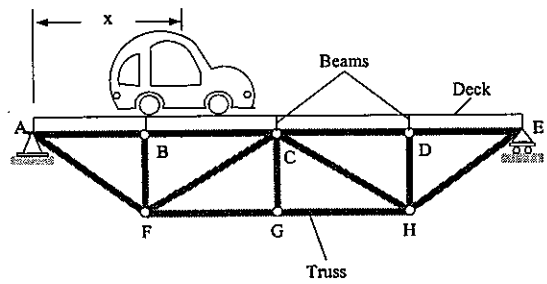
บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

การวิเคราะห์โครงสร้างโดยทั่วไป จะเป็นโครงสร้างที่รับน้ำหนักบรรทุกแบบสถิตย์ (Static Load) ซึ่งกระทำอยู่กับที่ แต่ในบางกรณีโครงสร้าง เช่น คาน โครงข้อแข็ง โครงข้อหมุน ต้องรับน้ำหนักบรรทุกแบบเคลื่อนที่ได้ (Moving Load) เช่น สะพาน ที่มีรถยนต์วิ่งจากต้นสะพานไปยังปลายสะพาน ดังรูปที่ 2.1 รถยนต์เปรียบเหมือนน้ำหนักบรรทุกแบบเคลื่อนที่ ซึ่งในการเปลี่ยนตำแหน่งของแรงหรือน้ำหนักกระทำ จะทำให้ค่าแรงปฏิกิริยา (Reaction) แรงเฉือน (Shear) โมเมนต์ดัด (Bending Moment) แรงกระทำตามแนวแกน (Axial Force) และการโก่งตัว (Deflection) ในแต่ละส่วนของโครงสร้างเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกนั้นกระทำ ฉะนั้นจึงมีความจำเป็นต้องวิเคราะห์หาตำแหน่งของแรงกระทำบนโครงสร้างที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ดัด ฯลฯ รวมถึงหาค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ดัด ฯลฯ ด้วย เพื่อนำไปใช้งานต่อไป การวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวจะทำได้โดยง่ายหากสามารถสร้างกราฟที่แสดงถึงค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง ตามการเคลื่อนที่ของน้ำหนักรถบรรทุกแบบจุดที่มีค่าหนึ่งหน่วย (Unit point load) ที่เคลื่อนที่บนโครงสร้าง กราฟดังกล่าวเรียกว่า เส้นอิทธิพล (Influence line)

เส้นอิทธิพล คือ กราฟที่แสดงค่าพฤติกรรมตอบสนองของโครงสร้าง (เช่น แรงปฏิกิริยา, แรงตามแนวแกน, แรงเฉือน, โมเมนต์ดัด, การโก่งตัว) โดยแสดงเป็น ฟังก์ชันของตำแหน่งของแรงหนึ่งหน่วย ที่เคลื่อนที่บนโครงสร้าง



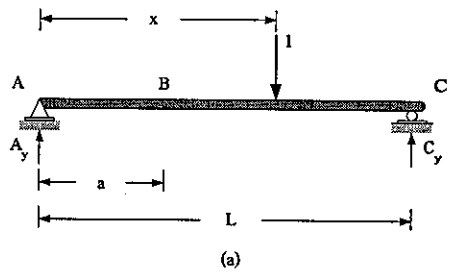
รูปที่ 2.1

การวิเคราะห์โครงสร้างดีเทอร์มิเนทโดยวิธีสถิตศาสตร์

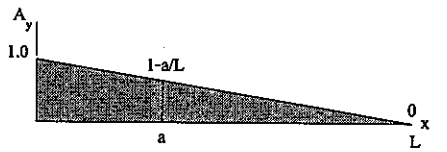
2.1 การเขียนเส้นอิทธิพลของคานโดยหลักการสมดุล

(Influence Lines for Beams by Equilibrium Method)

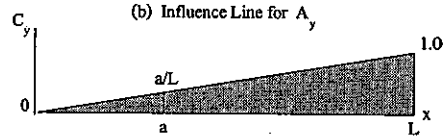
พิจารณาคานช่วงเดียว ดังรูป 2.2 (a) คานถูกแรงกระทำขนาด 1 หน่วย กระทำ โดยแรงกระทำเคลื่อนที่ออกจากจุด A ไปจนถึงจุด C โดยตำแหน่งของแรงกระทำ วัดในแบบพิกัดฉาก แนวแกน x จากจุด A ไปทางขวา ฉะนั้นเราสามารถเขียนเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A และ C แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ที่จุด B ได้



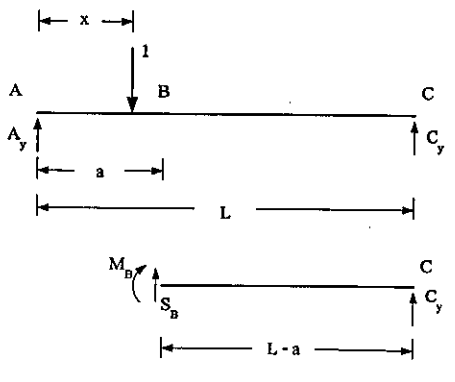
(a)



(b) Influence Line for A_y



(c) Influence Line for C_y



(d)

สร้างเส้นอิทธิพล ของ A_y และ C_y

- กำหนดจุดเริ่มต้น (Origin) ของการเคลื่อนที่ของแรง 1 หน่วย (เคลื่อนที่จากซ้ายไปขวา) คือจุด A
- สร้างสมการทั่วไปของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับในเทอมของ x

$$\sum M_A = 0 ; \quad C_y (L) = 1 (x)$$

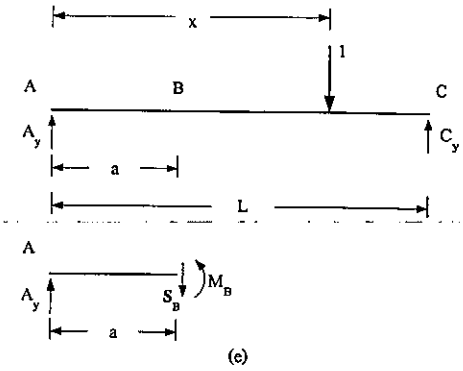
$$C_y = \frac{x}{L}$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad A_y = 1 - \frac{x}{L}$$

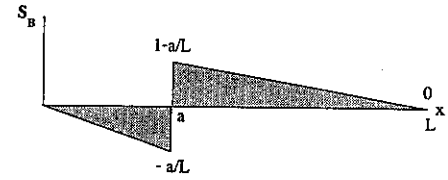
- เขียนเส้นอิทธิพลของ A_y และ C_y ได้โดยแทนค่า x ในสมการจาก 0 ถึง L

สร้างเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ที่จุด B

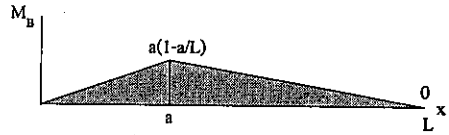
- ที่จุด B ทำให้คานถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ชิ้นส่วน AB ($0 \leq x < a$) และ ชิ้นส่วน BC ($a < x \leq L$)



(e)



(f) Influence Line for S_B



(g) Influence Line for M_B

รูปที่ 2.2

- เมื่อแรง1หน่วยกระทำบนชิ้นส่วน AB เขียน Free Body Diagram ชิ้นส่วน BC สร้างสมการแรงเฉือน และ โมเมนต์ดัด ที่จุด B ในเทอมของ x

$\sum F_y=0$; $S_B = -C_y$ $0 \le x < a$

$\sum M_B=0$; $M_B = C_y(L-a)$ $0 \le x < a$

- เมื่อแรง 1 หน่วย เคลื่อนที่มากระทำบนชิ้นส่วน BC เขียน FBD ชิ้นส่วน AB สร้างสมการ แรงเฉือน และ โมเมนต์ดัด ที่จุด B ในเทอมของ x

$\sum F_y=0$; $S_B = A_y$ $a < x \le L$

$\sum M_B=0$; $M_B = A_y(a)$ $a < x \le L$

- เขียนเส้นอิทธิพล ของ S_B และ M_B ได้โดยนำ ค่าทั้งสองกรณีมารวมกัน และแทนค่า แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ที่ได้จากข้างต้น ลงไปในสมการ รวมทั้งแทนค่า x ในสมการที่ได้จาก 0 ถึง L

$$S_B = \begin{cases} -C_y = -\dfrac{x}{L} & 0 \le x < a \\ A_y = 1 - \dfrac{x}{L} & a < x \le L \end{cases}$$

$$M_B = \begin{cases} C_y(L-a) = \dfrac{x}{L}(L-a) & 0 \le x < a \\ A_y(a) = \left(1 - \dfrac{x}{L}\right)a & a < x \le L \end{cases}$$

ขั้นตอนการวิเคราะห์ (Procedure for Analysis)

ขั้นตอนการสร้างเส้นอิทธิพล สำหรับ แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ของคาน โดยวิธีหลักการสมดุลย์

1. พิจารณาโครงสร้างโดยแบ่งแยกเป็นชิ้นส่วน เลือกจุดเริ่มต้น (Origin) ของการเคลื่อนที่ของแรง 1 หน่วย โดยปกติ จะสมมติให้แรง 1 หน่วยเคลื่อนที่จากซ้ายไปขวา ในเทอมของ x

2. การสร้างเส้น Influence สำหรับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ

