บทที่ 2
ทฤษฎีวิเคราะห์และหลักการจัดรูปฟังก์ชันวิเคราะห์

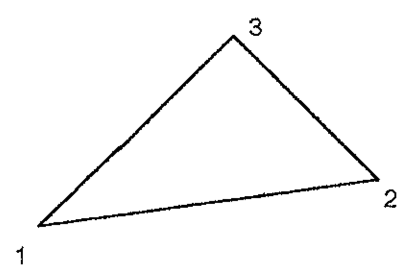
2.1 ไฟไนต์อีลีเมนต์ (Finit Element Method , FEM)

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์และเป็นที่นิยมนำมาใช้ในงานวิศวกรรม หลักการทั่วไปของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะแบ่งโครงสร้างที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นส่วนย่อยซึ่งได้รับการเรียกว่า ไฟไนต์อีลีเมนต์ ฟังก์ชันที่นำมาแทนอีลีเมนต์จะต้องต่อเนื่อง แต่ละอีลีเมนต์จะโยงกันด้วยจุดต่อ (node) หรือเส้นขอบหรือผิวรอบอีลีเมนต์สัมผัสกัน และโดยคุณสมบัติขอบวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างในที่นี้เรายกตัวอย่างเป็นท่อนำคลื่นดังนั้นเราสามารถหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นที่จุดต่างๆของแต่ละอีลีเมนต์ที่ประกอบเป็นโครงสร้างของท่อนำคลื่นได้

ขั้นตอนหลักในการเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีดังนี้

2.1.1การแบ่งโดเมนหลักของปัญหาออกเป็นส่วนประกอบย่อย (Discretization or subdivision of the domain)

ในการพิจารณาชิ้นงานหรือวัสดุใดๆที่ต้องการวิเคราะห์นั้นเราจะแทนปริมาณใดๆที่สนใจด้วย Ω ซึ่งอาจเป็นปริมาณหรือพื้นที่ผิวใดที่สนใจโดยจะได้รับการเรียกว่า โดเมนหลัก(Domain) ซึ่งโดเมนหลักดังกล่าวนี้จะได้รับการแบ่งเป็นส่วนประกอบย่อยและได้รับการเรียกว่า ส่วนประกอบย่อย หรืออีลีเมนต์



รูปที่2.1 อีลีเมนต์ย่อยสามเหลี่ยม

การแบ่งโดเมนมีหลักการคือ

2.1.1.1 การแบ่งโดเมนหลักออกเป็นอีลีเมนต์ย่อยนั้นต้องไม่เกิดช่องว่างระหว่างอีลีเมนต์ย่อย

2.1.1.2 ควรหลีกเลี่ยงการทำให้เกิดอีลีเมนต์ย่อยที่มีพื้นที่ภายในสามเหลี่ยมเล็กมากเนื่องจากจะทำให้เกิดผลเฉลยที่ผิดพลาดหรือคลาดเคลื่อนไปจากผลเฉลยที่ถูกต้องซึ่งผลเฉลยที่ผิดพลาดของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์คือการแปรผันของสัดส่วนของอัตราส่วนภายในสามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดเพราะฉะนั้นทุกๆส่วนของอีลีเมนต์ย่อยจะทำเป็นด้านปิดทุกๆด้านเท่ากันและการแบ่งโดเมนหลักต้องการวิเคราะห์ จะต้องคำนึงถึงรูปร่างลักษณะของโครงสร้างเดิม คือแบบจำลองไฟไนต์อีลีเมนต์จะต้องเหมือนหรือสอดคล้องกับโครงสร้างเดิมให้มากที่สุดซึ่งเป็นเหตุให้จำเป็นและนิยมแบ่งอีลีเมนต์ย่อยๆเป็นสามเหลี่ยม

2.1.1.3 สำหรับการพิจารณาแต่ละอีลีเมนต์ย่อยเราต้องกำหนดตำแหน่งที่ชัดเจนโดยการกำหนดตัวเลขจำนวนเต็มไว้แต่ละส่วนประกอบย่อยนั้นๆ และคล้ายกับการพิจารณาโนด (Node) ที่จุดเชื่อมต่อของแต่ละอีลีเมนต์ย่อยของมุมสามเหลี่ยม โดยที่ส่วนอีลีเมนต์ย่อยแต่ละส่วนจะถูกเชื่อมต่อกันที่โนด ในอีลีเมนต์ย่อยสามเหลี่ยมจะมีโนดสามโนดซึ่งแต่ละโนดมีตำแหน่งของตัวเองอยู่ในระบบทั้งหมด

2.1.2 การเลือกฟังก์ชันประมาณค่า (Selection of Interpolation Function)

การเลือกฟังก์ชันประมาณค่านั้น (Interpolation) เป็นการสร้างฟังก์ชันขึ้นมาเพื่อประมาณปริมาณที่ไม่ทราบค่าที่แน่นอนที่อยู่ในอีลีเมนต์ย่อยที่ได้รับการแบ่งจากโดเมนหลักซึ่งโดยปกติสามารถเลือกเอาฟังก์ชันโพลิโนเมียลโดยเป็นกำลังหนึ่ง กำลังสอง รวม กำลังที่สูงขึ้นไปแม้ว่าจะได้ผลเฉลยที่แม่นยำมากแต่มีรูปแบบฟังก์ชันที่ซับซ้อนมาก ดังนั้นจึงมักเลือกใช้ฟังก์ชันแบบง่ายๆ โดยที่เราสามารถแสดงปริมาณที่ไม่ทราบค่าที่อยู่ในส่วนประกอบย่อย (e) ได้ดังนี้

$$\tilde{\phi}^e = \sum_{j=1}^{n} N_j^e \phi_j^e = \{N^e\}^T \{\phi^e\} = \{\phi^e\}^T \{N^e\} \tag{2.1}$$

