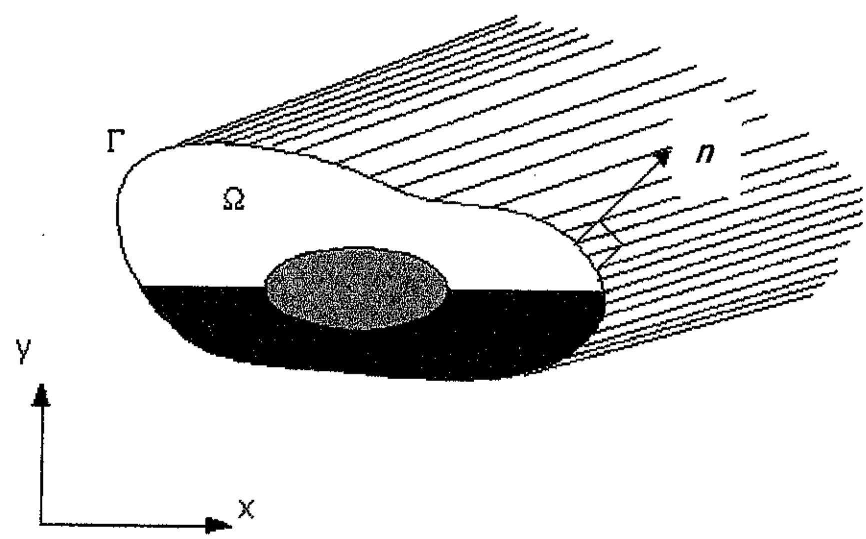
บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

2.1 นิพจน์แปรผัน

วิธีการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสียหรือไม่มีการสูญเสียต่ำในขณะนำคลื่น โดยทำการพิจารณาภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นที่มีรูปทรงใดๆ(Ω)ซึ่งอาจจะเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยม รูปทรงกลม เป็นต้น ในโครงงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นที่เป็นสี่เหลี่ยมในระนาบ x ,y



รูป2.1 ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ และความสม่ำเสมอในแนวแกน z

เมื่อกำหนดให้ Ω เป็นพื้นที่หน้าตัดในระนาบ x , y

Γ เป็นสัมประสิทธ์การสะท้อน

n เป็นดัชนีหักเหของท่อนำคลื่น

ท่อนำคลื่นจะประกอบไปด้วยตัวกลางที่มีสภาพยอมอยู่ในรูปเทนเซอร์ $[\varepsilon]$ และความซาบ-ซึมได้ μ อยู่ในรูปสเกลาร์ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นนี้สามารถวิเคราะห์ได้จากสมการที่อยู่ในรูปสนามแม่เหล็ก H ดังนี้

$$\nabla \times \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times H\right) - k_0^2 \mu_r H = 0 \tag{2.1}$$

เมื่อ $k_0^2 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ คือเวฟนัมเบอร์ของอวกาศว่าง, $[\varepsilon_r]$ และ μ_r คือเทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของตัวกลางตามลำดับ, $[\varepsilon_r]$และ μ_r สามารถหาได้จากสมการ

$$[\varepsilon_r] = \frac{1}{\varepsilon_0}[\varepsilon] \tag{2.2}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2.3}$$

โดยที่ $[\varepsilon]$, μ คือ เทนเซอร์สภาพยอมและความซาบซึมได้ของตัวกลาง, ε_r และ μ_r คือสภาพยอม และความซาบซึมได้ของอากาศว่าง ตามลำดับ

นิพจน์แปรผันของสมการตามที่ Hayata และคณะได้เสนอไว้คือ

$$F(H) = \iint_{\Omega} \left[(\nabla \times H)^* \cdot \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times H\right) - k_0^2 \mu_r H^* \cdot H\right] d\Omega \tag{2.4}$$

เมื่อ* คือสังยุคเชิงซ้อน สมการที่ 2.4 ได้มาจาก

$$\nabla \times \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times\right) - k_0^2 = 0$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$L = \nabla \times \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times\right) - k_0^2$$

$$\left(L\overline{H}, \overline{H}\right) = \iiint_V \left(\nabla \times \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \overline{H}\right) - k_0^2 \overline{H}\right) \cdot \overline{H}^* dv$$

