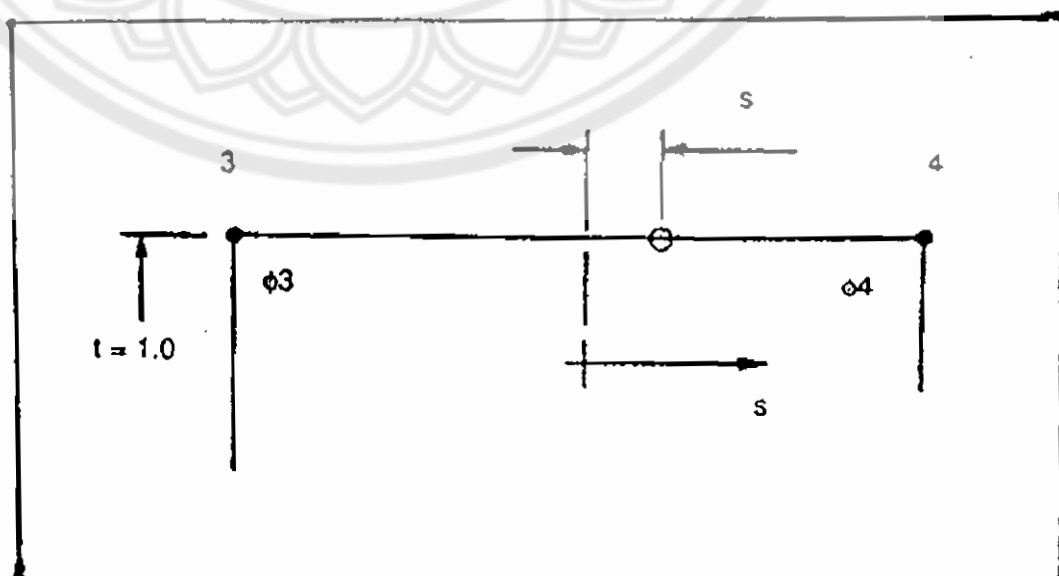
รูปที่ 2.17 แสดงชิ้นส่วนย่อยในระบบ 2 มิติ

ที่มา สุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี (2548)



รูปที่ 2.18 การประมาณค่าในทิศทาง

ที่มา สุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี (2548)



โดยทั่วๆ ไปจะไม่สนใจใน ฟังก์ชันรูปร่าง ทั้งหมดคือฟังก์ชันรูปร่างหลายเทอม (Linear Polynomial Functions) ที่อาศัยค่าของจุดขั้วที่ตำแหน่งมุมของอีลิเมนต์ (Element) ซึ่งสามารถที่จะแสดงความสัมพันธ์ของทิศทาง s ตลอดชิ้นส่วนย่อย ดังรูปที่ 2.18 ให้ค่า $t = 1$ ระหว่างจุดขั้ว 3 และจุดขั้วที่ 4 จะทำให้ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ได้เป็น

$$N_3 = \frac{1}{2}(1 + S) \quad (2.33)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 + S) \quad (2.34)$$

4. ความเค้น , ความเครียดและสมการความแข็งแรง (Stress, Strain and Stiffness Formulation) จากอีลิเมนต์ (Element) ที่อยู่ในระบบ 2 มิติ ค่าความเครียด (Strain) บนจุดใดๆที่เกิดในอีลิเมนต์ (Element) โดยเวกเตอร์ (Vector) ของความเครียด (Strain Vector)

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_x = \text{ความเครียดในทิศทางของแกน } x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \text{ความเครียดในทิศทางของแกน } y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \text{ความเครียดเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Strain) ในระนาบ } x - y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

ฟังก์ชันรูปร่างที่ได้มาจากสมการดิฟ (Derivatives) ที่พิจารณา ถึงการเคลื่อนที่ของจุดขั้ว (Node Displacement)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^n N_i u_i \right] \quad (2.36)$$

ความเครียดในทิศทาง y และความเครียดเนื่องจากแรงเฉือน สามารถจะเขียนแบบวิธีจาก ความเครียดในทิศทาง x

