

## บทที่ 2

# หลักการและทฤษฎี

### 2.1 การอบชุบ ( Heat Treatment )

การอบชุบเหล็กกล้า เป็นการให้ความร้อนกระทำต่อเหล็กเพื่อเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของเหล็กและโครงสร้างภายในของเหล็ก การอบชุบที่สำคัญและใช้กันมากมีหลายอย่าง รวมถึงการชุบแข็ง ซึ่งใช้ในการวิจัยนี้ด้วย

การชุบแข็ง ( Hardening ) คือ การชุบเหล็กเพื่อให้เหล็กมีความแข็งมากขึ้น ขั้นแรกจะต้องเผาเหล็กจากอุณหภูมิบรรยากาศให้ร้อนประมาณ  $800^{\circ}\text{C} - 900^{\circ}\text{C}$  ( ขึ้นอยู่กับชนิดของเหล็ก ) ภายในเตาไฟฟ้าหรือเตาอบชุบอื่น ๆ ที่สามารถควบคุมอุณหภูมิได้ เมื่อเหล็กร้อนจนถึงอุณหภูมินี้ โครงสร้างของเหล็กจะเปลี่ยนเป็นออสเทนไนต์ โดยทั่วๆ ไปแล้ว มักจะเผาให้อุณหภูมิของเหล็กร้อนเลขเส้น  $A_3$  ( ดูในภาพที่ 1.1 ) ไปประมาณ  $50^{\circ}\text{C} - 75^{\circ}\text{C}$  แต่จะไม่เผาเหล็กให้อุณหภูมิสูงเกินพิคคินี้ เพราะจะทำให้เกรนของเหล็กขยายตัวโคขึ้น ซึ่งจะทำให้คุณภาพของเหล็กหลังการชุบแข็งเสียไป เพื่อเป็นการรักษาซีเมนไดต์ ซึ่งมีความแข็งสูงอยู่แล้ว

เมื่อเผาเหล็กจนกลายเป็นออสเทนไนต์แล้วจะต้องทิ้งไว้ที่อุณหภูมินี้ระยะหนึ่งเวลาโดยประมาณ 1 ชั่วโมง ต่อความหนา 25 มิลลิเมตร เพื่อให้เหล็กร้อนทั่วถึงกันตลอดทั้งแท่ง จากนั้นจึงนำเอาเหล็กออกจากเตา และทำให้เย็นโดยรวดเร็วด้วยการจุ่มลงในน้ำ ( Water Quench ) , ในน้ำเกลือ หรือน้ำมัน ( Oil Quench ) ในขณะที่ทำให้เหล็กเย็นโดยรวดเร็วนี้ ออสเทนไนต์จะเปลี่ยนกลับไปเป็นเฟอร์ไรท์และเฟิร์ลไรท์ไม่ทัน แต่จะให้โครงสร้างที่มีความแข็งสูง เรียกว่า มาร์เทนไซต์ ถ้าจะพิจารณาโดยละเอียดแล้วมาร์เทนไซต์ก็คือเหล็กเฟอร์ไรท์นั่นเอง แต่เป็นเหล็กเฟอร์ไรท์ที่มีปริมาณคาร์บอนสูงกว่าสภาพสมดุลตามแผนภาพสมดุล ( Equilibrium diagram ) ที่เป็นเช่นนี้ เพราะอะตอมของคาร์บอนไม่มีเวลาพอที่จะเคลื่อนไหวยมารวมกันเป็น

ซีเมนไดต์ ดังนั้นความแข็งของเหล็กที่ผ่านการชุบแข็งจึงขึ้นอยู่กับสองสิ่ง คือ

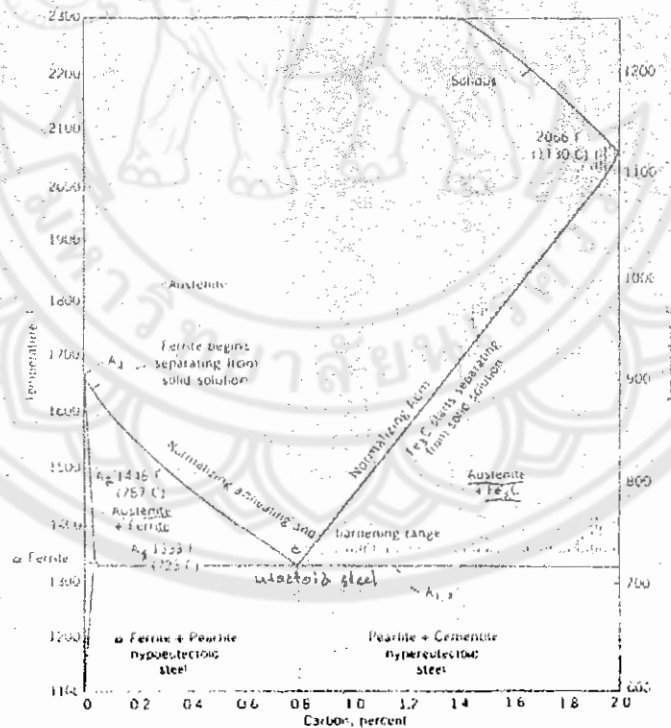
- 1) ปริมาณธาตุคาร์บอนในเหล็ก กล่าวคือ ถ้าในเหล็กมีธาตุคาร์บอนมาก โอกาสที่จะเปลี่ยนไปเป็นมาร์เทนไซต์ยิ่งง่าย และให้ปริมาณของมาร์เทนไซต์มาก

- 2) อัตราความเร็วในการชุบ กล่าวคือ ถ้าทำให้เหล็กเย็นเร็วๆ โอกาสที่ออสเทนไนต์จะเปลี่ยนเป็นมาร์เทนไซต์ก็มีมาก ในทางตรงกันข้าม ถ้าปล่อยให้เหล็กเย็นช้าๆ ออสเทนไนต์จะ

เปลี่ยนเป็นเฟอร์ไรท์ กับซีเมนไตต์หมด ไม่เกิดมาร์เทนไซต์ เหล็กก็ไม่แข็ง

ในการชุบแข็งเหล็กที่อุณหภูมิไม่เกิน  $900^{\circ}\text{C}$  ถ้าลักษณะของชิ้นงานที่จะชุบแข็งมีลักษณะซับซ้อน การทำ Preheating จะทำเป็น 2 ชั้น โดยการเผาช่วงที่หนึ่งจะขึ้นไปถึงอุณหภูมิ  $400^{\circ}\text{C}$  และทิ้งไว้ระยะหนึ่งที่อุณหภูมินี้ ( ประมาณครึ่งนาทีต่อความหนาหนึ่งมิลลิเมตร ) ต่อจากนั้นเพิ่มอัตราการให้ความร้อนในช่วงที่สองขึ้นไปจนถึงอุณหภูมิ  $650^{\circ}\text{C}$  ทิ้งไว้ระยะหนึ่งที่ช่วงเวลาเดียวกันกับที่ได้กระทำในตอนแรก เมื่อทำการเผาในชั้นที่สองนี้ผ่านไปจนถึงอุณหภูมิชุบแข็งที่ต้องการ สำหรับกรณีชิ้นงานมีรูปร่างไม่ซับซ้อนมากนัก การเผาจะกระทำเพียงช่วงเดียว คือ จะเผาเหล็กจากอุณหภูมิห้องไปที่  $650^{\circ}\text{C}$  ขึ้นเดียว จากนั้นจึงเผาเหล็กต่อจนถึงอุณหภูมิชุบแข็งตามต้องการ

ในกรณีที่อุณหภูมิชุบแข็งสูงกว่า  $900^{\circ}\text{C}$  การเผาในชั้นของการทำ Preheating จะต้องกระทำ 2 – 3 ช่วง ก่อนถึงอุณหภูมิชุบแข็งที่ต้องการ ไม่ว่าลักษณะของชิ้นงานจะเป็นอย่างไร ทั้งนี้เพราะเหล็กกล้ามีธาตุผสมปริมาณสูง คุณสมบัติการนำความร้อนจะอยู่ในเกณฑ์ต่ำ ถ้าทำการเผาในอัตราสูงจะเกิดการบิดตัวเนื่องจากความร้อนที่ผิวกับภายในต่างกันมาก



รูปที่ 2.1 แผนภาพสมดุลของเหล็กกับคาร์บอน

## 2.2 ความแข็ง (Hardness)

ความแข็งของวัสดุเป็นคุณสมบัติทางกลที่สำคัญอย่างหนึ่งของวัสดุ ที่จะบ่งบอกถึงกำลังวัสดุ ความยากง่ายเมื่อถูกแปรรูป และความต้านทานต่อการกดให้เกิดรอยบุ๋มบนผิวของวัสดุ

ในการใช้งานของวัสดุเหล็กกล้าแต่ละชนิดหรือวัสดุอื่นๆ ให้มีความแข็งแรงเหมาะสมกับสภาพการใช้งานได้ดีที่สุด จึงได้มีการวัดความแข็งของผิวเหล็ก เช่น ตามวิธีระบบบริเนล (Brinell) , ระบบวิกเกอร์ (Vicker) และระบบรอกเวล (Rockwell - C) ซึ่งแต่ละระบบจะเหมาะสมกับเหล็กในลักษณะที่แตกต่างกัน โดยทั่วไปแล้วชิ้นงานที่ไม่ได้อบชุบจะนิยมทดสอบความแข็งระบบบริเนล ส่วนชิ้นงานที่อบชุบแล้วจะนิยมทดสอบตามระบบรอกเวล - C

ในการทดสอบตามวิธีรอกเวล HRB จะใช้ลูกบอลเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1/16 นิ้ว ส่วนการทดสอบตามวิธีรอกเวล HRC จะใช้เพชรรูปกรวยมีมุม 120 องศา ตามวิธี HRC จะใช้ทดสอบกับชิ้นทดสอบที่เป็นเหล็กกล้าชุบแข็ง และตาม HRB จะใช้ทดสอบกับเหล็กกล้าไม่ชุบแข็ง ผิวทดสอบจะต้องเรียบ เป็นมัน ปราศจากวัสดุอื่นรวมทั้งสารหล่อลื่น

### 2.2.1 การทดสอบความแข็งของวัสดุตามวิธีแบบบริเนล (Brinell)

การทดสอบความแข็งตามวิธีบริเนล (Brinell) นี้ วิศวกรชาวสวีเดน J.A.Brinell ได้นำมาใช้ก่อนตั้งแต่ปี ค.ศ. 1849 โดยเริ่มเป็นสูตรดังนี้ :

$$\begin{array}{l} \text{ความแข็งตามบริเนล} \quad \text{HB} = \text{F/S} \\ \text{โดย} \quad \text{F} = \text{แรงที่ใช้ทดสอบเป็น kp ทำเป็น N ได้ } 0,102 \text{ N} \end{array}$$

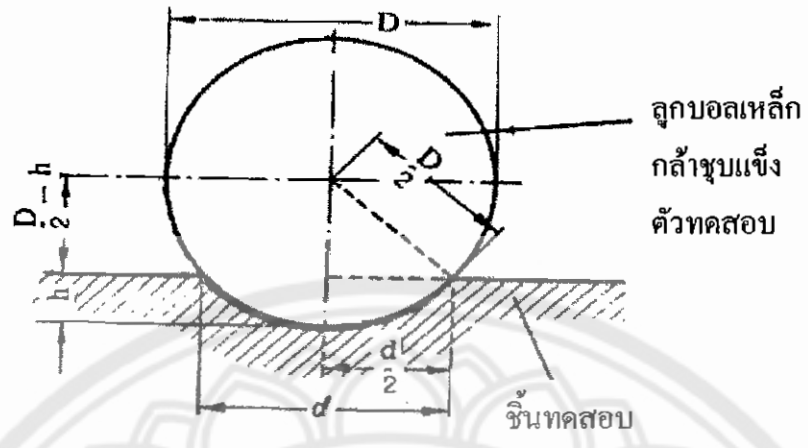
$$\text{เพราะว่า} \quad 1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N} \quad (2.1)$$