(a) ใส่แรง 1 หน่วย ที่ระยะ x ใดๆ จากจุด ที่กำหนดในข้อ 1 ของแต่ละชิ้นส่วนแล้ว เขียนสมการทั่วไปของ แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ที่ต้องการหา ในเทอมของ x ถ้าโครงสร้างประกอบด้วยชิ้นส่วนแข็งตั้งแต่ 2 ชิ้นส่วนไป ต่อกันด้วย จุดยึดหมุนภายในแบบเคลื่อนที่ไม่ได้ (Internal hinges) หรือจุดยึดหมุนภายในแบบเคลื่อนที่ได้ (Internal rollers) สมการแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับหนึ่งๆ อาจมีการเปลี่ยนแปลงเมื่อ แรง 1 หน่วย เคลื่อนที่จาก ชิ้นส่วนหนึ่งไปยังอีกชิ้นส่วนหนึ่ง

(b) เขียนกราฟ เส้นอิทธิพล ของสมการแรงปฏิกิริยาที่ระยะ x ต่างๆ บนโครงสร้าง

3. โดยทั่วไป การสร้างเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด นิยมใช้สมการทั่วไปของแรงปฏิกิริยาฐานรองรับ ที่ได้จากข้อ 2 มาใช้หาค่า สมการทั่วไปของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ตามหลักการดังนี้

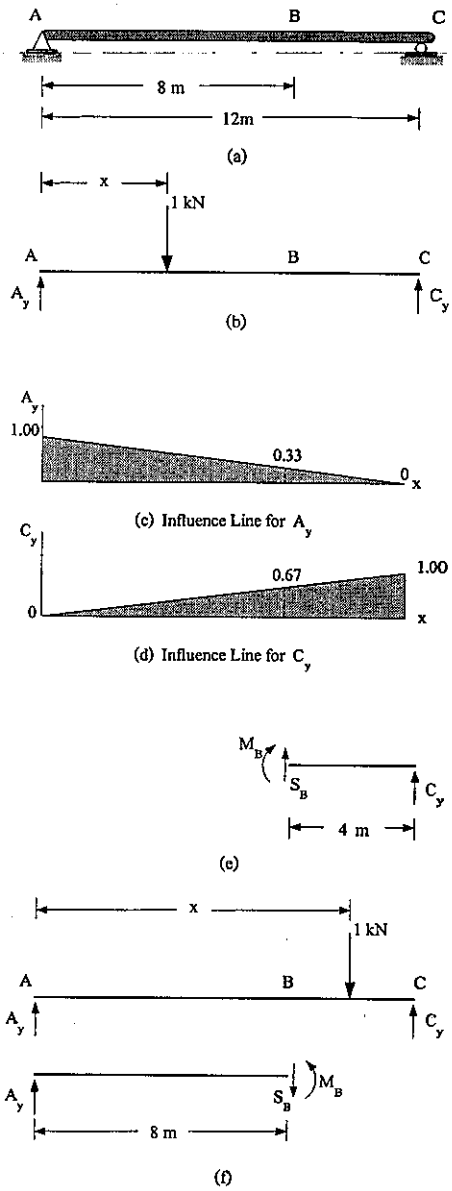
(a) ใส่แรง 1 หน่วย ที่ตำแหน่ง x ทางด้านซ้ายของจุดที่พิจารณา ค่าแรงเฉือน (หรือโมเมนต์ดัด) เขียน Free Body Diagram ของชิ้นส่วน ทางขวามือของจุดที่พิจารณา แล้วสร้างสมการ แรงเฉือน(หรือโมเมนต์ดัด) จากสมการแรงปฏิกิริยาที่ได้จากข้อ 2 ในเทอมของ x

(b) ใส่แรง 1 หน่วยที่ตำแหน่ง x ทางด้านขวา ของจุดที่พิจารณา เขียน เขียน Free Body Diagram ของชิ้นส่วน ทางซ้ายมือของจุดที่พิจารณา แล้วสร้างสมการแรงเฉือน (หรือโมเมนต์ดัด) จากสมการแรงปฏิกิริยาที่ได้จากข้อ 2 ในเทอมของ x

(c) รวมสมการของแรงเฉือน (หรือโมเมนต์ดัด) ของ 2 ชิ้นส่วน ที่ถูกแบ่งโดยจุดที่พิจารณาแรงเฉือน(หรือโมเมนต์ดัด)

(d) เขียนกราฟ เส้นอิทธิพล ของแรงเฉือน (หรือโมเมนต์ดัด) ที่ระยะ x ต่างๆ บนโครงสร้าง

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนเส้นอิทธิพล ของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ที่จุด A และ C รวมถึงแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุด B ของคาน ดังรูปที่ 2.3 (a)



- เขียน FBD ของคานตามรูปที่ 2.3 (a)
- กำหนดจุดเริ่มต้น (Origin) ของการเคลื่อนที่ของแรง 1 หน่วย ด้วยจุด A

สร้างอิทธิพล ของ A_y และ C_y

- สร้างสมการทั่วไปของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับในเทอมของ x

$$\sum M_A=0 ; \quad C_y(12) = 1(x)$$

$$C_y = \frac{x}{12}$$

$$\sum F_y=0 ; \quad A_y = 1 - C_y$$

$$A_y = 1-\frac{x}{12}$$

- เขียนเส้นอิทธิพลของ A_y และ C_y ได้โดยแทนค่า x ในสมการจาก 0 ถึง 12 m

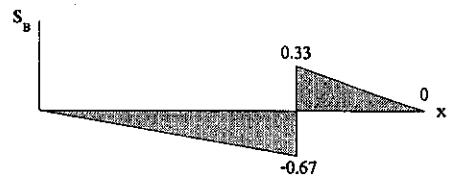
สร้างเส้นอิทธิพล ของ S_B และ M_B

- ใส่แรง 1 หน่วยที่ตำแหน่ง X ซึ่งอยู่ด้านซ้ายของจุด B (บนชิ้นส่วน AB) ดังรูปที่ 2.3 (b)
- เขียน FBD ของชิ้นส่วน BC เพื่อหาแรงเฉือนที่จุด B และโมเมนต์ดัดที่ B

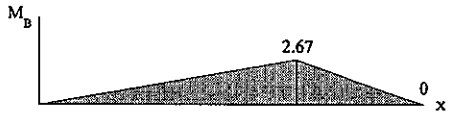
$$\sum F_y=0 ; \quad S_B = - C_y \qquad 0 \le x < 8m$$

$$\sum M_B=0 ; \quad M_B = C_y(4)$$

$$= 4\,C_y \qquad 0 \le x < 8m$$



(g) Influence Line for S_B



(h) Influence Line for M_B

รูปที่ 2.3

- เมื่อแรง 1 หน่วย เคลื่อนที่มากระทำบนชิ้นส่วน BC (ด้านซ้ายของจุด B)
- เขียน FBD ของชิ้นส่วน AC เพื่อหาแรงเฉือนที่จุด B และโมเมนต์ดัดที่ B

$$\sum F_y=0 \; ; \quad S_B = A_y \qquad 8 < x \leq 12\text{m}$$

$$\sum M_B=0 \; ; \quad M_B = A_y(8)$$

$$= 8\,Ay \qquad 8 < x \leq 12\text{m}$$

- รวมสมการแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

$$S_B = \begin{cases} -C_y = -\dfrac{x}{12} & 0 \leq x < 8\text{m} \\ A_y = 1 - \dfrac{x}{12} & 8 < x \leq 12\text{m} \end{cases}$$

$$M_B = \begin{cases} 4C_y = \dfrac{x}{3} & 0 \leq x < 8\text{m} \\ 8A_y = 8 - \dfrac{2x}{3} & 8 < x \leq 12\text{m} \end{cases}$$

- เขียนเส้นอิทธิพลของ S_B และ M_B โดยแทนค่า x ในสมการจาก 0 ถึง 12 m

2.2 เส้นอิทธิพลของการโก่งตัว

(Influnce Line for Deflections)

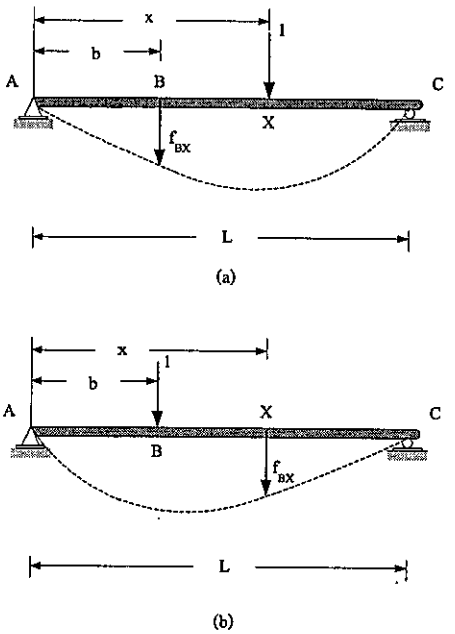
เส้นอิทธิพล ของการโก่งตัว จะเปลี่ยนแปลงตาม การโก่งตัวของโครงสร้างที่แรง 1 หน่วย เคลื่อนที่ผ่าน พิจารณารูปที่ 2.4 (a) เราต้องการสร้างเส้นอิทธิพล ของ การโก่งตัวในแนวดิ่ง ที่จุด B ของคานช่วงเดียวธรรมดา โดยการใส่แรง 1 หน่วย ทางด้านซ้ายและขวาของจุด B แล้วหาสมการการโก่งตัวที่จุด B ของแต่ละตำแหน่งของแรง 1 หน่วย โดยใช้ Direct Integration Method,