ในการคำนวณค่าความเครียดสามารถแสดงในรูปของเมตริกได้

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} dN_1/dx \dots dN_n/dx & 00 \dots 00 \\ 000 \dots 00 & dN_1/dy \dots dN_n/dy \\ dN_1/dy \dots dN_n/dy & dN_1/dx \dots dN_n/dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

เมตริกของฟังก์ชันรูปร่าง และอ้างอิงที่จุดรวม คือเมตริกแล้วมีการอ้างอิงถึงเมตริกของระยะการเคลื่อน หรือ อาจจะเขียนได้ว่า

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (2.38)$$

ความเค้น(Stress) และความเครียด (Strain) สามารถที่จะแสดงความสัมพันธ์จากเมตริกยืดหยุ่น (Elastic Matrix)[D]

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.39)$$

จากระบบสองมิติ ระนาบความเค้น (Plane Stress) และวัสดุที่มีคุณสมบัติของวัสดุที่มีค่าเท่ากันทุกทิศทาง (Isotropic Materials) สามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกยืดหยุ่น (Elasticity Matrix)

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\text{หรือ } [D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & 0 \\ \mu/(1-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2(1-\mu) \end{bmatrix}$$

จะได้เมตริกความเค้น

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (2.41)$$

เมตริกความแข็งแรงของระบบสองมิติจะมีค่าเท่ากับ การอินทิเกรตผลคูณของเมตริก $[B]^T$ เมตริก $[D]$ และเมตริก $[B]$

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] \, dx dy \quad (2.42)$$

เมื่อ $[K]$ คือเมตริกความแข็งแรงในอีลิเมนต์ (Element) และความสัมพันธ์ระหว่างเมตริกความแข็งแรง, การประยุกต์แรง, และการเคลื่อนที่ของจุดข้อ

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (2.43)$$

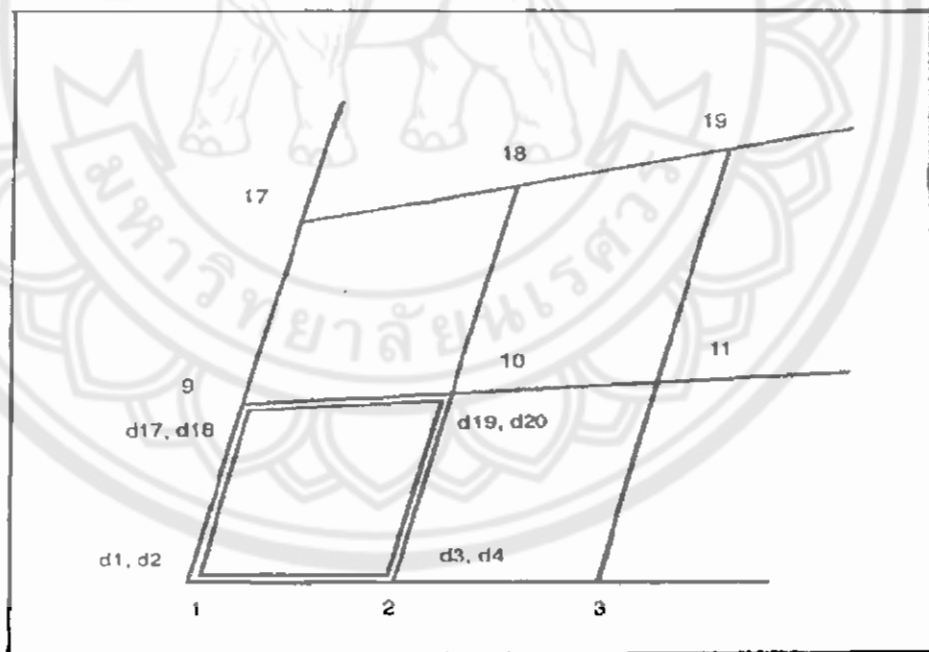
5. สมการของการรวมอีลิเมนต์ และผลลัพธ์ (Element Equation Assembly and Solution) มีสองวิธีที่นิยมใช้ทั่วไปในการรวมชิ้นส่วนย่อยและ หาค่าผลลัพธ์ของเมตริก