$$S = \text{พื้นที่ของรอยกดเป็น mm}^2$$

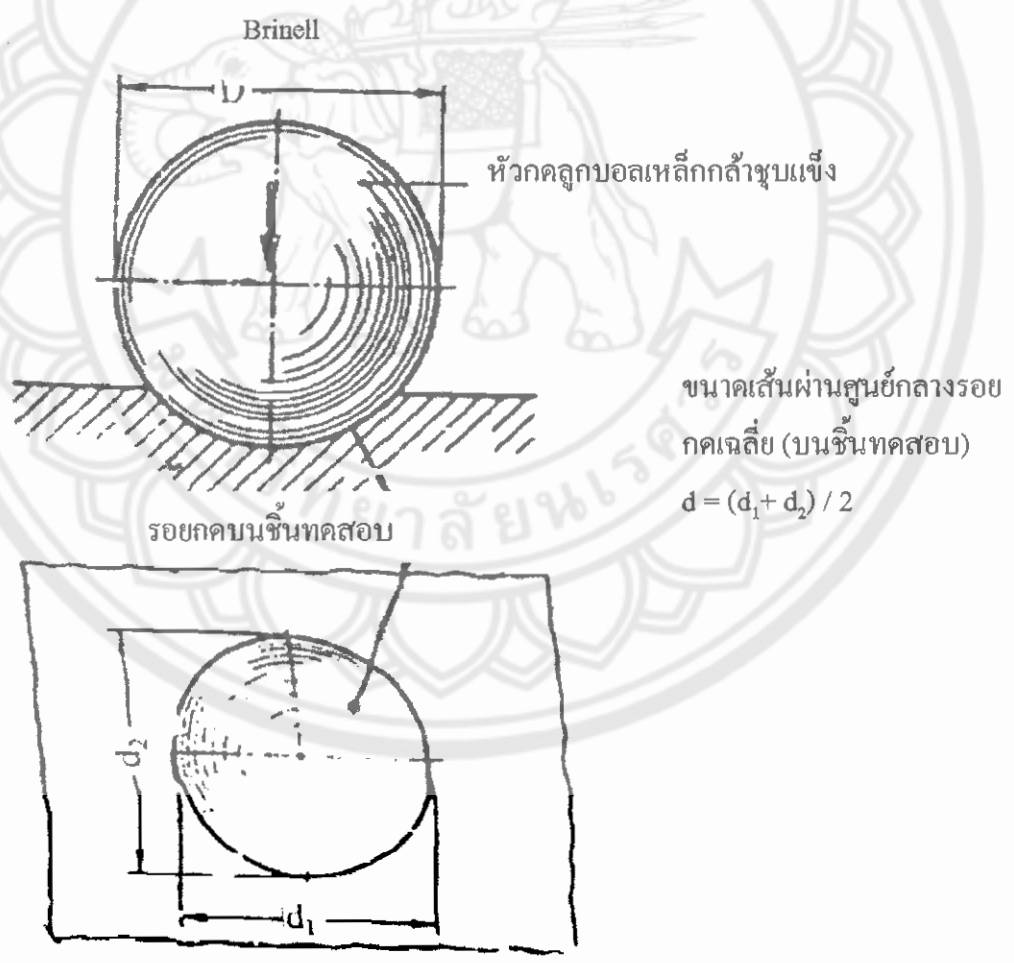
แทนค่าลงในสมการที่ (2.1) จะได้

$$\text{HB} = 0,102 \text{ F/S} \quad (2.2)$$

$$S = \pi \cdot D \cdot h \quad (2.3)$$



รูปที่ 2.2 ขนาดทางเรขาคณิตช่วยในการหาพื้นที่รอยกด



รูปที่ 2.3 การทดสอบความแข็งวิธีบริเนล

จากรูป  เส้นประ จะได้;

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2} - h\right)^2$$

$$\left(\frac{D}{2} - h\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\frac{D}{2} - h = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$h = \frac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{2}$$

เอาค่า  $h$  แทนใน (2.3) จะได้ :

$$S = \pi \cdot D \cdot \left(\frac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{2}\right)$$

แล้วแทนใน (2.2) จะได้

$$HB = \frac{0,102(2F)}{\pi \cdot D(D - \sqrt{D^2 - d^2})} \quad (2.4)$$

ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง  $D$  ของลูกบอลเหล็ก \* (ซัดผิวมัน) มีขนาดมาตรฐานคือ 10 5 2,5 2 และ 1 mm การเลือกแรงกดทดสอบต้องให้มากพอที่จะเกิดเป็นรอยกด เส้นผ่านศูนย์กลาง  $d = 0,24D \dots 0,6.D$  ทั้งนี้ให้ได้ค่าที่แน่นอน

หมายเหตุ : \* หัวกดทดสอบเป็นวัสดุทำจากโลหะแข็งหรือเหล็กกล้าชุบแข็ง ความแข็งของลูกกลมทำจากโลหะแข็งจะต้องมีความแข็งอย่างน้อยที่สุด 1500 HV 10 โดยวัสดุที่ใช้ทำจะต้องเป็น WC-6Co โลหะแข็งเจือ 1 ถึง 2% (Ti Ta Nb) C มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $\geq 620000 \text{ N/mm}^2$  ความหนาแน่น  $14,9 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$  ใช้ทดสอบวัสดุที่มีความแข็งไม่เกิน 650 HB สำหรับความแข็งลูกกลมทำจากเหล็กชุบแข็งมีความแข็งค่าสูงสุด 850 HV 10 ใช้ทดสอบวัสดุที่มีความแข็งไม่เกิน 300 HB

ในการที่จะปรับค่าแรงทดสอบให้ได้แม่นยำและให้ได้ผล จะสามารถทำการเปรียบเทียบผลการทดสอบได้นั้นจะต้องมีค่าขึ้นภาระ (degree of loading) ที่มาตรฐานคือ 30 10 5 2,5 1,25

ค่าความแข็งจะสามารถเปรียบเทียบได้ เมื่อขึ้นทดสอบหลายครั้งให้ค่าขึ้นภาระ และเวลาที่ใช้กดทดสอบเหมือนกัน

$$\text{ขึ้นภาระ (degree of loading)} \quad B = \frac{0,102 \cdot F}{D^2} \quad \text{หน่วยเป็น N/mm}^2$$

เวลาที่ใช้ทดสอบนั้นขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุ

ตัวอย่าง สำหรับเหล็กกล้า 
$$F = \frac{30 \cdot D^2}{0,102} = \frac{30 \cdot 100}{0,102}$$

ใช้ลูกบอลเหล็ก ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง  $D = 10 \text{ mm}$

ค่าชั้นภาระของเหล็กกล้า  $= 30$  (ดูได้จากตารางที่ 5.2);  $F=29420 \text{ N}$

ในการทดสอบความแข็งตามวิธีบริเนลล์ ผิวชิ้นงานที่ทดสอบต้องเรียบ เป็นมันปราศจากวัสดุอื่น ออกไซด์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งวัสดุหล่อลื่น เหมาะสำหรับวัสดุที่มีความอ่อนเหนียว ความหนาของชิ้นงานต้องมีขนาดอย่างน้อยที่สุด 8 เท่าของรอยที่ลูกบอลกดลงไป

#### 2.2.1.1 เงื่อนไขการทดสอบ

ก) อุณหภูมิทดสอบจะอยู่ระหว่าง (ตามเกณฑ์) 10 ถึง 35 °C สำหรับการทดสอบที่มีการควบคุมจะอยู่ที่  $23 \pm 5 \text{ °C}$

ข) เวลาการทดสอบ : ให้ช่วงเวลาที่เริ่มกดขึ้นทดสอบจนถึงแรงกดทดสอบรวมอยู่ระหว่าง 2 ถึง 8 วินาที แล้วให้หัวกดแช่อยู่ในชิ้นทดสอบอีก 10 ถึง 15 วินาที

ค) ระยะห่างระหว่างกึ่งกลางของรอยกดของขอบชิ้นทดสอบมีค่าดังนี้ (เท่ากับค่า  $a_{\min}$ ) จากรูปที่ 2.4 ประกอบ

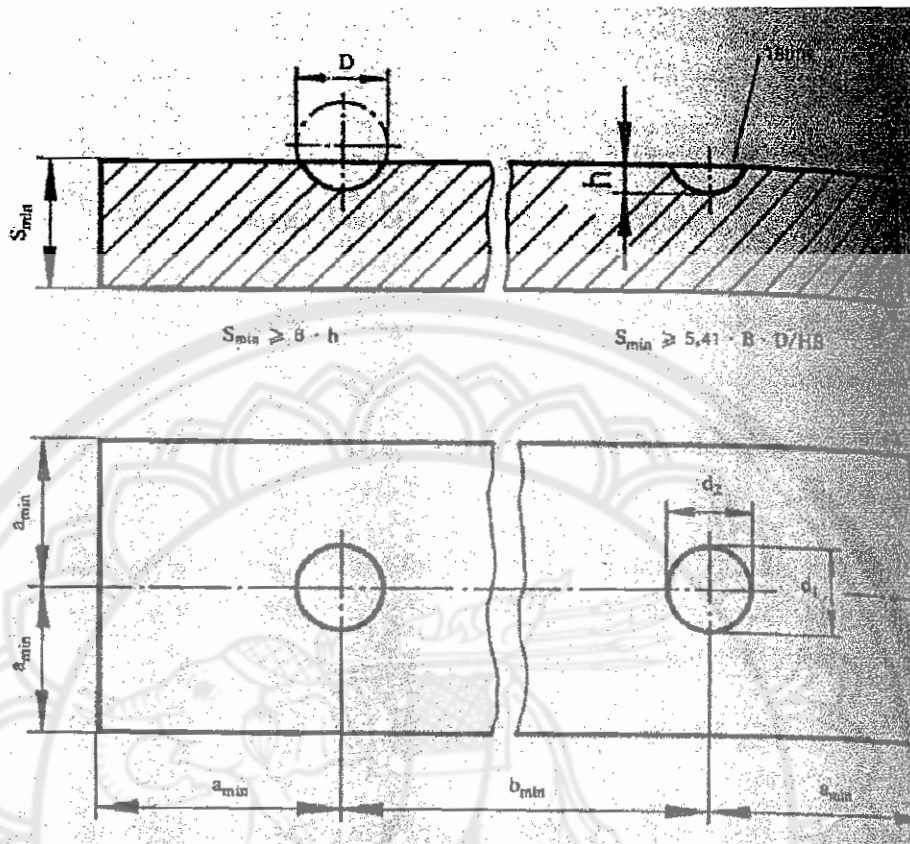
สำหรับเหล็กกล้า เหล็กหล่อ ทองแดง และทองแดงเจืออย่างน้อย 2,5 เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางรอยกดเฉลี่ย ( $a_{\min} = 2,5d$ )

สำหรับโลหะเบา ตะกั่ว ดีบุก และส่วนเจือของมันอย่างน้อย 3 เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางรอยกดเฉลี่ย ( $a_{\min} = 3.d$ )

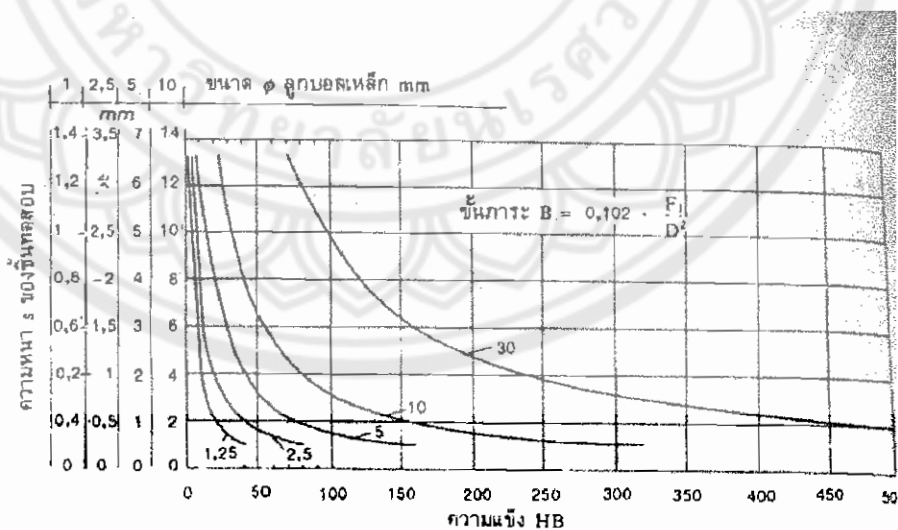
ง) ระยะห่างระหว่างกึ่งกลางของรอยกดทั้งสอง (เท่ากับค่า  $b_{\min}$ )

สำหรับเหล็กกล้า เหล็กหล่อ ทองแดง และทองแดงเจืออย่างน้อย 4 เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางรอยกดเฉลี่ย ( $b_{\min} = 6.d$ )

สำหรับโลหะเบา ตะกั่ว ดีบุก และส่วนเจือของมันอย่างน้อย 6 เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางรอยกดเฉลี่ย ( $b_{\min} = 6.d$ )



รูปที่ 2.4 แสดงระยะห่างของรอยกด ค่าความหนาต่ำสุดของชั้นทดสอบ  $S_{min}$



รูปที่ 2.5 ความหนาต่ำสุดของชั้นทดสอบสัมพันธ์กับชั้นการ B และความแข็ง (คำนวณจาก 8 เท่าของรอยกดลึก h)

