

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

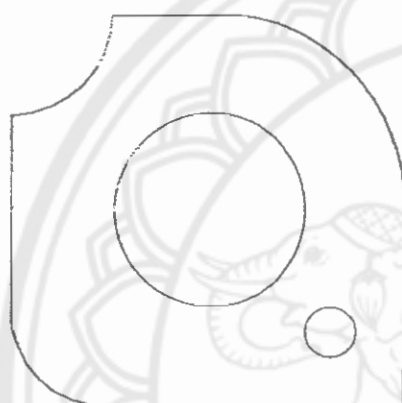
บทนำ

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีส่วนอย่างมากในการสร้างเสริมปรับปรุงความเป็นอยู่ของมนุษย์ให้ดียิ่งขึ้น ปรากฏการณ์ส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นรอบตัวสามารถอธิบายได้โดยกฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์และทำการประดิษฐ์ขึ้นมาในลักษณะของสมการต่างๆ ได้ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หรือในรูปแบบของสมการอินทิกรัล (integral equation) เป็นต้น ดังตัวอย่างเช่น การคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิบนเครื่องยนต์ของรถยนต์ อาจเริ่มมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายสถานะของความสมดุลในการถ่ายเทความร้อน [1] การคำนวณออกแบบโครงสร้างปีกเครื่องบินอาจเริ่มมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายสถานะของความสมดุลของโครงสร้างนั้นภายใต้แรงกดดันของอากาศ ในขณะที่การบิน [2] รวมไปถึงการทำนายทิศทางและความเร็วของกระแสลมจากพายุได้แม่นยำเพื่อที่จะออกข่าวเตือนประชาชนในพื้นที่ที่ได้ฝนจะเคลื่อนไหวยไปในการอพยพหนีก็อาจเริ่มมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายสถานะของความสมดุลของการไหล เป็นต้น

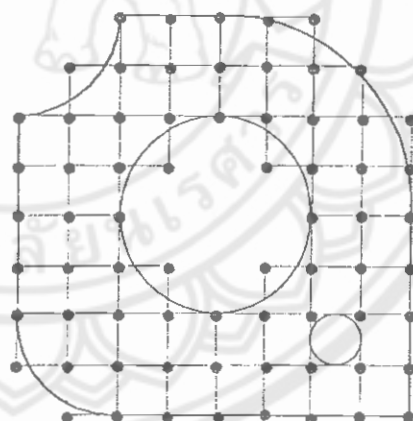
สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาต่างๆ นั้น ปกติจะประดิษฐ์ขึ้นมาได้โดยไม่ยากเลย หากแต่ว่าผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ที่ต้องการและจำเป็นต้องทำการหาออกมาโดยวิธีการวิเคราะห์ (analytical method) นั้นทำได้ยากลำบากมากหรืออาจจะหาไม่ได้เลยก็ได้ เหตุผลดังกล่าวก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ขึ้น วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate methods) นั้นมีหลายๆ วิธีการ วิธีการที่ได้รับความนิยมกันอย่างกว้างขวางในอดีตที่ผ่านมา คือ วิธีการผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method)

หลักการที่สำคัญของวิธีการผลต่างสืบเนื่องก็คือการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณ โดยเริ่มจากการเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการผลต่างสืบเนื่อง (system of difference equations) ข้อดีของวิธีการผลต่างสืบเนื่องนี้ก็คือ วิธีการดังกล่าวเป็นวิธีการที่ง่ายแก่การศึกษาและการทำความเข้าใจ รวมไปถึงความสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหานั้นๆ ส่วนข้อเสียของการใช้วิธีการผลต่างสืบเนื่องก็มีหลายประการ เช่น ความไม่สะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (application of boundary conditions) และที่สำคัญที่สุดก็คือความยากลำบากในการประยุกต์วิธีการนี้เพื่อใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อน ซึ่งการออกแบบสิ่งที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนในปัจจุบันนี้ ได้กลายเป็นสิ่งที่จำเป็นเพื่อการพัฒนาปรับปรุงคุณภาพสิ่งของนั้นๆ ให้ดียิ่งขึ้น

รูป 2.1 (ก) แสดงลักษณะของแผ่นโลหะอะลูมิเนียมลักษณะหนึ่งที่ใช้เสริมความแข็งแรงของโครงสร้างภายในปีกของเครื่องบิน แผ่นโลหะดังกล่าวประกอบด้วยขอบรอบนอกที่ประกอบด้วยขอบตรงและขอบโค้ง โดยภายในมีรูกลมสองขนาดในตำแหน่งที่ต่างกัน การวิเคราะห์หาการกระจายของความเค้น (stress distribution) บนแผ่นอะลูมิเนียมนี้ภายใต้แรงกระทำที่กำหนดให้โดยใช้วิธีการผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) จะเริ่มจากการแบ่งแผ่นอะลูมิเนียมนี้ออกเป็นช่องตารางสี่เหลี่ยมดังแสดงในรูป 2.1 (ข) โดยที่ตารางสี่เหลี่ยมเหล่านี้คือจุดต่อ (grid points) ตามหัวมุมของสี่เหลี่ยมต่างๆ และขนาดของปัญหาหรือจำนวนตัวไม่รู้ค่า (number of unknowns) จะขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดต่อนี้เอง



รูป 2.1 (ก) แผ่นอะลูมิเนียมที่ประกอบด้วยขอบโค้งและขอบตรง รวมทั้งรูกลมสองขนาดภายใน

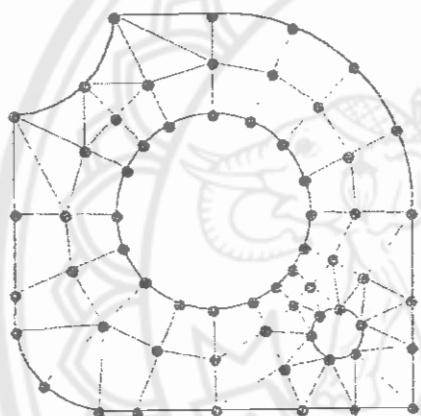


รูป 2.1 (ข) การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียมด้วยการใช้วิธีการผลต่างสืบเนื่อง

รูป 2.1 (ข) นี้ แสดงให้เห็นว่าตารางสี่เหลี่ยมที่ใช้ในวิธีการผลต่างสืบเนื่องไม่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงของแผ่นอะลูมิเนียมดังกล่าวได้โดยเที่ยงตรง หากใช้ขนาดตารางสี่เหลี่ยมให้มีขนาดเล็กลงซึ่งหมายถึงต้องเพิ่มจำนวนตารางสี่เหลี่ยมให้มากขึ้นก็จะสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงมากยิ่งขึ้น แต่ในขณะเดียวกัน จำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นจะทำให้จำนวนสมการผลต่างสืบเนื่องมากขึ้น

ด้วย และกระบวนการในการแก้ปัญหาจำเป็นต้องการหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์เพิ่มขึ้นรวมถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะสูงมากขึ้นตามไปด้วย

สาเหตุของความยากลำบากดังกล่าวมีส่วนก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณวิธีใหม่ที่เรียกว่า วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ที่นิยมเรียกด้วยคำย่อกันว่า FEM ซึ่งวิธีการนี้สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนเช่นใดก็ได้ โดยสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงเที่ยงตรงกว่าหลักการของวิธีการนี้ในขั้นต้นก็คล้ายกับวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม ก่อตัวคือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเนื้อที่หลายๆ ชิ้นที่เรียกว่าเอลิเมนต์ เช่น ในตัวอย่างของแผ่นอะลูมิเนียมเดิมนี้อาจแบ่งแผ่นอะลูมิเนียมออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดต่างๆ กัน โดยเอลิเมนต์ต่างๆนี้อาจอยู่ในรูปลักษณะของสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ ดังเช่นแสดงในรูป 2.1 (ก)



รูป 2.1 (ก) การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียม
ด้วยการใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

ผลประโยชน์สิ่งแรกที่เราเห็นได้จากรูป 2.1 (ก) เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยมที่แสดงในรูป 2.1 (ข) ก็คือ วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดต่างๆ กันที่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมของแผ่นอะลูมิเนียมได้เป็นอย่างดี ซึ่งหมายความว่าปัญหานี้จะถูกแก้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical method) ที่มีรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงดั้งเดิมมากที่สุด ดังนั้นค่าผลเฉลยโดยประมาณที่จะคำนวณออกมาได้จะมีความแม่นยำมากขึ้นตามไปด้วย

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร

ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ คำเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ของปัญหาดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าของตัวแปรต่างๆ กันตามตำแหน่งต่างๆ บนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ คำเฉลยแม่นยำตรงจะประกอบด้วยค่าต่างๆ ทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่จะทำการหาค่าแม่นยำตรงที่ประกอบด้วยค่าต่างๆ จำนวนมากมายเช่นนี้ ซึ่งสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติจะทำได้ หลักการก็คือทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ (finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ (elements) ซึ่งมีขนาดต่างๆ กัน ดังเช่นแสดงในตัวอย่างของแผ่นอะลูมิเนียมในรูป 2.1 (ก)

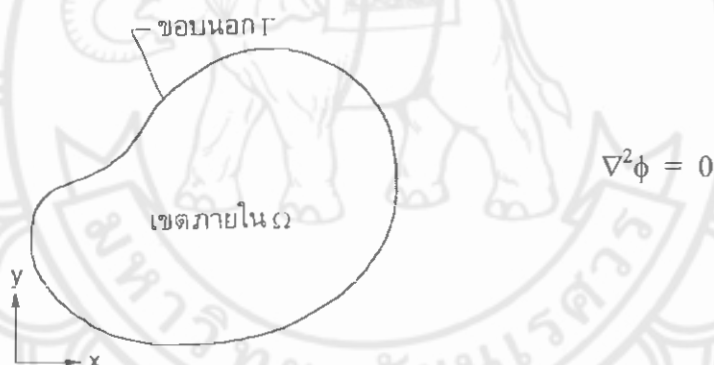
วิธีการดังกล่าวจึงเป็นนัยว่า ผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องสอดคล้อง (satisfy) กับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ในปัญหานั้นๆ ซึ่งหมายความว่า หลักการของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการพิจารณาเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนรากฐานที่ว่า สมการที่สร้างขึ้นมานั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่นั้น จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้มาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็คล้ายกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันก่อให้เกิดเป็นรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหาที่แท้จริง จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ให้มาลงไปในระบบสมการชุดใหญ่นี้ แล้วจึงทำการแก้สมการดังกล่าว ซึ่งจะก่อให้เกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการ ณ ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหานั้น

จากคำอธิบายนี้จะเห็นได้ว่า ความแม่นยำของคำเฉลยโดยประมาณที่คำนวณออกมาได้นั้นจะขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหานั้น นอกจากนั้นความแม่นยำของผลเฉลยซึ่งเราจะศึกษาโดยละเอียดในบทต่อไป ยังขึ้นอยู่กับการสมมติรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) ที่ใช้กับแต่ละเอลิเมนต์นั้น กล่าวคือ ฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมานั้นมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหานั้นมากน้อยเพียงใด ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์อาจสมมติให้อยู่ในหลายรูปแบบ อาทิเช่น รูปแบบของการกระจายเชิงเส้นตรง (linear distribution) เป็นต้น ส่วนขนาด (magnitude) ของฟังก์ชันการประมาณภายในจะขึ้นอยู่กับค่าที่จุดต่อ (nodes) ของเอลิเมนต์ ยกตัวอย่างเช่น หากค่าอุณหภูมิที่จุดต่อที่อยู่ปลายมุมทั้งสามของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมนี้ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่อยู่ในรูปแบบของลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้นตรงแล้ว อุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆ ในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมนี้จะแปรผันเป็นรูปเชิงเส้นตรง โดยมีการกระจายของอุณหภูมิระหว่าง 30 ถึง 50 องศาเซลเซียส เป็นต้น

คำอธิบายที่กล่าวมาเป็นคำอธิบายในลักษณะกว้างๆ และคร่าวๆ เพื่อที่จะแสดงให้เห็นภาพรวมของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นต้น เนื่องจากวิธีการผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) [3] เป็นวิธีการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณวิธีหนึ่งเช่นเดียวกับวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ และเป็นวิธีการที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ รวมทั้งมีลักษณะบางอย่างที่คล้ายคลึงกับวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เราจะได้พบเห็นกันต่อไป ดังนั้นในหัวข้อต่อไปนี้ เราจะมาศึกษาวิธีการผลต่างสืบเนื่องโดยยกตัวอย่างง่ายๆ ขึ้นมาก่อน ลักษณะบางอย่างที่เราจะได้พบเห็นซึ่งเกิดขึ้นจากวิธีการนี้จะช่วยเสริมความเข้าใจเมื่อเราเริ่มทำการศึกษาวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยละเอียด

วิธีการผลต่างสืบเนื่องและข้อคล้ายคลึงกับวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีที่จะทำให้เกิดความเข้าใจของลำดับขั้นตอนในการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการผลต่างสืบเนื่องสามารถทำได้ง่ายๆ ด้วยการยกตัวอย่าง มีหลายปัญหาในงานวิศวกรรมซึ่งมีสมการทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการลาปลาซ (Laplace's equation) อาทิเช่น สมการสมดุลของโครงสร้าง สมการสมดุลของการถ่ายเทความร้อน รวมไปถึงสมการสมดุลของการไหลบางชนิด สมการลาปลาซดังกล่าวสำหรับปัญหาใน 2 มิติบนระนาบ x และ y สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้



รูป 2.2 รูปร่างลักษณะทั่วไปของขอบเขตของปัญหาที่กำหนดมาให้

โดย $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ เป็นสัญลักษณ์ของตัวดำเนินการ (operator notation)

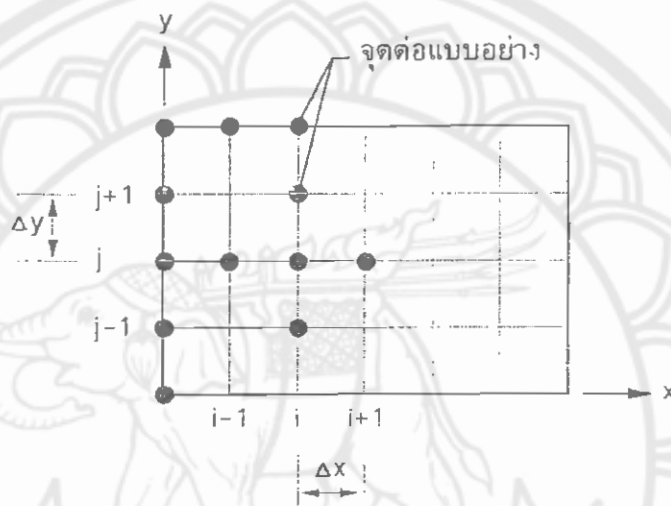
$\phi = \phi(x, y)$ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าซึ่งต้องการหาในเขตภายใน Ω
(เช่น ϕ อาจแทนการกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x, y ต่างๆ)

$\phi = f(x, y)$ ตลอดขอบนอก Γ
(เช่น ϕ ตลอดรอบขอบนอกอาจแทนอุณหภูมิที่กำหนดมาให้เท่ากับ 30°C)

จุดประสงค์ของการแก้ปัญหานี้ก็คือ ต้องการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณของ $\phi(x, y)$ ในขอบเขตภายใน Ω โดยใช้วิธีการผลต่างสลับเนื่อง

หลักการในการใช้วิธีการผลต่างสลับเนื่องเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาเช่นนี้สามารถทำได้ อย่างง่ายๆ โดยใช้ขั้นตอนเพียง 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ทำการสร้างตารางสี่เหลี่ยมลงในรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้ สมมติว่ารูปร่าง ลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่ในระนาบ x-y ดังแสดงในรูป 2.3



รูป 2.3 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยม เพื่อใช้กับวิธีการผลต่างสลับเนื่อง

สี่เหลี่ยมเล็กๆ ทั้งหมดที่สร้างขึ้นมานี้ มีขนาด Δx และ Δy ในทางแกน x และ y ตามลำดับ และต่อกันที่จุดต่อ (grid points) ที่อยู่ในตำแหน่งต่างๆ กัน เช่น จุดต่อ ณ ตำแหน่ง i, j ดังแสดงในรูป 1.3 นี้ไปถึงจุดต่อที่ $x=I$ และ $y=j$ เป็นต้น และที่จุดต่อนี้เองเป็นตำแหน่งที่เราจะหาค่าของผลเฉลยโดยประมาณ นั่นคือเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (unknowns) เช่น สมมติว่าเรากำลังแก้ปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้คือ ผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่ต้องการ เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 2 ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่างๆ นี้ ในตัวอย่างนี้ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของเราคือสมการลาปลาซ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

โดยที่เราสามารถที่จะเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ด้วยการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) เช่น ค่าอนุกรมที่จุดต่อ $i+1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมที่จุดต่อ i ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\phi_{i+1} = & \phi_i + \frac{\partial\phi}{\partial x}\bigg|_i \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\bigg|_i (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\bigg|_i (\Delta x)^3 \\ & + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\bigg|_i (\Delta x)^4 + \dots\end{aligned}\quad (2.2)$$

ในทำนองเดียวกัน ค่าอนุกรมที่จุดต่อ $i-1$ ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมที่จุดต่อ i ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\phi_{i-1} = & \phi_i - \frac{\partial\phi}{\partial x}\bigg|_i \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\bigg|_i (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\bigg|_i (\Delta x)^3 \\ & + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\bigg|_i (\Delta x)^4 - \dots\end{aligned}\quad (2.3)$$

หากเรานำสมการ (2.2) และ (2.3) นี้มารวมกัน จะได้

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + \frac{2}{2!} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\bigg|_i (\Delta x)^2 + \frac{2}{4!} \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\bigg|_i (\Delta x)^4 + \dots\quad (2.4)$$