5.1 สมการแบบแบนด์ (Banded Equation) จะเป็นวิธีการรวมเมตริกความแข็งของแต่ละอีลิเมนต์ (Element) ลงบนเมตริกแข็งรวมที่อ้างอิงที่ถูกรวม (Global Stiffness Matrix)

ชิ้นส่วนต่างๆจะมีการกำหนดค่าองศาเสรี (Degree of Freedom) เช่นในรูปที่ 2.19 ที่จุดข้อ 1, 2, 10, 9 (องศาเสรี 1, 2, 3, 4, 19, 29, 17, 18) ค่าสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 1 หลักที่ 7 ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ ระหว่างแรงที่ตำแหน่งองศาเสรีที่ 1 และ ระยะการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง องศาเสรีที่ 7

ในการอ้างอิงที่ระบบโกลบอล (Global System) ความสัมพันธ์ของจุดข้อที่ 1 ในทิศทางแกน x และจุดข้อ 9 ในทิศทาง x (องศาเสรีที่ 17) โดยสัมประสิทธิ์จะเป็นตัวที่บอกถึงการรวมเมตริกในแถวที่ 1 หลักที่ 17

รูปที่ 2.19 แสดงตำแหน่งของจุดข้อ
ที่มา ศุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี (2548)



$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,19} & k_{1,20} & k_{1,17} & k_{1,18} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,19} & k_{2,20} & k_{2,17} & k_{2,18} \\ \dots & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \\ k_{18,1} & k_{18,2} & k_{18,3} & k_{18,4} & k_{18,19} & k_{18,20} & k_{18,17} & k_{18,18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ \dots \\ d_{16} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ \dots \\ F_{16} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

เมตริกความแข็งแรงจะมีสองคุณสมบัติที่มีความสำคัญ ต่อขั้นตอนของการหาค่าผลลัพธ์ ซึ่งได้แก่

1. เมตริกสมมาตรในแนวทแยง เช่น $k_{1,17} = k_{17,1}$
2. เมตริกที่ไม่มีค่าลบ (Positive Definite) เช่น ไม่มีสมาชิกในแนวทแยงที่มีค่าเป็นลบ และศูนย์ จากเมตริกเดิม และลดรูปลงเป็น

ในการหาส่วนกลับของ เมตริกของเมตริกความแข็งแรง จะทำได้ง่ายเมื่อลดรูปของเมตริก โดยทำให้สมาชิกได้แนวทแยงมีค่าเป็นศูนย์ จากเมตริกเดิม

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & k_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

ระยะของการเคลื่อนตัวสามารถที่จะสังเกตได้จาก ระบบของสมการโดยทำจากสมการ ด้านล่างขึ้นไป (Back - Substitution) ซึ่งสมการท้ายสุดจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (Unknown) เพียงตัวเดียวจึงสามารถแก้ไขหาค่าได้เช่น

$$d_5 = F_5' / k_{55}' \quad (2.47)$$

บรรทัดที่สองนับจากบรรทัดล่างสุดจะมี 2 ตัวที่ไม่ทราบค่า (d_4, d_5) แต่ d_5 หาค่ามาแล้ว จากที่ผ่านมาจึงทำให้สามารถที่จะหาค่า d_4 ได้ทำลักษณะเดิมไล่จากล่างขึ้นไปด้านบนก็สามารถที่จะแก้หาค่า d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 ทั้งหมด

5.2 สมการของฟรอนต์ทอล (Frontal Equation) วิธีการนี้จะรวมเมตริกย่อยลงบนเมตริก รวม และแก้ไขหาค่าตัวแปรไปพร้อมๆกัน มันจึงมีผลดีต่อการประมวลผล เพราะจะไม่ต้องการ หน่วยความจำ (Memory) ในการคำนวณโดยจำนวนลูป (Loop) ของการประมวลผล จะเท่ากับ จำนวนของอีลิเมนต์ (Element) และ จะมีขั้นตอนของการตรวจสอบค่าองศาเสรี (Degree of Freedom) ตัวแปรที่สำคัญในการปรับปรุงรูปร่างจำลอง (Model) เพื่อแก้ไขโดยวิธีฟรอนต์ทอล คือ จำนวนของชิ้นส่วนย่อย ค่าตัวแปรจะมีค่าน้อยที่สุด ดังในความแตกต่างของจำนวนชิ้นส่วนย่อยใน รูปที่ 2.20