### 2.2.1.2 ตัวอย่างวิธีการอ่านสัญลักษณ์ย่อของการทดสอบความแข็งแบบบริเนล

350 HB = ความแข็งบริเนล 350 ใช้ลูกบอลขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm แรงที่ใช้กด 29,420 N เวลาที่ใช้กดแช่ 10–15 วินาที

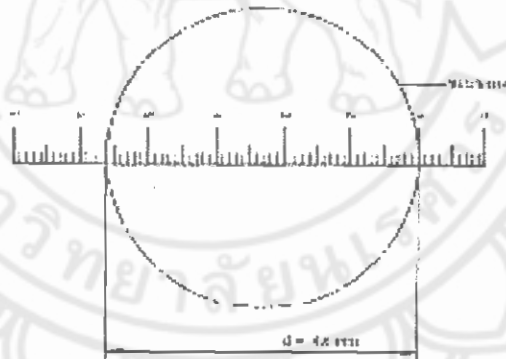
ตามปกติถ้าไม่มีเลขอยู่ด้านหลัง HB แสดงว่าใช้เกณฑ์ทดสอบมาตรฐาน คือ ใช้ลูกบอลขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm แรงที่ใช้กด 29420 N เวลาที่ใช้กดแช่ 10–15 วินาที

120 HB 5/250/30 ความแข็งบริเนล 120 ใช้ลูกบอลขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 mm แรงที่ใช้กด 2,450 N เวลาที่ใช้กดแช่ 30 วินาที

170 HB 2.5/62.5 ความแข็งบริเนล 170 ใช้ลูกบอลขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2.5 mm แรงที่ใช้กด 613 N (62.5, 9.81 N = 631 N)

สำหรับเหล็กกล้าไม่เจือจะมีความสัมพันธ์ระหว่างค่าความต้านแรงดึงกับความแข็งตามบริเนล ดังนี้

$$R_m = 3.5 \cdot HB \quad \text{หน่วยเป็น N/mm}^2 \quad (2.5)$$



รูปที่ 2.6 การวัดขนาดรอยกดบนชิ้นทดสอบด้วยเลนส์ขยาย อ่านค่าได้ 4.6 mm

## 2.2.2 การทดสอบความแข็งตามวิธี รอกเวล (Rockwell)

### 2.2.2.1 ในการทดสอบตามวิธีรอกเวล HRC

จะใช้เพชรรูปกรวยมีมุม  $120^\circ$  หรือตามรอกเวล HRB จะใช้ลูกบอลเหล็กกล้า เส้นผ่านศูนย์กลาง  $1/6''$



ตามวิธี HRC จะใช้ทดสอบกับชิ้นทดสอบที่เป็นเหล็กกล้าชุบแข็งและตามวิธี HRB จะใช้ทดสอบกับเหล็กกล้าที่ไม่ชุบแข็ง ผิวทดสอบจะต้องเรียบ ( $R_a = 0,8\mu m$  ถึง  $1,6\mu m$ ) เป็นมันปราศจากวัตถุอื่นรวมทั้งสารหล่อลื่น

ก) จากรูปข้างบนขั้นแรก (ซ้ายสุด) กดหัวเพชรบนชิ้นงานทดสอบด้วยแรงกดนำ 10 kp เป็นเวลานาน 5 ถึง 8 วินาที จากนั้น จะดึงเข็มนาฬิกาไปที่เลขศูนย์

ข) ขั้นที่สอง (รูปกลาง) ใช้แรงกดเพิ่มขึ้นไปอีก 140 kp รวมได้ 150 kp (แรงกดนำ + แรงกดเพิ่ม) ทำให้หัวเพชรกดเข้าไปในชิ้นงานทดสอบได้ เป็นเวลานาน 5 ถึง 8 วินาที เข็มของนาฬิกาวัดจะหมุนทวนเข็มนาฬิกาจาก 100 ไปยัง (ตัวอย่างเช่น) ราวๆ 40

ค) ขั้นที่สาม จะลดแรงกดเพิ่ม 140 kp ออกทำให้เหลือแรงกดนำเพียง 10 kp ด้วยเหตุนี้ ทำให้เข็มวัดนาฬิกาถอยกลับจากราวๆ 40 มายังราวๆ 60 ตามตัวเลขที่กล่าวมาครั้งหลังนี้จะเป็นค่าความแข็งของรอกเวล : HRC = 60

ในเครื่องทดสอบความแข็งสมัยใหม่สามารถอ่านค่าความแข็งรอกเวลที่นาฬิกาได้ทันที แต่ในกรณีนี้จะเอาค่าความแข็งจากรอกเวลจากระยะความลึก  $e$  ของหัวเพชรตามสูตรคำนวณ (ข้างบน) ความลึกรอยจิก  $e$  อนุญาตให้ได้สูงสุดไม่เกิน  $1/10$  ของชิ้นงานที่ทดสอบ ด้วยเหตุนี้ผิวชิ้นงานชุบแข็งบางที่ชุบด้วยแก๊สไนโตรเจน จึงไม่สามารถทำการทดสอบได้

ตัวอย่างการอ่านสัญลักษณ์ย่อ :

45 HRC = ความแข็งตามรอกเวล 45 ตามวิธีรอกเวล C

80 HRB = ความแข็งตามรอกเวล 80 ตามวิธีรอกเวล B

การทดสอบความแข็งรอกเวล โดยใช้บอลเหล็ก (HRB) จะกระทำด้วยวิธีใช้เพชรรูปกรวยมาเป็นลูกบอลเหล็กชุบแข็ง ใช้แรงกดนำ 10 kp แรงกดที่เพิ่มเติม 90 kp ความหนาของชิ้นทดสอบจะเท่ากับ 12 เท่าของรอยกดลึกเป็นอย่างต่ำ

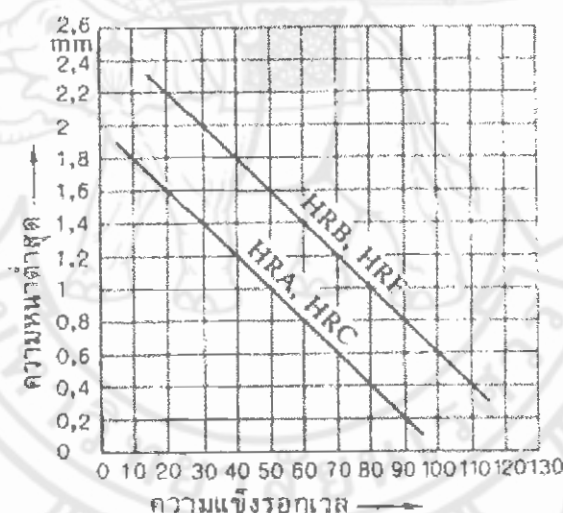
ตารางที่ 2.1 ตารางค่าความแข็งของวัสดุตามรอกเวล

วัสดุ	ความแข็งตามรอกเวล Kp/mm <sup>2</sup>
เหล็กกล้าชุบแข็งด้วยเปลวไฟ	54
เหล็กกล้าพื้คาร์บอน	62
เหล็กกล้าไนโตร	68

ในการทดสอบโลหะไม่ใช่อเหล็กหรือพลาสติก ฉนวนและปะเก็น จะใช้บอลเหล็กสี่ขนาด เส้นผ่านศูนย์กลาง  $1/8"$   $1/4"$  หรือ  $1/2"$  โดยขึ้นอยู่กับความแข็งของวัสดุแต่ละชนิด แรงที่ใช้ทดสอบมี 588 N 980 N หรือ 1,471 N เช่น การทดสอบความแข็งของพลาสติกโดยวิธีทดสอบ HRL ใช้บอลเหล็กขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง  $1/4"$  แรงกดทดสอบ 588 N สำหรับวัสดุฉนวนและวัสดุปะเก็น ใช้วิธีทดสอบ HRR ใช้บอลเหล็กขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง  $1/2"$  แรงกดทดสอบ 588 N ส่วนการทดสอบความแข็งตามวิธีรอกเวล HRA ใช้ทดสอบความแข็งของวัสดุที่แข็งมาก เช่น วูลแฟรมคาร์ไบด์ และอื่นๆ (ระหว่าง 60 ถึง 88 HRA)

วิธีรอกเวล HRC ใช้ทดสอบเหล็กกล้าชุบแข็ง (ระหว่าง 20 ถึง 70 HRC)

วิธีรอกเวล HRF ใช้ทดสอบเหล็กแผ่นบางที่ผ่านการรีดเย็น ทองแดง และทองเหลืองที่ผ่านการอบมาแล้ว (ระหว่าง 60 ถึง 115 HRF)



รูปที่ 2.7 แสดงความสัมพันธ์ของความหนาแน่นค่าสุดกับค่าความแข็งรอกเวลของหินทดสอบ

ต่อไปนี้เป็นตารางสำหรับแก้ไข สำหรับการทดสอบผิวงานโค้ง ตามมาตรฐาน ISO/R80-1968 หรือ ASTM E18-79



ตารางที่ 2.3 ค่าบวกเพิ่มค่าสำหรับแก้ไขบวก สำหรับพิกัดทดสอบตาม HRB หรือ HRF

ค่าความแข็ง		พิกัดสอบมีขนาด $\phi$ ทรงกระบอก						
HRB	HRF	6	10	13	16	19	22	25
0						4.5	3.5	3.0
10					5.0	4.0	3.5	3.0
20					4.5	4.0	3.5	3.0
30				5.0	4.5	3.5	3.0	2.5
40				4.5	4.0	3.0	2.5	2.5
50				4.0	3.5	3.0	2.5	2.0
60			5.0	3.5	3.0	2.5	2.0	2.0
70			4.0	3.0	2.5	2.0	2.0	1.5
80	5.0	3.5	2.5	2.0	1.5	1.5	1.5	1.5
1.590	4.0	3.0	2.0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.0
100	3.5	2.5	1.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.5

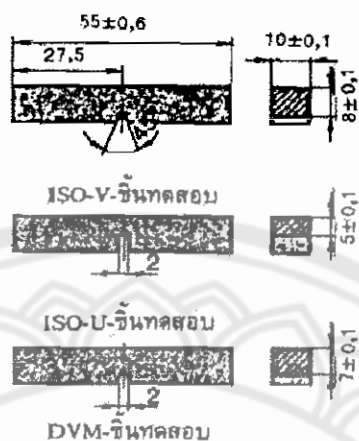
### 2.3 ความทนต่อแรงกระแทก ( Impact Strength )

ค่าที่ได้จากการทดสอบแรงกระแทก สามารถบอกได้ถึงความเหนียว ( toughness ) ของวัสดุที่นำมาทดสอบได้ การทดสอบแรงกระแทกนี้ เป็นการทดสอบแบบ Dynamic Test โดยการปล่อยให้ค้อนน้ำหนักตกลงมากระทบเหล็กตัวอย่างที่ทดสอบจนบิดงอเสียหาย การปล่อยให้ค้อนน้ำหนักตกลงมาเองจะก่อให้เกิดแรงกระแทกซึ่งสามารถคำนวณเป็นพลังงานออกมาได้

พลังงานของการกระแทกเพื่อทำให้เหล็กตัวอย่างเสียหายจะเท่ากับผลต่างของพลังงานที่ได้จากลูกค้อนก่อนกระทบและหลังกระทบแล้ว พลังงานนี้ขึ้นอยู่กับความเร็วของการแกว่งของลูกค้อน

#### 2.3.1 การทดสอบด้วยการตีหักแบบชาร์ปี (Charpy Impact Test) ตาม DIN 50115

เพื่อต้องการทราบค่าเหล็กกล้า เหล็กกล้าหล่อ มีความเหนียวและการเปลี่ยนรูป โดยใช้หัวค้อนตามรูปที่ 2.8 ปล่อยให้ลงมาให้กระทบกับชิ้นทดสอบ (specimen) ที่มีขนาดมาตรฐานต่างกันด้วยความเร็วหัวค้อนประมาณ 5 – 5.5 m/s เครื่องทดสอบนี้มีขนาดมาตรฐานตั้งแต่ 50 – 300 J สำหรับชิ้นทดสอบขนาดเล็กจะใช้กับเครื่องทดสอบขนาด 7.5 ถึง 50 J ใช้ความเร็วหัวค้อน 3.6 ถึง 4 m/s



รูปที่ 2.8 ลักษณะรูปร่างของชิ้นทดสอบ



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างประเภทของรอยแตกหักของชิ้นทดสอบเหล็กกล้าชนิดต่างๆ