เนื่องจากเราต้องการพจน์อนุพันธ์อันดับสอง (second order term) ซึ่งคือพจน์ $\partial^2\phi / \partial x^2$ เพื่อที่จะแทนลงในสมการของลาปลาซ (2.1) เราจึงตัดพจน์อนุพันธ์ที่มีอันดับที่สูงๆ ขึ้นไปในสมการ (2.4) ทั้ง ซึ่งจะก่อให้เกิดค่าของพจน์อนุพันธ์อันดับสองโดยประมาณ คือ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \cong \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}\quad (2.5)$$

ในทำนองเดียวกัน หากเราดำเนินการเช่นเดียวกันในทางแกน y เราจะได้

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \cong \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{(\Delta y)^2}\quad (2.6)$$

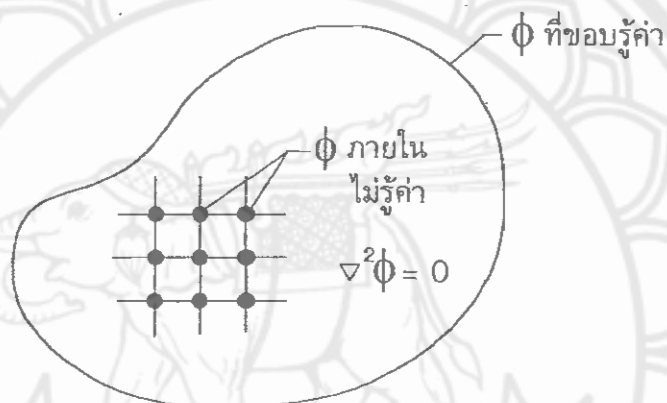
หลังจากแทนพจน์อนุพันธ์อันดับสองจากสมการ (2.5) และ (2.6) ลงในสมการลาปลาซ (1.1) และหากใช้ Δx เท่ากับ Δy เราจะได้

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} + \phi_{j+1} + \phi_{j-1} - 4\phi_i = 0\quad (2.7)$$

ซึ่งอาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบของแผนภาพสมการ (stencil form) เพื่อสะดวกในการประยุกต์ใช้ได้ ดังนี้

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \\
 | \\
 \textcircled{1} - \textcircled{-4} - \textcircled{1} \\
 | \\
 \textcircled{1}
 \end{array} = 0 \quad (2.8)$$

ในการแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ เราจะประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (2.8) นี้ลงในทุกๆ จุดต่อที่อยู่ภายในขอบเขตของปัญหานั้น ดังแสดงในรูป 2.4

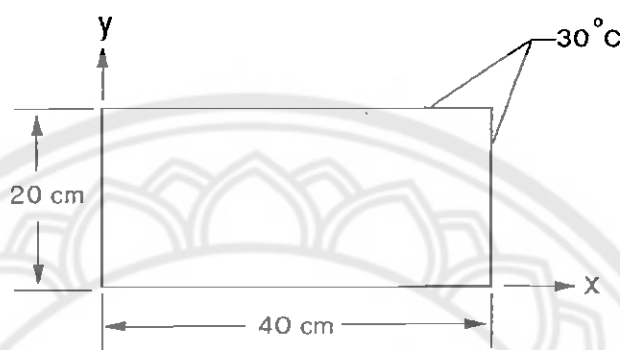


รูป 2.4 การประยุกต์ใช้รูปแบบของแผนภาพสมการ (2.8) ลงบนทุกจุดในขอบเขตของปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 ทำการประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (2.8) ลงในทุกๆ จุดต่อที่อยู่ในขอบเขตภายในของปัญหานั้น จะก่อให้เกิดระบบของสมการพร้อมกัน (a set of simultaneous equations) นั้น โดยมีตัวที่ไม่รู้ค่า เช่น ϕ_i, ϕ_{i+1} ณ ที่จุดต่อต่างๆ ภายในขอบเขตของปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 4 ทำการแก้ระบบของสมการที่เกิดขึ้นมานั้น เพื่อหาค่าโดยประมาณของตัวไม่รู้ค่า (unknowns) ณ ที่จุดต่อนั้นๆ

เพื่อทำให้เกิดความเข้าใจในการใช้วิธีการผลต่างสลับเนื่องโดยใช้ขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นตอนดังที่ได้อธิบายมา เราจะมาดูตัวอย่างดังต่อไปนี้ ซึ่งเป็นตัวอย่างของการถ่ายเทความร้อนเพื่อการหาอุณหภูมิ ณ จุดต่างๆ บนแผ่น ระบาย และจากตัวอย่างนี้เองเราจะพบเห็นลักษณะของสมการหลายๆ ชนิดที่เกิดมาจากวิธีการผลต่างสลับเนื่องนี้ ซึ่งสามารถทำความเข้าใจได้ง่ายและมีประโยชน์ต่อเนื่องเพื่อการทำความเข้าใจวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป



รูป 2.5 แผ่นโลหะที่ต้องการหาการกระจายของอุณหภูมิโดยวิธีการผลต่างสลับเนื่อง

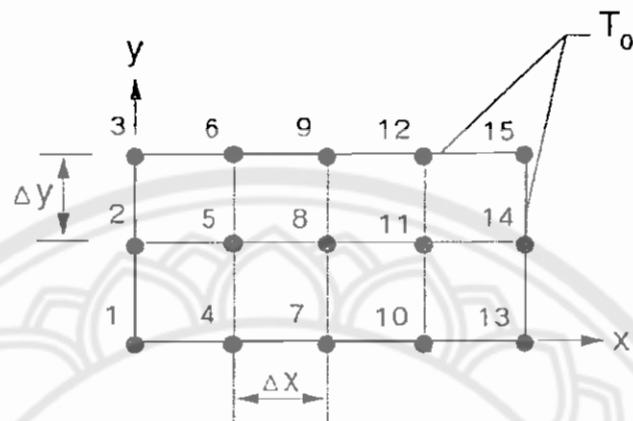
ตัวอย่างที่ 2.1 แผ่นโลหะขนาดยาว 40 cm และกว้าง 20 cm ดังแสดงในรูป 2.5 เกิดการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัว (steady-state heat transfer) ซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบของสมการลาปลาซ ดังนี้

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.9)$$

หากที่ขอบรอบนอกทั้ง 4 ด้านของแผ่น โลหะนี้มีอุณหภูมิเท่ากับ 30°C ให้คำนวณหาค่าการกระจายของอุณหภูมิภายในแผ่นโลหะโดยการใช้วิธีการผลต่างสลับเนื่อง

วิธีทำ เราจะดำเนินการตามลำดับขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นตอนดังที่ได้อธิบายมา ดังนี้

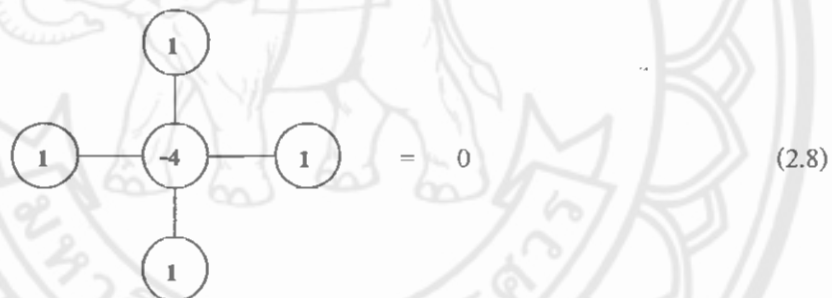
ขั้นตอนที่ 1 ทำการสร้างตารางสี่เหลี่ยมดังแสดงในรูป 2.6 โดยแต่ละสี่เหลี่ยมมีขนาด $10 \times 10 \text{ cm}$ ($\Delta x = \Delta y = 10 \text{ cm}$) และสี่เหลี่ยมเหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เราจะหาค่าของอุณหภูมิ ซึ่งในรูปนี้มีจุดต่อทั้งสิ้น 15 จุดต่อ เนื่องจากรอบขอบนอกของแผ่นโลหะนี้ถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิ $T_0 = 30^\circ\text{C}$ นั้นหมายความว่าอุณหภูมิที่จุดต่อทุกจุดในรูปนี้รู้ค่าหมด ยกเว้นที่จุดต่อหมายเลข 5, 8 และ 11 ดังนั้นตัวไม่รู้ค่าของปัญหานี้คืออุณหภูมิ T_5 , T_8 และ T_{11} ซึ่งก็มีเพียงแค่ 3 ค่าเท่านั้น



รูป 2.6 การแบ่งแผ่นโลหะออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมโดยวิธีการผลต่างสืบเนื่อง

ขั้นตอนที่ 2

ทำการประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (2.8) คือ



ลง ณ จุดต่อที่ไม่รู้ค่านี้ เช่น หากเราประยุกต์ลง ณ จุดต่อหมายเลข 5 เราจะได้สมการที่ว่า

$$T_2 + T_6 + T_8 + T_4 - 4T_5 = 0$$

แต่ $T_2 = T_6 = T_4$ ซึ่งเท่ากับ T_0 ดังนั้น สมการนี้จึงกลายเป็น

$$4T_5 - T_8 = 3T_0 \quad (2.10)$$

เช่นเดียวกันเราประยุกต์ตารางในสมการ (2.8) ลง ณ จุดต่อหมายเลข 8 เราจะได้

$$T_5 + T_9 + T_{11} + T_7 - 4T_8 = 0$$

แต่ $T_9 = T_7 = T_0$ สมการนี้จึงกลายเป็น

$$-T_5 + 4T_8 - T_{11} = 2T_0 \quad (2.11)$$

และทำนองเดียวกันเราประยุกต์ตารางในสมการ (2.8) ลง ณ จุดต่อหมายเลข 11 เราจะได้

$$T_8 + T_{12} + T_{14} + T_{10} - 4T_{11} = 0$$

แต่ $T_{12} = T_{14} = T_{10} = T_0$ สมการนี้จึงกลายเป็น

$$-T_8 + 4T_{11} = T_0 \quad (2.12)$$

ขั้นตอนที่ 3 สมการทั้งสาม (2.10 – 2.12) สามารถนำมาเขียนรวมกันก่อให้เกิดระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 4T_5 - T_8 &= 3T_0 \\ -T_5 + 4T_8 - T_{11} &= 2T_0 \\ -T_8 + 4T_{11} &= 3T_0 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถหากเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_5 \\ T_8 \\ T_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3T_0 \\ 2T_0 \\ 3T_0 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

และเขียนให้สั้นเข้าได้ในรูปแบบดังนี้

$$\underset{(3 \times 3)}{[K]} \underset{(3 \times 1)}{\{T\}} = \underset{(3 \times 1)}{\{Q\}} \quad (2.14)$$

โดยในที่นี้ปัญหาที่ทำอยู่เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน ดังนั้น

$[K]$ เรียกว่า เมตริกซ์การนำ (Condition matrix)

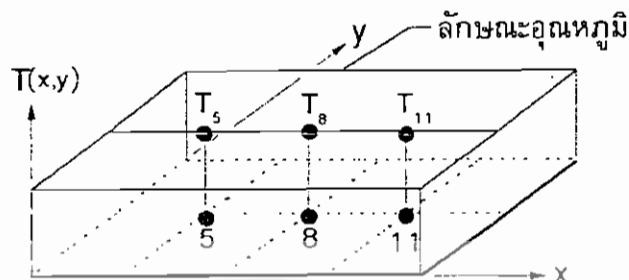
$\{T\}$ เรียกว่า เมตริกซ์ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (Vector of nodal unknowns)

และ $\{Q\}$ เรียกว่า เมตริกซ์โหลด (Load vector)

ขั้นตอนที่ 4 ระบบสมการดังแสดงในสมการ (2.13) สามารถแก้ออกมาได้เพื่อหาผลเฉลยซึ่งก็คืออุณหภูมิที่จุดต่อ 5, 8 และ 11 ได้ดังนี้

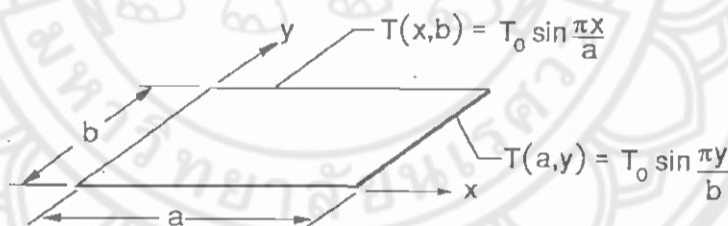
$$T_5 = T_8 = T_{11} = T_0 = 30^\circ\text{C}$$

กล่าวคือ ได้อุณหภูมิภายในแผ่นโลหะออกมาเท่ากับอุณหภูมิที่ขอบรอบนอกที่ 30 องศาเซลเซียส ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิตัณษะที่เป็นค่าคงที่ดังแสดงในรูป 2.7



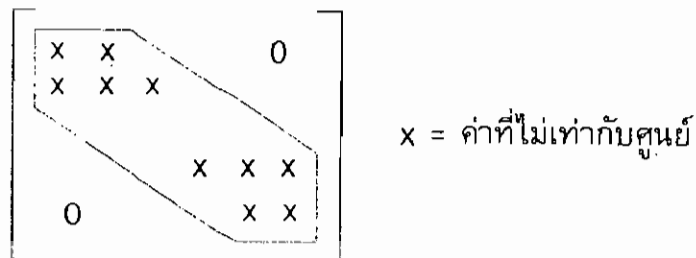
รูป 2.7 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่นโลหะโดยใช้วิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม

จากรูป 2.7 นี้ ปรากฏว่าอุณหภูมิที่คำนวณออกมาโดยวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยมนี้ดังกล่าว ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่เป็นค่าแม่นยำ หากเราย้อนกลับไปพิจารณาสมการ (2.5) เราได้ตัดพจน์อนุพันธ์อันดับสูงๆ ทิ้ง และได้ทำการเขียนพจน์อนุพันธ์อันดับสองโดยประมาณขึ้นมา เหตุใดเราจึงได้คำตอบเป็นค่าแม่นยำสำหรับปัญหานี้ อีก คำตอบก็คือว่าพจน์อนุพันธ์อันดับสูงๆ เหล่านั้นบังเอิญมีค่าเท่ากับศูนย์เฉพาะสำหรับปัญหานี้ เนื่องจากอุณหภูมิขอบรอบแผ่นโลหะนั้นได้ถูกกำหนดมาให้มีค่าที่สม่ำเสมอตลอด แต่หากแผ่นโลหะมีอุณหภูมิที่ขอบรอบไม่สม่ำเสมอ เช่น ดังแสดงในรูป 2.8 ค่าอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งจุดต่อ 5, 8 และ 11 จะไม่ได้ผลออกมาเป็นค่าแม่นยำ ค่าผิดพลาด (solution error) ที่เกิดขึ้นจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับขนาดของตารางสี่เหลี่ยม และจำนวนจุดต่อทั้งหมดที่ใช้ในการแก้ปัญหานี้ อย่างไรก็ตามวิธีการแก้ปัญหายังคงเป็นไปตามขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นตอน ดังที่ได้อธิบายในตัวอย่างนี้



รูป 2.8 แผ่นโลหะที่มีอุณหภูมิที่ขอบรอบนอกไม่สม่ำเสมอ

ข้อที่น่าสนใจที่ได้พบเห็นจากการศึกษาตัวอย่างนี้และที่จะเกิดขึ้นในทำนองเดียวกันเมื่อเราเริ่มเรียนรู้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ ก็คือลักษณะของเมทริกซ์ของการนำความร้อน [K] ดังแสดงในสมการที่ (2.13–2.14) กล่าวคือ เมื่อเราพิจารณาเมทริกซ์ [K] ดังกล่าว ก็คือ ทำปัญหาที่มีจำนวนสี่เหลี่ยมและจุดต่อเป็นจำนวนมาก เราจะพบว่าเมทริกซ์ [K] นี้ จะมีลักษณะดังแสดงในรูป 2.9



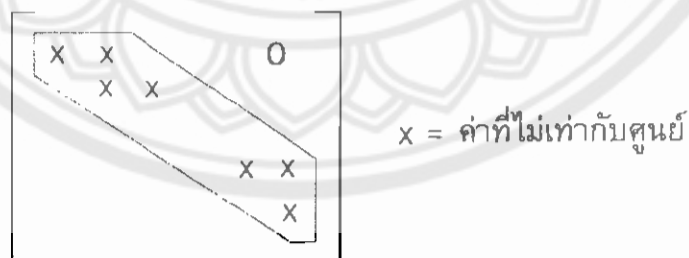
รูป 2.9 ลักษณะของเมตริกซ์ $[K]$ สำหรับปัญหาทั่วไป

กล่าวคือ

- ค่าที่อยู่ในแนวทแยงมุมกลางของเมตริกซ์จะเด่น (diagonal terms dominated)
- ค่าที่อยู่ในแนวทแยงมุมกลางของเมตริกซ์ที่จะมีค่าเป็นบวก
- เมตริกซ์ $[K]$ ดังกล่าวเป็นเมตริกซ์สมมาตร กล่าวคือ $[K] = [K]^T$
- การจับกลุ่มกันของค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ จะมีลักษณะอยู่รวมกันเป็นแถบ (banded matrix)

ดังแสดงในกรอบเอียงในรูป 2.9

คุณสมบัติของข้อ ค. และ ง. ของเมตริกซ์ $[K]$ ดังกล่าวก่อให้เกิดประโยชน์เป็นอย่างมากในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางปฏิบัติที่จำเป็นต้องใช้จำนวนสี่เหลี่ยมและจุดต่อเป็นจำนวนมากเพื่อที่จะก่อให้เกิดผลเฉลยที่เที่ยงตรง ซึ่งจะทำให้เมตริก $[K]$ มีขนาดใหญ่มากแต่เนื่องจาก $[K]$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร ประกอบกับสัมประสิทธิ์ที่ไม่เท่ากับศูนย์นั้น จับกลุ่มกันเป็นแถบ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมานั้น สามารถประดิษฐ์ให้เก็บเฉพาะค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์โดยมีจำนวนเพียงครึ่งหนึ่งของแถบดังแสดงในรูปที่ 2.10 ไว้ในหน่วยความจำเพื่อใช้ในการคำนวณเท่านั้น