จะใช้ทฤษฎีของ Green's หาค่าของนิพจน์แปรผัน

$$F = \iiint_V \left(\nabla \times \overline{H}^*\right) \cdot \left(\left[\varepsilon_r\right]^{-1} \nabla \times \overline{H}\right) dv - \oiint_s \left(\overline{H}^* \times \left[\varepsilon_r\right]^{-1} \nabla \times \overline{H}\right) \cdot \hat{n} ds - \iiint_V k_0^2 \mu_r \overline{H}^* \cdot \overline{H} dv$$

สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$F(H) = \iint_\Omega \left[\left(\nabla \times H\right)^* \cdot \left(\left[\varepsilon_r\right]^{-1} \nabla \times H\right) - k_0^2 \mu_r H^* \cdot H\right] d\Omega$$

ซึ่งสมการนี้ก็คือ นิพจน์แปรผัน นั่นเอง

2.2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม และให้คำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปของ Hayata และคณะดังนี้

$$H = [N]^T \{H\}_e \exp(-j\beta z) \tag{2.5}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\{H\}_e = \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ \{H_z\} \end{bmatrix}$$

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T \end{bmatrix}$$

เมื่อ β คือค่าคงตัวเฟส, $[N]$ คือเมตริกฟังก์ชันรูปร่างของคำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กในทิศ x y และ z ตามลำดับ, $\{H\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่องค์ประกอบคือ สนามแม่เหล็กที่โนดของอีลีเมนต์ในทิศ x y และ z, T คือตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน แทนสมการ H ในสมการนิพจน์แปรผัน

$$F(H) = \iint_{\Omega} \left[(\nabla \times H)^* \cdot \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times H \right) - k_0^2 \mu_r H^* \cdot H \right] d\Omega$$

เมื่อ

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z} & \frac{j\partial\{N\}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial\{N\}^T}{\partial z} & 0 & -\frac{j\partial\{N\}^T}{\partial x} \\ -\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} & \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

และรวม $F(H)$ ทุกอีลีเมนต์ทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน ทำให้ได้นิพจน์แปรผันที่สามารถเขียนได้ดังนี้

$$F(H) = \{H\}^T \left([S] - k_0^2 [M] \right) \{H\} \tag{2.6}$$

เมื่อ

$$\{H\} = \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ \{H_z\} \end{bmatrix}$$

เมตริก $[S]$ หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S] = \sum_e \iint_e [T]^* [\varepsilon_r]^{-1} [T]^T \, dxdy$$

เมื่อ

$$[T] = \begin{bmatrix} \{0\} & -j\beta\{N\} & \frac{-\partial\{N\}}{\partial x} \\ j\beta\{N\} & \{0\} & \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \\ \frac{j\partial\{N\}}{\partial y} & \frac{-j\partial\{N\}}{\partial x} & \{0\} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_r]^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{bmatrix}$$

และกำหนดให้

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{xx}] & [S_{xy}] & [S_{xz}] \\ [S_{yx}] & [S_{yy}] & [S_{yz}] \\ [S_{zx}] & [S_{zy}] & [S_{zz}] \end{bmatrix}$$

โดยที่เมตริกย่อย $[S_{xx}], [S_{xy}], \ldots, [S_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์มีอันดับเป็น 3x3โดยจะหาได้จากภาคผนวกด้านหลัง

ส่วนเมตริก $[M]$ สามารถหาได้จากสมการ

$$[M] = \sum_e \iint_e \mu_r [N]^* [N]^T \, d\bar{x} d\bar{y}$$

เมื่อ

$$[N] = \begin{bmatrix} \{N\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{N\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & j\{N\} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \beta x$$
$$\bar{y} = \beta y$$