2.3.1.1 การจะประเมินค่าหรือเปรียบเทียบค่าจากการทดสอบ จะต้องมีข้อมูลดังต่อไปนี้

- ก) งานที่ใช้ในการตี  $W_c$
- ข) ลักษณะรูปร่างของชิ้นทดสอบ
- ค) อุณหภูมิที่ใช้ทดสอบ (ในกรณีที่ไม่ได้บอกมาให้ทดสอบที่  $20^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ )
- ง) ทิศทางการตีชิ้นทดสอบที่ถูกยึดตามแนวขวางหรือตามแนวยาว
- จ) งานทั้งหมดที่หาค่าก่อนใช้ทั้งหมดในการทดสอบ

ความแตกต่างระหว่างวัสดุที่เหนียว (คือ เหล็กกล้าโครเมียม-นิกเกิล) กับวัสดุที่เปราะ (คือ เหล็กกล้าคาร์บอน) จะเห็นได้ตามรูปตัวอย่างของรอยแตกหักของชิ้นทดสอบ การทดสอบด้วยวิธีนี้เป็นการทดสอบแบบไดนามิกส์

$W_v$  งานที่ใช้ในการตี  $\alpha$  มุมที่ค้อน =  $160^\circ$

$a_k$  ความเหนียวของร่องบาก  $J/cm^2$   $\beta$  มุมที่ค้อนทำกับฐานคิดในแนวตั้ง

$S_0$  พื้นที่หน้าตัดชิ้นทดสอบ  $cm^2$   $L$  ความยาวของค้อนเป็น  $m$

$$W_v = F(H - h) \quad (2.6)$$

$$W_v = FL (\cos \beta - \cos \alpha) \quad (2.7)$$

$$a_k = W_v / S_0 \quad (2.8)$$

$$\text{ค่า } 1 J = 1 N.m = 1 Ws = 1 kg.m.^2 / s^2$$

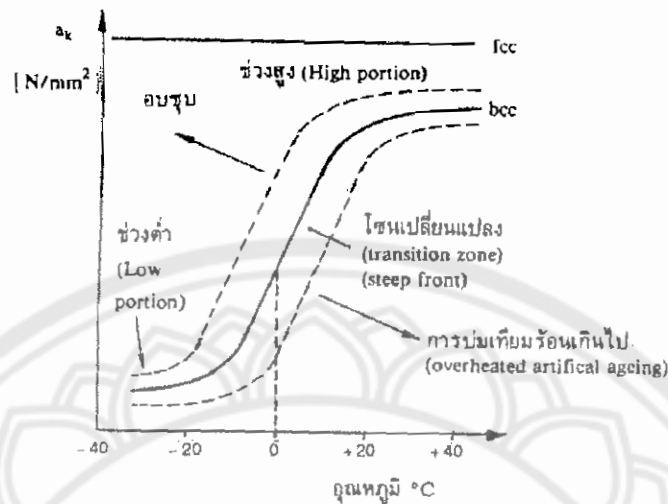
2.3.1.2 องค์ประกอบที่มีผลต่อแรงกระแทก คือ

ก) รอยบาก (notch) รูปตัว V จะแตกหักได้ง่ายกว่ารอยบากรูปตัว U

ข) ถ้าอุณหภูมิของวัสดุยิ่งต่ำจะเกิดการหักแบบเปราะได้ง่าย

ในการทดสอบแบบตีกระแทกนี้กับการหาความเหนียวของเหล็กกล้า เหล็กเหนียวหล่อ การบ่ม (ageing) ความเปราะจากความร้อน ความเปราะจากความเย็น และการตรวจสอบวัสดุที่ผ่านกรรมวิธีทางความร้อน (heat treatment)

ดังนั้น จึงมีการทดสอบชิ้นทดสอบหลายชิ้นที่เป็นวัสดุชนิดเดียวกันที่อุณหภูมิต่างๆกัน ตามรูปที่ 2.10 แสดงความแตกต่างกันของวัสดุเหล็ก ระหว่าง face centered cubic (fcc) และ body centered cubic (bcc)



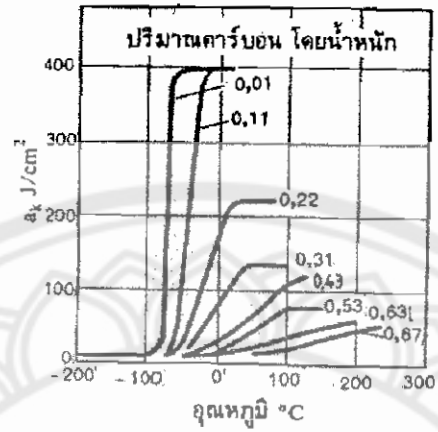
รูปที่ 2.10 แผนภาพความต้านแรงกระแทก ( $\sigma_y$ ) - อุณหภูมิ

วัสดุโครงสร้าง fcc เป็นวัสดุเนื้อเดียวกัน (homogeneous) จะมีค่าคงที่ตลอด (ระหว่าง  $-40^{\circ}\text{C}$  ถึง  $+40^{\circ}\text{C}$ ) และคงความเหนียว ซึ่งได้แก่วัสดุเหล็กกล้าออสเทนไนต์ นิกเกิล ทองแดง อะลูมิเนียม

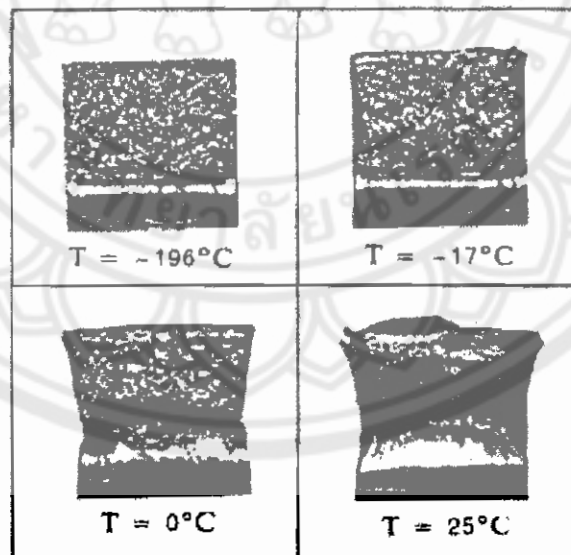
วัสดุโครงสร้าง bcc เช่น เหล็กกล้าไม่เจือหรือเจือต่ำทุกชนิด จะมีค่าความเหนียวดีที่อุณหภูมิสูง (high portion) แต่จะเปราะ (ค่าความเหนียวต่ำ) ที่อุณหภูมิต่ำ ค่าความเหนียวที่อยู่ระหว่างโซนของการเปลี่ยนแปลง (transition zone) ( $\approx -10^{\circ}\text{C}$  ถึง  $+10^{\circ}\text{C}$ ) ค่าความเหนียวจะไม่คงที่ (เมื่ออุณหภูมิเปลี่ยน ค่าความเหนียวเปลี่ยน) วัสดุที่มีเส้นโค้งในช่วงนี้ขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุซึ่งได้แก่เหล็กกล้าเฟอร์ไรต์

วัสดุที่มีเกรนละเอียด จะมีความเหนียวที่ช่วงต่ำ (low portion) มากกว่าวัสดุที่มีเกรนหยาบ

ความเหนียว ความเปราะของวัสดุสามารถดูได้จากรูปร่างรอยแตกดังต่อไปนี้ (พิจารณารูปที่ 2.12 ประกอบ)



รูปที่ 2.11 เส้นโค้ง  $a_k$ -T ของเหล็กกล้าไม่เจือ

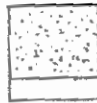


รูปที่ 2.12 รอยแตกจากการตีกระแทกที่อุณหภูมิต่างกัน วัสดุ St 37

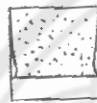




a. รอยแตกแบบเหนียว (ductile fracture) จะเกิดที่ช่วงสูง (High portion)



b. รอยแตกแบบเปราะ (brittle fracture) จะเกิดที่ช่วงต่ำ (Low portion)



c. รอยแตกแบบรวม (combined fracture) มีผิวมัน จะเกิดที่ช่วงเปลี่ยนแปลง ((transition zone))

รูปที่ 2.13 a-c. แสดงแบบต่างๆของรอยแตกหัก

ในการทำให้ชิ้นทดสอบมีอุณหภูมิต่างๆ ในการทดสอบจึงต้องใช้วิธีการต่างๆ เข้าช่วยดังต่อไปนี้ สำหรับ

-184°C ใช้อากาศเหลว

-72°C ใช้ส่วนประสมความเย็นของกรดคาร์บอนิกรูปหิมะ + แอลกอฮอล์

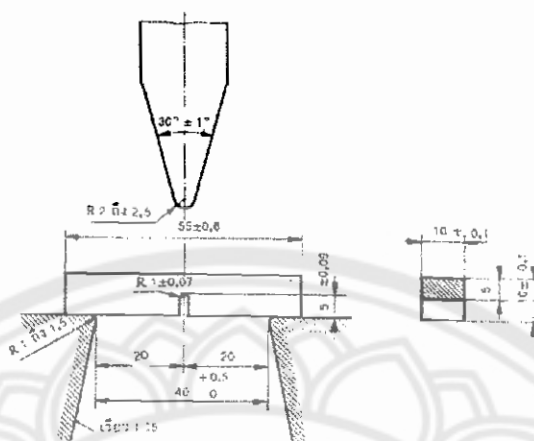
-21°C ใช้ส่วนประสมความเย็น เกลือแกง+น้ำแข็ง

0°C น้ำแข็ง

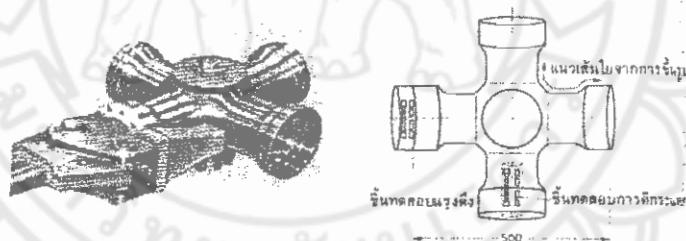
20°C อุณหภูมิห้องปรับอากาศ

100°C น้ำเดือด

200°C อ่างเกลือ



รูปที่ 2.14 ขนาดมาตรฐานการทดสอบจันทดสอบแบบชาร์ปี ตาม ISO 83-1976(E)



รูปที่ 2.15 a) ตัวอย่างการนำจันทดสอบด้วยการกระแทก และแรงค้ำจากหัว โรเตอร์ เฮลิคอปเตอร์ (BO 105)

### 2.3.1.3 การกำหนดสัญลักษณ์ตามมาตรฐานอุตสาหกรรมไทย

เนื่องจากพลังงานที่ใช้ค้ำมีขนาดต่างกัน จันทดสอบมีลักษณะรอยบากและขนาดต่างกัน ดังนั้นตามมาตรฐานอุตสาหกรรมไทย จึงเลือกใช้จันทดสอบที่มีลักษณะรอยบากเป็นตัว U ลึก 5 mm ขนาด 10 x 10 x 55 mm แต่ถ้าความลึกของรอยบากรูปตัว U เป็นขนาดอื่น ก็เขียนสัญลักษณ์ได้ดังนี้ เช่น

KCU 15/3 แสดงถึงการใช้พลังงานในการกระแทก 15 kgm และใช้ฉันทดสอบที่มีรอยบากลึก 3 mm

KCU 30/3 แสดงถึงการใช้พลังงานในการกระแทกตามปกติคือ 30 kgm และใช้ฉันทดสอบที่มีรอยบากลึก 3 mm

#### 2.3.1.4 วิธีการทดสอบ

- ก) ประกอบเครื่องทดสอบเพื่อทำการทดสอบแบบชาร์ปี้
- ข) ตรวจสอบขนาดของฉันทดสอบและวัดพื้นที่หน้าตัดด้วย
- ค) ยกค้อนตีขึ้นเล็กน้อยเพื่อที่จะวางฉันทดสอบให้ตั้งได้จากกับฐานรองรับ โดยให้รอยบากอยู่ตรงที่จุดกึ่งกลางระหว่างฐานรองรับ และอยู่ตรงกันข้ามกับค้อนที่ตี
- ง) ยกค้อนขึ้นจนกระทั่งเข็ม main pointer อยู่ตรงขีดตำแหน่งดี ซึ่งค้อนจะอยู่สูง โดยทำมุม  $160^{\circ}25'22''$
- จ) ตั้งเข็ม idle pointer ให้อยู่ตรงขีดตำแหน่งดีด้วย
- ฉ) ค้างค้อนปล่อยค้อนลงตี
- ช) เบรคค้อนที่ตีซึ่งแกว่งเลยไปทางด้านหลัง
- ซ) บันทึกอุณหภูมิทดสอบขณะนั้นด้วย
- ฌ) ถ้าฉันทดสอบไม่หักขาดออกจากกัน ค่าของการกระแทกจะไม่ถูกต้อง ดังนั้นจึงควรบันทึกไว้ว่า ฉันทดสอบไม่หักขาดออกจากกันด้วยค่าการกระแทกเท่าใด