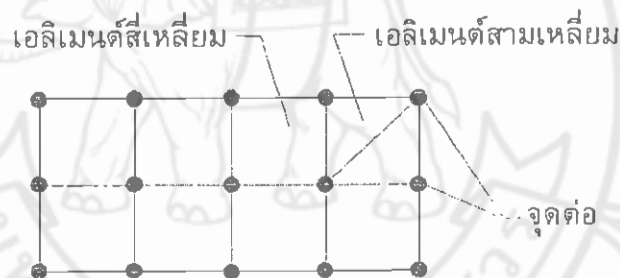
รูป 2.10 การเก็บค่าไม่เท่ากับศูนย์ของเมตริกซ์ $[K]$ ใน โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ข้อแตกต่างระหว่างวิธีการผลต่างสลับกับวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

จากตัวอย่างการใช้วิธีการผลต่างสลับเนื่องเราจะเห็นได้ว่า **วิธีการผลต่างสลับ**เนื่องเป็นการใช้ระเบียบวิธีทางเชิงเลข (numerical method) เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่กำหนดมาให้ หลักการของวิธีการนี้คือการแทนตัวอนุพันธ์ (derivatives) ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยสมการทางพีชคณิตโดยประมาณ (algebraic approximation) ซึ่งอยู่ในรูปของตัวแปรตาม (dependent variables) ณ จุดต่อต่างๆ (grid points) ในขอบเขตของรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น

ส่วน**วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์**เป็นการใช้ระเบียบวิธีทางเชิงเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณของปัญหาที่กำหนดมาให้เช่นกัน โดยแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่จะใช้คำนวณออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (elements) เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (nodes) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณค่าตัวแปรตาม (dependent variables) ที่ต้องการ

หากเราจะใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับตัวอย่างในการหาการกระจายของอุณหภูมิในแผ่นโลหะดังได้แสดงในรูป 2.5 สิ่งแรกที่เราจำเป็นต้องดำเนินการคือการแบ่งแผ่นโลหะนี้ออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ดังเช่นแสดงในรูป 2.11 โดยชิ้นส่วนย่อยๆ อาจเป็นเอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยมก็ได้ เป็นต้น

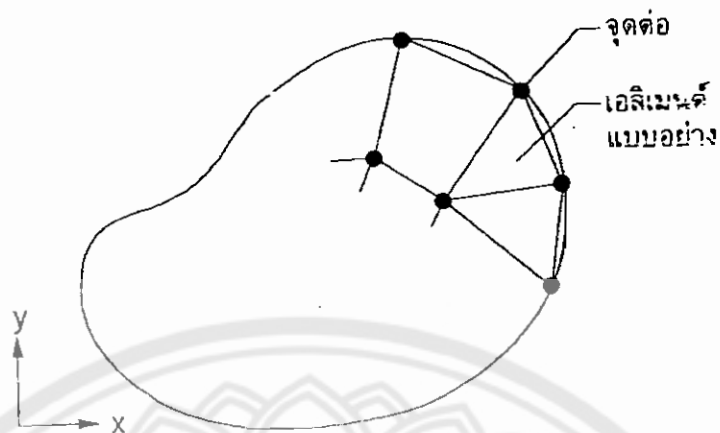


รูป 2.11 การใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแผ่นโลหะออกเป็นเอลิเมนต์ลักษณะต่างๆ กัน

ขั้นตอนทั่วไปของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

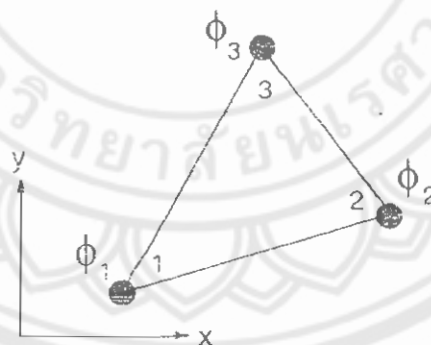
วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการที่จะหาผลลัพธ์นั้นออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.12 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่างๆ กัน เช่น ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง (Elasticity problem) ปัญหาที่เกี่ยวกับอุณหภูมิและความร้อน (Thermal problem) รวมทั้งปัญหาของการไหล (Fluid problem)



รูป 2.12 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (เอลิเมนต์แบบอย่างดังแสดงในรูปที่ 2.12) เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในรูป 2.13 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1 , ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้ อาจเป็นค่าการยืดหรือหดตัว (displacement) หากเราทำปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าอุณหภูมิหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรือไม่ก็อาจเป็นความเร็วของของเหลว หากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ ดังนี้



รูป 2.13 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างประกอบด้วยสามจุดต่อ
โดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ

$$\phi(x, y) = N_1(x, y) \phi_1 + N_2(x, y) \phi_2 + N_3(x, y) \phi_3 \quad (2.15)$$

โดย $N_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ คือฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์

สมการ (2.15) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \underset{(1 \times 3)}{[N]} \underset{(3 \times 1)}{\{\phi\}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

โดย $[N]$ คือเมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\{\phi\}$ คือเวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ในตำราเล่มนี้ สัญลักษณ์ $[]$ แสดงถึงเมทริกซ์แนวนอน (row matrix) และ $\{ \}$ แสดงถึงเมทริกซ์แนวตั้ง (column matrix)

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ดังตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์ตามเหลี่ยมแบบอย่างดังแสดงในรูป 2.13 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (2.17)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (2.18)$$

ขั้นตอนขั้นที่ 3 นี้ ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (2.17) สามารถทำได้โดย

- ก. วิธีการโดยตรง (direct approach) ซึ่งจะอธิบายในบทที่ 2
- ข. วิธีการแปรผัน (variational approach) ซึ่งจะอธิบายในบทที่ 3
- ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) ซึ่งจะอธิบายในบทที่ 4

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้น (system of simultaneous equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\Sigma(\text{element equations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (2.19)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในสมการ (2.19) แล้วจึงแก้สมการนั้นเพื่อหา $\{\phi\}_{\text{sys}}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดย่อ (nodal unknowns) ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้าง หรือค่าของอุณหภูมิที่จุดต่างๆ หากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นค่าของความเร็วของของไหลหากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการไหล เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถทำการหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการทราบต่อไปได้ เช่น เมื่อรู้ค่าการเคลื่อนตัว (displacement) ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้างเราสามารถนำไปใช้ในการหาความเครียด (strain) และความเค้น (stress) ได้ต่อไป หรือเมื่อรู้อุณหภูมิที่จุดต่างๆ ก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ หรือเมื่อรู้ความเร็วของของไหลก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราการไหลทั้งหมดได้ เป็นต้น

จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้ จะเห็นได้ว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการที่มีระเบียบแบบแผนเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีหัวใจที่สำคัญคือการสร้างสมการของเอลิเมนต์ (ขั้นตอนที่ 3) ซึ่งโดยทั่วไปทำได้ 3 วิธี

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากวิธีการโดยตรง

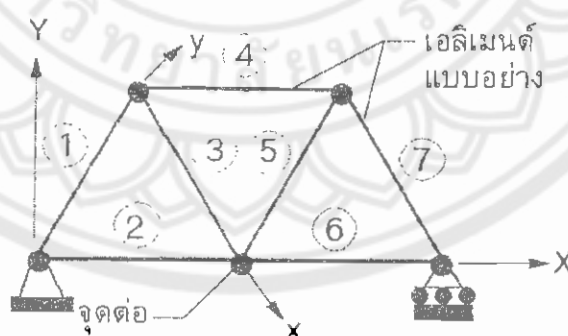
หลักการของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มจากการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่จะทำการคำนวณออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งเอลิเมนต์ย่อยๆ เหล่านี้อาจมีลักษณะและขนาดที่แตกต่างกันไป และจากแต่ละเอลิเมนต์ย่อยนี้เองเราจำเป็นต้องสร้างสมการขึ้นมาสำหรับเอลิเมนต์นั้น ซึ่งสมการของเอลิเมนต์ดังกล่าวขึ้นตรงอยู่กับลักษณะของปัญหาที่เราต้องการแก้ เช่น ปัญหาทางด้านของแข็ง การถ่ายเทความร้อน หรือการไหล เป็นต้น เมื่อได้สมการของแต่ละเอลิเมนต์แล้ว จึงนำสมการของทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันก่อให้เกิดระบบสมการใหญ่ จากนั้นจึงทำการกำหนดกฎเกณฑ์ขอบเขตแล้วจึงแก้ระบบสมการใหญ่นั้นออกมาเพื่อผลลัพธ์ที่ต้องการ

จากลำดับขั้นตอนดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่าหัวใจที่สำคัญของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้คือการสร้างสมการของเอลิเมนต์ขึ้นมาเพื่อให้สามารถจำลองแบบหรือปัญหาได้อย่างถูกต้อง การสร้างสมการของเอลิเมนต์สามารถทำได้หลายวิธีซึ่งแต่ละวิธีอาจมีข้อดีและข้อเสียแตกต่างกันไป วิธีง่ายที่สุดโดยเฉพาะในการเริ่มต้นเรียนวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ การสร้างสมการเอลิเมนต์ขึ้นมาจากความเข้าใจที่ง่ายโดยตรง

การสร้างสมการของเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ

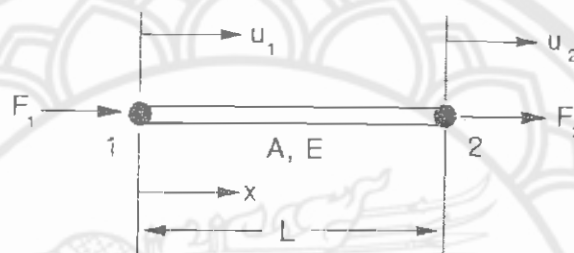
ปัญหาทางโครงสร้าง

ปัญหาทางโครงสร้าง (Truss Problems) ดังแสดงโดยตัวอย่างง่ายๆ ในรูปที่ 2.14 สามารถนำไปสู่ความเข้าใจในการสร้างสมการของเอลิเมนต์ได้เป็นอย่างดี โครงสร้างในรูป 2.14 นี้ประกอบด้วยแท่งท่อน (Rod) ทั้งหมด 7 ท่อนซึ่งอาจทำการจำลองแบบด้วยเอลิเมนต์ทั้งหมด



รูป 2.14 ตัวอย่างปัญหาทางโครงสร้างแบบง่ายๆ

จำนวน 7 เอลิเมนต์เอลิเมนต์ทั้งหมดนี้อยู่ในระบบแกนรวมใหญ่ X-Y (global coordinate system) หากเราพิจารณาไปในแต่ละเอลิเมนต์ เช่น เอลิเมนต์หมายเลข 3 เราจะเห็นว่าเอลิเมนต์นี้อยู่ในแนวแกน x ซึ่งอยู่ในระบบแกนย่อย x-y (local coordinate) เมื่อโครงสร้างในรูป 2.14 นี้ ถูกแรงภายนอกมากระทำ เราสามารถคำนวณหาการเคลื่อนตัว ณ จุดต่อต่างๆ ได้โดยใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ขั้นตอนแรกที่ต้องทำคือ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ขึ้นมาก่อน ดังเช่น หากเรานำเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่ง เช่น เอลิเมนต์ 3 นี้ มาพิจารณาดังแสดงในรูป 2.15



รูป 2.15 ลักษณะเอลิเมนต์แบบอย่างสำหรับโครงสร้าง

เอลิเมนต์แบบอย่างในรูป 2.15 นี้ประกอบด้วย 2 จุดต่อหมายเลข 1 และ 2 ที่ปลายทั้งสองข้าง เอลิเมนต์นี้ทำจากวัสดุมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) เท่ากับ E มีพื้นที่หน้าตัด (cross-sectional area) เท่ากับ A และมีความยาวเท่ากับ L มีแรง F_1 และ F_2 กระทำในแนวแกน x ที่จุดต่อ 1 และ 2 ตามลำดับ แรงดังกล่าวเป็นแรงที่เกิดขึ้นในแนวแกนเอลิเมนต์นี้เมื่อโครงสร้างทั้งหมดอยู่ภายใต้สภาวะสมดุล และแรงดังกล่าวทำให้จุดต่อ 1 และ 2 เคลื่อนตัวไปในแนวแกน x ซึ่งมีค่าเท่ากับ u_1 และ u_2 ตามลำดับ

เริ่มต้นจากการความสัมพันธ์ของความเค้น (stress) และความเครียด (strain) ที่เรียกกันว่ากฎของฮุก (Hook's law) [1] นั่นคือ

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.20)$$

โดย σ แทนค่าของความเค้นและ ε แทนค่าของความเครียด สมมติว่าจากรูป 2.14 เราจับยึดที่จุดต่อ 1 และดึงที่จุดต่อ 2 ด้วยแรง F_2 สมการ 2.20 จะเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{A} &= E \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) \\ F_2 &= \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \\ -\frac{AE}{L} (u_1 - u_2) &= F_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

แต่ภายใต้ความสมดุล

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ F_1 &= -F_2 \\ 0 \quad F_1 &= \frac{AE}{L}(u_2 - u_1)\end{aligned}\quad (2.22)$$

นั่นคือ สมการ (2.21) และ (2.22) สามารถนำมาเขียนด้วยกันได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{AE}{L}(u_2 - u_1) &= F_1 \\ -\frac{AE}{L}(u_1 - u_2) &= F_2\end{aligned}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \\ \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (2.23)$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$[K]\{u\} = \{F\}\quad (2.24)$$

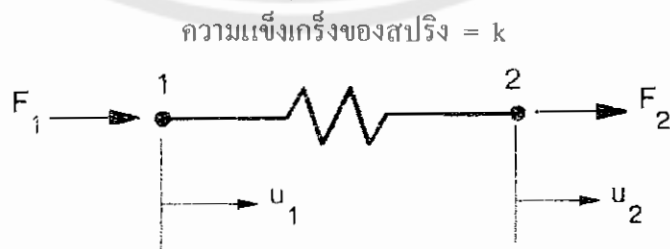
ในที่นี้

$[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งแกร่ง (element stiffness matrix)

$\{u\}$ เรียกว่า เมทริกซ์ของการเคลื่อนที่ที่จุดต่อ (vector or nodal displacements)

$\{F\}$ เรียกว่า เมทริกซ์ของแรงกระทำที่จุดต่อ (vector or nodal force)

รูปแบบของสมการของเอลิเมนต์ดังแสดงโดยสมการ (2.23) สามารถนำไปใช้กับสปริง ดังแสดงในรูป 2.16 ได้โดยตรง



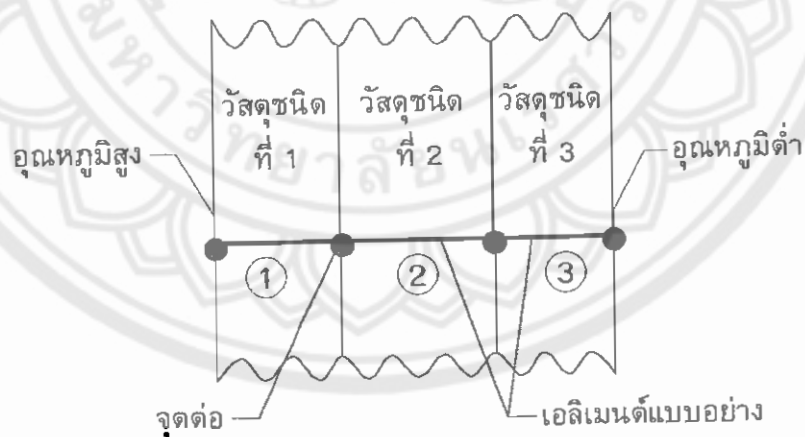
รูป 2.16 สปริงเอลิเมนต์

โดย k คือ ค่าความแข็งแรงของสปริง (spring stiffness) โดยมีหน่วยเป็นแรงต่อระยะทางที่เปลี่ยนแปลงไป เช่น นิวตันต่อเซนติเมตร เป็นต้น สมการของสปริงเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูป 2.16 คือ

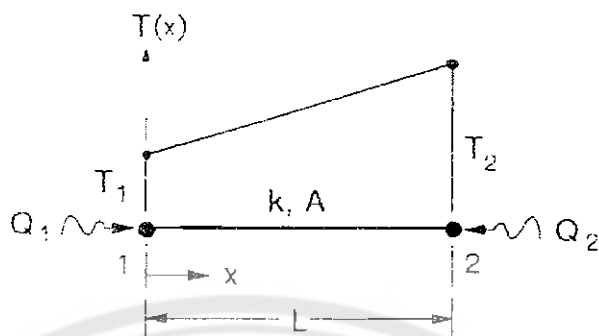
$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

ปัญหาทางความร้อน

การถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัว (steady – state heat transfer) ในรูปทรงหนึ่งมิติซึ่งเกิดขึ้นมาจากระดับอุณหภูมิที่ต่างกันเป็นปัญหาอีกปัญหาหนึ่งที่จะช่วยทำให้เกิดความเข้าใจในการสร้างสมการของเอลิเมนต์ได้ดียิ่งขึ้น รูป 2.17 แสดงลักษณะของปัญหาซึ่งประกอบด้วยวัสดุ 3 ชนิด โดยความร้อนจะถ่ายเทในทิศทางแกน x จากผิวขอบนอกด้านซ้ายที่มีอุณหภูมิสูงไปสู่ผิวขอบนอกด้านขวาที่มีอุณหภูมิต่ำ ในการใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ เราสามารถจำลองปัญหานี้ 3 เอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 2.17 จากนั้นเราจึงต้องสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้นมา ซึ่งทำได้โดยนำเอลิเมนต์แบบอย่างเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่งมาพิจารณา เช่น ดังแสดงในรูป 2.18 ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 1 และ 2 ที่ปลายของทั้งสองข้าง เอลิเมนต์นี้มีค่าสภาพนำความร้อน (thermal conductivity) เท่ากับ k มีพื้นที่หน้าตัด (cross sectional area) เพื่อการนำความร้อนเท่ากับ A ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกน x เท่ากับ L และมีอุณหภูมิที่จุดต่อ 1 และ 2 เท่ากับ T_1 และ T_2 ซึ่งก่อให้เกิดการถ่ายเทความร้อนเท่ากับ Q_1 และ Q_2 ตามลำดับ