องค์ประกอบของเมตริก $[M]$ คือ

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{xx}] & [M_{xy}] & [M_{xz}] \\ [M_{yx}] & [M_{yy}] & [M_{yz}] \\ [M_{zx}] & [M_{zy}] & [M_{zz}] \end{bmatrix}$$

โดยที่เมตริกย่อย $[M_{xx}], [M_{xy}], \ldots, [M_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์มีอันดับเป็น 3x3 สามารถหาได้จากภาคผนวกด้านหลัง

เมื่อ $\{H\}$ คือสนามแม่เหล็กที่โนดทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น เมตริกซ์ [S]และ [M] เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเชียน คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาเงื่อนไขจุดต่ำสุดของของสมการนิพจน์แปรผันซึ่งยังผลให้ได้สมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เจาะจงที่มี k_0^2 เป็นค่าเจาะจงดังสมการนี้

$$[S]\{H\} - k_0^2[M]\{H\} = 0 \tag{2.7}$$

สมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐานได้เป็น

$$[M]^{-1}[S]\{H\} - k_0^2\{H\} = 0 \tag{2.8}$$

เมื่อใช้สมการมาวิเคราะห์ท่อนำคลื่นพบว่า มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมร่วมกับผลเฉลยที่ถูกต้อง ซึ่งผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นมีคุณลักษณะคือ ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก (B) ไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์ หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซึ่งต้องเป็นศูนย์ $\nabla \cdot B = 0$ Hayata และคณะได้เสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นดังที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

2.3 การกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม

Hayata และคณะ ได้เสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้น โดยการให้เงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ แก่นิพจน์แปรผันในสมการตามขั้นตอนดังนี้

จากเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ $\nabla \cdot B = 0$ องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามแนวแกนZ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางได้เป็น

$$\mu H_z = (j\beta)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mu H_x + \frac{\partial}{\partial y}\mu H_y\right) \tag{2.9}$$

เมื่อ H_x , H_y และ H_z คือ สนามแม่เหล็กในทิศแกน x , y และ z ตามลำดับ
ได้รูปแบบกาเลอกินของสมการข้างบนในรูปเมตริกคือ

$$[D_z]\{H_z\} = [D_t]\{H_t\} \tag{2.10}$$

เมื่อ

$$[D_z] = \sum_e \iint_e \mu\{N\}\{N\}^T d\bar{x}d\bar{y}$$

$$[D_t] = -\sum_e \iint_e \left[\mu\{N\} \partial\{N\}^T \big/ \partial\bar{x} \quad \mu\{N\} \partial\{N\}^T \big/ \partial\bar{y} \right] d\bar{x}d\bar{y}$$

$$\bar{x} = \beta x \qquad \bar{y} = \beta y$$

$$\{H_t\} = \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\{H_x\}$และ $\{H_y\}$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่องค์ประกอบคือ สนามแม่เหล็กที่โนดในทิศแกน x และแกน y ตามลำดับ โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการรูปกาเลอกิน สนามแม่เหล็กที่โนดทั้ง 3 องค์ประกอบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางได้เป็น

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ \{H_z\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ [D_z]^{-1}[D_t]\begin{Bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathrm{I}] \\ [D_z]^{-1}[D_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \end{bmatrix} = [D]\{H_t\}$$

เมื่อกำหนดให้

$$[D] = \begin{bmatrix} [\mathrm{I}] \\ [D_z]^{-1}[D_t] \end{bmatrix}$$

[I] คือเมตริกเอกลักษณ์

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการสนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบที่อยู่ในรูป 2 องค์ประกอบ นิพจน์แปรผันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบได้ดังนี้

$$F(H_t) = \{H_t\}^T \left([S_{tt}] - \left(\frac{k_0}{\beta}\right)^2 [M_{tt}] \right) \{H_t\}$$

เมื่อ

$$[S_{tt}] = [D]^T [S][D]$$

$$[M_{tt}] = [D]^T [M][D]$$

$$\left[\tilde{M}\right] = \sum_e \iint_e \mu_r [N]^* [N]^T d\overline{x} d\overline{y}$$