#### 2.4 โครงสร้างจุลภาค ( Microstructure )

การศึกษาโครงสร้างจุลภาคของโลหะทำได้โดยนำชิ้นงานที่ขัดและกัดกรดแล้วไปตรวจสอบด้วยกล้องจุลทรรศน์ ลำแสงที่ส่องตกกระทบกับผิวชิ้นงานทดสอบจะสะท้อนผ่านเลนส์วัตถุและเลนส์ตาของกล้อง

ผลึกที่มีขนาดเล็กกว่า  $0.4 - 0.6 \mu\text{m}$  ไม่สามารถตรวจสอบด้วยกล้องจุลทรรศน์ออปติคอลได้ แม้ว่าจะใช้กำลังขยายสูงแล้วก็ตาม ในทางปฏิบัติจะใช้กล้องจุลทรรศน์ออปติคอลเพื่อศึกษา และถ่ายภาพโครงสร้างของโลหะที่ต้องการกำลังขยายไม่เกิน 1,000 - 1,500 เท่า ซึ่งอนุภาคที่เล็กที่สุดมีขนาดประมาณ  $0.4 - 0.6 \text{ mm}$  จะนำภาพที่ได้ไปขยายให้ใหญ่ขึ้นอีกแต่มีรายละเอียดคงเดิมและความชัดเจนก็ด้อยลง ถ้าต้องการศึกษาลักษณะโครงสร้างที่ละเอียดยิ่งขึ้นต้องใช้กล้องจุลทรรศน์อิเล็กตรอน ( Electron microscope )

การศึกษาโครงสร้างของโลหะต้องคำนึงเสมอว่า ชิ้นงานที่ตัดมาตรวจสอบนั้นเป็นเพียงส่วนหนึ่งของโลหะ ผลึกใดที่เห็นเป็นวงกลมที่จริงแล้วอาจเป็นทรงกลม หรือทรงกระบอกก็ได้ ตาข่ายที่อยู่รอบๆ ผลึกที่ปรากฏเป็นระนาบนั้นคือรอยตัดผ่านเปลือกที่ห่อหุ้มต่างๆ

การวิเคราะห์โครงสร้างของโลหะด้วยกล้องจุลทรรศน์ออปติคัล หรืออิเล็กตรอนจะให้ข้อมูลเกี่ยวกับโครงสร้างของโลหะผสม แต่ไม่สามารถบอกได้ว่าอะตอมของส่วนผสมในโลหะนั้นกระจายตัวเป็นอย่างไร

#### 2.4.1 ขั้นตอนการเตรียมชิ้นงานเพื่อศึกษาโครงสร้างจุลภาค

##### 2.4.1.1 เลือกและตัดตัวอย่างงาน ( Sampling and Section )

เป็นการคัดเลือกงานตรวจสอบที่เหมาะสมและตัดเตรียมตามจำนวนที่ต้องการ อาจต้องตัดหลายลักษณะ เช่น ตามขวาง , ตามยาว หรืออื่นๆ

##### 2.4.1.2 การทำเรือนชิ้นงานและหมายงาน ( Mounting and Marking )

เป็นการนำชิ้นงานที่มีขนาดเล็กหรือบาง ซึ่งไม่สะดวกในการทำงานจึงควรนำไปทำเรือนชิ้นงาน ในแผ่นพลาสติกบางชนิด พร้อมกับหมายงาน มีจุดมุ่งหมายเพื่อ

ก) เพื่อจับถือหรือยึดโคสะดวขณะเตรียมและตรวจสอบ

ข) เพื่อให้มีขนาดเหมาะสมกับเครื่องหรือกล้องตรวจสอบ

ค) เพื่อให้ทำเครื่องหมายได้ง่าย เช่น หมายเลขชิ้นงาน

การทำเรือนชิ้นงาน มีทั้งการทำเรือนชิ้นงานเย็น ( Cold Mounting ) และการทำเรือนชิ้นงานร้อน ( Hot Mounting ) ในกรณีที่ต้องขัดมันด้วยน้ำยาอเล็กโตรโพลีท์ หรือที่ต้องนำไปตรวจสอบด้วยกล้องจุลทรรศน์อิเล็กตรอนต้องทำเรือนชิ้นงานด้วยพลาสติกผสมสารตัวนำ ( ผงทองแดง หรือผงเหล็ก )

##### 2.4.1.3 ขัดด้วยกระดาษทราย ( Grinding )

เริ่มด้วยกระดาษทรายเบอร์หยาบ ( 180 ) และเปลี่ยนเป็นที่ละเอียดขึ้น เช่น 220 240 320 400 600 1,000 และ 1,200 การขัดควรขัดไปทิศทางเดียวกัน ถ้าต้องการเปลี่ยนเบอร์ใหม่จึงเปลี่ยนทิศทางให้ตั้งฉากกับทิศทางเดิม และควรมีน้ำหล่อเย็นเสมอเพื่อระบายความร้อน และช่วยพัดพาเอาเศษจากการขัดออกไป การขัดมีหลายวิธี เช่น วางกระดาษทรายน้ำบนแผ่นกระจกแล้วขัดด้วยมือ ใช้เครื่องขัดแบบจานหมุนแล้วจับงานด้วยมือ หรือขัดอัตโนมัติ

##### 2.4.1.4 ขัดมัน ( Polishing )

เพื่อกำจัดรอยจากกระดาษทราย และทำให้ผิวงานเรียบเป็นเงาดังกระจก ซึ่งอาจขัดด้วยวิธีโดยงานขัด ( ใช้มือจับ หรือแบบอัตโนมัติ ) ผงที่ใช้ขัดมันมีหลายชนิด เช่น อลูมินา (  $Al_2O_3$  ) แมกนีเซียมออกไซด์ (  $MgO$  ) , โครมิกออกไซด์ (  $Cr_2O_3$  ) , เหล็กออกไซด์ (  $Fe_2O_3$  ) และกากเพชร

( Diamond compound ) โดยผงขัดเหล่านี้จะต้องละลายในน้ำก่อนการใช้งาน ถ้าใช้น้ำไม่ได้ อาจละลายในสารละลายอื่น เช่น ethylene glycol , alcohol ,Kerosene หรือ Glycerine นอกจากนี้ยังมีวิธีขัดมันด้วยอิเล็กทรอนิกส์ มีทั้งชนิดตั้งกับที่ และชนิดเคลื่อนย้ายได้ง่ายเหมาะกับการปฏิบัติงานภาคสนาม

#### 2.4.1.5 การกัดผิวงาน ( Etching )

ผิวงานที่ผ่านการขัดมันมาแล้วจะสามารถสะท้อนแสงได้ใกล้เคียงกับจึงมองเห็นเป็นพื้นเรียบสว่างตลอดผิวขัด และอาจมองเห็นรอยแตกร้าว หลุม หรือรูพรุน แต่ยังไม่สามารถมองเห็นโครงสร้างมหภาค หรือจุลภาค แสงที่ตกกระทบบนแต่ละเฟสจะถูกกักร่อนไม่เท่ากัน พอตรวจสอบด้วยกล้องจุลทรรศน์ แสงที่ตกกระทบบนแต่ละเฟสจะถูกสะท้อนกลับคนละทิศทาง ส่วนที่กักร่อนน้อย แสงจะสะท้อนกลับมากจึงเห็นเป็นบริเวณสว่าง ส่วนที่กักร่อนเป็นร่องลึก แสงจะสะท้อนออกนอกเลนส์จึงเห็นเป็นสีเทา หรือดำ

##### กรรมวิธีการกัดผิวงาน

การกัดผิวงานเป็นการทำให้เฟสต่างๆ บนผิวงานเกิดความแตกต่างกันอย่างชัดเจนโดยใช้น้ำยาชนิดต่าง ( เลือกตามชนิดของโลหะ ) สัมผัสกับผิวที่ต้องการตรวจสอบ โดยใช้วิธีจุ่มหรือกลวิธีพิเศษอื่นๆ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 2.4 ซึ่งการเลือกใช้กลวิธีนั้นให้พิจารณาตามลักษณะงาน ลักษณะที่ต้องการตรวจสอบ และลักษณะของน้ำยา



ตารางที่ 2.4 ตารางแสดงวิธีการกัดผิวงาน

วิธีการ	คำบรรยาย
Immersion etching	จุ่มผิวงานที่จะตรวจสอบลงในน้ำยา
Drop etching	หยคน้ำยาลงบนผิวงาน ( หางยผิวงานขึ้น ) ใช้เมื่อน้ำยาราคาแพง
Wash etching	ใช้น้ำยาเทราดลงบนผิวงาน ใช้กับงานขนาดใหญ่ หรือน้ำยาที่เกิดเป็นแก๊สได้ง่าย
Alternative immersing etching	จุ่มงานในน้ำยา 2 ชนิดแรก โดยชนิดที่สองใช้ละลายเยื่อที่เกิดจากน้ำยาชนิดแรก
Swab etching	ใช้ผ้า , สำลี หรือแปรงขนสัตว์จุ่มน้ำยาแล้วทาบนผิวงานช่วยขจัดเยื่อที่เกิดขึ้นจากปฏิกิริยา
Etch polishing	กรรมวิธีคล้ายกับการขัดมัน แต่ใช้น้ำยาแทนผงซักฟอกป้องกันไม่ให้เกิดเยื่อบนชิ้นงาน
Tempering – etching	เผางานในอากาศ และสังเกตคูสีที่ปรากฏขึ้นบนผิวงาน เพราะโครงสร้างแต่ละชนิดจะให้สีไม่เหมือนกัน
Warm – etching	ใช้น้ำยาอุณหภูมิสูง อาจทำคล้ายกับกรณี Tempering-etching ( แต่ใช้ตัวยา หรือสารตัวกลางต่างกัน ) หรือใช้วิธีจุ่มลงในน้ำยาที่ร้อน
Double multi – etching	ใช้น้ำยาสองชนิดขึ้นไปแล้วแต่ว่าต้องการตรวจสอบเฟสอะไร
Identification etching	ใช้น้ำยาเฉพาะอย่าง และกัดเฉพาะเฟสที่ต้องการตรวจสอบ
Electrolytic (anodic) etching	กัดในอิเล็กโตรไลต์ โดยใช้ชิ้นงานเป็นขั้วบวก
Potentiostatic etching	เป็นวิธี anodic etching โดยใช้ความต่างศักย์คงที่
Quantitative etching	เป็นวิธี anodic etching โดยการละลายขั้วบวก ( งาน ) ตามจำนวนที่ต้องการ เมื่อใช้ความหนาแน่นของกระแสและเวลาตามกำหนด

ตารางที่ 2.5 ตัวอย่างน้ำยากัดกรดผิวเหล็ก

เบอร์น้ำยา	ส่วนผสมน้ำยา	สถานะ	หมายเหตุ
Fe m1	Ethanol หรือ Methanol ( 95% ) 100 ml กรดไนตริก ( HNO <sub>3</sub> )(1.40) 1 – 10 ml	หลายวินาทีจนถึง หลายวินาที ระวัง อย่าให้เข้มข้นเกิน 10% เพราะจะ ระเบิด	ใช้กับเหล็กบริสุทธิ์, เหล็กกล้าคาร์บอนต่ำ, เหล็กกล้าผสม และ เหล็กหล่อสีเทา
Fe m2	Ethanol หรือ Methanol ( 95% ) 100 ml กรด HCl ( 1.19 ) 20 ml	5 – 30 นาที เตรียม เสร็จแล้วใช้ทันที อาจเติม H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> ( 30% )	ใช้กัดเพื่อแสดงถึง ความแตกต่างของมาร์ เทนไซด์คิวบิกและเต ตระโกบอล, เหล็ก Ni- Cr เหล็กใช้งาน อุณหภูมิสูง
Fe m3	Ethanol ( 96% ) 100 ml กรด Picric 2 – 4 g	หลายวินาทีจนถึง หลายวินาที	ใช้กับเหล็กอ่อนและ เหล็กที่ผ่านการอบชุบ แข็งแล้ว
Fe m4	Methanol หรือ Ethanol ( 96% ) 100 ml กรด HNO <sub>3</sub> ( 1.40 ) 0.2 ml กรด Picric	หลายวินาทีจนถึง หลายวินาที	ใช้ได้ผลดีกว่าน้ำยา เบอร์ Fe m1 และ Fe m3
Fe m5	Ethanol ( 96% ) 100 ml กรด HCl ( 1.19 ) 1 – 5 ml กรด Picric 1 – 4 g อาจเติม H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> (3% ) 2 – 3 หยด	หลายวินาทีจนถึง หลายวินาที	กัดรุนแรงกว่าน้ำยา เบอร์ Fe m2 และเห็น คาร์ไบด์เกาะตามขอบ เกรนอย่างชัดเจน
Fe m6	Ethanol หรือ Methanol ( 95% ) 85 ml กรด HCl ( 1.19 ) 1 – 10 ml กรดไนตริก ( 1.40 ) 1 – 5 ml	หลายนาที ระวังเป็นพิษ	กัดของเกรนในเหล็ก เครื่องมือที่ชุบแข็งมา แล้ว และเหล็กกล้า โครเมียมผสม