โดยที่

ϕ คือปริมาณที่ต้องการสร้างฟังก์ชันประมาณค่า

n คือจำนวนโนดในอีลีเมนต์ย่อย

ϕ_j^e คือค่าของ ϕ ที่โนด j ของอีลีเมนต์ย่อย

N_j^e คือเป็นปริมาณที่ทราบค่าและเป็นค่าของฟังก์หลัก

2.1.3 รูปแบบของระบบสมการ (Formulation of the system of equations)

ขั้นตอนที่สามนั้นเป็นขั้นตอนสำคัญของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยเป็นขั้นตอนที่ทำให้ได้มาซึ่งสูตรของระบบสมการ โดยหลักการแปรผันของริทซ์ (Rith variational)และ วิธีของกาเลอร์กิน (Galerkin method) ซึ่งเป็นหลักการที่ความมุ่งหมายที่คล้ายกันโดยมีรายละเอียดดังนี้

2.1.3.1 หลักการแปรผันของริทซ์

โดยหลักการของริทซ์นั้นจะแสดงฟังก์ชันของปัญหาอยู่ในรูปดังสมการ (2.2)

$$F\{\tilde{\phi}\} = \sum_{e=1}^{M} F^e\left(\tilde{\phi}^e\right)$$

$$F^e\left(\tilde{\phi}^e\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \tilde{\phi}^e L\phi^e d\Omega - \int_{\Omega^e} f\tilde{\phi}^e d\Omega \qquad (2.3)$$

เมื่อแทน (2.1) ในสมการ (2.3) จะได้สมการที่ (2.4) ดังนี้

$$F^e = \frac{1}{2}\{\phi^e\}^T\left[K^e\right]\{\phi^e\} - \{\phi^e\}^T\{b^e\} \qquad (2.4)$$

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e L N_j^e d\Omega \qquad (2.5)$$

$$\{b_i^e\} = \int_{\Omega^e} f N_i^e d\Omega \qquad (2.6)$$

M คือจำนวนของอีลีเมนต์ย่อย

$\left[K^e\right]$ คือเมทตริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$

$\{b^e\}$ คือ $n \times 1$ เวกเตอร์หลัก

L คือกระทำการ (self-adjoint)

เมื่อแทนสมการ (2.4)ในสมการ (2.1)จะได้สมการ (2.7)หลังจากนั้นจัดรูปฟังก์ชัน (2.7) ได้สมการ (2.8)

$$F(\tilde{\phi}) = \sum_{e=1}^{M}\left(\frac{1}{2}\{\phi^e\}^T\left[K^e\right]\{\phi^e\} - \{\phi^e\}^T\{b^e\}\right) \qquad (2.7)$$

$$\{R^e\} = \lfloor K^e \rfloor \{\phi^e\} - \{b^e\} \tag{1.14}$$

โดยที่

$\{R^e\} = \lfloor R_1^e, R_2^e, \ldots, R_n^e \rfloor$

$\lfloor K^e \rfloor$ ไม่จำเป็นต้องเป็นเมทตริกซ์สมมาตร

โดยใช้ความสัมพันธ์ของแต่ละอีลีเมนต์ย่อยซึ่งแต่ละอีลีเมนต์ย่อยเชื่อมกันด้วยโนดที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นกับโดเมนหลักซึ่งอาจพูดได้ว่าเป็นความสัมพันธ์ของ Global กับ Local และการรวมอีลีเมนต์ย่อยทำให้ได้สมการมาหนึ่งสมการและโดยอาศัยหลักการพาเชียลดิฟเฟอร์เรนเชียล (partial differential) คล้ายกับการได้มาของสมการที่ (2.12) ทำให้ได้สมการ (2.15) ดังนี้

$$\sum_{e=1}^{M} \left(\left[\overline{K}^e\right] \left\{\overline{\phi}^e\right\} - \left\{\overline{b}^e\right\} \right) = \{0\} \tag{2.15}$$

2.1.4 การแก้ปัญหาของระบบสมการ (Solution of the System of Equation)

การวิเคราะห์ปัญหาโดยการแก้ปัญหาของระบบสมการเป็นขั้นตอนสุดท้ายของการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ซึ่งผลของการวิเคราะห์จะปรากฏในรูปของสมการที่ (2.16) และ (2.17) แบบใดแบบหนึ่งดังนี้

$$[K]\{\phi\} = \{b\} \tag{2.16}$$

หรือ

$$[A]\{\phi\} = \lambda[B]\{\phi\} \tag{2.17}$$

$[K]$ สามารถเขียนเป็น $[A] - \lambda[B]$ ได้

$\{b\}$ คือเวกเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

λ แสดงตัวแปรค่าไอเกน (eigenvalues) ที่ไม่ทราบค่า

ซึ่งในการคำนวณค่าที่ต้องการสามารถทำโดยการแทนค่าต่างที่เกี่ยวคล้องในสมการการวิเคราะห์และประกอบกับขั้นตอนทั้งสี่ขั้นที่กล่าวมาแล้วทำให้สามารถคำนาณค่าที่ต้องการออกมาได้