รูป 2.17 ตัวอย่างการถ่ายเทความร้อนผ่านวัสดุหลายชนิด



รูป 2.18 ลักษณะเอลิเมนต์แบบอย่างสำหรับการถ่ายเทความร้อน

จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) [2] ที่ว่าปริมาณการนำความร้อนนั้นเป็นสัดส่วนกับค่าสภาพนำความร้อน พื้นที่หน้าตัด และความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิ กล่าวคือ

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.26)$$

ดังนั้น

$$Q_1 = -kA \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$Q_1 = \frac{kA}{L} (T_1 - T_2) \quad (2.27)$$

แต่จากกฎของการสมดุลของการถ่ายเทความร้อนและจากรูป 2.18 จะพบว่า

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= 0 \\ Q_2 &= -Q_1 \\ Q_2 &= \frac{kA}{L} (-T_1 + T_2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

สมการ (2.27) และ (2.28) นำมาเขียนด้วยกันได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{kA}{L} (T_1 - T_2) &= Q_1 \\ \frac{kA}{L} (-T_1 + T_2) &= Q_2 \end{aligned}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$[K] \{T\} = \{Q\} \quad (2.30)$$

โดยในที่นี้

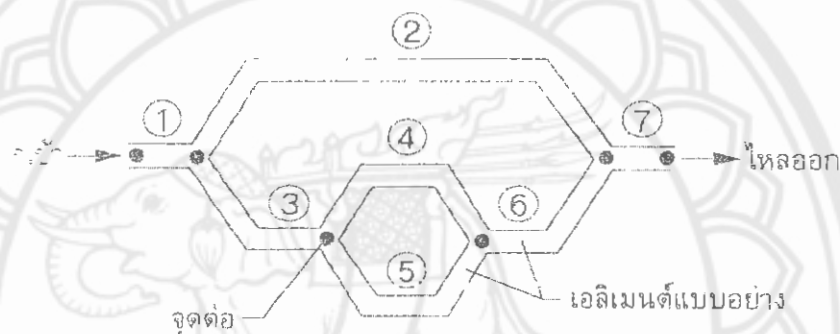
$[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมตริกซ์ของการนำความร้อน (element conduction matrix)

$\{T\}$ เรียกว่า เมตริกซ์ของอุณหภูมิที่จุดต่อ (vector or nodal temperatures)

$\{Q\}$ เรียกว่า เมตริกซ์ของปริมาณความร้อนที่จุดต่อ (vector or nodal head loads)

ปัญหาทางของไหล

อัตราการไหลของของเหลวในระบบท่อภายใต้สถานะอยู่ตัว สามารถคำนวณด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เช่นกัน รูป 2.19 แสดงระบบท่อแบบง่าย ๆ ซึ่งประกอบด้วย 7 เอลิเมนต์



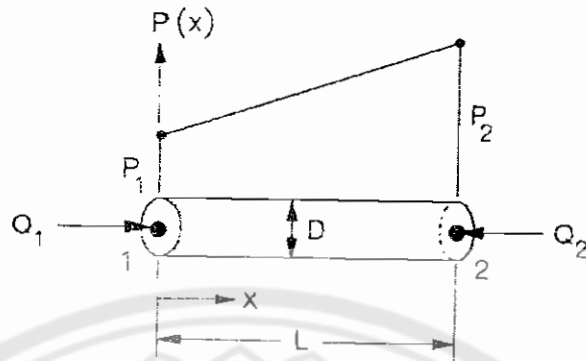
รูป 2.19 ตัวอย่างการไหลในระบบท่อ

อัตราการไหลของของเหลวในท่อกลมสภาวะอยู่ตัว ภายใต้สมมติฐานของการไหลแบบลามินาร์ (laminar flow) โดยของเหลวมีความหนาแน่นคงที่ (incompressible) อาจเขียนให้อยู่ในรูปของความแตกต่างของความดันได้ดังนี้ [3]

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.31)$$

โดย Q แทนอัตราการไหล D แทนเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ μ คือค่าความหนืด (viscosity) ของของเหลว และ P คือ ค่าความดัน (pressure)

ในการสร้างสมการเอลิเมนต์ เราพิจารณาเอลิเมนต์แบบอย่างเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่งดังแสดงในรูป 2.20 ซึ่งเป็นท่อที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ D ยาวเท่ากับ L ในทิศทางแกน x โดยที่ปลายท่อทั้งสองมีจุดต่อ 1 และ 2 ซึ่งมีความดัน P_1 และ P_2 ทำให้เกิดอัตราการไหล Q_1 และ Q_2 ตามลำดับ



รูป 2.20 ลักษณะเอลิเมนต์แบบอย่างของการไหลในท่อกลม

จากลักษณะของเอลิเมนต์ในรูป 2.20 และสมการ (2.31) อัตราการไหลที่จุดต่อ 1 คือ

$$Q_1 = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{P_2 - P_1}{L}$$

$$Q_1 = \frac{\pi D^4}{128\mu L} (P_1 - P_2) \quad (2.32)$$

แต่จากกฎของความสมดุลของการไหล

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q_2 = -Q_1$$

$$Q_2 = \frac{\pi D^4}{128\mu L} (-P_1 + P_2) \quad (2.33)$$

สมการ (2.32) และ (2.33) สามารถนำมาเขียนด้วยกันเป็น

$$\frac{\pi D^4}{128\mu L} (P_1 - P_2) = Q_1$$

$$\frac{\pi D^4}{128\mu L} (-P_1 + P_2) = Q_2$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\frac{\pi D^4}{128\mu L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$[K] \{P\} = \{Q\} \quad (2.35)$$

ในที่นี้

$[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมตริกซ์ของการไหล (element fluidity matrix)

$\{P\}$ เรียกว่า เมตริกซ์ของค่าความดันที่จุดต่อ (vector or nodal pressures)

$\{Q\}$ เรียกว่า เมตริกซ์ของอัตราการไหลที่จุดต่อ (vector or nodal flow rates)

จากตัวอย่างทั้งสาม ซึ่งประกอบด้วยปัญหาทางโครงสร้าง ปัญหาทางความร้อน และปัญหาทางการไหล จะเห็นได้ว่าสมการของเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหาต่างๆ เหล่านี้ สามารถสร้างขึ้นมาจากพื้นฐานทางวิศวกรรมได้โดยตรง สมการของเอลิเมนต์ของปัญหาต่างๆ ดังกล่าวต่างอยู่ในรูปแบบเดียวกัน ดังแสดงในสมการ (2.24), (2.30) และ (2.35) นั่นคือ

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.36)$$

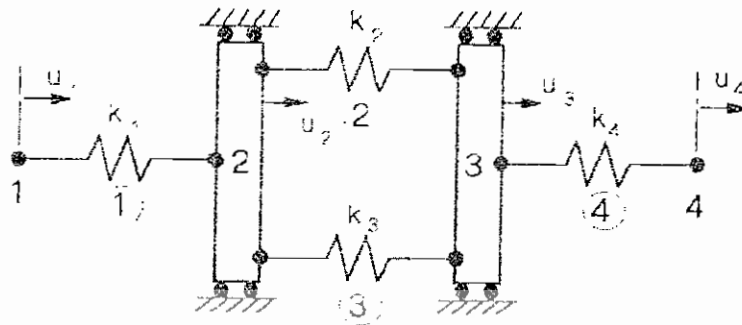
โดย $[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ขึ้นอยู่กับชนิดของปัญหานั้นๆ (element matrix)

$\{u\}$ เรียกว่า เมตริกซ์ของค่าที่ไม่รู้ที่จุดต่อ (vector or nodal unknowns)

$\{F\}$ เรียกว่า เมตริกซ์ของโหลดที่จุดต่อ (vector or nodal loads)

การสร้างระบบสมการใหญ่จากสมการย่อยของเอลิเมนต์

หลังจากที่เราสามารถสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้นมาแล้วดังเช่นสมการแบบอย่างของสปริงดังแสดงในสมการ (2.25) เราจำเป็นต้องนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์นี้มาประกอบรวมกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการใหญ่ ซึ่งก็เปรียบเสมือนกับว่าเรานำเอาสปริงเอลิเมนต์มาประกอบต่อกันเข้าเป็นรูปร่างรวมสุดท้ายทั้งหมดที่ต้องการ การนำสมการย่อยของแต่ละเอลิเมนต์ประกอบรวมกันเข้าจำเป็นต้องมีหลักการ ซึ่งเราสามารถทำความเข้าใจได้อย่างง่ายดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้ กล่าวคือเราจะทำการสร้างระบบสมการใหญ่จากระบบของสปริงดังแสดงในรูป 2.21



รูป 2.21 ตัวอย่างของระบบสปริงในหนึ่งมิติ

รูป 2.21 แสดงถึงระบบของสปริงที่มีการเคลื่อนย้ายได้ในเพียงหนึ่งมิติโดยประกอบด้วยสปริงเอลิเมนต์ทั้งหมด 4 เอลิเมนต์ ซึ่งมีค่าความแข็งเกร็งของสปริงเท่ากับ k_1, k_2, k_3 และ k_4 ตามลำดับ มีการเคลื่อนตัวที่จุดต่อทั้ง 4 จุด คือ u_1, u_2, u_3 และ u_4 ดังแสดงในรูป ซึ่งหมายถึงว่าระบบสมการใหญ่ท้ายสุดจะอยู่ในรูปลักษณะของสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{24} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} \\ \bar{k}_{41} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

(4x4) (4x1) (4x1)

หรือเขียนย่อๆได้ว่า

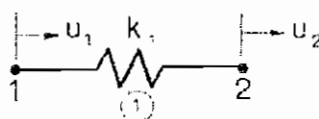
$$[K]_{sys} \{u\}_{sys} = \{F\}_{sys} \quad (2.38)$$

โดยดัชนีล่าง (subscript) sys แทนคำว่า system ซึ่งหมายถึงระบบสมการใหญ่

การประกอบเมตริกซ์เอลิเมนต์ขึ้นเป็นเมตริกซ์ระบบรวม

สมการ (2.38) แสดงให้เห็นว่าเราจำเป็นต้องรู้ค่าของเมตริกซ์ระบบรวม $[K]_{sys}$ เสียก่อนจึงจะ

สามารถคำนวณหาการเคลื่อนที่ที่จุดต่อต่างๆได้ เมตริกซ์ระบบนี้ประกอบขึ้นมาจากเมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์ย่อย เช่น หากเราพิจารณาเอลิเมนต์หมายเลข 1 ในรูป 2.21 โดยแยกแสดงออกมดั่งในรูป 2.22 นี้ และใช้สมการแบบอย่างตามสมการ (2.25) เราจะพบว่าสมการของเอลิเมนต์ที่ 1 นี้ คือ

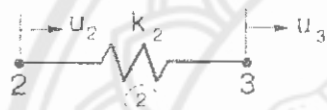


รูป 2.22 ลักษณะสปริงเอลิเมนต์ที่ 1 ของรูป 2.21

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

ซึ่งมีเพียง 2 สมการ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการใหญ่ที่มีทั้งหมด 4 สมการ โดยมีลักษณะเช่นเดียวกับสมการ (2.37) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$



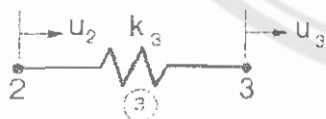
รูป 2.23 ลักษณะสปริงเอลิเมนต์ที่ 2
ของรูป 2.21

เช่นเดียวกัน หากเราพิจารณาสปริงเอลิเมนต์ที่ 2

ในรูป 2.21 ซึ่งแสดงในรูป 2.23 สมการของสปริงเอลิเมนต์ที่ 2
นี้คือ

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$



รูป 2.24 ลักษณะสปริงเอลิเมนต์ที่ 3
ของรูป 2.21

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเราพิจารณาสปริงเอลิเมนต์ที่ 3 ใน

รูป 2.21 ซึ่งแสดงในรูป 2.24 ได้ดังนี้สมการของสปริงเอลิเมนต์ที่
3 นี้คือ

$$\begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

และเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการใหญ่ที่มีทั้งหมด 4 สมการได้เช่นกัน คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$



และเช่นเดียวกันหากเราพิจารณาสปริงเอลิเมนต์ที่ 4 ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สุดท้ายในรูป 2.21 เราสามารถแสดงลักษณะของสปริงเอลิเมนต์นี้ได้ดังแสดงในรูป 2.25 สมการของสปริงเอลิเมนต์ที่ 4 นี้คือ

$$\begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการใหญ่ที่มีทั้งหมด 4 สมการได้คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

การนำสมการที่ได้จากแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งคือ สมการ (2.40) จากเอลิเมนต์ 1, สมการ (2.42) จากเอลิเมนต์ 2, สมการ (2.44) จากเอลิเมนต์ 3 และสมการ (2.46) จากเอลิเมนต์ 4 มาประกอบรวมกันเข้า ก็เปรียบเสมือนเรานำสปริงเอลิเมนต์ย่อยทั้งสิ้น จากรูป 2.22, 2.23, 2.24 และ 2.25 มาประกอบรวมกัน ก่อให้เกิดระบบสปริง ดังแสดงในรูป 2.21 นั่นคือ

$$\begin{aligned} [K]_{sys} &= \sum [K]_e \\ &= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 - k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 - k_3 & k_2 + k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

โดยตัวเลข 1, 2, 3, 4 ที่อยู่ในวงเล็บตามขอบด้านบนและด้านขวาของเมทริกซ์ระบบรวมของสปริงนั้น สอดคล้องกับสมการลำดับที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

การประกอบกันของสมการเอลิเมนต์ย่อยขึ้นมาเป็นเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ (2.47) สามารถทำได้ง่ายๆ โดยไม่จำเป็นต้องเขียนเป็นสมการ 2.40, 2.42, 2.44 และ 2.46 ออกมาโดยละเอียด

วิธีการง่าย ๆ ก็คือ การทำการเขียนสมการของเอลิเมนต์ต่างๆออกมาโดยกำกับหมายเลขของแฉวนอนและแฉวตั้งให้ถูกต้อง เช่น สปริงเอลิเมนต์ที่ 1 ประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 เราก็กำกับตัวเลขไปบนเมตริกซ์ความแข็งแรงของเอลิเมนต์นั้นเป็น

$$[K]_{\text{element1}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.48)$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับสปริงเอลิเมนต์ที่ 2 ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2 และ 3

$$[K]_{\text{element2}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (2) & (3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.49)$$

สำหรับสปริงเอลิเมนต์ที่ 3 ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2 และ 3 เช่นเดียวกับเอลิเมนต์ที่ 2

$$[K]_{\text{element3}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (2) & (3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.50)$$

และสำหรับสปริงเอลิเมนต์ที่ 4 สุดท้าย ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 3 และ 4

$$[K]_{\text{element4}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.51)$$

เมื่อเรามีหมายเลขกำกับทั้งทางแฉวนอนและแฉวตั้งกำกับสัมประสิทธิ์ทุกตัวของเมตริกซ์ของทุกเอลิเมนต์แล้ว เราก็สามารถนำสัมประสิทธิ์ต่างเหล่านี้มาใส่ลงในเมตริกซ์ระบบรวมของสปริงทั้งหมดได้ ดังนี้

$$[K]_{\text{sys}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & \\ -k_1 & k_1+k_2+k_3 & -k_2-k_3 & \\ & -k_2-k_3 & k_1+k_2+k_3 & -k_4 \\ & & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.52)$$

เช่น ค่าสัมประสิทธิ์ $-k_1$ ซึ่งอยู่ในแถวตอนที่ 1 แถวตั้งที่ 2 ของเมทริกซ์เอลิเมนต์ย่อยหมายเลข 1 จะไปอยู่แถวตอนที่ 1 แถวตั้งที่ 2 ของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ (2.52) เป็นต้น อนึ่ง หลักวิธีการประกอบเมทริกซ์ย่อยขึ้นมาเป็นเมทริกซ์ระบบรวมดังอธิบายโดยสมการ (2.47 – 2.51) เช่นเดียวกันนี้ ก็ถูกนำไปใช้ในการประดิษฐ์คอมพิวเตอร์โปรแกรมเช่นกัน เพราะเป็นหลักการที่ง่ายและสามารถทำได้โดยสะดวก วิธีการดังกล่าวนี้เป็นสิ่งง่ายๆ โดยเฉพาะตัวอย่างเช่น แต่ในทางปฏิบัติทั้งจำนวนเอลิเมนต์และจำนวนจุดต่อจะมีมากโดยตัวเลขจะเป็นอะไรก็ได้ ดังตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์หมายเลข 76 อาจประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1024 และ 582 หลักการดังอธิบายมาดังกล่าวก็ยังใช้ได้เช่นเดิม [4]

คุณลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวม

หากเราสังเกตลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวมในสมการ (2.52) เราจะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ระบบรวมนี้ ประกอบด้วยค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ในบริเวณแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังในรูป 2.26 อีกครั้งสำหรับปัญหาของเรื่องสปริงนี้เราพบว่าเมทริกซ์ระบบรวมนี้ยังเป็นเมทริกซ์สมมาตร ซึ่งหมายถึงว่าในการประดิษฐ์คอมพิวเตอร์โปรแกรมเราก็เพียงเก็บค่าต่างๆตั้งแต่แนวทแยงมุมของเมทริกซ์ขึ้นไปจะเพียงพอต่อการคำนวณ เช่น หากเราต้องการแก้ปัญหาที่มี 1,000 จุดต่อ เมทริกซ์ระบบรวมจะประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ทั้งหมด $1,000 \times 1,000 = 1$ ล้านค่า ซึ่งก็หมายถึงว่าเราสามารถเก็บค่าเพียงแค่ 5 แสนค่าก็เพียงพอต่อการคำนวณ



รูป 2.26 ลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวม และครึ่งของความกว้างแถบ