#### 2.4.2 ขนาดของเม็ดเกรน (Grain Size)

ขนาดของมันขึ้นอยู่กับกรเย็นตัว เหล็กกล้าเหลวจะแข็งตัวที่จุดกึ่งกลางของนิวไคลด์เล็กๆ (small nuclei) จำนวนมาก อะตอมของแต่ละกลุ่มของนิวไคลด์มีแนวโน้มที่จะวางตัวในลักษณะที่เหมือนกัน รอยต่อของเกรนจะเห็นได้จากกล้องไมโครสโคปหลังจากที่ขัดและกัดผิวชิ้นงาน (etching) โดยรอยของกลุ่มอะตอมโดยทั่วไปแล้วจะวางตัวในทิศทางเดียวกัน ขนาดของเกรนขึ้นอยู่กับองค์ประกอบมากมาย ซึ่งองค์ประกอบหนึ่งที่สำคัญคือกรรมวิธีในการให้ความร้อนที่มันได้รับ

เหล็กกล้าที่มีเกรนหยาบจะมีความเหนียวแน่น (tough) และมีความทนทานต่อการบิดตัวน้อยกว่าเหล็กกล้าที่มีเกรนละเอียด แต่จะทำการคมแต่งโดยการนำเนื้อโลหะออก (machined) ได้ดีกว่า รวมทั้งมีกำลังในการชุบแข็งได้สูงกว่า สำหรับเหล็กกล้าที่มีเกรนละเอียดจะมีความเหนียวแน่นและมีความเหนียวในการบิดตัว (ductile) มากกว่า ทั้งยังมีแนวโน้มที่จะเกิดการบิดตัวหรือร้าวในขณะชุบแข็งน้อยกว่า การควบคุมขนาดของเกรนทำได้โดยการควบคุมส่วนประกอบของโลหะในขั้นตอนของการผลิต หรือถ้าชิ้นงานนั้นได้มีการผลิตออกมาแล้วอาจควบคุมได้โดยใช้กรรมวิธีทางความร้อน ในขั้นตอนของการผลิตนั้นอลูมิเนียมซึ่งเป็นตัวกันการออกซิไดส์ (deoxidizer) เป็นตัวควบคุมที่สำคัญที่สุดในการเพิ่มอุณหภูมิที่เกรนมีการขยายตัวอย่างรวดเร็ว

เมื่อชิ้นงานเหล็กกล้าคาร์บอนต่ำถูกทำให้ร้อนขึ้น จะเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงขนาดของเกรน ที่จุด  $AC_1$  ( ภาพที่ 2.1 ) และในขณะที่มีการเพิ่มของอุณหภูมิที่ผ่านจุดวิกฤตจะมีการเปลี่ยนแปลงของเฟอร์ไรต์และเพิร์ลไรต์จำนวนมากไปเป็นออสเทนไนต์ ซึ่งมีขนาดของเกรนโดยเฉลี่ยเล็กที่สุดที่จุดวิกฤตนี้ถ้ายังมีการเพิ่มอุณหภูมิขึ้นไป ขนาดเกรนของออสเทนไนต์จะมีขนาดใหญ่มากขึ้น ซึ่งอาจมีผลในการควบคุมขนาดสุดท้ายของเกรนเมื่อโลหะเย็นตัวลงด้วย การชุบแข็งจากจุด  $AC_3$  ( ภาพที่ 2.1 ) จะทำโครงสร้างมีเกรนที่ละเอียดในขณะที่การทำให้เย็นตัวลงอย่างช้าๆหรือการชุบแข็งที่อุณหภูมิมากกว่าจุด  $AC_3$  จะทำให้เกรนมีขนาดหยาบขึ้น และขนาดสุดท้ายของเกรนของออสเทนไนต์ในเหล็กกล้าขึ้นอยู่กับกรขยายตัวของเกรนก่อนที่จะทำการชุบแข็ง

มีเหล็กกล้าบางชนิดที่จะไม่มีการขยายตัวของขนาดผลึกในทันทีที่อุณหภูมิมากกว่าจุดวิกฤตบนเหล็กกล้าเหล่านี้ อาจมีการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างเพียงเล็กน้อยเท่านั้น จนกระทั่งอุณหภูมิขึ้นไปถึงจุดอุณหภูมิเนื้อหยาบ (coarsening temperature) การเพิ่มขนาดของเกรนจะเกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว ซึ่งเป็นลักษณะของเหล็กกล้าคาร์บอนปานกลาง เหล็กกล้าที่ผ่านการลดการออกซิไดส์ (oxidize) ด้วย อลูมิเนียมและเหล็กกล้าผสมจำนวนมากอาจมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเนื้อหยาบด้วยงานทางความร้อนและงานทางความเย็น (hot working and cold working) ซึ่งงานทางความร้อนจะทำให้ที่อุณหภูมิเหนือจุดวิกฤต อันเป็นอุณหภูมิที่เหล็กกล้าอยู่ในสภาพพลาสติก ผลของมันทำให้โครง



สร้างของเกรนละเอียดขึ้น และขจัดผลที่ทำให้เนื้อวัสดุมีเกรนหยาบเนื่องจากความร้อนสูง งานทางความร้อนนี้ไม่ควรทำที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต

การประมาณขนาดของเม็ดเกรนทำได้โดยอาศัยการตรวจสอบทางกล้องไมโครสโคป (microscopic examination) หรืออาจประมาณอย่างหยาบๆ โดยการทดสอบการแตกหัก เฟอไรต์จะแยกตัวจากเหล็กกล้าคาร์บอนต่ำเมื่อทำให้มีการเย็นตัวอย่างช้าๆ ขอบของเกรนเหล่านี้สามารถเห็นได้อย่างชัดเจนโดยการขัดและการกัดผิวงาน (etching) เพราะการเย็นตัวอย่างช้าๆ ทำให้เกิดเฟอไรต์ขั้นแรก (primary ferrite) ซึ่งมีผลทำให้หาขนาดของเกรนได้ อัตราการเย็นตัวเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการหาขนาดของเกรนด้วย ตัวอย่างเช่น จำเป็นต้องควบคุมอัตราการเย็นตัวเพื่อให้องค์ประกอบของเหล็กที่เป็นยูเทคทอยด์ถูกจำกัดไว้ในขนาดที่สามารถมองเห็นบริเวณขอบของผลึกเฟอไรต์ไรต์ได้ ในลักษณะเดียวกันขนาดเกรนของออสเทนไนท์ที่ก่อตัวขึ้น เกิดจากพื้นที่ของเฟอไรต์ไรต์ร่วมกับ 1.5 เท่าของพื้นที่นั้น ในส่วนที่เป็นเฟอไรต์ไรต์รอบๆตัวของมัน สำหรับเหล็กกล้าไฮเปอร์ยูเทคทอยด์ (hyperutectoid steel) เส้นขอบเกรนจะเกิดจากการแยกตัว (precipitated) ของซีเมนไคท์ออกมา

## 2.5 การวิเคราะห์ความแปรปรวน ( Analysis of Variance ; ANOVA )

การวิเคราะห์ความแปรปรวน ( Analysis of Variance ) เป็นวิธีการอย่างหนึ่งทางสถิติ ที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของประชากร เมื่อประชากรที่ต้องการทดสอบมีมากกว่า 2 กลุ่ม

Randomization หมายถึง การสุ่มเลือกสิ่งของหรือสมาชิกในกลุ่มประชากร โดยให้สมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสที่จะถูกสุ่มเลือกเท่ากัน

Factor หมายถึง ปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการทดลองที่เรานำมาพิจารณา

Treatment หมายถึง วิธีการหรือรูปแบบหรือระดับของปัจจัยที่เราปฏิบัติต่อสิ่งทดลอง เพื่อวัดผลเปรียบเทียบกับวัตถุประสงค์ของการทดลอง

Observation หมายถึง ค่าหรือผลที่สังเกตได้จากการทดลอง

Replication หมายถึง จำนวนการทดลองที่มีในแต่ละ Treatment

### 2.5.1 ประเภทของการวิเคราะห์ความแปรปรวน

2.5.1.1 Experiment with a Single Factor : One-way ANOVA เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลโดยพิจารณาเพียงปัจจัยเดียว

2.5.1.2 Experiment with Two Factor : Two-way ANOVA เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลโดยพิจารณาสองปัจจัย สรุปผลจากทั้งสองปัจจัย

2.5.1.3 Randomized Blocks Design เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลโดยพิจารณาสองปัจจัย แต่สรุปผลเพียงหนึ่งปัจจัย

## 2.5.2 การกำหนดระดับของปัจจัย ( Treatments )

2.5.2.1 Fixed Effect Model : Model I กำหนดหรือระบุระดับของปัจจัย

2.5.2.2 Random Effect Model : Model II สุ่มตัวอย่างระดับของปัจจัย

2.5.2.3 Mixed Effect Model : Model III Model I และ Model II ผสมกัน ( Two factor )

ในที่นี้จะขอกกล่าวเพียง Experiment with Two Factor : Two-way ANOVA ที่ใช้สำหรับคำนวณผลที่ได้จากการทดลองเท่านั้น

หลักการวิเคราะห์ความแปรปรวน

ตั้งสมมติฐาน

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0_k$$

$$H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0_k \text{ อย่างน้อยหนึ่งค่า}$$

ตารางที่ 2.6 Experiment with Two Factor : Two-way ANOVA

Factor A	Factor B						
	1	2	...	...	...	l	
1	$y_{111}$	$y_{112}$	$y_{121}$	$y_{122}$	...	$y_{1l1}$	$y_{1l2}$
	...	$y_{11n}$	...	$y_{12n}$	...	...	$y_{1ln}$
2	$y_{211}$	$y_{212}$	$y_{221}$	$y_{222}$	...	$y_{2l1}$	$y_{2l2}$
	...	$y_{21n}$	...	$y_{22n}$	...	...	$y_{2ln}$
:	:	:	:	:	:	:	:
k	$y_{k11}$	$y_{k12}$	$y_{k21}$	$y_{k22}$	...	$y_{kl1}$	$y_{kl2}$
	...	$y_{k1n}$	...	$y_{k2n}$	...	...	$y_{kln}$

2 ปัจจัย : A และ B , k treatments of A , l treatment of B

n observation of each treatment และ จำนวนข้อมูล  $N = kln$

$y_{ijn}$  : ค่า y ใน treatment ที่ i ใน factor A , treatment ที่ j ใน factor B , observation ที่ n

Sum of Squares

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } SS_T &= \sum \sum \sum y_{ij}^2 - [y^2 \dots / N] \\ SS_A &= \left[ \frac{1}{ln} \right] \sum y_{i.}^2 - [y^2 \dots / N] \\ SS_B &= \left[ \frac{1}{kn} \right] \sum y_{.j}^2 - [y^2 \dots / N] \\ SS_{\text{subtotal}} &= \left[ \frac{1}{n} \right] \sum \sum y_{ij}^2 - [y^2 \dots / N] \\ SS_{AB} &= SS_{\text{subtotal}} - SS_A - SS_B \\ SS_E &= SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB} \end{aligned}$$

ตารางที่ 2.7 ANOVA ( The Analysis of Variance Table for Two-Factor Design

แหล่งความแปรปรวน (Source)	ผลบวกกำลัง สอง (SS)	องศาเสรี (df)	ค่าเฉลี่ยของผลบวก กำลังสอง (MS)	F จากการ คำนวณ
อุณหภูมิ, A	$SS_A$	$k-1$	$MS_A$	$MS_A / MS_E$
อัตราการเย็นตัว, B	$SS_B$	$l-1$	$MS_B$	$MS_B / MS_E$
ค่าปฏิสัมพันธ์, AB	$SS_{AB}$	$(k-1)(l-1)$	$MS_{AB}$	$MS_{AB} / MS_E$
ความคลาดเคลื่อน, Error	$SS_E$	$(kl)(n-1)$	$MS_E$	
ผลรวม, Total	$SS_T$	$kl(n-1)$		

$$F^* = F_{\alpha, k-1, kl(n-1)} \quad F^{**} = F_{\alpha, l-1, kl(n-1)} \quad F^{***} = F_{\alpha, (k-1)(l-1), kl(n-1)}$$