2.2 สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้นที่โดยประมาณ 30 ปีผ่านมามีผู้ทำการศึกษาวิจัยมาแล้วมากมาย อาทิ

Koshibaและคณะ (1985) ได้เสนอการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ร่วมกับฟังก์ชันที่ใช้ในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม ที่เรียกว่า ฟังก์ชันพีนอลตีซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปความหนาแน่นฟลักซ์ ร่วมถึงเสนอข้อดีขอ้เสียของการใช้งานฟังก์ชันไว้ด้วย

Hayata,Koshiba และSuzuki (1984)ได้เสนอการวิเคราะห์ ท่อนำคลื่นโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยใช้สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กอย่างละ 1 องค์ประกอบ

Hayata,Koshiba,Eguchi และ Suzuki (1986) Chew และNasir (1989) Lu และ Feranndez (1993)ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้สนามตามขวาง 2 องค์ประกอบและเสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมโดยการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์เท่ากับศูนย์

Svendin (1989) เสนอวิธีวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกโดยใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบและสนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตบนรอยต่อที่มีตัวกลางไม่ต่อเนื่องโดยที่ Svendin แสดงให้เห็นว่า ผลที่ได้ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแม้ว่าไม่มีการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์เท่ากับศูนย์ แต่วิธีนี้มีข้อเสียคือมีการใช้ตัวแปรไม่ทราบค่าถึง 6 ตัวต่อหนึ่งอีลีเมนต์

ซึ่งหลักการของการใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบในการวิเคราะห์ก็คือการแทนเวกเตอร์สนามแม่เหล็ก 3 แกนในระบบสมการที่นำไปใช้วิเคราะห์ระบบนั้นเอง

2.3 ท่อนำคลื่น (Wave guide)

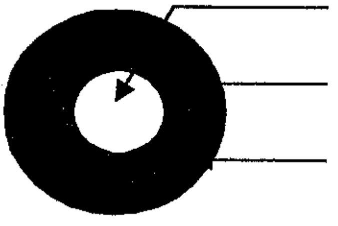
ในปี พ.ศ 2509 นักวิทยาศาสตร์ชาวสหราชอาณาจักร ชื่อ ฮอคแคม (G.A.Hockham) และ(C.C.Kao) ได้ทำการวิจัยว่าตัวกลางที่ทำด้วยใยแก้วนำแสงสามารถส่งแสงได้ 1%ของ แสงอินพุตด้วยระยะทาง 1 กิโลเมตร จนปัจจุบันทำให้สามารถมีใยแก้วนำแสงที่มีการส่งผ่านแสงได้อย่างมีประสิทธิภาพ หรือมีการสูญเสียต่ำได้ซึ่งใยแก้วบ้างชนิดมีการสูญเสียต่ำมากเพียง 0.1 เดซิเบลต่อกิโลเมตรเท่านั้นและใช้เป็นวัสดุทำท่อนำคลื่น

2.3.1 โครงสร้างของท่อนำคลื่น

ส่วนประกอบของท่อนำคลื่นที่สำคัญ คือส่วนที่เป็นแกน(core)โดยดัชนีหักเหของแสงที่ส่วนนี้ต้องมีค่ามากกว่าส่วนที่เป็นแคลด โดยแคลดคือส่วนที่กั้นทำหน้าที่เป็นฉนวนโปร่งใสแล้วลำแสงที่ผ่านไปในแกนจะถูกควบคุมให้เคลื่อนที่ไปตามเส้นใยแก้วนำแสงด้วยขบวนการสะท้อนกลับหมดภายใน

2.3.2 ส่วนป้องกั้นหรือส่วนห่อหุ้ม

เป็นส่วนที่ต่อจากแคลดเป็นที่กันแสงจากภายนอกเข้าเส้นใยแก้วนำแก้วและกันแสงภายในออกข้างนอกและยังใช้ประโยชน์เมื่อมีการเชื่อมต่อเส้นใยแก้วนำแสงและทำหน้าที่เป็นส่วนป้องกันภายนอกอีกด้วย

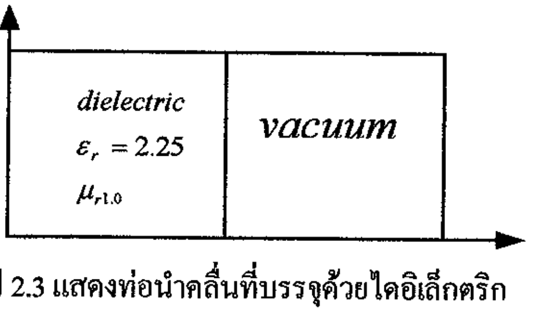


รูป 2.2 แสดงส่วนประกอบของท่อนำคลื่น

2.3.3 สำหรับท่อนำคลื่นที่ได้รับการเลือกเป็นตัวอย่างปัญหาในการวิเคราะห์คือ

2.3.3.1 ท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

ซึ่งเป็นตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์ซึ่งเป็นตัวอย่างของปัญหาที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งภายในบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบโดยที่ลักษณะของไดอิเล็กตริกทุกชนิดสามารถสะสมพลังงานได้ซึ่งเกิดจากการที่ประจุบวกและประจุลบของอะตอมเคลื่อนขยับจากปรกติและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_r และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ μ_r เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ



รูป 2.3 แสดงท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

2.2 สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้นที่โดยประมาณ 30 ปีผ่านมามีผู้ทำการศึกษาวิจัยมาแล้วมากมาย อาทิ

Koshibaและคณะ (1985) ได้เสนอการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ร่วมกับฟังก์ชันที่ใช้ในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม ที่เรียกว่า ฟังก์ชันพีนอลตีซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปความหนาแน่นฟลักซ์ ร่วมถึงเสนอข้อดีขอ้เสียของการใช้งานฟังก์ชันไว้ด้วย

Hayata,Koshiba และSuzuki (1984) ได้เสนอการวิเคราะห์ ท่อนำคลื่นโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยใช้สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กอย่างละ 1 องค์ประกอบ

Hayata,Koshiba,Eguchi และ Suzuki (1986) Chew และNasir (1989) Lu และ Feranndez (1993) ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้สนามตามขวาง 2 องค์ประกอบและเสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมโดยการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์เท่ากับศูนย์

Svendin (1989) เสนอวิธีวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกโดยใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบและสนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตบนรอยต่อที่มีตัวกลางไม่ต่อเนื่องโดยที่ Svendin แสดงให้เห็นว่า ผลที่ได้ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแม้ว่าไม่มีการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์เท่ากับศูนย์ แต่วิธีนี้มีข้อเสียคือมีการใช้ตัวแปรไม่ทราบค่าถึง 6 ตัวต่อหนึ่งอีลีเมนต์

ซึ่งหลักการของการใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบในการวิเคราะห์ก็คือการแทนเวกเตอร์สนามแม่เหล็ก 3 แกนในระบบสมการที่นำไปใช้วิเคราะห์ระบบนั้นเอง

2.3 ท่อนำคลื่น (Wave guide)

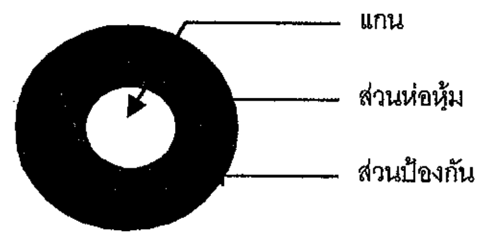
ในปี พ.ศ 2509 นักวิทยาศาสตร์ชาวสหราชอาณาจักร ชื่อ ฮอคแคม (G.A.Hockham) และ(C.C.Kao) ได้ทำการวิจัยว่าตัวกลางที่ทำด้วยใยแก้วนำแสงสามารถส่งแสงได้ 1%ของ แสงอินพุตด้วยระยะทาง 1 กิโลเมตร จนปัจจุบันทำให้สามารถมีใยแก้วนำแสงที่มีการส่งผ่านแสงได้อย่างมีประสิทธิภาพ หรือมีการสูญเสียต่ำได้ซึ่งใยแก้วบ้างชนิดมีการสูญเสียต่ำมากเพียง 0.1 เดซิเบลต่อกิโลเมตรเท่านั้นและใช้เป็นวัสดุทำท่อนำคลื่น

2.3.1 โครงสร้างของท่อนำคลื่น

ส่วนประกอบของท่อนำคลื่นที่สำคัญ คือส่วนที่เป็นแกน(core)โดยดัชนีหักเหของแสงที่ส่วนนี้ต้องมีค่ามากว่าส่วนที่เป็นแคลดโดยแคลดคือส่วนที่กั้นทำหน้าที่เป็นฉนวนโปร่งใสแล้วลำแสงที่ผ่านไปในแกนจะถูกควบคุมให้เคลื่อนที่ไปตามเส้นใยแก้วนำแสงด้วยขบวนการสะท้อนกลับหมดภายใน

2.3.2 ส่วนป้องกั้นหรือส่วนห่อหุ้ม

เป็นส่วนที่ต่อจากแคลดเป็นที่กันแสงจากภายนอกเข้าเส้นใยแก้วนำแก้วและกันแสงภายในออกข้างนอกและยังใช้ประโยชน์เมื่อมีการเชื่อมต่อเส้นใยแก้วนำแสงและทำหน้าที่เป็นส่วนป้องกันภายนอกอีกด้วย

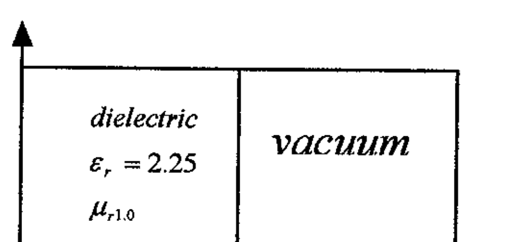


รูป 2.2 แสดงส่วนประกอบของท่อนำคลื่น

2.3.3 สำหรับท่อนำคลื่นที่ได้รับการเลือกเป็นตัวอย่างปัญหาในการวิเคราะห์คือ

2.3.3.1 ท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

ซึ่งเป็นตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์ซึ่งเป็นตัวอย่างของปัญหาที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งภายในบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบโดยที่ลักษณะของไดอิเล็กตริกทุกชนิดสามารถสะสมพลังงานได้ซึ่งเกิดจากการที่ประจุบวกและประจุลบของอะตอมเคลื่อนขยับจากปรกติและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_r และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ μ_r เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ



รูป 2.3 แสดงท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

2.2 สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้นที่โดยประมาณ 30 ปีผ่านมามีผู้ทำการศึกษาวิจัยมาแล้วมากมาย อาทิ

Koshibaและคณะ (1985) ได้เสนอการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ร่วมกับฟังก์ชันที่ใช้ในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม ที่เรียกว่า ฟังก์ชันพีนอลตีซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปความหนาแน่นฟลักซ์ ร่วมถึงเสนอข้อดีขอ้เสียของการใช้งานฟังก์ชันไว้ด้วย

Hayata,Koshiba และSuzuki (1984)ได้เสนอการวิเคราะห์ ท่อนำคลื่นโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยใช้สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กอย่างละ 1 องค์ประกอบ

Hayata,Koshiba,Eguchi และ Suzuki (1986) Chew และNasir (1989) Lu และ Feranndez (1993)ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยใช้สนามตามขวาง 2 องค์ประกอบและเสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมโดยการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์เท่ากับศูนย์

Svendin (1989) เสนอวิธีวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกโดยใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบและสนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตบนรอยต่อที่มีตัวกลางไม่ต่อเนื่องโดยที่ Svendin แสดงให้เห็นว่า ผลที่ได้ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแม้ว่าไม่มีการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์เท่ากับศูนย์ แต่วิธีนี้มีข้อเสียคือมีการใช้ตัวแปรไม่ทราบค่าถึง 6 ตัวต่อหนึ่งอีลีเมนต์

ซึ่งหลักการของการใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบในการวิเคราะห์ก็คือการแทนเวกเตอร์สนามแม่เหล็ก 3 แกนในระบบสมการที่นำไปใช้วิเคราะห์ระบบนั้นเอง

2.3 ท่อนำคลื่น (Wave guide)

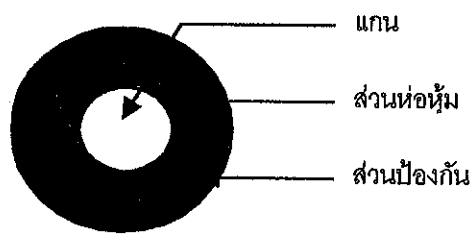
ในปี พ.ศ 2509 นักวิทยาศาสตร์ชาวสหราชอาณาจักร ชื่อ ฮอคแคม (G.A.Hockham) และ(C.C.Kao) ได้ทำการวิจัยว่าตัวกลางที่ทำด้วยใยแก้วนำแสงสามารถส่งแสงได้ 1%ของ แสงอินพุตด้วยระยะทาง 1 กิโลเมตร จนปัจจุบันทำให้สามารถมีใยแก้วนำแสงที่มีการส่งผ่านแสงได้อย่างมีประสิทธิภาพ หรือมีการสูญเสียต่ำได้ซึ่งใยแก้วบ้างชนิดมีการสูญเสียต่ำมากเพียง 0.1 เดซิเบลต่อกิโลเมตรเท่านั้นและใช้เป็นวัสดุทำท่อนำคลื่น

2.3.1 โครงสร้างของท่อนำคลื่น

ส่วนประกอบของท่อนำคลื่นที่สำคัญ คือส่วนที่เป็นแกน(core)โดยดัชนีหักเหของแสงที่ส่วนนี้ต้องมีค่ามากว่าส่วนที่เป็นแคลดโดยแคลดคือส่วนที่กั้นทำหน้าที่เป็นฉนวนโปร่งใสแล้วลำแสงที่ผ่านไปในแกนจะถูกควบคุมให้เคลื่อนที่ไปตามเส้นใยแก้วนำแสงด้วยขบวนการสะท้อนกลับหมดภายใน

2.3.2 ส่วนป้องกั้นหรือส่วนห่อหุ้ม

เป็นส่วนที่ต่อจากแคลดเป็นที่กันแสงจากภายนอกเข้าเส้นใยแก้วนำแก้วและกันแสงภายในออกข้างนอกและยังใช้ประโยชน์เมื่อมีการเชื่อมต่อเส้นใยแก้วนำแสงและทำหน้าที่เป็นส่วนป้องกันภายนอกอีกด้วย

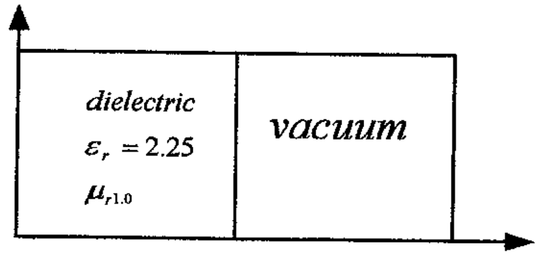


รูป 2.2 แสดงส่วนประกอบของท่อนำคลื่น

2.3.3 สำหรับท่อนำคลื่นที่ได้รับการเลือกเป็นตัวอย่างปัญหาในการวิเคราะห์คือ

2.3.3.1 ท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

ซึ่งเป็นตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์ซึ่งเป็นตัวอย่างของปัญหาที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งภายในบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบโดยที่ลักษณะของไดอิเล็กตริกทุกชนิดสามารถสะสมพลังงานได้ซึ่งเกิดจากการที่ประจุบวกและประจุลบของอะตอมเคลื่อนขยับจากปรกติและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_r และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ μ_r เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ



รูป 2.3 แสดงท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

2.3.3.2 ท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรท

ท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทซึ่งประกอบด้วยแกน (core) ฝังในซับสเตรท(substrate) และด้านบนของแกนเป็นอากาศว่าง ซึ่งเป็นตัวอย่างของท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์ $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปของ

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \text{และ } [\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{2.18}$$

2.4 โปรแกรม Matlab

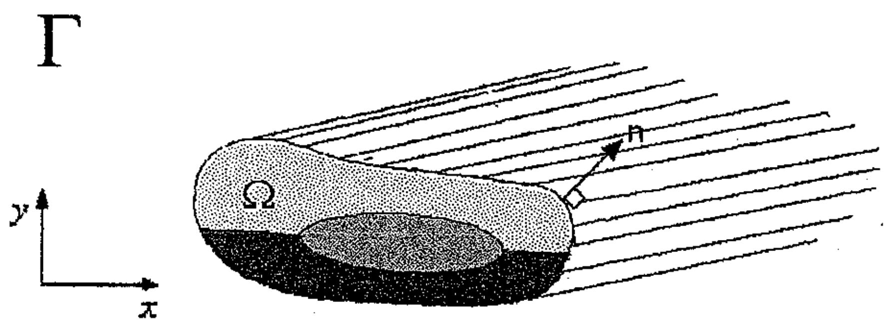
Matlab เป็นโปรแกรมที่มีความสามารถในการคำนวณ ,วิเคราะห์ และแสดงกราฟฟิก 3 มิติได้รับความนิยมใช้งานกันอย่างแพร่หลาย ซึ่งการสั่งการทำงานของโปรแกรมจะมีชุดคำสั่งหลักอยู่และคำสั่งหลักดังกล่าวจะมีฟังก์ชันการทำงานที่สามารถรองรับคำสั่งที่เกิดจากการเขียนโปรแกรมสั่งการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพมาก โดยพอจะสรุปฟังก์ชันการทำงานหลักๆ ที่จำเป็นในการเขียนโปรแกรมสั่งการทำงานเพื่อวิเคราะห์ท่อนำคลื่นได้ อาทิเช่น ฟังก์ชันที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาเชิงเส้น ฟังก์ชันกระทำการทางเมทตริกซ์ชั้นสูง สามารถแสดงผลการวิเคราะห์เป็นกราฟฟิก 2 มิติและ 3 มิติได้ดี .ส่วนรายละเอียดผู้สนใจสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมจากคู่มือ โปรแกรม Matlabทั่วไป โปรแกรมหลักในการวิเคราะห์แสดงไว้ในภาคผนวก

การทำงานของโปรแกรมหลักจะเรียกฟังก์ชันที่สร้างไว้ในโปรแกรมย่อยมาใช้ในการคำนาณค่าเมื่อผู้ใช้งานโปรแกรมพิมพ์ข้อถูกต้องตามสถานะที่ผู้ออกแบบโปรแกรมสร้างฟังก์ชันไว้ แต่ถ้ามิถูกต้องตามเงื่อนไข โปรแกรมแสดงสภาพเดิมอีกครั้งจะโดยฟังก์ชันหลักจะได้รับการสร้างให้มีการแสดงสถานะเพื่อโต้ตอบกับผู้ใช้โปรแกรม

2.5 นิพจน์แปรผัน(Variational Expression)

นิพจน์แปรผัน คือ ฟังก์ชันที่แปรผันค่าตามปริมาณใดปริมาณหนึ่ง สำหรับการในโครงงานนี้นิพจน์แปรผันของสมการการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กจะแปรผันตามระยะห่างในทิศทางตามแนวพิกัด x,y

Koshiba และคณะ ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสียและมีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ Ω ในระนาบ xy ดังแสดงในรูป



รูป 2.4 แสดงท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปใดๆ และมีความสม่ำเสมอในแกน z

ท่อนำคลื่นประกอบด้วยตัวกลางที่มีสภาพยอมอยู่ในรูปเทนเซอร์([ε]) และความซาบซึมได้ (μ) อยู่ในรูปสเกลาร์ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นสามารถวิเคราะห์ได้จากสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามแม่เหล็ก (H) ดังนี้

$$\nabla \times ([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times H) - k_0^2 \mu_r H = 0 \tag{2.19}$$

$$[\varepsilon_r] = \frac{1}{\varepsilon_0}[\varepsilon] \tag{2.20}$$

$$\mu_r = \mu / \mu_0 \tag{2.21}$$

เมื่อ $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ คือเวฟนัมเบอร์ของอวกาศว่าง

$[\varepsilon]$ คือ เทนเซอร์สภาพยอมของตัวกลาง

μ คือ ความซาบซึมได้ของตัวกลาง

$[\varepsilon_r]$ คือ เทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง

μ_r คือ ความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของตัวกลาง

$[\varepsilon_0]$ คือ เทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์ของอวกาศ