รูปที่ 2.20 แสดงความแตกต่างของจำนวนอีลิเมนต์
ที่มา สุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี (2548)

Efficient Element Numbering					
1	4	7	10	13	16
2	5	8	11	14	17
3	6	9	12	15	18

Less Efficient Element Numbering					
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

2.5.2 ชนิดของอีลิเมนต์ (Element Type)

ชนิดของชิ้นส่วนย่อย สามารถที่จะแบ่งออกเป็นกลุ่มๆ ได้เช่น 2มิติ, 3มิติ, คาน(Beam), และแผ่นบาง (Plate) หรือบางกรณีก็พิเศษนอกเหนือจากนี้ เช่น การหาค่าของสปริง, จุดศูนย์กลางของมวล, ชิ้นส่วนย่อยของแดมเปอร์ (Damper) เป็นต้น

2.5.2.1 อีลิเมนต์ที่อยู่ในระบบสองมิติ

ชิ้นส่วนย่อยที่อยู่ในระบบ สองมิติทั้งสองระนาบระนาบความเค้น, ระนาบความเครียด ระบบสองมิติจะใช้ได้ต่อเมื่อมีแรง และระยะทางการเคลื่อนที่ในแต่ละระนาบ โดยองศาเสรี (Degree of Freedom) ทั้งสองชนิดมีค่าเท่ากับ 2 ต่อจุดข้อ ซึ่งจะประกอบด้วยชิ้นส่วนที่เป็นสี่เหลี่ยม และชิ้นส่วนที่เป็นรูปสามเหลี่ยม ชิ้นส่วนที่สมมาตรกับแนวแกน (Axisymmetric Element) จะได้รูปร่างจำลองเทียบกับแกนกลาง เช่นงานที่เป็นถังความดัน

โดยชิ้นส่วนที่สมมาตรกับแนวแกน สามารถที่จะกำหนดเงื่อนไขได้แตกต่างจาก 2 มิติ เพราะทิศทางการเคลื่อนที่เมื่อเทียบกับแกนสมมาตรจะมีค่าเป็นศูนย์ ก็จะเหลือแต่เพียงการเคลื่อนที่ตามแนวแกน

2.5.2.2 อีลิเมนต์ที่อยู่ในระบบสามมิติ

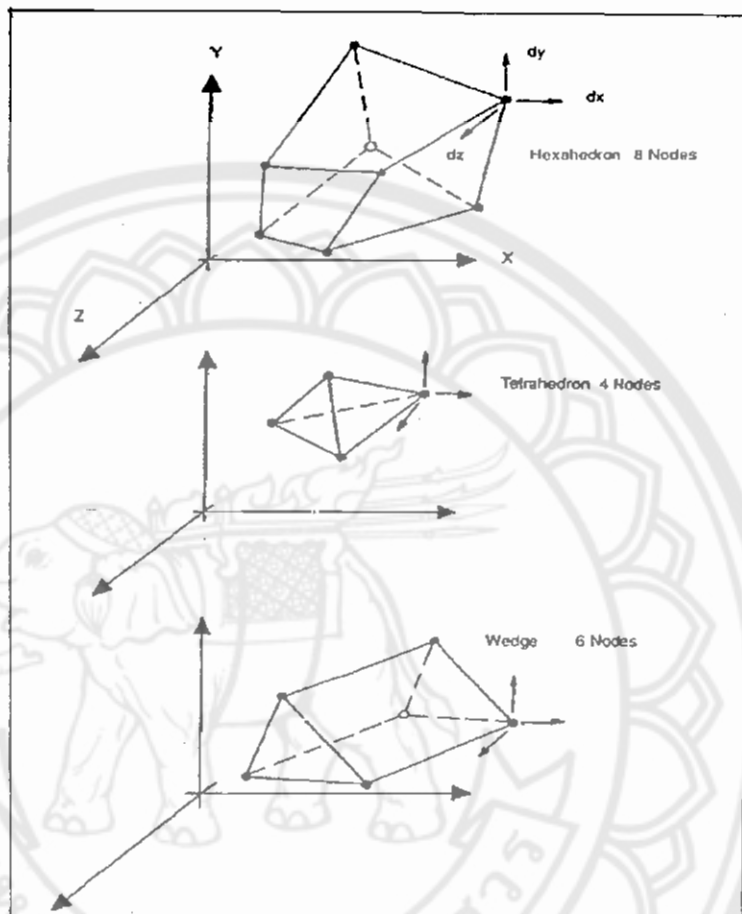
ชิ้นส่วนย่อยในระบบสามมิติจะมีทิศทางการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นจากระบบสองมิติโดยองศาเสรี (Degree of Freedom) จะมีค่าเท่ากับ 3 ต่อหนึ่งจุดข้อ และทิศทางการเคลื่อนที่ 3 แนวแกน คือ x,y และ z รูปร่างของอีลิเมนต์ (Element) ที่สร้างในระบบสามมิติคือ เตตราเฮดรอน (Tetrahedron), เวลจ์ (Wedge Shapes), และปริซึม 8 เหลี่ยม (Hexahedron) ดังแสดงในรูปที่ 2.21