Superposition Method, Bending Moment Diagram by Parts Method และ Conjugate-Beam Method

มีขั้นตอนการสร้างเส้นอิทธิพล ของการโก่งตัว อีกวิธีหนึ่งซึ่งเป็นการประยุกต์กฎผกผันเกี่ยวกับการโก่งตัวของแม็กซเวล (Maxwell's law of reciprocal deflections) พิจารณารูป 2.4 (a) อีกครั้งถ้า f_{BX} เป็นการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด B เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่ตำแหน่ง x (ซึ่ง f_{XB} แสดงถึง ตำแหน่งที่ x ของเส้นอิทธิพล ของการโก่งตัว ในแนวดิ่งที่ B) และใส่แรง 1 หน่วยที่จุด B ดังรูปที่ (b) ด้านการหาการโก่งตัวที่จุด x (f_{XB}) จากทฤษฎี อีกวิธีหนึ่งซึ่งเป็นการประยุกต์ Maxwell's law of reciprocal deflections

$$f_{XB} = f_{BX}$$

(f_{XB} แสดงว่าการโก่งตัวที่ตำแหน่ง X เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่ตำแหน่ง B)

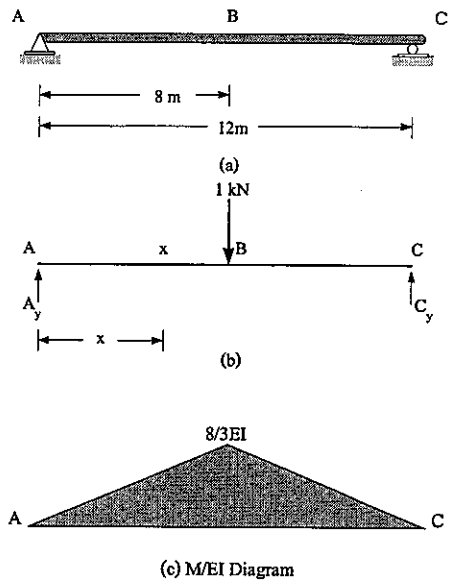


รูปที่ 2.4

สรุปได้ว่า รูปร่างการโก่งตัว ของโครงสร้าง จากแรงกระทำ 1 หน่วย ที่จุดที่พิจารณา คือ เส้นอิทธิพล ของการโก่งตัวที่จุดนั้น ด้วยเหตุนี้ การสร้างเส้นอิทธิพล ของการโก่งตัว ที่จุดของ

โครงสร้าง สามารถสร้างได้โดย ใส่แรงกระทำ 1 หน่วย ที่จุดที่ต้องการหา การโก่งตัวและหารูปร่างการโก่งตัวของโครงสร้างได้จากวิธีที่กล่าวมาข้างต้น

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงสร้างเส้นอิทธิพล ของการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด B ของคานช่วงเดียวธรรมดา ดังรูปที่ 2.5 (a)



รูปที่ 2.5

EI = constant

E = 200 GPa

$I = 700(10^6)\ mm^4$

- สร้างเส้นอิทธิพลของการโก่งตัวในแนวดิ่ง ที่จุด B
- ใส่แรง 1 หน่วย ที่จุด B ดังรูปที่ 2.5 (b) และสามารถหาการโก่งตัวของคานโดยใช้วิธีคานคอนจูเกต
- สร้าง M/EI Diagram ของคานจริง ดังรูปที่ 2.5 (c)

$$\Sigma M_A=0; \quad C_y(12) = 1(8)$$

$$C_y = \frac{2}{3} \quad kN$$

$$\Sigma F_y=0; \quad A_y+C_y = 1$$

$$A_y = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad kN$$

- ใส่น้ำหนัก M/EI Diagram ที่ได้จากคานจริง บนคานคอนจูเกต ดังรูป 2.5 (d) การโก่งตัวที่จุด x จะเท่ากับ โมเมนต์ดัดที่จุด x ของ คานคอนจูเกต

$$\Sigma M_A=0; \quad C_{cy}(12) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{8}{3EI}\times 8\times\frac{2}{3}\times 8\right)+$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{8}{3EI}\times 4\right)\times\left(8+\frac{1}{3}\times 4\right)$$

$$C_{cy} = \frac{80}{EI}$$

$$\sum F_y=0; \quad C_{cy} = A_{cy}+\left[\frac{1}{2}\times 12\times\frac{8}{3EI}\right]$$

$$A_{cy} = \frac{64}{EI}$$

$$\sum M_X=0; \quad M_X = A_{cy}(x)+\frac{1}{2}\times\frac{x}{3EI}\times x\left(\frac{1}{3}\times x\right)$$

$$= \frac{1}{18EI}\left(x^3+1152x\right)$$

- ดังนั้น การโก่งตัวที่ X บนคานจริง คือ

$$f_{XB} = \frac{1}{18EI}\left(x^3+1152x\right)$$

- จาก Maxwell's law reciprocal deflections, $f_{BX}=f_{XB}$

$$f_{BX} = \frac{1}{18EI}\left(x^3+1152x\right)$$

- แทนค่า E และ I ในสมการ f_{BX}

$$f_{BX} = \frac{1}{18}\frac{x^3+1152x}{\left(200\times10^6\right)\left(700\times10^{-6}\right)}$$

$$= \frac{x^3+1152x}{2520000}$$

- เส้นอิทธิพลของการโก่งตัวในแนวดิ่งที่ B สร้างขึ้นตามสมการ f_{BX} ดังรูปที่ 2.5 (c)

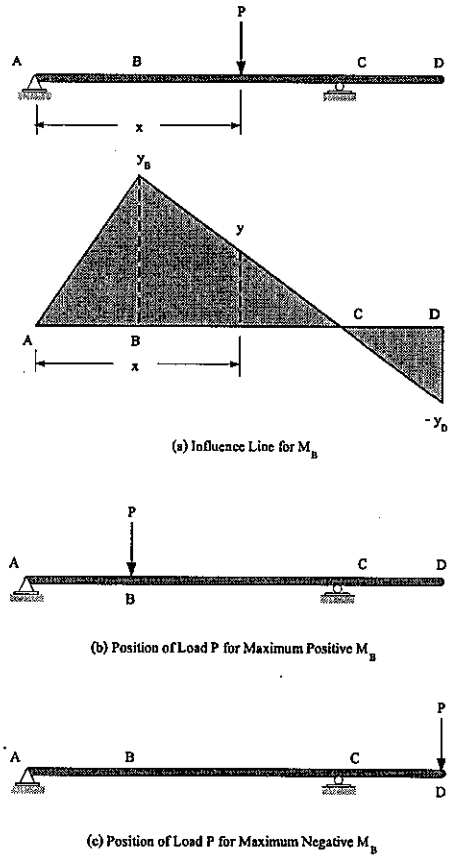
2.3 การประยุกต์ใช้เส้นอิทธิพล

(Application of Influence Lines)

2.3.1 ผลตอบสนองของโครงสร้างเฉพาะตำแหน่ง เนื่องจาก น้ำหนักเคลื่อนที่แบบจุด

(Response at a particular location due to a single moving concentrated load)

หลังจากสามารถสร้างเส้นอิทธิพล สำหรับฟังก์ชันต่างๆ (แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ,แรงเฉือน,โมเมนต์ดัด,และการโก่งตัว) ได้กระทำ แรงกระทำแบบจุด 1 หน่วย เคลื่อนที่บนโครงสร้าง ดังนั้นจากเส้นอิทธิพล สำหรับฟังก์ชันใดๆ เราสามารถหาผลตอบสนองของโครงสร้างจาก น้ำหนักเคลื่อนที่แบบจุดมีขนาดมากกว่า 1 หน่วยและสามารถหาค่าสูงสุด ของฟังก์ชัน (แรงปฏิกิริยาของฐานรองรับ,แรงเฉือน,โมเมนต์ดัด และการโก่งตัว) เนื่องจากกราฟของเส้นอิทธิพล น้ำหนักเคลื่อนที่แบบจุดซึ่งมีขนาดมากกว่า 1 หน่วย กระทำที่ตำแหน่งเกิดค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน



รูปที่ 2.6

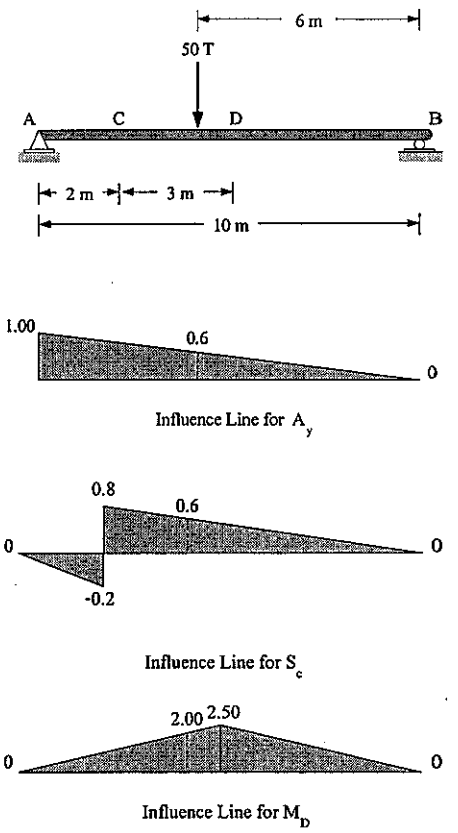
พิจารณารูปที่ 2.6 (a) คานช่วงเดียวธรรมดา มีแรงกระทำขนาด P หน่วย สมมติหาค่า โมเมนต์ดัดที่จุด B เมื่อแรงขนาด P หน่วย กระทำที่ระยะ x จากฐานรองรับ A ; สามารถหา เส้นอิทธิพล ของ M_B เนื่องจากแรงกระทำเคลื่อนที่ 1 หน่วย ดังรูป 2.6 (a) ที่ระยะ x จากฐานรองรับ A โมเมนต์ดัดที่จุด B มีค่าเท่ากับ y จาก The principle of superposition โมเมนต์ดัดที่จุด B เนื่องจากแรงกระทำขนาด P หน่วย มีค่าเท่ากับ Py