ลักษณะของเมตริกซ์ระบบรวมในรูป 2.26 ยังแสดงให้เห็นว่าค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์อยู่ภายในกรอบขอบเขต ซึ่งมีความกว้างเท่ากับความกว้างแถบ BW (Bandwidth) และนอกกรอบออกไปมีค่าที่เท่ากับศูนย์ ซึ่งไม่มีความจำเป็นต้องเก็บไว้ในหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ นั่นหมายความว่า เราสามารถเก็บค่าสัมประสิทธิ์แค่ครึ่งหนึ่งในกรอบขอบเขตดังแสดงในรูป 2.26 กล่าวคือ ครึ่งหนึ่งของความกว้างแถบ (half-bandwidth) คูณกับจำนวนสมการก็เพียงพอต่อการคำนวณ ซึ่งก็หมายความว่า หากความครึ่งของความกว้างแถบเท่ากับ 2 และเรามีจำนวนจุดต่อทั้งหมด 1,000 จุดต่อ เราก็สามารถเก็บค่าเพียง $2 \times 1,000 = 2,000$ ค่า ไว้ในหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ก็เพียงพอต่อการคำนวณ

จากรูป 2.26 และคำอธิบายข้างต้น จะเห็นได้ว่าค่าครึ่งของความกว้างของแถบ (HBW) นั้นมีบทบาทต่อการคำนวณมาก ค่าครึ่งความกว้างของแถบนี้นี้ขึ้นตรงอยู่กับการกำหนดหมายเลขของจุดต่อ ซึ่งอาจคำนวณได้จากสมการ

$$HBW = (1 + NDIF) * NDOF \quad (2.53)$$

โดย HBW คือค่าครึ่งของความกว้างแถบ (half-bandwidth), NDIF คือ ค่าแตกต่างระหว่างหมายเลขของจุดต่อ ซึ่งเป็นค่าที่สูงสุดจากทุกๆเอลิเมนต์, และ NDOF คือ จำนวนระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ของแต่ละจุดต่อนั้น ซึ่งสำหรับปัญหาใน 1 มิติ ค่า NDOF เท่ากับ 1 เป็นต้น จากสมการ (2.52) เราสามารถคำนวณหาครึ่งความกว้างของแถบได้ คือ

$$HBW = (1 + 1) * 1 = 2$$

ซึ่งก็สอดคล้องกับสมการ (2.52) และแสดงในรูป (2.26)

หากเราทำการสลับหมายเลขของจุดต่อระหว่างหมายเลข 2 และหมายเลข 4 ในรูปที่ 2.21 เราจะพบว่า $NDIF = 4 - 1 = 3$ เกิดขึ้นที่เอลิเมนต์หมายเลข 1 ดังนั้น

$$HBW = (1 + 3) * 1 = 4$$

และลักษณะของเมตริกซ์ระบบรวมดังแสดงในรูป 2.26 จะกลายเป็น

$$[K]_{sys} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

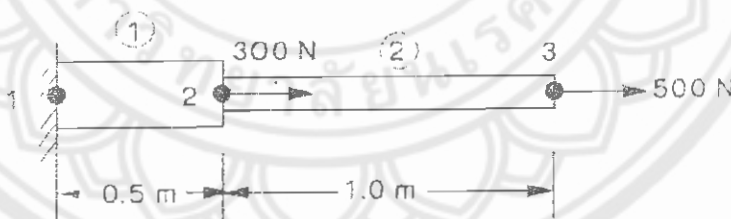
ซึ่งหมายถึงว่ากรอบขอบเขตของแถบนั้นขยายเพิ่มมากขึ้น ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเก็บค่าสัมประสิทธิ์ในหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์มากขึ้น

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าการให้หมายเลขจุดต่อแก่รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ถึงแม้จะไม่มีผลต่อผลลัพธ์ แต่มีความสำคัญในการคำนวณ เช่น อาจทำให้ใช้หน่วยความจำและเวลาในการคำนวณมากขึ้น ข้อที่ควรระวังไว้ตลอดเวลาก็คือ ความแตกต่างระหว่างหมายเลขของจุดต่อของเอลิเมนต์ต่างๆ (NDIF) ควรให้มีค่าที่ต่ำที่สุด อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติเมื่อรูปร่างลักษณะของชิ้นงานนั้นซับซ้อนและมีจำนวนเอลิเมนต์และจุดต่อเป็นจำนวนมาก จะเป็นการยากมากที่เดิขวที่จะทำให้ค่า NDIF ดังกล่าวมีค่าที่ต่ำที่สุด ในปัจจุบันมีโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขนาดเล็กๆ หลายโปรแกรมที่ช่วยเปลี่ยนหมายเลขของจุดต่อซึ่งจะก่อให้เกิดค่าความกว้างของแบนด์ที่ต่ำที่สุด (Bandwidth optimization programs) ซึ่งจะช่วยทำให้ความต้องการของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหานั้นน้อยลง ซึ่งก็จะเป็นผลให้เวลาที่ใช้ไปในการคำนวณนั้นลดลงตามไปด้วย

ตัวอย่างการแก้ปัญหาหนึ่งมิติ

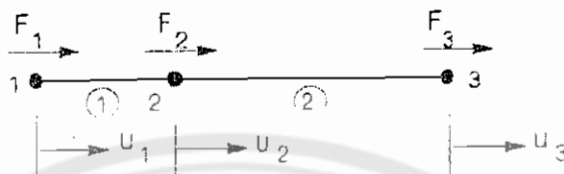
หลังจากที่เราได้เรียนรู้ลักษณะของสมการของเอลิเมนต์ เช่น เอลิเมนต์หลักก่อนของปัญหาทางโครงสร้างหนึ่งมิติ และการประกอบสมการจากเอลิเมนต์ย่อยต่างๆ ขึ้นเป็นสมการระบบรวม เราสามารถนำความรู้ดังกล่าวมาแก้ปัญหาบางอย่างที่มีรูปทรงหนึ่งมิติได้ ดังแสดงในตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.2 แท่งโลหะสองชนิดมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น 5×10^7 และ 10×10^7 kN/m² ยาว 0.5 และ 1 m มีพื้นที่หน้าตัด 20 และ 10 cm² ตามลำดับ ต่อกันที่จุดต่อ 2 โดยที่จุดต่อ 1 ยึดติดกับฝาผนัง และมีแรงกระทำที่จุดต่อ 2 และ 3 เท่ากับ 300 และ 500 N ดังแสดงในรูป 2.27 ให้คำนวณหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ 2 และ 3 รวมทั้งค่าความเค้นและแรงที่เกิดขึ้นภายในแท่งโลหะนี้



รูป 2.27 แท่งโลหะ 2 ชนิด จำลองด้วย 2 เอลิเมนต์และ 3 จุดต่อ

วิธีการทำ จากรูป 2.27 ที่กำหนดมาให้เราสามารถนำมาเขียนเป็นแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element model) ซึ่งประกอบด้วย 2 เอลิเมนต์และ 3 จุดต่อได้ ดังแสดงในรูป 2.28



รูป 2.28 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแท่งโลหะ 2 ชนิด

โดยที่จุดต่อที่ 1, 2 และ 3 มีค่าเคลื่อนตัวเท่ากับ u_1 , u_2 , u_3 ตามลำดับ และมีแรงกระทำซึ่งอาจหมายถึงแรงจากภายนอก (external force) หรือแรงปฏิกิริยา (reaction force) เท่ากับ F_1 , F_2 และ F_3 ตามลำดับ เช่นกัน

จากสมการของเอลิเมนต์ 2.23 เราได้สร้างเมทริกซ์ของความแข็งแรงเกร็งของเอลิเมนต์ที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ A ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ E และความยาวเท่ากับ L ได้ดังนี้ คือ

$$[K]_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ดังนั้น เมทริกซ์ของความแข็งแรงเกร็งของเอลิเมนต์ที่ 1 คือ

$$[K]_{element1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{A_1 E_1}{L_1} & -\frac{A_1 E_1}{L_1} \\ -\frac{A_1 E_1}{L_1} & \frac{A_1 E_1}{L_1} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad (2.54)$$

และเมทริกซ์ของความแข็งแรงเกร็งของเอลิเมนต์ที่ 2 คือ

$$[K]_{element2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{A_2 E_2}{L_2} & -\frac{A_2 E_2}{L_2} \\ -\frac{A_2 E_2}{L_2} & \frac{A_2 E_2}{L_2} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad (2.55)$$

ดังนั้น เมื่อนำมาสมการของเอลิเมนต์ทั้งสองมาประกอบกัน จะก่อให้เกิดระบบสมการรวม ซึ่งประกอบด้วย 3 สมการย่อยดังนี้ คือ

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1 E_1}{L_1} & -\frac{A_1 E_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{A_1 E_1}{L_1} & \frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2} & -\frac{A_2 E_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{A_2 E_2}{L_2} & \frac{A_2 E_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

โดยเวกเตอร์เมทริกซ์ ซึ่งอยู่ทางด้านขวามือของระบบสมการ (2.57) ประกอบด้วยแรงที่จุดต่อทั้ง 3 จุด

เนื่องจาก สำหรับเอลิเมนต์ที่ 1

$$\frac{A_1 E_1}{L_1} = \frac{(0.02)(5 \times 10^7)}{0.5} = 2 \times 10^5 \quad \text{N/m}$$

และสำหรับเอลิเมนต์ที่ 2

$$\frac{A_2 E_2}{L_2} = \frac{(0.01)(10 \times 10^7)}{1.0} = 1 \times 10^5 \quad \text{N/m}$$

ดังนั้นระบบสมการรวมดังแสดงในสมการ (2.56) จึงกลายเป็น

$$10^5 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

ก่อนที่จะทำการแก้ระบบสมการรวมนี้เราจำเป็นต้องทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (application of boundary conditions) ลงในระบบสมการดังกล่าวก่อน หลักการง่ายๆในการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวมที่ประกอบด้วยหลายๆสมการคือ ในสมการใดสมการหนึ่ง หากค่าเคลื่อนตัวซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายของสมการนั้นรู้ค่า นั่นหมายความว่าค่าแรงที่จุดต่อซึ่งอยู่ทางด้านขวาของสมการจะต้องเป็นตัวไม่รู้ค่า และทำนองกลับกัน หากค่าเคลื่อนตัวซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายของสมการนั้นเป็นตัวไม่รู้ค่า นั่นหมายความว่าค่าแรงที่จุดต่อซึ่งอยู่ทางด้านขวาของสมการนั้นจำเป็นต้องรู้ค่า ในตัวอย่างนี้เราสามารถสรุปได้ว่า

จุดต่อที่	ค่าเคลื่อนตัว	แรงกระทำ
1	$u_1 = 0$	$F_1 = ?$
2	$u_2 = 0$	$F_2 = 300$
3	$u_3 = 0$	$F_3 = 500$

ดังนั้นสมการ (2.57) จึงกลายเป็น

$$10^5 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 300 \\ 500 \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

จากนั้น เราสามารถใช้สมการที่ 2 และ 3 ของระบบสมการรวม (2.58) นี้ เพื่อคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ 2 และ 3 ออกมาได้ คือ

$$\begin{aligned} u_2 &= 0.004 \quad \text{m} \\ u_3 &= 0.009 \quad \text{m} \end{aligned} \quad (2.59)$$

ผลของค่าเคลื่อนตัวที่ได้นี้นำไปแทนกลับลงในสมการที่ 1 ของระบบสมการรวม (2.39) จะทำให้หาค่าแรงที่จุดต่อ 1 ได้ คือ

$$F_1 = -800 \quad \text{N} \quad (2.60)$$

ซึ่งก็คือ ค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดต่อ 1 นั่นเอง โดยเครื่องหมายลบบ่งบอกทิศทางของแรงปฏิกิริยานี้ไปในทางด้านซ้ายมือของรูป 2.27

ผลของค่าเคลื่อนตัว ณ จุดต่อที่คำนวณได้ สามารถนำไปหาความเค้นในแต่ละเอลิเมนต์ได้โดยใช้กฎของฮุก จากสมการ (2.20) กล่าวคือ

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{element1}} &= E_1 \varepsilon_1 = E_1 \frac{u_2 - u_1}{L_1} \\ &= (5 \times 10^7) \frac{(0.004 - 0)}{0.5} \\ &= 400,000 \quad \text{N/m}^2 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{element2}} &= E_2 \varepsilon_2 = E_2 \frac{u_3 - u_2}{L_2} \\ &= (10 \times 10^7) \frac{(0.009 - 0.004)}{1.0} \\ &= 500,000 \quad \text{N/m}^2 \end{aligned}$$

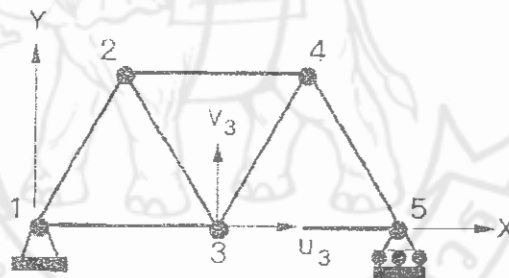
ค่าความเค้นที่คำนวณได้สามารถนำไปคำนวณหาแรงภายในเอลิเมนต์ต่อไปได้ คือ

$$\begin{aligned}
 \text{แรงภายในเอลิเมนต์ที่ 1} &= \sigma_1 A_1 = (400,000)(.002) \\
 &= 800 \quad \text{N} \\
 \text{แรงภายในเอลิเมนต์ที่ 2} &= \sigma_2 A_2 = (500,000)(.001) \\
 &= 500 \quad \text{N}
 \end{aligned}$$

การแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์

ปัญหาที่ต้องทำการแปลงเมตริกซ์

หลักการต่างๆของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปทรงหนึ่งมิติ กล่าวคือ ณ จุดต่อใดจุดต่อหนึ่ง จะมีตัวไม่ทราบค่าเพียงหนึ่งตัว ในทางปฏิบัติจำนวนตัวไม่รู้ค่า (unknowns) ที่จุดต่อจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่ต้องการแก้ นั่นๆ เช่น ปัญหาทางโครงสร้างดังแสดงในรูป 2.29 ซึ่งอยู่ในระบบแกนรวมใหญ่ X-Y ที่จุดต่อหนึ่งจะประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 2 ตัว เช่น ที่จุดต่อหมายเลข 3 จะประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัว u_3 ในทิศทางแกน X และ v_3 ในทิศแกน Y ซึ่งทั้ง 2 ตัวนี้



รูป 2.29 ตัวอย่างปัญหาทางโครงสร้างในสองมิติ

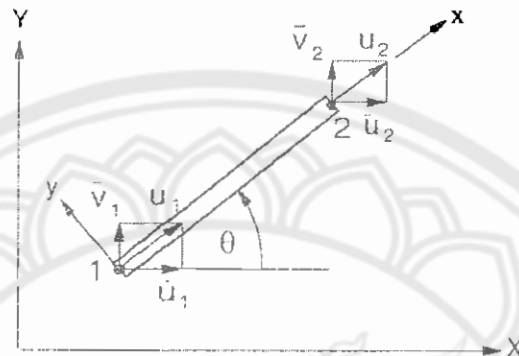
เป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องการในการคำนวณ ค่า u_3 และ v_3 ที่คำนวณหาได้นี้ จะบ่งบอกทั้งขนาดและทิศทางของการเคลื่อนตัวของจุดต่อหมายเลข 3 นี้ได้โดยสมบูรณ์ ดังนั้น จากปัญหาทางโครงสร้างในสองมิติดังแสดงในรูป 2.29 มีเพียง 5 จุดต่อ แต่จะมีตัวไม่รู้ค่า (ก่อนทำการกำหนดคกฎเกณฑ์ขอบเขต) ถึง 10 ตัว ซึ่งหมายถึงจะมีระบบสมการซึ่งประกอบด้วยจำนวนสมการถึง 10 สมการ นั่นคือ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$NEQ = NUMNP * NDOF \quad (2.61)$$

โดย NEQ คือ จำนวนสมการ (number of equation), NUMNP คือ จำนวนจุดต่อทั้งหมด (number of nodal points) และ NDOF คือ จำนวนระดับขั้นความเสรี (number of degrees of freedom) ของแต่ละจุดต่อนั้น อนึ่ง หากปัญหาในรูป 2.29 เป็นโครงสร้างอวกาศ [6, 7] ซึ่งต้องการคำนวณอุณหภูมิที่จุดต่อ เช่นนี้แต่ละจุดต่อ จะมีเพียง 1 DOF ซึ่งหมายถึงจำนวนสมการทั้งหมด (NEQ) จะมีเพียง 5 สมการเท่านั้น เป็นต้น

วิธีการแปลงเมตริกซ์

หากเราย้อนกลับมายังปัญหาโครงสร้างในสองมิติที่ต้องการคำนวณค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อกันโดยแต่ละจุดมีค่าเคลื่อนตัวทั้งในแกน X และแกน Y เช่น หากเราพิจารณาเอลิเมนต์แบบอย่างที่อยู่ระหว่างจุดต่อ 1 และ 2 ในรูป 2.29 ซึ่งทำมุม θ กับแกน X เราสามารถนำมาแสดงได้โดยละเอียดได้ดังในรูป 2.30



รูป 2.30 ค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในระบบแกนรวมใหญ่และแกนย่อย

โดย u_1 และ u_2 เป็นค่าเคลื่อนตัวจุดต่อ 1 และ 2 ในแนวของเอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในทิศแกนย่อย x และ $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ และ $\bar{u}_2$, $\bar{v}_2$ เป็นค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ 1 และ 2 เช่นกันแต่อยู่ในทิศทางของระบบแกนรวมใหญ่ X-Y จากรูป 2.30 นี้เราจะเห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของระบบแกนย่อยและแกนใหญ่ คือ

$$u_1 = \bar{u}_1 \cos \theta + \bar{v}_1 \sin \theta \quad (2.62)$$

$$u_2 = \bar{u}_2 \cos \theta + \bar{v}_2 \sin \theta \quad (2.63)$$

ทั้ง 2 สมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ คือ

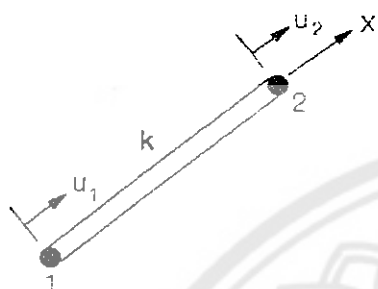
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

ซึ่งเขียนสั้นๆได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}_{(2 \times 4)} \begin{Bmatrix} \bar{u} \end{Bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (2.65)$$