2.5.2.3 อีลิเมนต์แบบคาน (Beam element)

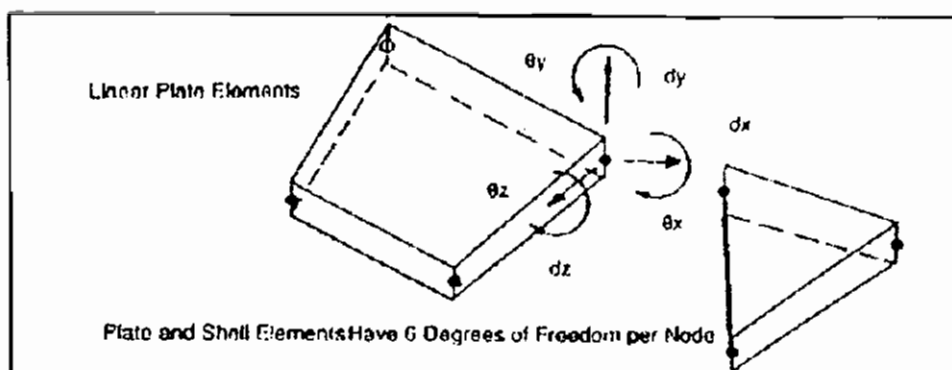
คานมีจุดข้อเพียงจุดเดียวที่ปลายคาน แต่จะมีองศาเสรีของการหมุน (Rotation Degree of Freedom) เพิ่มขึ้นเพื่อใช้ในการส่งผ่านโมเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 2.22 จะมีค่าองศาเสรีเท่ากับ 6 ต่อจุดข้อ ในกรณีเป็นการพิจารณาคานในระบบ 3 มิติ โมเมนต์อีกสามทิศทาง ในอีลิเมนต์แบบคานจะสมมติให้ตลอดทั้งหน้าตัดมีค่าเท่ากัน และค่าโมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia) มีค่าเท่ากันตลอดทั้งอีลิเมนต์

ชิ้นส่วนย่อยแบบนี้จะมีจำนวนองศาเสรี 6 ต่อจุดข้อดังแสดงในรูป มีลักษณะอีลิเมนต์แบบแผ่นบาง ที่มีจุดข้อเพียงจุดข้อเดียวในแนวคาน โดยจะถือว่าตลอดหน้าตัดมีค่าเท่ากันตลอด

รูปที่ 2.21 แสดงลักษณะของการกำหนดคิเลียนต์ของแต่ละลักษณะ
ที่มา ศุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี



รูปที่ 2.22 แสดงอีลิเมนต์แบบแผ่น
ที่มา ศุภชัย ตระกูลทรัพย์ทวี (2548)