ต่อมาถ้าต้องการหาค่าสูงสุด ที่เป็นค่าบวกและลบของโมเมนต์ดัดที่จุด B เนื่องจากแรงกระทำขนาด P หน่วยพิจารณารูป 2.6 (a) จะสังเกตได้ว่าค่าสูงสุดที่เป็นบวกและลบของเส้นอิทธิพล เกิดขึ้นที่จุด B และ D ตามลำดับ

ดังนั้นค่าสูงสุดที่เป็นบวกของโมเมนต์ที่จุด B จะเกิดขึ้นเมื่อใส่แรงขนาด P หน่วยที่จุด B ดังรูปที่ 2.6 (b) ซึ่งค่าสูงสุดที่เป็นบวกของโมเมนต์ดัดที่จุด B มีค่าเท่ากับค่า Ordinate Py_B เมื่อ y_B คือ ค่า

Ordinate ของกราฟเส้นอิทธพล ที่จุด B ส่วน ค่าสูงสุดที่เป็นลบของโมเมนต์ที่จุด B จะเกิดขึ้นเมื่อใส่แรงขนาด P หน่วย ที่จุด D ดังรูปที่ 2.6 (c) ซึ่งค่าสูงสุดทำเป็นกราฟของโมเมนต์ดัดที่จุด B $= -Py_D$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> คานช่วงเดียว AB ยาว 10 เมตร ซึ่งสามารถเขียนเส้นอิทธิพล สำหรับ A_y ,S_c และ M_D ได้ดังรูปที่ 2.7 จงหาค่าของ A_y, S_c และ M_D เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกกระทำแบบจุดขนาด 50 ตัน เคลื่อนที่มา 6 m อยู่ที่จุดซึ่งห่างจากจุด B เป็นระยะเท่ากับ 6 เมตร



รูปที่ 2.7

- การสร้างเส้นอิทธิพล โดยให้แรงกระทำขนาด 1 หน่วย เคลื่อนที่บนคาน AB จะได้กราฟเส้นอิทธิพลของ A_y, S_c และ M_D ดังแสดง
- เมื่อน้ำหนักแบบจุดขนาด 50 ตัน เคลื่อนที่มาอยู่ที่ตำแหน่งที่ห่างจากจุด B เท่ากับ 6 เมตร ให้ลากเส้นประ ลงมาตามแนวดิ่ง ให้ตั้งฉากกับคานซึ่งจะตัดกราฟเส้นอิทธิพล สำหรับฟังก์ชันต่างๆ ดังรูป จะได้ค่า Ordinate ของเส้นอิทธิพล ดังนี้

Ordinate ของเส้นอิทธิพล R_A = +0.6 ton/ton

Ordinate ของเส้นอิทธิพล S_C = +0.6 ton/ton

Ordinate ของเส้นอิทธิพล M_D = +2.0 ton-m/ton

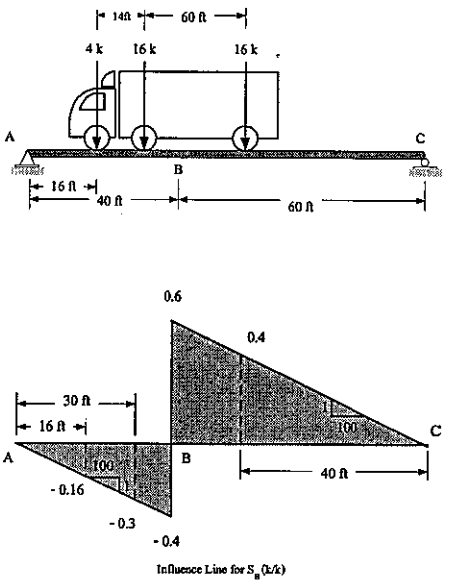
- ดังนั้น เมื่อมีน้ำหนักแบบจุด ขนาด 50 ตัน เคลื่อนที่มาอยู่ตรงจุดพิจารณา จะได้

แรงปฏิกิริยาที่จุด A	= 50 x 0.6 = 30 ton
แรงเฉือนที่จุด C	= 50 x 0.6 = 30 ton
โมเมนต์ดัดที่จุด D	= 50 x 2.0 = 100 ton-m

2.3.2 ผลตอบสนองโครงสร้างเฉพาะตำแหน่ง เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่เป็นกลุ่ม

(Response at a particular location due to a series of moving concentrated load)

พิจารณารูปที่ 2.8 สมมติว่า ต้องการหาค่าแรงเฉือนที่จุด B ของคาน AC เนื่องจากน้ำหนักของล้อรถบรรทุก HS20-44 3 เพลา ซึ่งล้อหน้าของรถเคลื่อนที่มาอยู่ที่ระยะ 16 ft จากฐานรองรับ A สามารถเขียนเส้นอิทธิพล ได้ดังรูป



รูปที่ 2.8

ค่าแรงเฉือนที่จุด B เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่เป็นกลุ่มเท่ากับ ผลรวมของค่า Ordinate ของกราฟเส้นอิทธิพล คูณกับขนาดน้ำหนักเคลื่อนที่ ในแต่ละตำแหน่งของกลุ่มน้ำหนักกระทำแบบจุด ซึ่งค่า Ordinate ของกราฟเส้นอิทธิพล ที่ตำแหน่งแรงกระทำหาได้จาก ทฤษฎีสามารถหาดล้าย เช่น ระยะ 16 ft ฐานรองรับ A ค่า Ordinate ของกราฟอิทธิพลหาได้จาก

$$-\frac{0.4}{40}=\frac{X}{16}$$

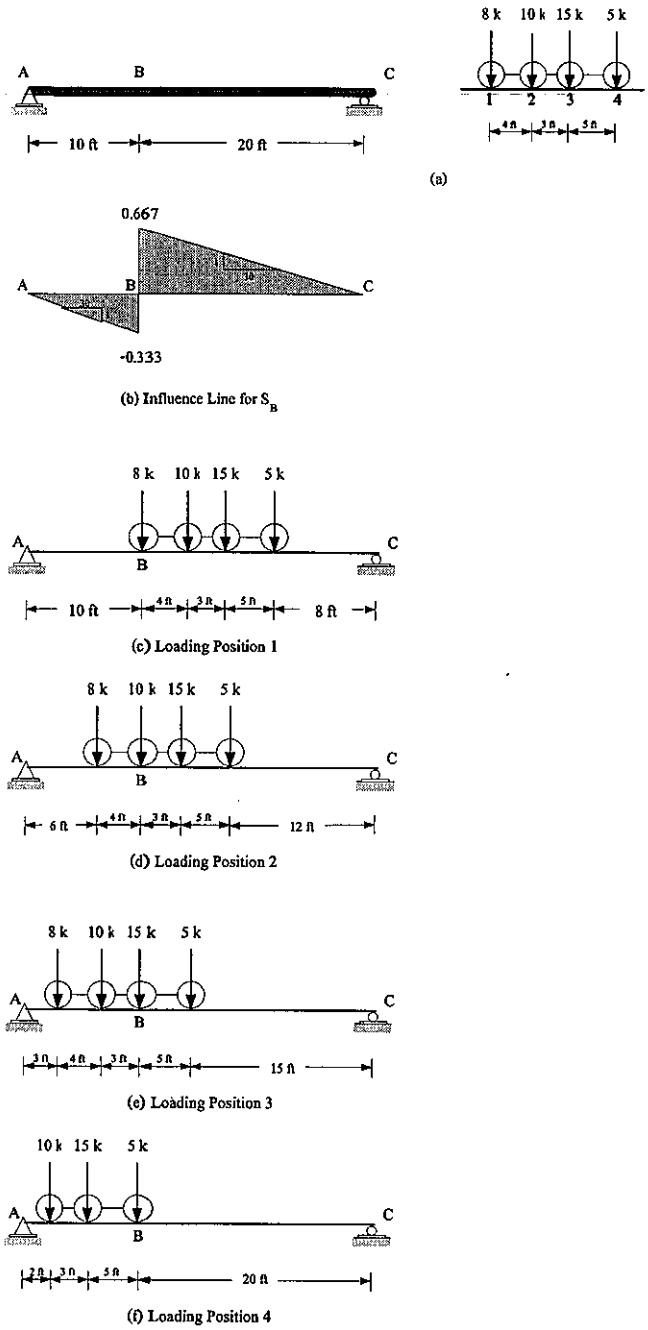
$$\frac{1}{100}=\frac{X}{16}$$

$$x=\left(-\frac{1}{100}\right)16 \qquad k/k$$

เพราะ S_B= -4(0.16)-16(0.3)+16(0.4)=0.96 k

จากเส้นอิทธิพล สามารถหาค่า สูงสุดของผลตอบสนองของโครงสร้าง เนื่องจากกลุ่มของน้ำหนักเคลื่อนที่เป็นกลุ่ม พิจารณารูปที่ 2.9 (a) สมมติว่า ต้องการหาค่าสูงสุดที่เป็นบวกของแรงเฉือนที่จุด B เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่เป็นกลุ่มดังรูป สามารถเขียนเส้นอิทธิพล ได้ดังรูป 2.9 (b) ให้ น้ำหนักเคลื่อนที่เป็นกลุ่ม เคลื่อนที่จากขวามาทางซ้าย จะสังเกตได้ว่าเมื่อ กลุ่มน้ำหนักเคลื่อนที่จากจุด C มาจุด B แรงเฉือนที่ตำแหน่ง B เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องตามค่า Ordinate ของกราฟ