μ_0 คือ ความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของอวกาศ

2.6 เงื่อนไขขอบเขตและการพิจารณาฟังก์ชัน

การพิจารณาฟังก์ชันในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นนั้นเราจะพิจารณาโดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

- **first kind** คือ ผิวตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ (perfect magnetics conductor) Γ_m

$$n \times \mathrm{H} = 0 \qquad \text{บนขอบเขต } \Gamma_m \qquad (2.22)$$

- **second kind** คือ ผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (perfect Electric conductor) Γ_e

$$n \times \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \mathrm{H}\right) = 0 \qquad \text{บนขอบเขต } \Gamma_e \qquad (2.23)$$

เงื่อนไขที่ถูกกำหนดขึ้นนั้นจะได้รับการนำมาใช้ในการลดรูปฟังก์ชันวิเคราะห์ซึ่งรายละเอียดในการลดรูปฟังก์ชันจะแสดงไว้ในหัวข้อต่อไป

2.7 การจัดรูปสมการการวิเคราะห์ท่อ

การจัดรูปสมการการวิเคราะห์ที่มีคุณสมบัติเป็นนิพจน์แปรผันของสมการคลื่นในรูปแบบสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาสมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อตามสมการที่ (2.19) และโดยอาศัยวิธีของริทซ์นิพจน์แปรผันในสมการที่ (2.19) สามารถเขียนได้ดังสมการ (2.24)

$$F = \left\langle L\overline{H}, \overline{H} \right\rangle = \iiint_{\Omega} \left(\nabla \times \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \overline{H}\right) - k_0^2 \overline{H}\right) \cdot \overline{H}^* d\Omega \qquad (2.24)$$

โดย

$$L = \nabla \times \left([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times\right) - k_0^2 \qquad (2.25)$$

F แสดงถึงฟังก์ชัน

$\overline{H}$ แสดงถึงเวกเตอร์สนามแม่เหล็ก

$d\Omega$ แสดงถึงปริมาณเล็กๆใด ที่เราสนใจพิจารณา

จากนั้นอาศัยกฎของกรีนส์จัดรูปฟังก์ชันใหม่ดังนี้

จาก Second vector Green's theorem(ข.25)จะได้ว่า (2.25)

$$
\begin{aligned}
\left\langle L\overline{H},\overline{H}\right\rangle &= \iiint_{\Omega}\overline{H}\cdot\left(\nabla\times[\varepsilon_r]^{-1}\nabla\times\overline{H}^{*}\right)d\Omega \\
&+ \oiint_{S}\varepsilon_r^{-1}\left(\overline{H}\times\nabla\times\overline{H}^{*}\right)\cdot\hat{n}dS \\
&- \oiint_{S}\varepsilon_r^{-1}\left(\overline{H}^{*}\times\nabla\times\overline{H}\right)\cdot ndS \\
&- \iiint_{\Omega}k_0^2\overline{H}.\overline{H}^{*}d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการพิจารณาฟังก์ชันโดย first kind และ second kind จะได้ว่า

$$
\oiint_{S}\varepsilon_r^{-1}\left(\overline{H}\times\nabla\times\overline{H}^{*}\right)\cdot\hat{n}dS = -\oiint_{S}\varepsilon_r^{-1}\left(\overline{H}^{*}\times\nabla\times\overline{H}\right)\cdot ndS = 0 \tag{2.27}
$$

ในสมการที่ (2.22), (2.23) ตามลำดับ สามารถจัดรูปสมการ (2.26) จัดรูปได้ดังสมการ (2.28)

$$
F = \left\langle L\overline{H},\overline{H}\right\rangle = \iiint_{\Omega}\overline{H}\cdot\left(\nabla\times[\varepsilon_r]^{-1}\nabla\times\overline{H}^{*}\right)d\Omega - \iiint_{\Omega}k_0^2\overline{H}.\overline{H}^{*}d\Omega \tag{2.28}
$$

ทำให้ได้ว่า

$$
F(H) = \partial F = \left\langle L\overline{H},\overline{H}\right\rangle = \iint_{\Omega}\overline{H}\cdot\left(\nabla\times[\varepsilon_r]^{-1}\nabla\times\overline{H}^{*}\right)d\Omega - \iint_{\Omega}k_0^2\overline{H}\cdot\overline{H}^{*}d\Omega \tag{2.29}
$$

จากที่ผ่านมาทำให้เราทราบว่านิพจน์แปรผันของสมการ (2.19) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2.30)

$$
F(\mathrm{H}) = \iint_{\Omega}\left[(\nabla\times\mathrm{H})^{*}\cdot\left([\varepsilon_r]^{-1}\nabla\times\mathrm{H}\right) - k_0^2\mu_r\mathrm{H}^{*}\cdot\mathrm{H}\right]d\Omega \tag{2.30}
$$

เมื่อ * คือสังยุคเชิงซ้อน(complex conjugate)

ผลเฉลย H ที่สอดคล้องกับสมการ (2.30) และเงื่อนไขขอบเขตของท่อนำคลื่นนี้ เป็นฟังก์ชันซึ่งทำให้ค่าของ F(H) ในสมการ(2.30) มีค่าต่ำสุด