โดย $\{u\}$ และ $\{\bar{u}\}$ คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในแนวแกนของเอลิเมนต์และในแนวแกนรวมใหญ่ X-Y ตามลำดับ และ $[R]$ คือ เมตริกซ์ของการแปลงค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อระหว่างแนวแกนย่อยและระบบแกนรวมใหญ่

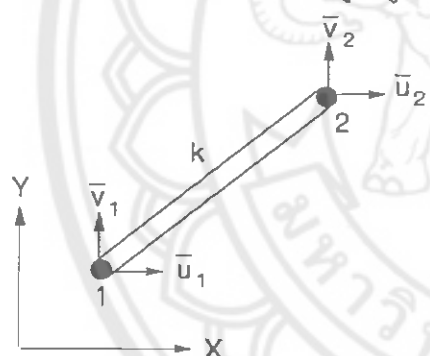
หากเอลิเมนต์วางตัวอยู่ในแนวแกนย่อย x และค่าเคลื่อนตัวที่จุดปลายทั้งสองของเอลิเมนต์ คือ u_1 และ u_2 ดังแสดงในรูป 2.31 สมการของเอลิเมนต์จะมีเพียงแค่ 2 สมการเช่นเดียวกับสมการ (2.25) โดยทางด้านซ้ายมือของสมการจะอยู่ในรูป



$$[K]_{(2 \times 2)} \{u\} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

รูป 2.31 เอลิเมนต์ในแนวแกนย่อย x

แต่หากเอลิเมนต์ดังกล่าวอยู่ในระบบแกนรวมใหญ่ $X-Y$ โดยที่ปลายจุดต่อมีค่าเคลื่อนตัวที่ไม่ทราบค่าอยู่ทั้งหมด 4 ค่า คือ $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2$ ดังแสดงในรูป 2.32 ดังนั้นสมการของเอลิเมนต์จะมีทั้งหมด 4 สมการโดยทางด้านซ้ายมือของสมการจะอยู่ในรูป



$$[\bar{K}]_{(4 \times 4)} \{\bar{u}\} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}$$

รูป 2.32 เอลิเมนต์ในระบบแกนรวมใหญ่ $X-Y$

ในที่นี้ $[\bar{K}]$ คือ เมตริกซ์ของความแข็งแกร่งในระบบแกนรวมใหญ่ ซึ่งสามารถหาได้จากเมตริกซ์ของความแข็งแกร่ง

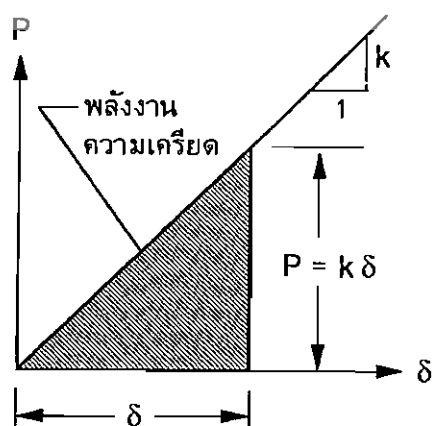
ในแนวแกนย่อย x ได้โดยใช้วิธีการหลายวิธี เช่น วิธี

เรขาคณิตของการเคลื่อนตัว (Geometry of displacements),

วิธีการอนุรักษ์พลังงานความเครียด (Conservation of strain energy) เป็นต้น การใช้วิธีการอนุรักษ์พลังงานความเครียด

เป็นวิธีที่ง่ายในการทำความเข้าใจ และสามารถนำไปใช้ในการหาสมการของเอลิเมนต์ใน 3 มิติ ได้โดยตรง วิธีการนี้เริ่ม

จากคำนิยามของพลังงานความเครียด (strain energy) ที่ว่าหาก



รูป 2.33 พลังงานความเครียดในสปริง

เราออกแรงดึง P ลงบนสปริงที่มีค่าความแข็งเกร็งเท่ากับ k แล้วสปริงยืดตัวออกเท่ากับ δ ค่าพลังงานความเครียดคือ พื้นที่สามเหลี่ยมใต้กราฟ $P-\delta$ นั้น ดังแสดงในรูป 2.33 นั่นคือ

$$U = \frac{1}{2} k \delta^2 \quad (2.66)$$

โดย U แทนค่าพลังงานความเครียดเนื่องจากการยืดตัว $\delta = u_1 - u_2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k (u_1 - u_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} k (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} \\ U &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{\substack{\text{เมทริกซ์ความแข็งเกร็ง} \\ \text{ในแนวแกนย่อย X}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ พลังงานความเครียดในสปริง คือ

$$U = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^T}_{(1 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} \quad (2.67)$$

แต่จากสมการ (2.65) ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ของค่าเคลื่อนตัวในแนวแกนย่อย $\{u\}$ และค่าเคลื่อนตัวในระบบแกนรวมใหญ่ $\{\bar{u}\}$ คือ

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}}_{(2 \times 4)} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix}}_{(4 \times 1)} \quad (2.68)$$

โดย $[R]$ แทนเมทริกซ์การแปลงค่า หากเราแทนสมการ (2.65) ลงในสมการ (2.68) เราจะได้

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} ([R]\{u\})^T [K] ([R]\{\bar{u}\}) \\ U &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^T}_{(1 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}^T}_{(4 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}}_{(2 \times 4)} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix}}_{(4 \times 1)} \\ &\quad \text{เมทริกซ์ความแข็งเกร็ง} \\ &\quad \text{ในระบบแกนรวมใหญ่ X-Y} \end{aligned}$$

$$U = \frac{1}{2} \underset{(1 \times 4)}{\{u\}^T} \underset{(4 \times 4)}{[\bar{K}]} \underset{(4 \times 1)}{\{\bar{u}\}} \quad (2.69)$$

เนื่องจากพลังงานความเครียด (สมการ (2.68) และ (2.69)) ไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าปริ

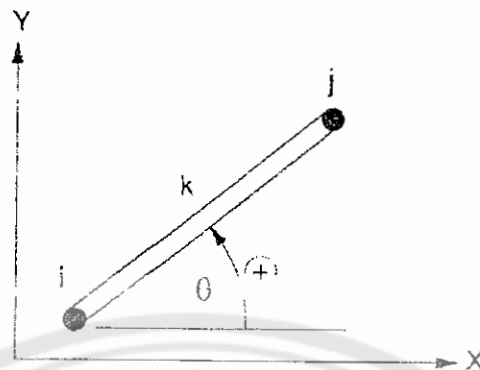
จะอยู่ในระบบแกนใด ดังนั้น เมตริกซ์ความแข็งเกร็งที่มีขนาด (4x4) ในระบบแกนรวมใหญ่ X-Y คือ

$$\begin{aligned} \underset{(4 \times 4)}{[\bar{K}]} &= \underset{(1 \times 4)}{\{R\}^T} \underset{(2 \times 2)}{[K]} \underset{(2 \times 4)}{\{\bar{u}\}} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \\ \underset{(4 \times 4)}{[\bar{K}]} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \\ \text{Sym} & & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ & & & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.70) \end{aligned}$$

การแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์ เราสามารถสรุปได้ว่า หากเรารู้ค่าเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ในระบบแกนย่อย x กล่าวคือ

$$\underset{(2 \times 2)}{[K]} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

เราสามารถหามเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ $[\bar{K}]$ ในระบบแกนรวมใหญ่ X-Y ได้ ดังแสดงในสมการ (2.70) ค่าสัมประสิทธิ์ในเมตริกซ์ $[\bar{K}]$ นี้ขึ้นอยู่กับค่าการวางตัวของเอลิเมนต์นั้นโดยการวัดด้วยมุม θ จากแนวแกน X ในระบบแกนรวมใหญ่ X-Y โดยมีค่าเป็นบวกในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูป 2.34

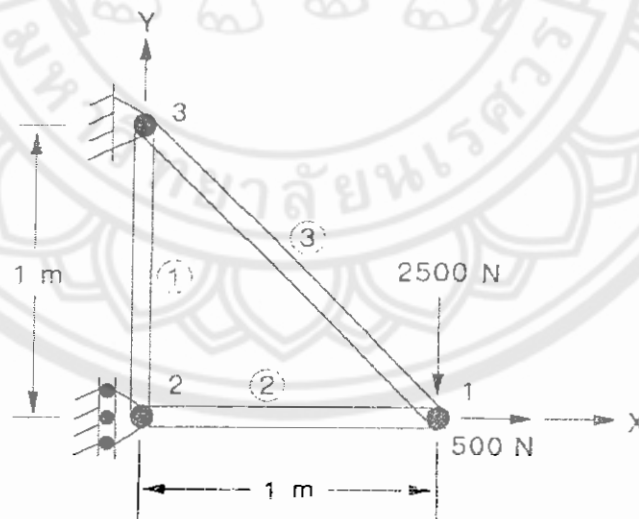


รูป 2.34 การวางตัวของเอลิเมนต์โดยมุม θ วัดจากแนวแกน X โดยมีค่าเป็นบวกในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่างปัญหาโครงสร้างสองมิติ

เมตริกซ์ค่าความแข็งแรงของเอลิเมนต์ ดังแสดงในสมการ (2.70) สามารถนำมาใช้ในการคำนวณหาการเคลื่อนตัวของโครงสร้างในรูปทรงสองมิติได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.3 รูป 2.35 แสดงโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์ท่อนจำนวน 3 ท่อน ซึ่งอยู่ในระนาบ X-Y โดยค้ำกันที่จุดต่อทั้งหมด 3 จุด จุดต่อที่ 3 ถูกยึดทั้งในแกน X และ Y จุดต่อที่ 2 ถูกยึดในแนวแกน X แต่เลื่อนไปมาได้ในแนวแกน Y และจุดต่อที่ 1 มีแรงกระทำ 500 และ 2,500 N ในแนวแกนนอนและแนวตั้งตามลำดับ



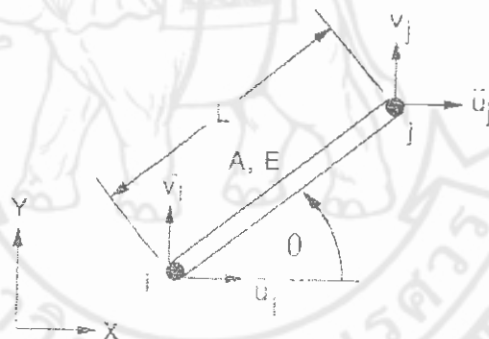
รูป 2.35 ตัวอย่างโครงสร้างสองมิติ

เอลิเมนต์ทั้ง 3 ท่อนมีพื้นที่หน้าตัดและค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นต่างกันดังนี้

เอลิเมนต์ หมายเลข	พื้นที่หน้าตัด, A (cm ²)	โมดูลัสของความยืดหยุ่น, E (N/cm ²)
1	5.0	10x10 ⁶
2	6.0	30 x10 ⁶
3	4.0	30 x10 ⁶

ให้คำนวณหาการเคลื่อนตัวของโครงสร้างนี้ และแรงปฏิกิริยาที่ฝาผนังรวมทั้งค่าความเค้นในเอลิเมนต์เหล่านี้

วิธีการทำ เราพบว่า หากเรามีเอลิเมนต์ท่อนที่มีจุดต่อ i และ j ที่ปลายของทั้งสองข้าง โดยวางอยู่ในระนาบ X-Y ทำมุม θ กับแกน X ดังแสดงในรูป 2.36



รูป 2.36 เอลิเมนต์ท่อนในระนาบ X-Y มีค่าเคลื่อนตัวที่ไม่รู้ค่า
ที่จุดต่อปลายทั้งสองรวม 4 ค่า

เราพบว่าเมตริกซ์ของความแข็งแรงของเอลิเมนต์ คือ

$$[\bar{K}]_{(4 \times 4)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} (\bar{u}_i) & (\bar{v}_i) & (\bar{u}_j) & (\bar{v}_j) \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \\ & & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ Sym & & & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{u}_i) \\ (\bar{v}_i) \\ (\bar{u}_j) \\ (\bar{v}_j) \end{pmatrix}$$

โดย A,E และ L คือ พื้นที่หน้าตัด, โมดูลัสของความยืดหยุ่น และความยาวของเอลิเมนต์ที่ก่อนหน้านี้ตามลำดับ จะเห็นว่าเมตริกซ์ของความแข็งแรงของเอลิเมนต์ขึ้นอยู่กับตัวแปรหลายตัวดังกล่าวคือ จุดต่อ i, j, มุม θ , A, E และ L วิธีที่ทำให้สะดวกที่สุดคือการสร้างตารางดังนี้

เอลิเมนต์	AE/L	i	j	θ	$\cos \theta$	$\sin \theta$
1	$\frac{(5)(10 \times 10^6)}{100}$	3	2	-90°	0	-1
2	$\frac{(6)(30 \times 10^6)}{100}$	2	1	0°	1	0
3	$\frac{(4)(30 \times 10^6)}{100\sqrt{2}}$	1	3	135°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น เมตริกซ์ของความแข็งแรงของเอลิเมนต์ 1 คือ

$$[K]_{\text{element1}} = \frac{(5)(10 \times 10^6)}{100} \begin{bmatrix} (\bar{u}_3) & (\bar{v}_3) & (\bar{u}_2) & (\bar{v}_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{u}_3) \\ (\bar{v}_3) \\ (\bar{u}_2) \\ (\bar{v}_2) \end{bmatrix}$$

ทำนองเดียวกัน เมตริกซ์ของความแข็งแรงของเอลิเมนต์ 2 คือ

$$[K]_{\text{element2}} = \frac{(6)(30 \times 10^6)}{100} \begin{bmatrix} (\bar{u}_2) & (\bar{v}_2) & (\bar{u}_1) & (\bar{v}_1) \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{u}_2) \\ (\bar{v}_2) \\ (\bar{u}_1) \\ (\bar{v}_1) \end{bmatrix}$$

และ เมตริกซ์ของความแข็งแรงของเอลิเมนต์ 3 คือ

$$[K]_{\text{element 3}} = \frac{(4)(30 \times 10^6)}{100\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\bar{u}_1) & (\bar{v}_1) & (\bar{u}_3) & (\bar{v}_3) \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (\bar{u}_1) \\ (\bar{v}_1) \\ (\bar{u}_3) \\ (\bar{v}_3) \end{matrix}$$

จากนั้นหากเรานำเมทริกซ์ของความแข็งเกร็งของแต่ละเอลิเมนต์นี้มาประกอบกัน เราจะได้เมทริกซ์ระบบรวมซึ่งแทนความแข็งเกร็งของโครงสร้างที่มีลักษณะดังแสดงในรูป 2.36 ได้ดังนี้

$$[K]_{\text{sys}} = 10^5 \begin{bmatrix} (\bar{u}_1) & (\bar{v}_1) & (\bar{u}_2) & (\bar{v}_2) & (\bar{u}_3) & (\bar{v}_3) \\ 18+3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -18 & & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & & & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ -18 & & 18 & & & -5 \\ & & & 5 & & -3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & & & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & & -5 & -3\sqrt{2} & 5+3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (\bar{u}_1) \\ (\bar{v}_1) \\ (\bar{u}_2) \\ (\bar{v}_2) \\ (\bar{u}_3) \\ (\bar{v}_3) \end{matrix}$$

(6x6)

ลำดับขั้นตอนต่อไปก็คือการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกันกับที่ใช้ในตัวอย่าง 2.2 ดังนี้

จุดต่อที่	ค่าเคลื่อนตัว	แรงกระทำ
1	$\bar{u}_1 = ?$	$F_{\bar{u}_1} = 500$
	$\bar{v}_1 = ?$	$F_{\bar{v}_1} = -2,500$
2	$\bar{u}_2 = 0$	$F_{\bar{u}_2} = ?$
	$\bar{v}_2 = ?$	$F_{\bar{v}_2} = 0$
3	$\bar{u}_3 = 0$	$F_{\bar{u}_3} = ?$
	$\bar{v}_3 = ?$	$F_{\bar{v}_3} = ?$

นั่นคือ ระบบสมการจะมีลักษณะดังนี้

$$\begin{matrix} [K]_{sys} \\ (4 \times 4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ 0 \\ \bar{v}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ -2,500 \\ F_{\bar{u}_2} \\ 0 \\ F_{\bar{u}_3} \\ F_{\bar{v}_3} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

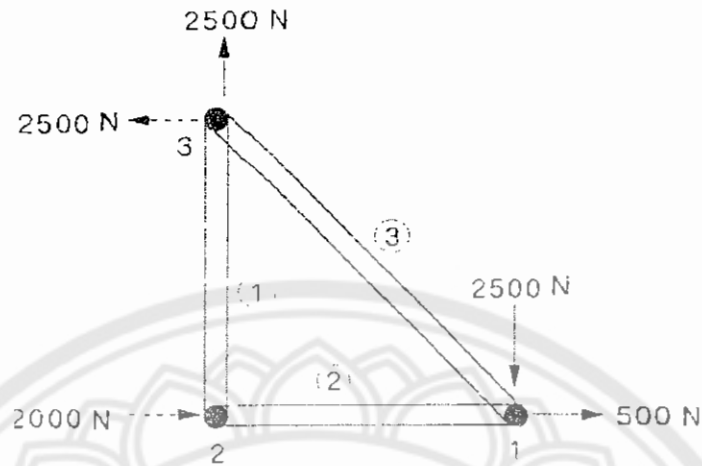
จากนั้นเราสามารถใช้สมการย่อยที่ 1, 2 และ 4 ในระบบสมการรวม (2.72) นี้ เพื่อหาค่าของค่าเคลื่อนตัว ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -1.11111 \times 10^{-3} \text{ cm} \\ \bar{v}_1 &= -7.000367 \times 10^{-3} \text{ cm} \\ \bar{v}_2 &= 0 \text{ cm} \end{aligned}$$

จากนั้นจึงนำสมการย่อยที่ 3, 5 และ 6 ในระบบสมการรวม (2.72) คำนวณแรงปฏิกิริยาออกมาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_{\bar{u}_2} &= 2000 \text{ N} \\ F_{\bar{u}_3} &= -2500 \text{ N} \\ F_{\bar{v}_3} &= 2500 \text{ N} \end{aligned}$$