เส้นอิทธิพล, แรงเฉือนที่จุด B มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เมื่อน้ำหนักแรกของกลุ่ม (8-k) เคลื่อนที่มาอยู่ทางขวา บนจุด B เพียงเล็กน้อย ซึ่งจุดนี้เป็นจุดที่ค่า Ordinate ของกราฟเส้นอิทธิพลสูงสุดที่เป็นบวก



รูปที่ 2.9

เมื่อน้ำหนัก 8-k มาถึงจุด B ค่าแรงเฉือนที่จุด B ลดลงอย่างกระทันหัน ค่าแรงเฉือนที่จุด B ลดลงมีค่าเท่ากับ –8(0.667-(-0.333) = -8k เมื่อกลุ่มน้ำหนักเริ่มเคลื่อนที่ แรงเฉือนที่จุด B ก็เพิ่มขึ้นอีกครั้ง และมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เมื่อน้ำหนัก 10-k เคลื่อนที่มาอยู่ทางขวามือของจุด B เพียงเล็กน้อย

ฉะนั้น แรงเฉือนที่มาถึงตำแหน่งที่กราฟเส้นอิทธิพล มีค่า Ordinate สูงสุด ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า ระหว่างที่กลุ่มน้ำหนักเคลื่อนที่เข้ามาในช่วงความยาวคานนั้นค่าสูงสุดที่แท้จริงของแรงเฉือนนั้น (Absolute Maximum Shear) ที่จุด B เกิดขึ้นเมื่อน้ำหนักตัวใดตัวหนึ่งในกลุ่มน้ำหนักเคลื่อนที่มาถึงตำแหน่งที่กราฟเส้นอิทธิพล ของ S_B มีค่าสูงสุดแต่เนื่องจากไม่มีความเป็นไปได้ ที่จะทำการตรวจสอบว่า ค่าของแรงเฉือนที่จุด B มีค่ามากที่สุดเมื่อน้ำหนักตัวใดตัวหนึ่งกระทำที่ตำแหน่งที่กราฟเส้นอิทธิพล มีค่า Ordinate สูงสุด ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องทำการลองผิดลองถูกหาค่า สูงสุดทำเป็นบวกของแรงเฉือนที่จุด B ดังรูป 2.9 (c) เมื่อน้ำหนัก 8-k เคลื่อนที่มาถึงตำแหน่ง

$$S_B = 8(20)\left(\frac{1}{30}\right) + 10(16)\left(\frac{1}{30}\right) + 15(13)\left(\frac{1}{30}\right) + 5(8)\left(\frac{1}{30}\right)$$
$$= 18.5 \quad k$$

เมื่อ น้ำหนัก 8-k เคลื่อนที่จากจุด B มาเป็นระยะ 4 ft ทำให้น้ำหนัก 10 k กระทำที่ตำแหน่ง B กราฟเส้นอิทธิพล มีค่า Ordinate สูงสุด ดังรูปที่ 2.9 (d)

$$S_B = -8(6)\left(\frac{1}{30}\right) + 10(20)\left(\frac{1}{30}\right) + 15(17)\left(\frac{1}{30}\right) + 5(12)\left(\frac{1}{30}\right)$$
$$= 15.567 \quad k$$

เมื่อกลุ่มน้ำหนักเคลื่อนที่ต่อมา ดังรูปที่ 2.9 (e)

$$S_B = -8(3)\left(\frac{1}{30}\right) - 10(7)\left(\frac{1}{30}\right) + 15(20)\left(\frac{1}{30}\right) + 5(15)\left(\frac{1}{30}\right)$$
$$= 9.367 \quad k$$

สุดท้าย เมื่อน้ำหนัก 5-k เคลื่อนที่มาถึงอยู่ทางขวามือของจุด B เพียงเล็กน้อย และน้ำหนัก 8-k เคลื่อนที่ออกจากคาน AB ดังรูปที่ 2.9 (f)

$$S_B = -10(2)\left(\frac{1}{30}\right) - 15(5)\left(\frac{1}{30}\right) + 5(20)\left(\frac{1}{30}\right)$$
$$= 0.167 \quad k$$

เมื่อเปรียบเทียบค่า S_B คำนวณได้ จึงสรุปได้ว่า ค่าสูงสุดที่เป็นบวกของแรงเฉือน ที่จุด B เกิดขึ้นเมื่อน้ำหนักตัวแรกของกลุ่มน้ำหนัก (คือ น้ำหนัก 8-k) เคลื่อนที่มาอยู่ทางขวาของจุด B เพียงเล็กน้อย

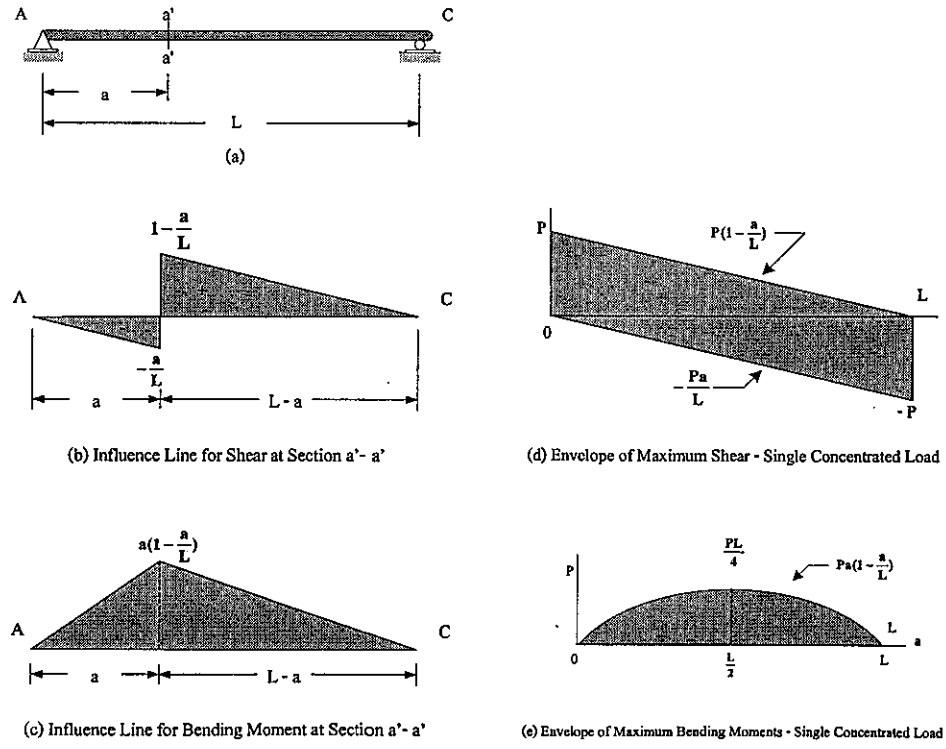
Maximum positive $S_B = 18.5$ k

2.4 ค่าสูงสุดที่แท้จริงของผลตอบสนองทางโครงสร้าง

(Absulute Maximum Response)

ค่าสูงสุดที่แท้จริงของผลตอบสนองทางโครงสร้าง เช่น ค่าสูงสุดของแรงเฉือน ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัด เป็นค่าที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนโครงสร้าง ที่รับกลุ่มของน้ำหนักบรรทุก แต่ค่าสูงสุดที่ได้นั้นอาจจะไม่ใช่ค่าสูงสุดที่แท้จริง ซึ่งค่าสูงสุดที่แท้จริงของผลตอบสนองของโครงสร้างสามารถนำไปใช้ในการออกแบบโครงสร้างต่างๆ ได้

2.4.1 น้ำหนักบรรทุกแบบจุด (Single Concentrated Load)



รูปที่ 2.10

พิจารณา คานช่วงเดียวธรรมดา ตามรูปที่ 2.10 (a) สามารถเขียนเส้นอิทธิพล สำหรับแรงเฉือน และโมเมนต์ดัดที่หน้าตัด a'a' ซึ่งห่างจากฐานรองรับ A เป็นระยะ a ดังรูปที่ 2.10 (b) และ (c)