เมื่อใช้นิพจน์แปรผันในสมการ (2.30) วิเคราะห์ท่อนำคลื่นพบว่า มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมร่วมกับผลเฉลยที่ถูกต้องซึ่งผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นมีคุณลักษณะคือ ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก (B) ไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์ หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ $\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$ และผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นนี้สามารถแยกได้เป็น 2 กลุ่ม คือผลเฉลยปลอมเทียม S_1

ที่มีคุณลักษณะสอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \mathrm{H} = 0 \qquad \text{ที่ } k_0^2 = 0 \qquad (2.31)$$
$$\nabla \cdot \mu \mathrm{H} \neq 0$$

และผลเฉลยปลอมเทียม S_2 ที่มีคุณลักษณะสอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \mathrm{H} \neq 0 \qquad \text{ที่ } k_0^2 > 0 \qquad (2.32)$$
$$\nabla \cdot \mu H \neq 0$$

เพื่อที่กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้ Koshiba และคณะได้ทำการปรับปรุงนิพจน์แปรผันตามสมการ (2.30) โดยเพิ่มพจน์ที่อยู่ในรูปความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็กให้กับนิพจน์แปรผันตามสมการ (2.30) ซึ่งทำให้ได้นิพจน์แปรผัน $\widetilde{F}$ (H) ดังนี้

$$F(\mathrm{H}) = F + \frac{p^2}{\mu_r} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \mu_r \mathrm{H})^* (\nabla \cdot \mu_r \mathrm{H}) d\Omega \qquad (2.33)$$

โดยที่ $\frac{p^2}{\mu_r} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \mu_r \mathrm{H})^* \cdot (\nabla \cdot \mu_r \mathrm{H}) d\Omega$ คือ พจน์พีนอลตี

p คือ สัมประสิทธิ์พีนอลตี เป็นค่าคงที่

นิพจน์แปรผันจากสมการ (2.33) สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม S_1 และ S_2 ได้ อย่างไรก็ตามผลเฉลย S_3 ที่มีคุณลักษณะดังสมการ

$$\nabla \times \mathrm{H} = 0, \nabla \cdot \mu \mathrm{H} \neq 0 \text{ เมื่อ } k_0^2 > 0 \qquad (2.34)$$

สามารถเกิดขึ้นได้ โดยผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่เกิดขึ้นสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\mu \mathrm{H} = \nabla \phi \tag{2.35a}$$

$$\left(p^2\nabla^2 + k_0^2\right)\phi = 0 \tag{2.35b}$$

$\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ บนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (perfect electric conductor) Γ_e (2.35c)

$\phi = 0$ บนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ (perfect magnetic conductor) Γ_m (2.35d)

โดยที่ ϕ คือ ฟังก์ชันสเกลาร์ (scalar function)

เมื่อแทน ϕ ในสมการ (2.35) ด้วย H_z พบว่า ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับโมดทีอี (TE mode) ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ $(1/p)^2$ และผลเฉลยปลอมเทียม S_3 นี้จะอยู่ในช่วง $\beta/k_0 < 1/p$ S_3 เท่านั้น

จากที่กล่าวมาว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์ย่อยรูปสามเหลี่ยม และให้คำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กโดยที่ในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปของ

$$\mathrm{H} = [N]\{H\}_e \exp(-j\beta z) \tag{2.36}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\{H\}_e = \begin{bmatrix} \{H_x\}_e \\ \{H_y\}_e \\ \{H_z\}_e \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

เมื่อ

β คือค่าคงตัวเฟส

$[N]$ คือ เมตริกซ์ฟังชันรูปร่างของคำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กในทิศ x , y และ z

$\{H\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่องค์ประกอบคือสนามแม่เหล็กที่โนดของอีลีเมนต์ในทิศ x,y และz

T คือตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน

แทนสมการ (2.36) ในสมการ (2.33) และรวมทุกอีลีเมนต์ทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน ได้นิพจน์แปรผันที่สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$F(\mathrm{H}) = \{\mathrm{H}\}^T \left([S] + p^2[L] - k_0^2[M]\right)\{H\} \tag{2.39}$$

$$[S] = [\mathrm{T}]^* \left[\varepsilon_r\right]^{-1} [\mathrm{T}]^T \tag{2.40}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{xx}] & [L_{xy}] & [L_{xz}] \\ [L_{yx}] & [L_{yy}] & [L_{yz}] \\ [L_{zx}] & [L_{zy}] & [L_{zz}] \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{xx}] & [M_{xy}] & [M_{xz}] \\ [M_{yx}] & [M_{yy}] & [M_{yz}] \\ [M_{zx}] & [M_{zy}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

เมื่อ $\{H\}$ คือสนามแม่เหล็กที่โนดทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น เมตริกซ์ $[S]$,$[L]$และ $[M]$ เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเชียน (hermitian matrix)

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของสมการ (2.33) ซึ่งยังผลให้ได้สมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เจาะจงที่มี k_0^2 เป็นค่าเจาะจงดังนี้

$$[S]\{\mathrm{H}\} + p^2[L]\{\mathrm{H}\} - k_0^2[M]\{\mathrm{H}\} = \{0\} \tag{2.43}$$

สมการ (2.43) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน (standard eigenvalue problem) ได้เป็น

$$[M]^{-1}\left([S]+p^{2}[L]\right)\{\mathrm{H}\}-k_{0}^{2}\{\mathrm{H}\}=0 \qquad (2.44)$$