## 2.6 การถดถอยเชิงเส้นและสหสัมพันธ์ ( Linear Regression and Correlation )

การศึกษาการถดถอยจะเป็นการศึกษาถึงลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ ว่าตัวแปรตัวหนึ่งหรือหลายตัวมีอิทธิพลต่อตัวแปรอีกตัวหนึ่งอย่างไร ในรูปใด ซึ่งจะแสดงออกมาในรูปของสมการหรือกราฟ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของตัวแปรเพียงสองตัวเรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย หรือ Simple regression analysis เช่น ความสัมพันธ์ของราคาสินค้ากับยอดขาย แรงดึงในเส้นลวดกับการยืดตัวของเส้นลวด ส่วนสูงกับอายุ เป็นต้น ความสัมพันธ์อาจอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \text{เส้นตรง} & \quad y = a + bx \\ \text{ไฮเปอร์จีโอเมตริก} & \quad y = a + b/x \\ \text{โพลิโนเมียล} & \quad y = a + bx + cx^2 \\ \text{โค้ง S} & \quad y = e^{a-bx} \\ \text{กำลัง} & \quad y = ax^b \end{aligned}$$

โดย  $x$  เป็นตัวแปรต้น ( Independent หรือ Predictor variable ) และ  $Y$  เป็นตัวแปรตาม ( Dependent หรือ Response variable )

การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของตัวแปรหลายตัวเรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ หรือ Multiple regression analysis เช่น ความดันโลหิตกับอายุ น้ำหนัก เพศ โรค บางชนิด เป็นต้น ความสัมพันธ์อาจอยู่ในรูป

เส้นตรง 
$$y = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_kx_k$$

โดยตัวแปรต้น คือ  $X_1, X_2, \dots, X_k$  และตัวแปรตาม คือ  $Y$

ในที่นี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่ายชนิดเป็นเส้นตรง ( Simple linear regression ) ซึ่งเป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น และตัวแปรตามซึ่งอยู่ในรูปเส้นตรงเท่านั้น

อนึ่งตัวแปรต้นนี้ในบางครั้งเราจะสามารถกำหนดค่าได้ เช่น ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิของน้ำกับความลึกของน้ำในระดับต่างๆกัน ถ้ากำหนดให้  $X$  แสดงถึงระดับความลึกของน้ำเป็นตัวแปรต้น และ  $Y$  แสดงถึงอุณหภูมิของน้ำเป็นตัวแปรตาม เราอาจจะกำหนดค่า  $X$  ในช่วงระดับความลึกตามที่ต้องการศึกษา เช่น 1,000 – 5,000 ฟุต โดยกำหนด  $x_1 = 1,000, x_2 = 2,000, x_3 = 3,000, x_4 = 4,000, x_5 = 5,000$  และวัดอุณหภูมิ  $Y$  ที่ระดับความลึก  $x_1, x_2, x_3, x_4,$  และ  $x_5$  เพื่อหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร  $X$  และ  $Y$  ได้ การศึกษานี้จะเป็นการศึกษาที่กำหนด หรือควบคุมได้ แต่ในบางครั้งเราไม่สามารถกำหนดได้ เช่น การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคุณภาพของอากาศต่อความเป็นกรด / ด่างของน้ำฝน ในกรณีเช่นนี้เราไม่สามารถกำหนดค่าความเป็นกรด / ด่างได้ ดังนั้นวิธีการก็คือ จะต้องคัดเลือกวันที่จะทำการศึกษา แล้ววัดคุณภาพของอากาศและความเป็นกรด / ด่างของน้ำฝนในวันดังกล่าว ค่าตัวแปรต้นจึงไม่สามารถกำหนดล่วงหน้าได้ และทั้งตัวแปรต้นและตัวแปรตามจะเป็นค่าสังเกตเป็นคู่ๆ ดังนี้

ค่าตัวแปรต้นและตัวแปรตามจะเป็นค่าสังเกตเป็นคู่ๆ ดังนี้

$$(x_1, y|x_1), (x_2, y|x_2), (x_3, y|x_3), \dots, (x_n, y|x_n)$$

โดยที่  $x_1, x_2, \dots, x_n$  คือ ตัวแปรต้นซึ่งเป็นจำนวนจริง

และ  $y|x_1, y|x_2, \dots, y|x_n$  คือ ตัวแปรตาม

ค่าสังเกตที่ศึกษาไว้เป็นคู่ๆ นี้จะใช้ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองในรูปของสมการ และจะใช้สมการในการพยากรณ์ค่าของตัวแปรตาม ในกรณีที่กำหนดค่าตัวแปรต้นให้ต่อไป

ในกรณีที่ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันเป็นเส้นตรง สมการสำหรับ  $\mu_{yx}$  คือ

$$\mu_{yx} = \alpha + \beta x$$

ค่า  $\alpha$ ,  $\beta$  เป็นจำนวนจริง สมการนี้เรียกว่า สมการการถดถอยเชิงเส้น ( Linear Regression Equation )

### 2.6.1 รูปแบบและการประมาณค่าพารามิเตอร์ ( Model and Parameter Estimation )

#### 2.6.1.1 สมการเส้นตรงโดยทั่วๆ ไป คือ

$$y = a + bx$$

โดย  $a$  คือ จุดตัดบนแกน  $Y$  และ  $b$  คือ ความชันของเส้นตรงเมื่อเทียบกับสมการถดถอยเชิงเส้น

$$\mu_{YX} = \alpha + \beta X$$

ดังนั้น  $\alpha$  คือ จุดตัดบนแกน  $Y$  และ  $\beta$  คือ ความชันของเส้นถดถอย การหาสมการถดถอยเชิงเส้นจึงจำเป็นต้องประมาณค่าของพารามิเตอร์  $\alpha$  และ  $\beta$

ในการศึกษาการถดถอยเชิงเส้นจะต้องศึกษาตัวแปรต้น จำนวน  $n$  ค่าที่  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  ซึ่งสามารถกำหนดได้และไม่มีข้อผิดพลาดเนื่องจากตัวแปร  $X$  เป็นตัวแปรที่กำหนดและควบคุมค่าได้ และจะสามารถหาค่าตัวแปรตาม  $Y|X_1, Y|X_2, \dots, Y|X_n$  ได้  $n$  ค่า เช่นเดียวกับในกรณีที่ตัวแปรต้นไม่สามารถกำหนดค่าได้ จะได้ค่าสังเกตจากการสุ่มจำนวน  $n$  คู่ คือ

$$(x_1, Y|X_1), (x_2, Y|X_2), \dots, (x_n, Y|X_n)$$

ค่า  $Y|X_1, Y|X_2, \dots, Y|X_n$  นี้ จะมีค่าเฉลี่ย  $\mu_{Y|X}$  และค่าความผิดพลาด  $E_i$  ซึ่งเป็นค่าความแตกต่างระหว่าง  $Y|X_i$  กับค่าเฉลี่ย  $\mu_{Y|X}$  คือ

$$E_i = Y|X_i - \mu_{Y|X_i}$$

$$\text{หรือ } Y|X_i = \mu_{Y|X_i} + E_i$$

สมมติว่า ตัวแปรสุ่ม  $E_i$  มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และสมมติว่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตาม มีความสัมพันธ์กับแบบการถดถอยเชิงเส้น ดังนั้น  $\mu_{Y|X_i} = \alpha + \beta X_i$

$$\text{จะได้ว่า } Y|X_i = \alpha + \beta X_i + E_i$$

$$\text{หรือตัวแปรสุ่ม } Y_i = \alpha + \beta X_i + E_i$$

เมื่อค่า  $x_i$  เป็นค่าสังเกตของตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $y_i$  เป็นค่าสังเกตสำหรับตัวแปรสุ่ม  $Y$  ค่าความผิดพลาด  $E_i$  คือ ค่าความแตกต่างระหว่างค่าสังเกต  $y_i$  กับค่าเฉลี่ย  $\mu_{Y|X_i}$  ดังนั้น

$$y_i = \alpha + \beta X_i + E_i$$

$E_i$  คือ ค่าจริงของตัวแปรสุ่ม  $E_i$  ซึ่งปรากฏอยู่ในรูปของสมการการถดถอยเชิงเส้น  $Y_i = \alpha + \beta X_i + E_i$

ในการศึกษาเส้นถดถอยควรมีการกำหนดจุด  $(x_i, y_i)$   $n$  จุดลงบนกราฟที่มีแกน  $x, y$  จุดต่างๆ เหล่านี้เรียกว่า แผนภาพการกระจาย (scatter diagram) ซึ่งจุดเหล่านี้จะไม่เรียงเป็นเส้นตรงที่เดียว แต่จะมีแนวโน้มนำจุดต่างๆ เหล่านี้สามารถลากเส้นตรงให้ผ่านได้ ดังนั้นหากสามารถสร้างสมการแทนเส้นตรงที่ลากผ่านจุดต่างๆ เหล่านี้ได้อย่างใกล้เคียงที่สุด สมการนั้นคือสมการถดถอยเชิงเส้นตรง (Linear Regression Equation) ในการหาสมการดังกล่าวจำเป็นต้องหาพารามิเตอร์  $\alpha$  และ  $\beta$  ซึ่งก็จะได้จากข้อมูลที่มี  $n$  จุด โดย ให้  $a$  และ  $b$  เป็นตัวประมาณค่าของ  $\alpha$  และ  $\beta$  ดังนั้น การประมาณเส้นถดถอยนี้สามารถเขียนได้ในรูป

$$\mu_{yx} = a + bx$$

ถ้าให้  $e_i$  เป็นค่าแตกต่างในทางแนวตั้งระหว่างจุด  $(x_i, y_i)$  กับเส้นถดถอยซึ่งได้จากข้อมูล หรือ estimated regression line ดังนั้น

$$Y_i = a + bx + e_i$$

$e_i$  เรียกว่าความผิดพลาด หรือ Residual

$$e_i = y_i - \hat{\mu}_{yx} = y_i - \hat{y}_i$$

#### 2.6.1.2 การประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุด (Least-Square Estimation)

พารามิเตอร์  $\alpha$  และ  $\beta$  สามารถประมาณค่าได้โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square method) เนื่องจากเส้นตรงที่เหมาะสมที่สุดที่จะลากผ่านจุดต่างๆ บนแผนภาพการกระจาย (Scatter diagram) คือ เส้นตรง  $\mu_{yx} = a + bx$  ซึ่งมีค่า  $a$  และ  $b$  ที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของ Residual หรือ  $\sum_{i=1}^n e_i^2$  น้อยที่สุด นั่นคือ จะเป็นเส้นตรงที่ลากได้ใกล้จุดทุกจุดบนแผนภาพการกระจายมากที่สุด จากหลักการของวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดนี้จะสามารถคำนวณหาค่า  $a$  และ  $b$  ได้ดังนี้

SSE คือ ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน =  $\sum_{i=1}^n e_i^2$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

หาสหพันธ์ของ SSE เมื่อเทียบกับ  $a$  และ  $b$  ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \text{SSE}}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \text{SSE}}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) x_i \quad (2.10)$$

สมการ (2.9) และ (2.10) เท่ากับศูนย์เนื่องจาก SSE มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น

$$na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.11)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

(2.12)

สมการที่ (2.11) และ (2.12) นี้เราเรียกว่า “สมการปกติ” ( Normal Equations )

ของเส้นถดถอย  $\hat{y} = a + bx$

ซึ่งจากสมการ (2.11) และ (2.12) หาค่า  $a$  และ  $b$  ได้ดังนี้

$$b = [n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)] / [n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2]$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

จากค่าประมาณของ  $a$  จะเห็นได้ว่าสมการเส้นถดถอยอย่างง่ายทุกเส้นจะผ่านจุด  $(\bar{x}, \bar{y})$

เสมอ

สมการ  $\hat{\mu}_{yx} = a + bx$  นี้เป็นสมการซึ่งใช้ในการหาค่า  $y$  เมื่อกำหนดค่า  $x$  ให้ และสมการนี้อาจใช้เมื่อกำหนดค่า  $x$  ให้เพื่อพยากรณ์ค่า  $y$  ค่า  $y$  ที่ได้จะเป็นค่าเฉลี่ย หรือ  $\hat{\mu}_{yx}$  เช่น ถ้าต้องการพยากรณ์อุณหภูมิเฉลี่ยของน้ำทะเลที่ระดับความลึก 1,000 ฟุต ก็สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\hat{Y} = \hat{\mu}_{yx} = a + bx$$