สมมติ ต้องการหาค่า สูงสุดที่แท้จริงของแรงเฉือนของคาน เนื่องจาก น้ำหนักบรรทุกแบบจุด ขนาด P หน่วยจากกราฟเส้นอิทธิพล ของแรงเฉือนที่หน้าตัด a'a' พบว่า Ordinate สูงสุดที่เป็นบวก เท่ากับ $1-\frac{a}{L}$ ฉะนั้น

$$\text{ค่า Maximum Positive Shear} = P(1-\frac{a}{L}) \qquad (1)$$

และค่าสูงสุดที่เป็นลบของแรงเฉือน ที่หน้าตัด a'a' คือ

$$\text{ค่า Maximum Negative Shear} = -\frac{Pa}{L} \qquad (2)$$

เขียนกราฟตามสมการ (1) และ (2) จะได้ดังรูป 2.10 (d) คือ รูปของขอบเขตค่าสูงสุดของฟังก์ชันตอบสนองของโครงสร้าง (Envelope of the maximum values of a response function) ซึ่งจะช่วยในการหาค่าสูงสุดที่แท้จริงของผลตอบสนองทางโครงสร้าง สรุปว่า "ค่าสูงสุดที่แท้จริงของแรงเฉือนสำหรับคานช่วงเดียวธรรมดาจะหาได้เมื่อให้แรงลัพธ์ของกลุ่มน้ำหนักเคลื่อนที่อยู่บนช่วงคาน กระทำใกล้กับฐานรองรับด้านใดด้านหนึ่งมากที่สุด"

จากรูปที่ 2.10 (d) ค่าสูงสุดที่แท้จริงของแรงเฉือน กระทำที่หน้าตัดคานในรูปของฐานรองรับ มีค่าเท่ากับ P

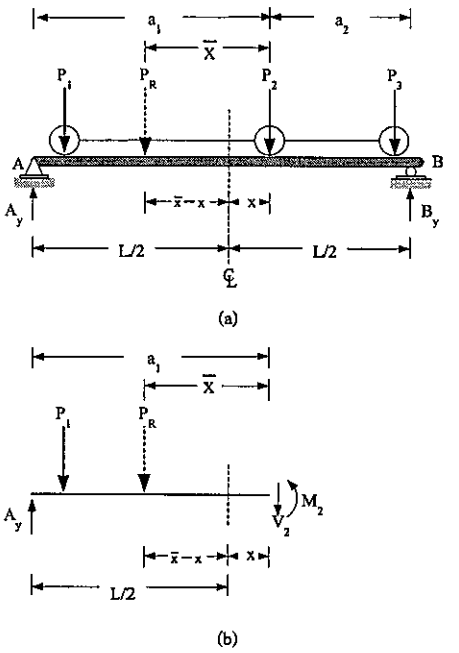
กราฟ Influnce Line ของโมเมนต์ดัด ที่หน้าตัด a'a' แสดงดังรูปที่ 2.10 (c)

$$\text{ค่า Maximum bending moment} = Pa(1-\frac{a}{L}) \qquad (3)$$

จากสมการ (3) ไปเขียนกราฟ ได้ดังรูปที่ 2.10 (e) ดังรูปของขอบเขตของค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดสรุปได้ว่า "ค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัด สำหรับคานช่วงเดียวธรรมดา เกิดขึ้นที่กึ่งกลางคาน มีค่าสำหรับ $\frac{PL}{4}$ "

2.4.2 น้ำหนักบรรทุกแบบกลุ่ม (Series of Concentrated Load)

ค่าสูงสุดที่แท้จริงของแรงเฉือน ในคานช่วงเดียวธรรมดา เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกระทำเป็นกลุ่มเกิดขึ้นที่หน้าตัดด้านในของคานที่ใกล้กับฐานรองรับ จากเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน ที่หน้าตัด a'a' ดังรูปที่ 2.10 (b) ถ้าเลื่อนหน้าตัด a'a' ให้เข้าใกล้ฐานรองรับ A ค่าสูงสุดที่เป็นบวกของแรงเฉือนจะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องตามกราฟเส้นอิทธิพล เพราะ ความยาวและค่าสูงสุดของ Ordinate ของกราฟเส้นอิทธิพลเพิ่มขึ้น ดังนั้น ค่าบวกสูงสุดที่แท้จริงของแรงเฉือนจะเกิดขึ้นเมื่อหน้าตัด a'a' อยู่ทางขวามือของฐานรองรับ A จากเหตุผลเดียวกัน ค่าลบสูงสุดที่แท้จริงของแรงเฉือนจะเกิดขึ้นที่หน้าตัดทางซ้ายของฐานรองรับ C ขั้นตอนการคำนวณค่าสูงสุดที่แท้จริง ของผลตอบสนองทางโครงสร้างที่หน้าตัด เนื่องจากกลุ่มน้ำหนักกระทำ สามารถคำนวณตามหัวข้อ 2.4.1



รูปที่ 2.11

ในการหาตำแหน่งของค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัดพิจารณาดังนี้ คานช่วงเดียวธรรมดา มีกลุ่มน้ำหนักเคลื่อนที่กระทำ P_1, P_2 และ P_3 ซึ่งผลรวมของน้ำหนัก P_1, P_2 และ P_3 คือ P_R กระทำที่ระยะ $\bar{x}$ จาก $\overline{P}_2$ ดังรูป ถ้าแผนภาพโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram) ของคานประกอบด้วยเส้นตรง ระหว่างแรงกระทำจะไม่สนใจตำแหน่งของน้ำหนักกระทำ ดังนั้น ค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัด เกิดขึ้นใต้แรงน้ำหนักกระทำ สมมติว่า ค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นใต้น้ำหนักกระทำ P_2 ซึ่งจำเป็นต้องหาตำแหน่งของ x จากกึ่งกลางคานถึงน้ำหนักกระทำ P_2

$$\Sigma M_B=0\,; \qquad -A_y(L)+P_R\left(\frac{L}{2}+\bar{x}+x\right) = 0$$

$$A_y = P_R\left(\frac{1}{2}+\frac{\bar{x}}{L}-\frac{x}{L}\right)$$

เขียนรูปอิสระ ของชิ้นส่วนคานทางซ้ายของแรง P_2

$$\Sigma M_{P2L}=0\,; \qquad M_2 = A_y\left(\frac{L}{2}+x\right)-P_1a_1$$

$$= P_R\left(\frac{1}{2}+\frac{\bar{x}}{L}-\frac{x}{L}\right)\left(\frac{L}{2}+x\right)-P_1a_1$$

$$= P_R\left(\frac{L}{4}+\frac{\bar{x}}{2}-\frac{x\bar{x}}{L}-\frac{x^2}{L}\right)-P_1a_1$$

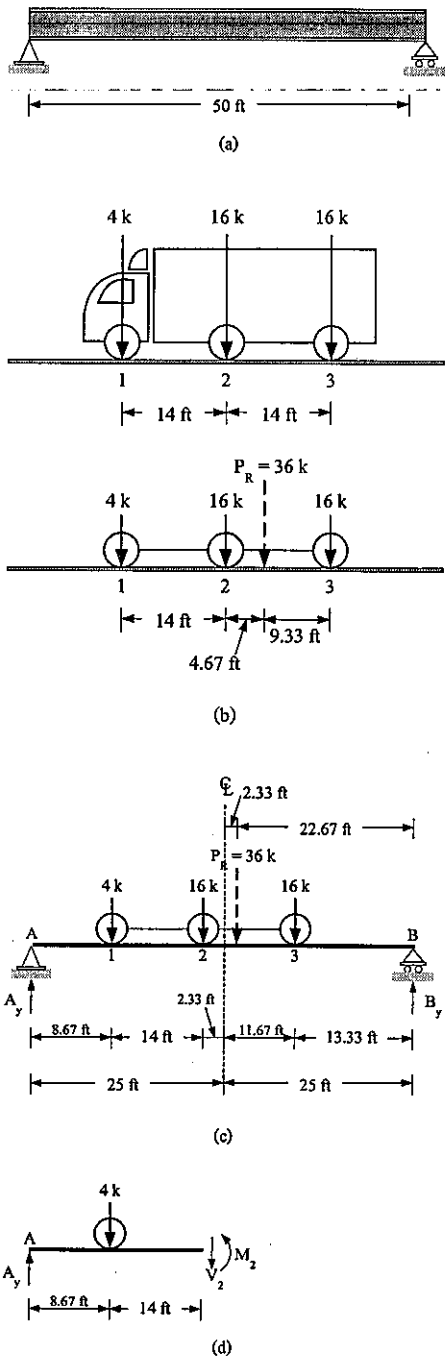
อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ M_2 เทียบกับ x เท่ากับ 0

$$\frac{dM_2}{dx}=P_R\left(\frac{\bar{x}}{L}-\frac{2x}{L}\right)=0$$

จะได้ $$x=\frac{\bar{x}}{2} \qquad (4)$$

จากสมการ (4) สรุปได้ว่า "คานช่วงเดียวธรรมดาเมื่อมีน้ำหนักเคลื่อนที่เป็นกลุ่มกระทำ ค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัด จะเกิดขึ้นใต้น้ำหนักที่อยู่ใกล้แรงลัพธ์ เมื่อกึ่งกลางของระยะระหว่างน้ำหนักกระทำตัวนั้น และ แรงลัพธ์ของกลุ่มน้ำหนัก เคลื่อนที่มาถึงจุดกึ่งกลางของคาน"

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัด ของคานช่วงเดียวธรรมดา เนื่องจากล้อของรถบรรทุก HS20-44 ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12