ค่าคำตอบของแรงปฏิกิริยาที่ได้นี้ สามารถนำตรวจสอบว่าถูกต้องหรือไม่ เนื่องจากทั้งโครงสร้างจำเป็นต้องอยู่ในสภาวะสมดุล กล่าวคือ ผลรวมของแรงในแนวแกน X และแกน Y จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ ดังแสดงในรูปที่

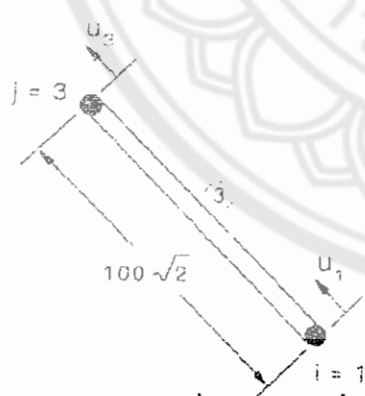


รูป 2.37 การตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเนื่องจากทั้งโครงสร้าง
ต้องอยู่ในสภาวะสมดุล

เมื่อเราทราบค่าการเคลื่อนที่ที่จุดต่อต่างๆ เราก็สามารถหาความเค้นในเอลิเมนต์ต่างได้โดยใช้กฎของ
ฮุก ดังนี้

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{u_j - u_i}{L}$$

โดย u_j และ u_i เป็นการเคลื่อนที่ที่จุดต่อในแนวของเอลิเมนต์นั้น ดังตัวอย่างเช่น ค่าความเค้นในเอลิเมนต์ที่ 3
คือ



รูป 2.38 เอลิเมนต์ที่ 3 และการเคลื่อนที่
ของจุดอ่อนที่ปลายทั้งสอง

$$\sigma_{\text{element 3}} = (30 \times 10^6) \frac{(u_3 - u_1)}{100\sqrt{2}} \quad (2.73)$$

ค่า u_1 และ u_3 ในสมการ (2.54) สามารถคำนวณได้จาก
ค่าการเคลื่อนที่ที่จุดต่อ 1 และ 3 ในแนวแกน X และ Y ได้โดย
เมทริกซ์ $[R]$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ของการแปลงค่าการเคลื่อนที่ ที่จ
ต่อระหว่างแนวแกนย่อยของเอลิเมนต์กับระบบแกนรวมใหญ่
X-Y ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u \\ \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} R \\ \end{bmatrix}_{(2 \times 4)} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \end{Bmatrix}_{(4 \times 1)}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\bar{u}_1) \\ (\bar{v}_1) \\ (\bar{u}_3) \\ (\bar{v}_3) \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.1111 \times 10^{-3} \\ -7.1111 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -4.16667 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จากสมการ (2.73) ค่าความเค้นในเอลิเมนต์ที่ 3 คือ

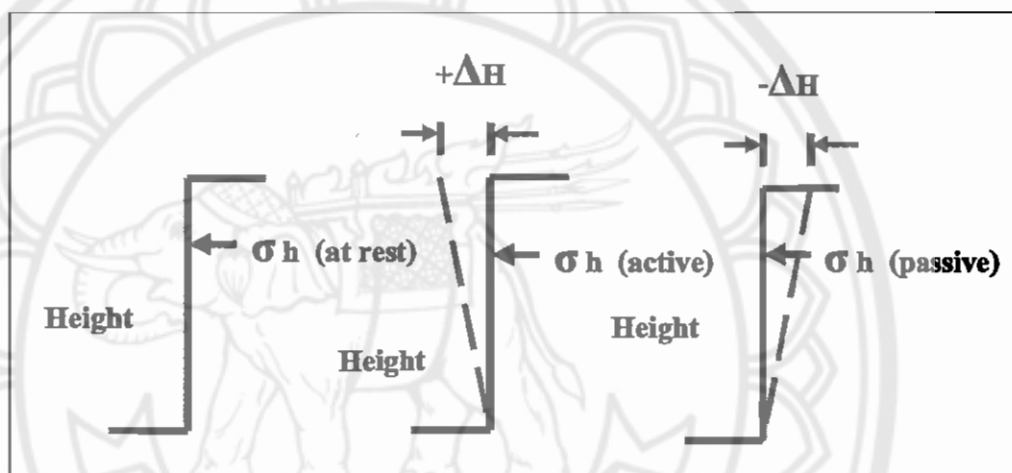
$$\begin{aligned}
 \sigma_{element3} &= \frac{(30 \times 10^6) \cdot 0 + 4.16667 \times 10^{-3}}{100\sqrt{2}} \\
 &= 884 \text{ N/cm}^2
 \end{aligned}$$

(อ้างอิงจากหนังสือไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม ผู้แต่ง ปราโมทย์ เจริญอำไพ)

แรงดันด้านข้างของดิน

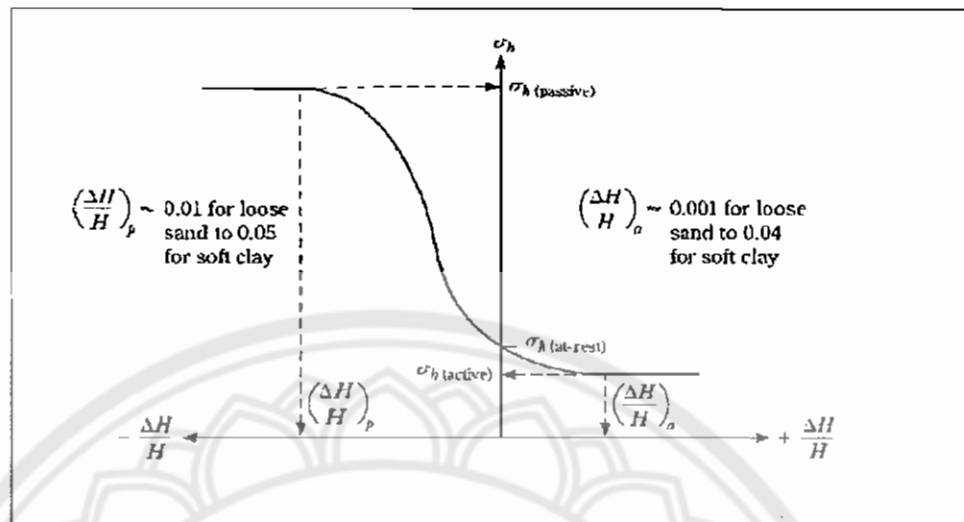
เมื่อต้องตัดสินใจในแนวตั้งจำเป็นต้องใช้กำแพงกันดินหรือเข็มเพื่อป้องกันการพังทลายของดิน ในการออกแบบโครงสร้างดังกล่าวนี้ต้องทราบค่าแรงดันด้านข้างของดิน ซึ่งแรงดันดินด้านข้างที่เกิดขึ้นจะมีค่าไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการดังนี้

- 1) ชนิดของกำแพงกันดินและลักษณะการเคลื่อนตัว
- 2) ค่า shear strength parameters ของดิน
- 3) ค่าหน่วยน้ำหนักของดิน
- 4) การระบายน้ำของดินหลังกำแพง



รูปที่ 2.39 แรงดันด้านข้างที่กระทำบนกำแพงกันดินที่สภาวะต่างๆ

ในรูปที่ 2.39 แสดงให้เห็นกำแพงกันดิน ความสูง H ในรูปที่ 2.39 (a) กำแพงกันดินไม่มีการเคลื่อนที่ แรงดันด้านข้างของดินที่สภาวะนี้ เรียกว่าแรงดันดินในสภาวะสมดุล (at rest) จากรูปที่ 2.39 (b) กำแพงมีการเคลื่อนที่เอียงออกจากดินหลังกำแพงเมื่อกำแพงเอียงออกจากดินหลังกำแพงเพียงพอ จะทำให้ดินหลังกำแพงเกิดการวิบัติ แรงดันดินที่สภาวะนี้เรียกว่าแรงดันเชิงรุก (active earth pressure) และในรูปที่ 2.39 (c) เมื่อกำแพงถูกดันเคลื่อนเข้าหามวลดินหลังกำแพงเพียงพอ จะทำให้ดินหลังกำแพงเกิดการวิบัติ แรงดันดินที่สภาวะนี้เรียกว่าแรงดันเชิงรับ (passive earth pressure) ในรูปที่ 2.40 แสดงให้เห็นแรงดันด้านข้างของดินที่สภาวะต่างๆของการเคลื่อนตัวของกำแพงกันดิน



รูปที่ 2.40 การเปลี่ยนแปลงของแรงดันด้านข้างของดินที่ $\Delta H/H$ ต่างๆ

แรงดันของดินธรรมชาติ (Bowles, 1988) เมื่อกำแพงกันดินอยู่ในสถานะสมดุล (State of Elastic Equilibrium) คือ ดินไม่มีการเคลื่อนที่หน่วยแรงในแนวดิ่งที่ความลึกใด ๆ จะมีค่าเท่ากับน้ำหนักของดิน คูณด้วย ความลึกของดินที่ตำแหน่งนั้น ส่วนหน่วยแรงในแนวราบมีความสัมพันธ์กับหน่วยแรงในแนวดิ่ง โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ ซึ่งเรียกว่า สัมประสิทธิ์แรงดันทางด้านข้างเมื่อดินอยู่ในสถานะสมดุล (Coefficient of Lateral Earth Pressure at Rest, K_0) ดังนั้นแรงที่กระทำต่อกำแพงกันดิน ณ ความลึก H และ ดินมีความหนาแน่น γ จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_h = K_0 \gamma H \quad (2.74)$$

Bowles (1988) ได้ให้ค่า K_0 นี้แตกต่างกันไปตามชนิดของดินดังนี้

Normally Consolidated Clay	$K_0 = 0.5 - 0.75$
Over-consolidated Clay	$K_0 = 1.0$
Loose Sand	$K_0 = 0.4$
Dense Sand	$K_0 = 0.6$

พิจารณากำแพงกันดินในแนวดิ่ง ความสูง H ดังรูปที่ 2.41 เมื่อดินหลังกำแพงมีหน่วยน้ำหนัก γ และรับแรงกระทำแบบแผ่กระจายคงที่ เท่ากับ q ที่ผิวดินค่ากำลังรับแรงเฉือนของดินคือ

$$\tau = c + \sigma' \tan \varphi \quad (2.75)$$

เมื่อ c = แรงยึดเหนี่ยวของดิน (cohesion)

φ = มุมเสียดทานของดิน (angle of friction)

σ' = หน่วยแรงตั้งฉากประสิทธิผล (effective normal stress)

ที่ระยะ z ใดๆ จากผิวดิน สามารถหาค่าหน่วยแรงดันในแนวดิ่งได้ดังนี้

$$\sigma_v = q + \gamma z \quad (2.76)$$

ถ้ากำแพงอยู่ในสภาวะสมดุล (at rest) และให้ σ_v' เป็นหน่วยแรงในแนวดิ่งประสิทธิผลและ σ_h เป็นหน่วยแรงในแนวราบจะมีความสัมพันธ์ว่า

$$\sigma_h = K_o \sigma_v' + u \quad (2.77)$$

เมื่อ u = แรงดันน้ำในดิน (pore water pressure)

K_o = สัมประสิทธิ์แรงดันดินที่สภาวะสมดุล (at rest)

สำหรับดิน normally consolidated soil Jaky (1944) ได้ให้ความสัมพันธ์โดยประมาณตามสมการ

$$K_o \approx 1 - \sin \varphi' \quad (2.78)$$

Brooker และ Ireland (1965) ได้ให้สมการสำหรับหา K_o โดยประมาณสำหรับดิน normally consolidated clays ดังนี้

$$K_o \approx 0.95 - \sin \varphi' \quad (2.79)$$

เมื่อ φ' = มุมเสียดทานของดินที่ได้จากการทดสอบแบบระบายน้ำ

จากการทดลองของ Brooker และ Ireland (1965) ค่า K_0 สำหรับดิน normally consolidated clays ยังสามารถหาได้จากความสัมพันธ์กับค่า PI ดังนี้

$$K_0 = 0.40 + 0.007 (PI) \text{ เมื่อ } PI \text{ มีค่า ตั้งแต่ } 0 \text{ ถึง } 40$$

$$K_0 = 0.64 + 0.001 (PI) \text{ เมื่อ } PI \text{ มีค่า ตั้งแต่ } 40 \text{ ถึง } 80$$

สำหรับดิน overconsolidated clays หาค่าได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$K_{o(\text{overconsolidated})} \approx K_{o(\text{normally consolidated})} \frac{OCR}{1 + OCR}$$

เมื่อสร้างกำแพงกันดินแล้วมวลดินจะส่งแรงกระทำด้านข้างต่อกำแพงกันดิน ทำให้ตัวกำแพงกันดินเคลื่อนที่ออกจากมวลดิน และ ดินจะเกิดการขยายตัวแรงกระทำของดินในลักษณะนี้ เรียกว่า แรงดันดินเชิงรุก (Active Lateral Earth Pressure) การเคลื่อนที่ของส่วนบนของกำแพงกันดินจะต้องมากพอที่จะทำให้เกิดแรงกระทำของดินมีค่าโดยประมาณ ดังนี้ (Bowles, 1988)

ชนิดและสภาพของดิน	ปริมาณการเคลื่อนที่
ดินที่ไม่มีแรงยึดเหนี่ยวในสภาพแน่น	0.001 H ถึง 0.002 H
ดินที่ไม่มีแรงยึดเหนี่ยวในสภาพหลวม	0.002 H ถึง 0.004 H
ดินที่มีแรงยึดเหนี่ยวในสภาพแข็ง	0.01 H ถึง 0.02 H
ดินที่มีแรงยึดเหนี่ยวในสภาพอ่อน	0.02 H ถึง 0.05 H

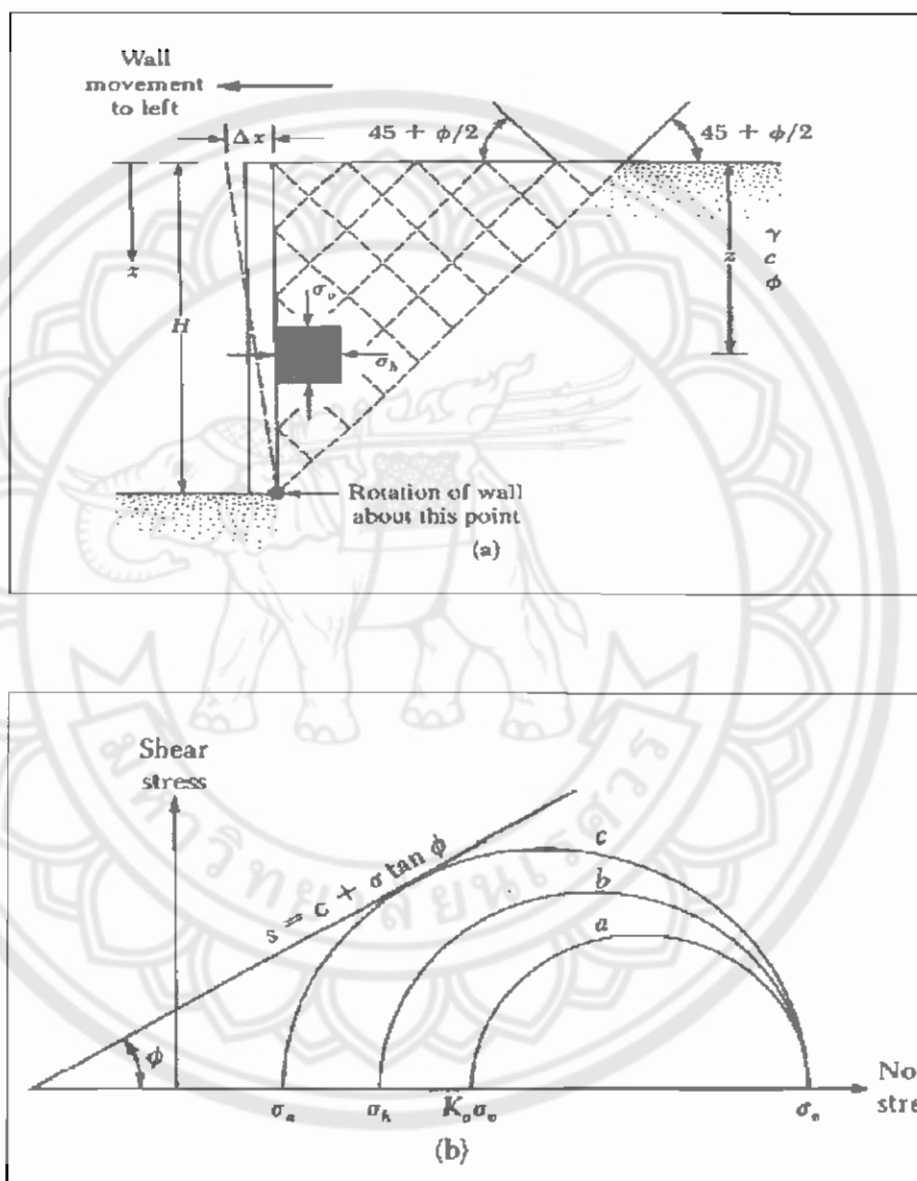
จากรูปที่ 2.41(a) ถ้ากำแพงกันดินเคลื่อนที่ออกจากดินด้านหลังเป็นระยะ Δx แรงดันด้านข้างของดินหลังกำแพงจะมีค่าลดลงเมื่อ ไม่มีความฝืดระหว่างกำแพงกับดิน แรงดันด้านข้างจะมีค่าเท่ากับแรงดันที่สภาวะสมดุล

$$(\sigma_h = K_0 \sigma_v) \text{ เมื่อ } \Delta x = 0 \text{ อย่างไรก็ตามถ้า } \Delta x > 0 \text{ ค่าแรงดันด้านข้างของดินจะน้อยกว่า } K_0 \sigma_v$$

จากวงกลมของมอร์ในรูปแบบที่ 2.41 (b) วงกลม a และวงกลม b แทนที่สภาวะ $\Delta x = 0$ และ $\Delta x > 0$ ตามลำดับ และถ้า Δx ยังเพิ่มขึ้นจะทำให้วงกลมของมอร์ สัมผัสกับเส้นวิถีของ มอร์-คูลอมบ์ (Mohr-Coulomb failure envelope) ซึ่งมีค่าตามสมการ