เมตริกซ์ความยืดหยุ่น (Stiffness Matrix) จะเขียนอยู่ในรูป

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (2.48)$$

ระยะของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉากจะกำหนดด้วย W_i แล้วเขียนในรูปของเวกเตอร์ของความเครียด (Strain Vector)

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

โดยเมตริกซ์ของระยะการเคลื่อนที่ตัวจะประกอบจาก ระยะการเคลื่อนที่และการหมุนอีกสองแนวแกน

$$\{d\} = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \partial w / \partial y_i \\ \partial w / \partial x_i \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

เมตริกซ์ $[B]$ สามารถกำหนดจาก

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 [N_i]}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [N_i]}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 [N_i]}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

อีลาสติกเมตริกซ์ $[D]$ ของไอโซโทรปิก (Isotropic) กำหนดด้วย

$$[D] = \frac{Et^2}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

เมื่อ t เท่ากับความหนาของแผ่น

2.6 เปรียบเทียบข้อดีข้อด้อยการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาดวิธี **Equilibrium Equation** และวิธี **Finite Element** ในการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาด

2.6.1 ข้อดีข้อด้อยวิธี **Limit Equilibrium** ในการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาด

ข้อดีของวิธี **Limit Equilibrium**

- เป็นวิธีที่นิยมใช้และรู้จักโดยทั่วไปในปัจจุบัน
- ใช้เพียง Mohr-Coulomb Soil Parameters ในการวิเคราะห์ซึ่งเป็นคุณสมบัติดินที่สามารถทดสอบได้โดยตรงในห้องปฏิบัติการ
- วิเคราะห์ปัญหาชั้นดินที่ซับซ้อนได้
- ใช้เวลาในการคำนวณน้อย และมีขั้นตอนในการคำนวณง่าย ไม่ซับซ้อนมากนัก มีโปรแกรมคอมพิวเตอร์จำนวนมากให้เลือกใช้ในการวิเคราะห์

ข้อด้อยของวิธี **Limit Equilibrium**

- เนื่องจากต้องตั้งสมมติฐานเพิ่มเติมของแรงลัพธ์ระหว่างชั้นดินแนวดิ่ง เพื่อให้สามารถใช้สมการสมดุลโมเมนต์และสมการสมดุลแรงมาวิเคราะห์ปัญหาได้ ดังนั้นจึงไม่สามารถตรวจสอบความแม่นยำของค่าสัดส่วนปลอดภัยที่วิเคราะห์มาได้
- เมื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของความลาดที่มีโครงสร้างเสริม เช่น สมอยึด Sheet pile หรือ Geo-textile ยังมีข้อโต้แย้งถึงสมมติฐานที่ให้โครงสร้างดังกล่าวเป็นเสมือนแรงภายนอกซึ่งยังไม่ถูกต้องตามหลักทฤษฎี
- เป็นวิธีที่ไม่สามารถยืนยันความถูกต้องของการวิเคราะห์

2.6.2 ข้อดีข้อด้อยวิธี **Finite Element Method** ในการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาด

ข้อดีของ **Finite Element Method**

- ไม่มีข้อสมมติฐานเพิ่มเติมในการคำนวณทำให้ค่าที่วิเคราะห์ได้มีความถูกต้องและแม่นยำ
- การวิเคราะห์ด้วยวิธีนี้ สามารถที่จะคาดคะเนการเคลื่อนตัวของมวลดิน (Ground Movement) ด้วย
- พื้นที่วิเคราะห์ที่คำนวณไม่จำเป็นต้องสมมติล่วงหน้า

ข้อด้อยของ **Finite Element Method**

- ผู้ใช้ต้องมีความรู้และทักษะด้านการป้อนข้อมูลสำหรับวิเคราะห์ เช่น Mesh Generation หรือ Boundary Condition เป็นต้น
- จำเป็นต้องใช้พารามิเตอร์ของดินหลายตัว นอกจากพารามิเตอร์กำลังแรงเฉือนของแบบจำลอง Mohr-Coulomb เช่น Young's Modulus, Poisson's Ratio, Dilatation Angle หรืออื่นๆ พารามิเตอร์ของดินบางตัวทำการทดสอบในห้องปฏิบัติการและหาค่าได้ยาก