- หาแรงของกลุ่มน้ำหนักกระทำ

$$P_R = \sum P_i = 4 + 16 + 16 = 36k$$

- หาตำแหน่งของแรงลัพธ์ ที่กระทำบนคาน โดยใช้สมดุลย์ของโมเมนต์ที่จุดใดของล้อรถบรรทุก

$$\sum M_3 = 0 ; \quad P_R(\bar{x}) = \sum P_i x_i$$

$$36(\bar{x}) = 4(28) + 16(14)$$

$$\bar{x} = 9.33 \text{ ft}$$

- จากรูป 2.12 (b) น้ำหนักล้อที่ 2 ของกลุ่ม (16k) อยู่ใกล้แรงลัพธ์ P_R ดังนั้นค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นใต้ น้ำหนักกระทำของล้อที่ 2 เมื่อกลุ่มของน้ำหนักเคลื่อนที่มาจนกระทั่ง จุดกึ่งกลางระหว่างน้ำหนักล้อที่ 2 กับแรงลัพธ์เคลื่อนที่มาถึงจุดกึ่งกลางคาน ดังนั้น ระยะห่างระหว่างน้ำหนักล้อที่2 กับ แรงลัพธ์มีค่า 14-9.33= 4.67 ft จะได้แรงลัพธ์กระทำที่ทางขวาของล้อที่ 2 เป็นระยะ 4.67 ft ฉะนั้น น้ำหนักล้อที่ 2 อยู่ห่างจากกึ่งกลางคานไปทางซ้ายเป็นระยะ 4.67/2 = 2.33 ft ดังรูป 2.12 (c) หาแรงที่ฐานรองรับ A

$$\sum M_B = 0 ; \quad A_y(50) = (36)(22.67)$$

$$A_y = 16.32 \text{ k}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดที่แท้จริงของโมเมนต์ดัด เกิดขึ้นใต้น้ำหนักล้อที่ 2 ของรถบรรทุก เขียนรูปอิสระของคาน AB ตั้งแต่ฐานรองรับ A ถึงตำแหน่งที่น้ำหนักล้อที่ 2 ของรถบรรทุก

$\sum M_2=0$; $M_2 = A_y(8.67+14) - 4(14)$

$= 313.97$ k-ft

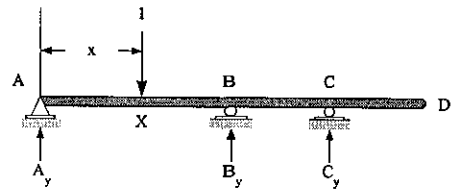
การวิเคราะห์โครงสร้างอินดีเทอร์มิเนทโดยวิธีสถิตศาสตร์

2.5 เส้นอิทธิพลของคาน

(Influence Lines for Beams)

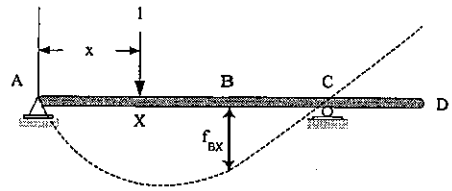
พิจารณาคานต่อเนื่อง ดังรูปที่ 2.13 (a) ต้องการเขียนเส้นอิทธิพล ของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกขนาด 1 หน่วย เคลื่อนที่บนโครงสร้างมาอยู่ที่ตำแหน่ง X ซึ่งห่างจากฐานรองรับ A เป็นระยะ x ในการเขียนเส้นอิทธิพลของ B_y จำเป็นต้องหาค่า B_y ในเทอมของระยะ x ซึ่งคานในรูปเป็นโครงสร้างอินดีเทอร์มิเนท 1 ดีกรี ดังนั้น พิจารณาให้แรงปฏิกิริยา B_y เป็นตัวเกิน (Redundant) ทำให้ฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้ (Roller Support) ถูกย้ายออกจากคานจริงแบบอินดีเทอร์มิเนท ในรูปที่ 2.13 (a) กลายเป็นคานแบบดีเทอร์มิเนท หรือ "โครงสร้างพื้นฐาน " (Primary Structure) ดังรูปที่ 2.13 (b)ซึ่งต้องรับทั้งน้ำหนักบรรทุกขนาด 1 หน่วย ที่จุด x และ แรงปฏิกิริยา B_Y โดยหลักการรวมผล (Principle of Superposition) จะแยกการกระทำของน้ำหนักบรรทุก ขนาด 1 หน่วย กระทำที่หนึ่ง ดังรูปที่ 2.13 (b) ซึ่งจะเกิดการโก่งตัวที่จุด B (f_{BX}) เนื่องจากฐานรองรับ B ถูกย้ายออกไป และแรง 1 หน่วยของ Redundant B_y กระทำอีกที่หนึ่ง ดังรูป 2.13 (c) ซึ่งก็จะเกิดการโก่งตัวที่จุด B (f_{BB}) เป็นต้น

จากหลักการของ ความต่อเนื่อง หรือ ความสอดคล้องของโครงสร้าง (Compatibility Condition) และการโก่งตัวของ Primary Beam ที่จุด B เนื่องจากน้ำหนักบรรทุก 1 หน่วย และ Redundant B_Y ต้องเท่ากับศูนย์



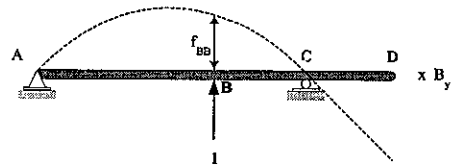
(a) Indeterminate Beam

=

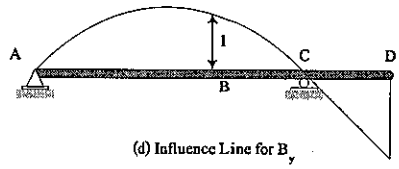


(b) Primary Beam Subjected to Unit Load

+



(c) Primary Beam Loaded with Redundant B_y



(d) Influence Line for B_y

รูปที่ 2.13

$$f_{BX} + f_{BB}B_y = 0$$

$$B_y = -\frac{f_{BX}}{f_{BB}} \qquad (5)$$

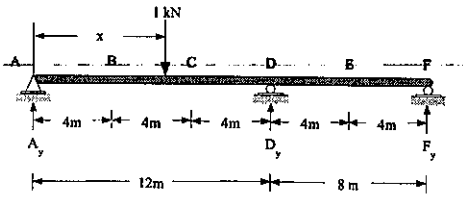
จากกฎผกผันเกี่ยวกับการโก่งตัวของแม็กเวล สามารถเขียนสมการที่ (5) ได้ใหม่ ดังนี้

$$B_y = -\frac{f_{XB}}{f_{BB}} \qquad (6)$$

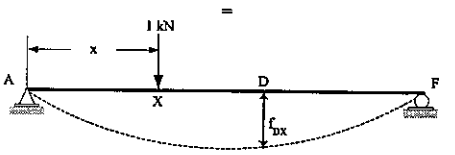
ข้อสังเกต ค่า f_{XB} และ f_{BB} จะเป็นบวก เมื่อคานโก่งขึ้น และ ทิศของ Redundant มีทิศขึ้น

ส
TL
930.3
ส169ก
2545
4740048
- 2 S.A. 2546
สำนักหอสมุด

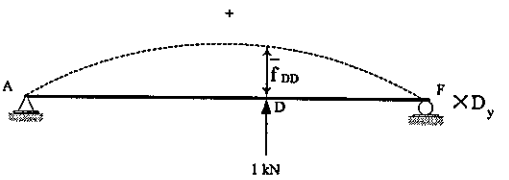
ตัวอย่างที่5 จงสร้างเส้นอิทธิพล ของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดที่จุด C ของคานต่อเนื่อง 2 ช่วง ดังรูปที่ 2.14



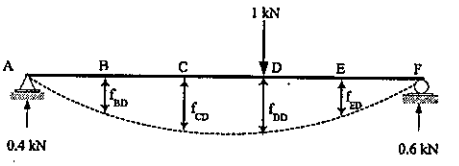
(a) Indeterminate Beam



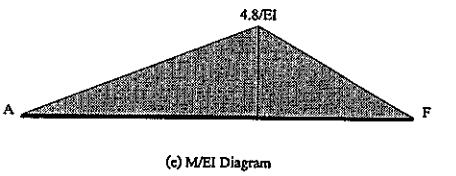
(b) Primary Beam Subjected to Unit Load



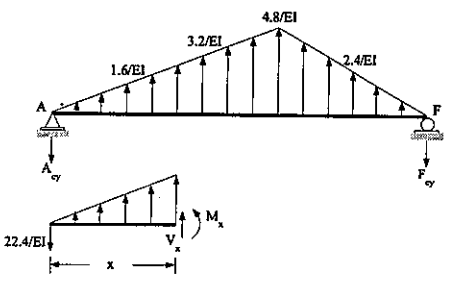
(c) Primary Beam Loaded with Redundant D_y



(d) Primary Beam Subjected to Unit Load at D



(e) M/EI Diagram



(f) Conjugate Beam for Unit Load at D

EI = constant

- คาน AF เป็นโครงสร้างแบบอินดีเทอร์มิเนท
- เลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ D_y เป็น Redundant พิจารณาค่า Ordinate ของเส้นอิทธิพลทุกๆ 4 m จากจุด A ถึงจุด F ดังรูปที่ 2.14 (a)