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

ซึ่งวงกลมนี้คือวงกลม c ในรูปที่ 2.41 (b) ซึ่งเป็นสถานะที่ก่อให้เกิดการวิบัติขึ้นในมวลดิน โดยแรงดันดินในแนวราบมีค่าเท่ากับ σ_a ซึ่งค่า σ_a นี้เรียกว่า แรงดันเชิงรุก (active pressure) แนวการพิบัติที่เกิดขึ้นในมวลดินจะทำมุม $\pm(45 + \phi/2)$ กับแนวราบ ดังรูปที่ 2.41 (a)



รูปที่ 2.41 แรงดันดินเชิงรุก

จากสมการวงกลมของมอร์ สามารถหาหน่วยแรงหลัก (principle stress) ของวงกลมที่สัมผัสกับเส้นวิถีของ มอร์-กูลอมป์ ได้ดังนี้

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45 + \phi/2) + 2c \tan(45 + \phi/2) \quad (2.80)$$

จากวงกลม c ในรูปที่ 2.41 (b) หน่วยแรงในระนาบหลัก $\sigma_1 = \sigma_v$

หน่วยแรงในระนาบรอง $\sigma_3 = \sigma_2$

ดังนั้น

$$\sigma_v = \sigma_o \tan^2(45 + \phi/2) + 2c \tan(45 + \phi/2)$$

$$\sigma_o = \frac{\sigma_v}{\tan^2(45 + \frac{\phi}{2})} - \frac{2c}{\tan(45 + \frac{\phi}{2})}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \sigma_v \tan^2(45 - \phi/2) - 2c \tan(45 - \phi/2) \\ &= \sigma_v K_o - 2c \sqrt{K_o} \end{aligned}$$

เมื่อ

$$K_o = \tan^2(45 - \phi/2) \text{ สัมประสิทธิ์ที่แรงดันด้านข้างเชิงรุกของดิน}$$

(Coefficient of Active Lateral Earth Pressure)

พบว่า ที่ผิวดินความลึก $z=0$ ค่า $\sigma_v = 0$ ดังนั้นจะได้ว่าค่าแรงดันเชิงรุกมีค่าเท่ากับ $-2c \sqrt{K_o}$

ซึ่งเป็นหน่วยแรงดึง และหน่วยแรงดึงนี้จะมีค่าลดลงจนเป็นศูนย์ที่ความลึก $z = z_c$ ดังสมการ

$$\gamma z_c K_o - 2c \sqrt{K_o} = 0$$

หรือ

$$z_c = \frac{2c}{\gamma \sqrt{K_o}} \quad (2.81)$$

ความลึก z_c เรียกว่า ความลึกของ tensile crack เนื่องจากแรงดึงที่เกิดขึ้นในดิน จะทำให้เกิดรอยแตกขึ้นระหว่างดินกับกำแพง

แรงดันดินเชิงรับ ในกรณีที่ กำแพงกันดินเคลื่อนที่เข้าหามวลดินทำให้มวลดินหดตัว จะเกิดแรงต้านข้างด้านทานการเคลื่อนตัวของกำแพงกันดิน แรงกระทำของดินในลักษณะนี้ เรียกว่า แรงดันดินเชิงรับ (Passive Lateral Earth Pressure) การเคลื่อนที่ของส่วนบนของกำแพงกันดินที่จะทำให้เกิดแรงต้านทานของมวลดินมีค่าโดยประมาณ ดังนี้ (Lambe, 1979)

ชนิดและสภาพของดิน

ปริมาณการเคลื่อนที่

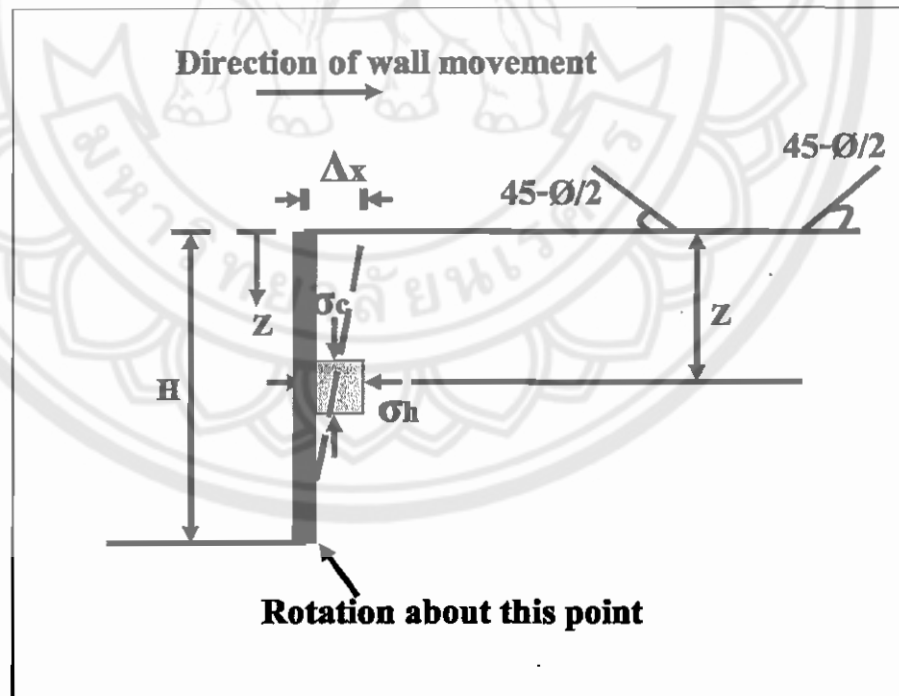
ดินที่ไม่มีแรงยึดเหนี่ยวในสภาพแน่น

0.02 H

ดินที่ไม่มีแรงยึดเหนี่ยวในสภาพหลวม

0.15 H

ค่าสัมประสิทธิ์แรงดันทางด้านข้าง เมื่อมวลดินถูกกระทำ เรียกว่า K_p (Coefficient of Passive Lateral Earth Pressure) ค่าสัมประสิทธิ์แรงดันทางด้านข้าง จะเปลี่ยนจาก K_0 ไปเป็น K_a หรือ K_p มีความสัมพันธ์กับ ขนาด และทิศทาง การเคลื่อนที่ ของส่วนบนของกำแพงกันดิน



รูปที่ 2.42 แรงดันเชิงรับ

จากรูปที่ 2.42 เมื่อกำแพงกันดินอยู่ในแนวดิ่ง และดินถมหลังกำแพงอยู่ในแนวราบที่ความลึก z จากผิวดิน ค่าแรงดันในแนวดิ่งของดินสามารถคำนวณได้จาก $\sigma_v = \gamma z$ ถ้ากำแพงกันดินไม่เคลื่อนที่ แรงดันด้านข้างของดินจะอยู่ที่สภาวะสมดุล (at rest) คำนวณได้จาก $\sigma_h = K_o \sigma_v$ ที่สภาวะนี้

ในรูปที่ 2.42 และเมื่อกำแพงถูกดันเข้าหาหน้าดินเป็นระยะ Δx ค่าแรงดันในแนวดิ่งมีค่าเท่าเดิมแต่ แรงดันในแนวราบจะเพิ่มขึ้น จนกระทั่งดินวิบัติเมื่อวงกลมสัมผัสกับเส้น Mohr-Coulomb Envelope

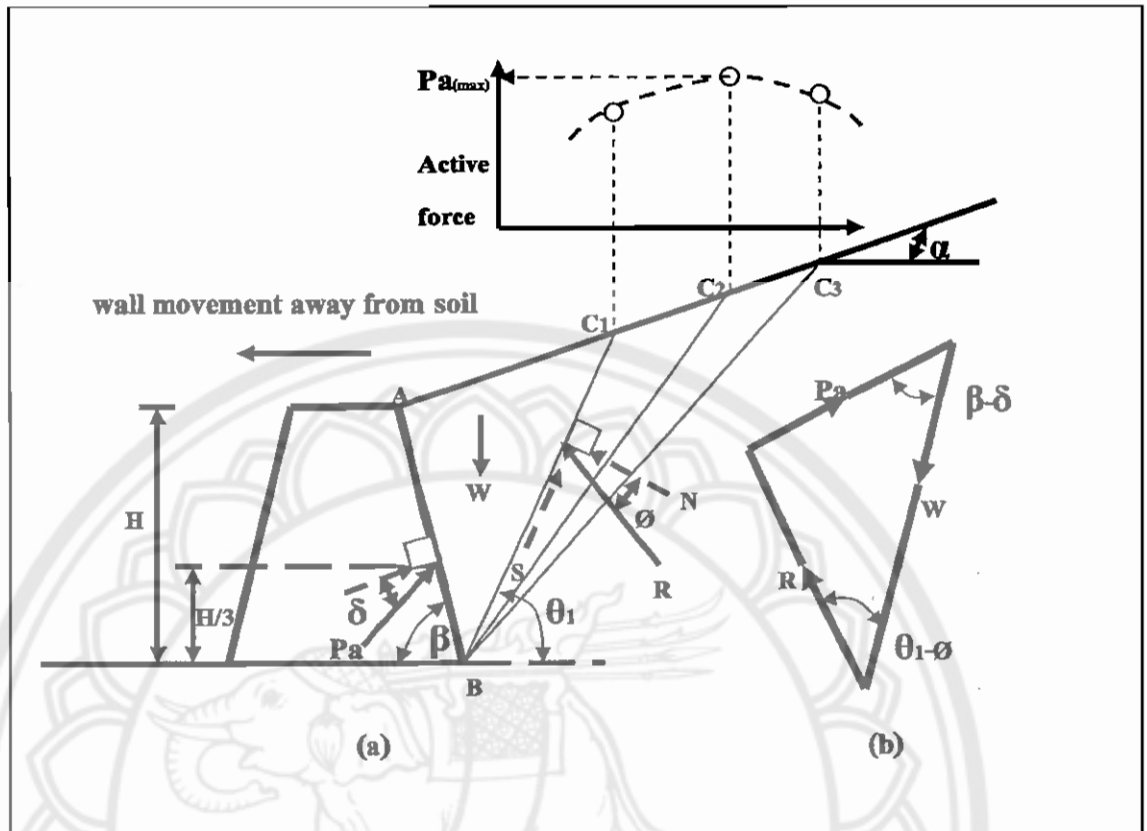
วงกลม C ค่าแรงดันด้านข้างของดินที่สภาวะนี้เรียกว่า แรงดันเชิงรับ (passive pressure) เมื่อให้ หน่วยแรงหลักคือ σ_p และหน่วยแรงรองคือ σ_v จะได้สมการดังนี้

$$\sigma_p = \sigma_v \tan^2(45 + \phi/2) + 2c \tan(45 + \phi/2) \quad (2.82)$$

ทฤษฎีแรงดันดินกรณีผิวดินมีความต้าน

ทฤษฎีแรงดันของมวลดินโดย Coulomb ในปี ค.ศ.1776 Coulomb ได้ตั้งทฤษฎีแรงดันของมวลดินขึ้น โดยมีสมมติฐานดังนี้

1. มวลดินมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic) และมีเนื้อเดียวกันตลอด (Homogeneous) ประกอบด้วยแรงเสียดทานภายใน (Internal Friction) และ แรงยึดเหนี่ยว (Cohesion)
2. พื้นผิวของการวิบัติเป็นระนาบ (Plane) โดยที่ Coulomb เองได้คาดว่า ควรจะเป็นพื้นผิวโค้ง และ พื้นผิว ของดินที่ถมหลังกำแพงกันดินเป็นระนาบ โดยอาจมีความชันได้
3. แรงเสียดทานแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดพื้นผิวของการวิบัติ และ ค่าแรงเสียดทานระหว่างเม็ดดินมีค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน (μ) เท่ากับ $\tan \phi$
4. พื้นผิวของการวิบัติเป็นวัตถุแข็ง (Rigid Body)
5. มีแรงเสียดทานระหว่างมวลดินและผิวของกำแพงกันดิน
6. พิจารณาการวิบัติเพียง 2 มิติ และการวิบัติ พิจารณาเป็น Plane Strain



รูปที่ 2.43 แรงดันเชิงรุกของทฤษฎี Coulomb

ข้อเสียที่สำคัญ ของทฤษฎีของ Coulomb คือ ข้อสมมติที่ว่า มวลดินต้องเป็นมวลดินแบบสมบูรณ์ (Ideal) และพื้นผิวของการวิบัติเป็นพื้นระนาบ การเกิดแรงดันเชิงรุกในรูปที่ 2.43 กำแพงจะเคลื่อนที่ออกจากมวลดิน และ Coulomb ได้สมมุติระนาบการวิบัติขึ้นตามแนว $BC_1, BC_2, BC_3, \dots$ เพื่อหาแรงดันของดินหลังกำแพงจนได้ค่าแรงดันสูงสุด $P_{a(max)}$ ค่าแรงดันที่ได้นี้คือค่าแรงดันเชิงรุกของ Coulomb ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$P_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cdot K_a$$

และ

$$P_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cdot K_p$$

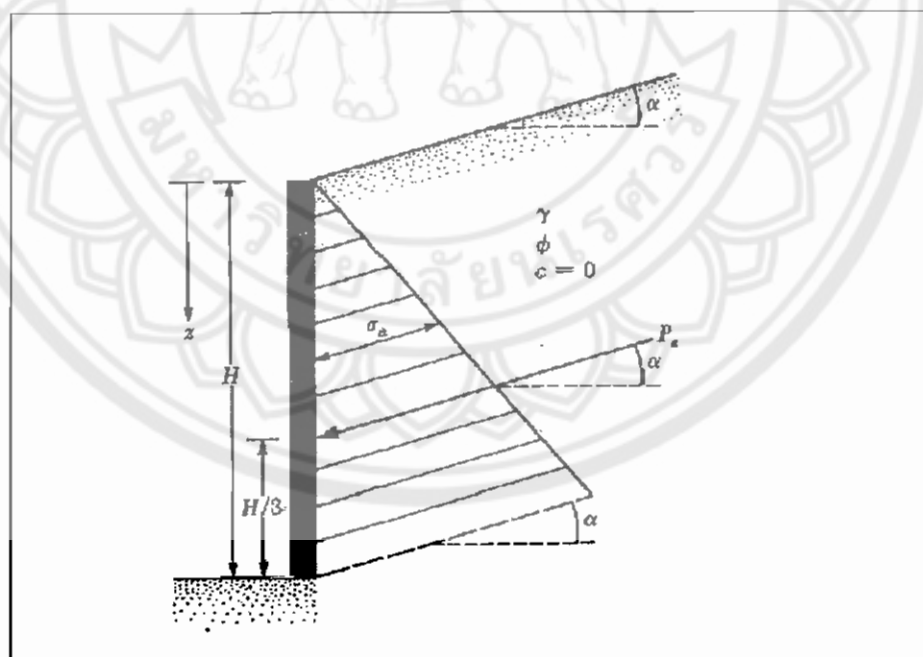
โดยที่

$$K_a = \frac{\sin^2(\beta + \phi)}{\sin^2(\beta) \cdot \sin(\beta - \delta) \cdot \left[1 + \frac{\sin(\phi + \delta) \cdot \sin(\phi - \alpha)}{\sin(\beta - \delta) \cdot \sin(\phi + \beta)} \right]^2} \quad (2.83)$$

และ

$$K_p = \frac{\sin^2(\beta - \phi)}{\sin^2(\beta) \cdot \sin(\beta + \delta) \cdot \left[1 - \frac{\sin(\phi + \delta) \cdot \sin(\phi + \alpha)}{\sin(\beta + \delta) \cdot \sin(\phi + \beta)} \right]^2} \quad (2.84)$$

ทฤษฎีแรงดันของมวลดินโดย Rankine (Bowles, 1988) ในปี ค.ศ. 1857 Rankine ได้ตั้ง ทฤษฎีแรงดันของมวลดินขึ้น โดย พิจารณามวลดินในสภาวะสมดุลแบบพลาสติก และใช้สมมติฐานต่างๆ เช่นเดียวกันกับของ Coulomb แต่ไม่คำนึงถึงแรงยึดเหนี่ยวหรือ แรงเสียดทานระหว่างกำแพงกับมวลดิน ซึ่งทำให้การ พิจารณาปัญหาง่ายขึ้นมาก ตัวแปรต่างๆที่ใช้ในการคำนวณและลักษณะของแรงดันดิน แสดงในรูปที่ 2.44 ดังนั้น จะได้ว่า



รูปที่ 2.44 แรงดันเชิงรุกของดินจากทฤษฎีของ Rankine

$$P_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cdot K_a$$

และ

$$P_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cdot K_p$$

โดยที่

$$K_a = \cos(\alpha) \cdot \frac{\cos(\alpha) - \sqrt{\cos^2(\alpha) - \cos^2(\phi)}}{\cos(\alpha) + \sqrt{\cos^2(\alpha) - \cos^2(\phi)}} \quad (2.85)$$

และ

$$K_p = \cos(\alpha) \cdot \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{\cos^2(\alpha) - \cos^2(\phi)}}{\cos(\alpha) - \sqrt{\cos^2(\alpha) - \cos^2(\phi)}} \quad (2.86)$$

แรงดันดินเชิงรุก (Tschebotarioff, 1951) ถ้ามีการเปลี่ยนแปลง ระดับของดินธรรมชาติ จะเป็นโดยการขุด หรือ การถม จะทำให้ ดินพยายามเคลื่อนตัว ไปยังส่วนที่ต่ำกว่าการเปลี่ยนแปลง ระดับของดินนี้ จะมีความสูงจำกัด H_{cr} (Critical Height) ที่ดินยังสามารถอยู่ในสภาพสมดุล เนื่องจาก มีแรงต้านทานอันเกิดจาก แรงยึดเหนี่ยว และ แรงเสียดทาน ซึ่งสามารถหาได้ว่า

$$H_{cr} = \frac{4c}{\gamma} \cdot \tan\left(45 + \frac{\phi}{2}\right) \quad (2.87)$$

เมื่อเลยระดับของความสูงจำกัดนี้แล้ว ดินก็จะเกิดการวิบัติ จึงจำเป็นต้องสร้างกำแพงกันดินขึ้น เพื่อป้องกันการวิบัติของดิน