### 2.6.1.3 การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ ( Multiple Linear Regression )

เนื่องจากในทางปฏิบัติสิ่งที่เราสนใจศึกษาไม่ว่าจะเป็นในการทดลองการศึกษาระบบงานในงานวิจัย พบว่ามีตัวแปรที่เข้ามามีบทบาทมากกว่าหนึ่งเสมอ ดังนั้นในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร โดยการใช้การวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่ายมักจะไม่สามารถได้พบบ่อยนัก ส่วนใหญ่แล้วการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณจะเข้ามามีบทบาทมากกว่า ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณนั้นจะมีตัวแปรตาม ( Response variable or dependent variable ) เพียงหนึ่งแต่ตัวแปรอิสระ ( independent variables ) มากกว่าหนึ่งตัว ความสัมพันธ์ของตัวแปรตามจะอยู่ในรูปฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ นั่นคือ

$$Y = f( X_1, X_2, X_3, \dots, X_k )$$

โดยที่  $Y$  คือ ตัวแปรตาม

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  คือ ตัวแปรอิสระ

จากการศึกษาการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายจะพบว่าตัวแบบความสัมพันธ์

ดังกล่าวจะอยู่ในรูปของ

$$Y = \alpha + \beta x + \epsilon$$

แต่สำหรับการวิเคราะห์การถดถอยแบบพหุคูณนั้นเราสนใจศึกษาตัวแบบความสัมพันธ์ในรูป

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_k x_k + \epsilon$$

โดยที่สมการถดถอยพหุคูณนั้นจะเป็นการประมาณสมการความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ

$$E[Y] = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_k X_k \quad (2.13)$$

สมการของค่าเฉลี่ยของ  $Y$  บนเส้นถดถอยที่เกิดจากอิทธิพลของ  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  สร้างบนพื้นฐานข้อสมมติที่ว่า ค่าความผิดพลาด ( $e_i$ ) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนคงที่  $\sigma^2$

$\beta_i$  = Partial regression coefficient หรือ สัมประสิทธิ์การถดถอยของ  $Y$  ที่มีต่อ  $X_i$  เมื่อกำหนด  $X$  อื่นๆ คงที่

$$k = \text{จำนวนตัวแปรอิสระที่สนใจศึกษา} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k)$$

เนื่องจากการหาค่าที่แท้จริงจากประชากรนั้นทำได้ยาก หรือบางครั้งในทางปฏิบัตินั้นทำไม่ได้ การประมาณสมการถดถอยใน (2.13) จึงได้นำวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมาประยุกต์ใช้โดยสมการถดถอยเชิงพหุคูณของตัวอย่างจะอยู่ในรูปของ

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots + b_k X_k \quad (2.14)$$

ในที่นี้  $b_0$  เป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์  $\beta_0$

$b_i$  เป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์  $\beta_i$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, k$

ค่าประมาณ  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$  นี้หาได้จากการแก้สมการปกติ ซึ่งได้จากการหาอนุพันธ์บางส่วน

ของผลบวกของค่าความผิดพลาดกำลังสอง ( $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$ ) เทียบกับ  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$

ตามลำดับ สมการปกติจาก (2.14) จะมีทั้งหมดเท่ากับ  $k + 1$  สมการ ดังนี้

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \dots + b_k X_{ki})]^2$$

$$\partial \sum_{i=1}^n e_i^2 / \partial b_0 = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - \dots - b_k X_{ki}] \quad (2.15)$$

ให้ (2.15) = 0

$$\text{จะได้ } \sum_{i=1}^n [y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - \dots - b_k X_{ki}] = 0$$

ในทำนองเดียวกันหาอนุพันธ์บางส่วนของผลบวกของค่าความผิดพลาดกำลังสองเทียบกับ

$\beta_i$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  แล้วให้ค่าเท่ากับ 0 จะได้

$$X_{ii} (y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - \dots - b_k X_{ki}) = 0$$



$$X_{2i} (y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - \dots - b_k x_{ki}) = 0$$

·  
·  
·

$$X_{ki} (y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - \dots - b_k x_{ki}) = 0$$

จัดรูปสมการข้างต้นใหม่จะได้สมการปกติ k + 1 สมการดังนี้

$$\sum y_i = nb_0 + b_1 \sum X_{1i} + b_2 \sum X_{2i} + \dots + b_k \sum X_{ki}$$

$$\sum X_{1i} y_i = b_0 \sum X_{1i} + b_1 \sum X_{1i}^2 + b_2 \sum X_{1i} X_{2i} + \dots + b_k \sum X_{1i} X_{ki}$$

$$\sum X_{ki} y_i = b_0 \sum X_{ki} + b_1 \sum X_{1i} X_{ki} + b_2 \sum X_{2i} X_{ki} + \dots + b_k \sum X_{ki}^2$$

เซตของสมการจะให้ค่า  $b_0, b_1, b_2, \dots,$  และ  $b_k$  ซึ่งเป็นค่าประมาณที่ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดและเป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของพารามิเตอร์  $\beta_0, \beta_1, \dots,$  และ  $\beta_k$  ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่า ถ้าจำนวนตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น จำนวนของสมการปกติที่ใช้ในการหาค่าประมาณของค่าพารามิเตอร์  $\beta, S$  หรือค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยของ  $Y$  ที่มีต่อตัวแปรอิสระ  $X, S$  เมื่อตัวแปรอิสระอื่นๆ คงที่นั้นจะมีจำนวนมากขึ้น ดังนั้น ในการคำนวณจะใช้เมตริกเข้ามาช่วยในการทำดังต่อไปนี้

ตัวแบบสมการถดถอยพหุคูณเขียนใหม่เป็น

$$Y = X\beta + \epsilon$$

โดยที่

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix}_{n \times (k+1)}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon_k \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

และมีข้อสมมติ คือ

1.  $Y = X\beta + \epsilon$

2. ค่าความผิดพลาด  $\epsilon$  เป็นตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปกติและเป็นอิสระต่อกัน ( $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ );  $I_n$  คือ identity เมตริก)

3. ค่าอินเวอร์สของเมตริก  $XX'$  หาค่าได้

จากข้อกำหนดดังกล่าว ถ้าให้เมตริก  $\hat{\beta}$  เป็นเมตริกของค่าประมาณของ  $\beta$  จะได้

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{bmatrix}$$

ซึ่งหาได้จากสมการปกติ ซึ่งเขียนเป็นรูปเมตริกได้คือ

$$XX' \hat{\beta} = XY \quad (2.16)$$

$$XX' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \dots & X_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \dots & \sum X_{ki} \\ X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} & \dots & \sum X_{1i} X_{ki} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum X_{ki} & \sum X_{1i} X_{ki} & \sum X_{2i} X_{ki} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

$$XY = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i} Y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum X_{ki} Y_i \end{bmatrix}$$

จาก (2.16) ตัว  $(XX)^{-1}$  หาค่าได้ จะ ได้

$$\hat{\beta} = (XX)^{-1} XY \quad (2.17)$$

ค่าประมาณที่ได้จาก (2.17) นี้จะนำไปแทนค่าใน (2.14) และใช้ในการพยากรณ์ค่าของ  $E[Y]$

พิจารณา  $\hat{\beta}$  ว่าเป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของ  $\beta$  หรือไม่

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (XX)^{-1} XY \\ &= (XX)^{-1} X' (X\beta + \varepsilon) \\ &= (XX)^{-1} XX + (XX)^{-1} X' \varepsilon \\ &= \beta + (XX)^{-1} X' \varepsilon \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E[\beta + (XX)^{-1} X' \varepsilon] \\ &= \beta \quad (E(\varepsilon) = 0) \end{aligned}$$

นั่นคือ  $\hat{\beta}$  เป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของ  $\beta$

ค่าความแปรปรวนของ  $\hat{\beta}$

$$V(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']$$

$$\text{จาก (2.18) } \hat{\beta} - \beta = (XX)^{-1} X' \varepsilon$$

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}) &= E[(XX)^{-1} X' \varepsilon][\varepsilon' X (XX)^{-1}] \\ &= E[(XX)^{-1} X' \varepsilon \varepsilon' X (XX)^{-1}] \\ &= (XX)^{-1} X' E[\varepsilon \varepsilon'] X (XX)^{-1} \\ &= (XX)^{-1} X' V(\varepsilon) X (XX)^{-1} \\ &= (XX)^{-1} X' \sigma^2 I_n X (XX)^{-1} \\ &= \sigma^2 I_n (XX)^{-1} X (XX)^{-1} \\ &= \sigma^2 (XX)^{-1} \end{aligned}$$

โดยที่ค่าประมาณ  $\sigma^2$  หาได้จากตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของสมการการถดถอยต่อไปนี้

ตาราง 2.8 การคำนวณค่าสถิติ F

แหล่งที่มา	องศาเสรี	ผลบวกกำลังสอง (SS)	ค่าเฉลี่ยผลบวกกำลังสอง (MS)	ค่าสถิติ F
สมการถดถอย (R)	k	$\hat{\beta}XY - ny^2$	MSR = SSR / k	MRS / MSE
ความผิดพลาด (E)	n - k - 1	$YY - \hat{\beta}XY$	MSE = SSE / (n - k - 1)	
ทั้งหมด	n - 1	$YY - ny^2$		

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \text{MSE} = (YY - \hat{\beta}XY) / (n - k - 1)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ Y เป็นยอดขายสินค้าชนิดหนึ่ง (แสนบาท)

$X_1$  เป็นค่าใช้จ่ายในการโฆษณาทางวิทยุ (หมื่นบาท)

$X_2$  เป็นค่าใช้จ่ายในการโฆษณาทางหนังสือพิมพ์ (หมื่นบาท)

ตาราง 2.9 ค่าของตัวอย่างการคำนวณ

Y	$X_1$	$X_2$
7	4	1
12	7	2
17	9	5
20	12	8

$$\sum Y_i = 56, \sum X_{1i}X_{2i} = 159$$

$$\sum X_{1i} = 32, \sum X_{1i}^2 = 290$$

$$\sum X_{2i} = 16, \sum X_{2i}^2 = 94$$

$$\sum Y_i^2 = 822, \sum X_{1i}Y_i = 505, \sum X_{2i}Y_i = 276$$

จะได้สมการปกติจากความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{XX} = \mathbf{XY} \\
 \text{โดยที่} \quad \mathbf{XX} &= \begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 32 & 16 \\ 32 & 290 & 159 \\ 16 & 159 & 94 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{XY} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 505 \\ 276 \end{bmatrix}$$

สมการปกติเขียนในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$4b_0 + 32b_1 + 16b_2 = 56$$

$$32b_0 + 290b_1 + 159b_2 = 505$$

$$16b_0 + 159b_1 + 94b_2 = 276$$

หาค่า  $b_0$ ,  $b_1$  และ  $b_2$  โดยการแก้เซตสมการปกติข้างต้น หรือใช้ความสัมพันธ์

$$\hat{\beta} = (\mathbf{XX})^{-1} \mathbf{XY}$$

$$(\mathbf{XX})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{X}'\mathbf{X}|} \cdot \text{Adjacent}(\mathbf{XX})$$

$$= \frac{1}{236} \begin{bmatrix} 1,979 & -464 & 448 \\ -464 & 120 & -124 \\ 448 & -124 & 136 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \hat{\beta} &= (XX)^{-1} XY \\
 &= \frac{1}{236} \begin{bmatrix} 1,979 & -464 & 448 \\ -464 & 120 & -124 \\ 448 & -124 & 136 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56 \\ 505 \\ 276 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38/59 \\ 98/59 \\ 1/59 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.6441 \\ 1.6610 \\ 0.0169 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณของค่าประมาณอุณหภูมิเฉลี่ยอยู่ในรูปของ

$$\hat{y} = 0.6441 + 1.6610x_1 + 0.0169x_2$$

สร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน เพื่อหาค่าประมาณของค่าความแปรปรวน  $\sigma^2$

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}XY &= [0.6441 \quad 1.6610 \quad 0.0169] \begin{bmatrix} 56 \\ 505 \\ 276 \end{bmatrix} \\
 &= 879.55
 \end{aligned}$$

$$n [\bar{y}]^2 = 4[56/4]^2 = 784 \quad Y Y = \sum Y^2 = 882$$

$$SSR = \hat{\beta}XY - n\bar{y}^2 = 879 - 784 = 95.55$$

$$SST = Y Y - n\bar{y}^2 = 882 - 784 = 98.0$$

จะได้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของสมการถดถอย คือ

ตาราง 2.10 การคำนวณค่า F ของตัวอย่าง

แหล่งที่มา	องศาเสรี	ผลบวกกำลังสอง (SS)	ค่าเฉลี่ยผลบวกกำลังสอง (MS)	ค่าสถิติ F
สมการถดถอย (R)	2	95.55	47.75	19.5
ความผิดพลาด (E)	1	2.45	2.45	
ทั้งหมด	3	98.0		

ค่าประมาณของค่าความแปรปรวนจากตัวอย่าง คือ 2.45