เส้นอิทธิพลของ Redundant D_y

- ค่า Redundant D_y เนื่องจากน้ำหนักบรรทุก 1 หน่วย กระทำที่ตำแหน่ง X หาจาก Compatibility Equation (ดังรูปที่ 2.14 (b) และ (c))

$$f_{DX} + \bar{f}_{DD} D_y = 0$$

$$D_y = -\frac{f_{DX}}{\bar{f}_{DD}}$$

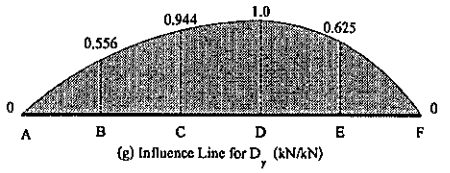
- จาก Maxwell's law of reciprocal deflections

$$D_y = -\frac{f_{XD}}{\bar{f}_{DD}}$$

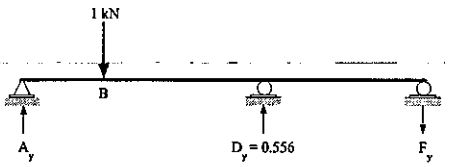
- ใส่แรงกระทำ 1 หน่วย ที่จุด D บน Primary Beam (ดังรูปที่ 2.14 (d)) และคำนวณการโก่งตัวที่จุด A ถึง F โดยใช้วิธี Conjugate Beam
- สร้าง M/EI Diagram ของคานจริง

$\Sigma M_A = 0$; $F_y (20) = 1 (12)$

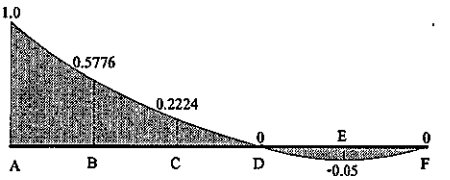
$F_y = 0.6$ kN



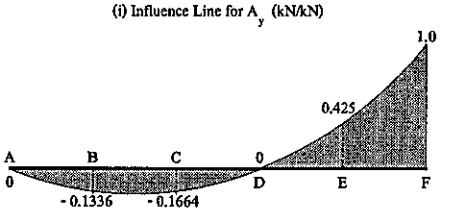
(g) Influence Line for D_y (kN/kN)



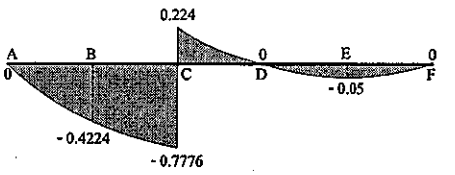
(h)



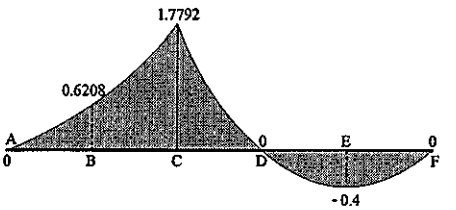
(i) Influence Line for A_y (kN/kN)



(j) Influence Line for F_y (kN/kN)



(k) Influence Line for S_C (kN/kN)



(l) Influence Line for M_C (kN-m/kN)

รูปที่ 2.14

$\sum F_y=0$; $A_y = 1-0.6 = 0.4$ kN

- ใส่น้ำหนัก M/EI Diagram ที่ได้จากคานจริง (ดังรูปที่ 2.14 (f)) การโก่งตัวที่จุด x ใดๆ จะเท่ากับโมเมนต์ดัด ที่จุด x ของ Conjugate Beam

$$\sum M_A=0 ; \quad F_{cy}(20) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{4.8}{EI}\times 12\times\frac{2}{3}\times 12\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{4.8}{EI}\times 8\right)\left(12+\frac{1}{3}\times 8\right)$$

$$F_{cy} = \frac{25.6}{EI}$$

$$\sum F_y=0 ; \quad A_{cy}+F_{cy} = \frac{1}{2}\times\frac{4.8}{EI}\times 20$$

$$A_{cy} = \frac{22.4}{EI}$$

- หาการโก่งตัวทุกระยะ 4 m ของคาน

$$f_{DA} = f_{AD} = 0$$

$$f_{DB} = f_{BD} = -\frac{1}{EI}\left[22.4(4)-\left(\frac{1}{2}\right)(4)(1.6)\left(\frac{1}{3}\times 4\right)\right]$$

$$= -\frac{85.333 \quad kN\cdot m^3/kN}{EI}$$

$$f_{DC} = f_{CD} = -\frac{1}{EI}\left[22.4(8)-\left(\frac{1}{2}\right)(8)(3.2)\left(\frac{1}{3}\times 8\right)\right]$$

$$= -\frac{145.067 \quad kN\cdot m^3/kN}{EI}$$

$$f_{DD} = -\frac{1}{EI}\left[22.4(12)-\left(\frac{1}{2}\right)(12)(4.8)\left(\frac{1}{3}\times 12\right)\right]$$

$$= -\frac{153.6 \quad kN\cdot m^3/kN}{EI}$$

$$f_{DE} = f_{ED} = -\frac{1}{EI}\left[25.6(4) - \left(\frac{1}{2}\right)(4)(2.4)\left(\frac{1}{3}\times 4\right)\right]$$

$$= -\frac{96 \quad kN\cdot m^3/kN}{EI}$$

$$f_{DF} = f_{FD} = 0$$

- ค่าลบของการโก่งตัว ชี้ให้เห็นว่า คานเกิดการโก่งลง

- สัมประสิทธิ์เฟลกซิบิลิตี (Flexibility Coeffcient) $\bar{f}_{DD}$ ในสมการที่ (7) มีค่าบวก เนื่องจากแรง 1 หน่วยของตัว Redundant D_y กระทำดังรูปที่ 2.14 (c) และ ค่าการโก่งตัว f_{DD} มีค่าลบ เนื่องจาก แรงกระทำ 1 kN กระทำที่จุด D ดังรูปที่ 2.14 (d) จะได้

$$\bar{f}_{DD} = -f_{DD} = +\frac{153.6 \quad kN\cdot m^3/kN}{EI}$$

- ค่า Ordinate ของเส้นอิทธิพลของ D_y สามารถคำนวณตามสมการที่ (7) ในแต่ละจุดทุกๆ 4 m เช่น เมื่อแรงกระทำ 1 หน่วย กระทำที่จุด B

จุด B

$$D_y = -\frac{f_{DB}}{f_{DD}} = \frac{85.333}{153.6} = 0.556 \quad kN/kN$$

- ค่า Ordinate ต่างๆ ของเส้นอิทธิพล ของ D_y แสดงดังตารางที่ 2.1 และกราฟเส้นอิทธิพลของ D_y แสดงดังรูป 2.14 (g)

เส้นอิทธิพลของ A_y และ F_y

- จากเส้นอิทธิพลของ D_y สามารถสร้างเส้นอิทธิพลของฐานรองรับอื่นๆได้จากสมการสมดุลย์ เช่น เมื่อแรงกระทำ 1 หน่วย กระทำที่จุด B (ดังรูปที่ 2.14 (h)) แรงปฏิกิริยาที่จุด D (D_y) มีค่าเท่ากับ 0.556 kN/kN สามารถหาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A และ F ได้โดยใช้สมการสมดุลย์ของโครงสร้างดีเทอร์มิเนท

$\sum M_F=0$; $A_y(20) + D_y(8) = 1(16)$

$A_y = 0.5776$ kN/kN

$\sum F_y=0$; $F_y + 1 = 0.5776 + 0.556$

$F_y = 0.1336$ kN/kN

- ค่า Ordinate ต่างๆ ของเส้นอิทธิพลของ A_y และ F_y แสดงดังตารางที่ 2.1 และกราฟเส้นอิทธิพลของ A_y และ F_y แสดงดังรูปที่ 2.14 (i) และ (j) ตามลำดับ

เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน S_C และ M_C

- ค่า Ordinate ของเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ที่จุด C คำนวณได้โดย ใส่แรงกระทำ 1 หน่วย ตั้งแต่จุด A จนถึงจุด F บนคานอินดิเทอร์มิเนท และใช้ค่าแรงปฏิกิริยา ที่คำนวณได้ก่อนหน้านี้ของแต่ละตำแหน่ง เช่น เมื่อแรงกระทำอยู่จุด B ค่า $A_y = 0.5776$ kN/kN, $D_y = 0.556$ kN/kN และ $F_y = -0.1336$ kN/kN ใช้สมดุลย์ของรูปอิสระชิ้นส่วนคานทางด้านซ้ายของจุด C

$S_C = 0.5776 - 1 = -0.4224$ kN/kN

$M_C = 0.5776(8) - 1(4) = 0.6208$ kN.m/kN

- ค่า Ordinate ต่างๆ ของเส้นอิทธิพล ของ S_C และ M_C แสดงดังตารางที่ 2.1 และกราฟเส้นอิทธิพลของ S_C และ M_C แสดงดังรูปที่ 2.14 (k) และ (l) ตามลำดับ

ตารางที่ 2.1

Unit Load at	Influence Line Ordinates				
	D_y (kN/kN)	A_y (kN/kN)	F_y (kN/kN)	S_c (kN/kN)	M_c (kN/kN)
A	0	1	0	0	0
B	0.556	0.5776	- 0.1336	- 0.4224	0.6208
C	0.944	0.2224	- 0.1664	- 0.7776 (left) 0.2224 (right)	1.7792
D	1.0	0	0	0	0
E	0.625	- 0.05	0.425	- 0.05	- 0.4
F	0	0	1.0	0	0