การวิเคราะห์สายอากาศบ่วง

ANALYSIS OF LOOP ANTENNAS

นางสาวขนิษฐา สุวรรณกษาปณ์ รหัส 50364461

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2553

ใบรับรองปริญญานิพนธ์

ชื่อหัวข้อโครงงาน	การวิเคราะห์สายอากาศบ่วง
ผู้ดำเนินโครงงาน	นางสาวขนิษฐา สุวรรณกษาปณ์ รหัส 50364461
ที่ปรึกษาโครงงาน	ดร.ชัยรัตน์ พินทอง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2553

....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

....ที่ปรึกษาโครงงาน
(ดร.ชัยรัตน์ พินทอง)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุรเชษฐ์ กานต์ประชา)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อัครพันธ์ วงศ์กังแห)

ชื่อหัวข้อโครงงาน	การวิเคราะห์สายอากาศบ่วง
ผู้ดำเนินโครงงาน	นางสาวขนิษฐา สุวรรณกษาปณ์ รหัส 50364461
ที่ปรึกษาโครงงาน	ดร.ชัยรัตน์ พินทอง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2553

....

บทคัดย่อ

คุณลักษณะของสายอากาศบ่วงวงกลมได้รับการนำเสนอ การวิเคราะห์อาศัยศักย์เชิงเวกเตอร์และการประมาณของสนามบริเวณย่านสนามไกล การประมาณที่ใช้ คือ วิธีการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคคลอริน โดยบ่วงวงกลมขนาดเล็กได้รับการแสดงให้เห็นว่า สมมูลกับไดโพลแม่เหล็กขนาดน้อยยิ่ง ที่มีแกนตั้งฉากกับระนาบของบ่วง ซึ่งแบบรูปการแผ่พลังงานของสภาพเจาะจงทิศทางได้รับการนำเสนอ แบบรูปทั้งหมดมีคลื่นบอดตามแนวแกน และมีค่าสูงสุดตามระนาบของบ่วง สภาพเจาะจงทิศทาง และความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง จากทั้งสองวิธีของการประมาณจะได้รับการเปรียบเทียบกัน และให้ผลที่สอดคล้องกันเป็นอย่างดี บ่วงขนาดใหญ่ขึ้นแสดงให้เห็นว่าจะให้สภาพเจาะจงทิศทางน้อยลง ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังกว้างขึ้น และความต้านทานการแผ่พลังงานสูงขึ้น โปรแกรม MATLAB ได้รับการพัฒนาขึ้นสำหรับสายอากาศบ่วงซึ่งสามารถลดระยะเวลาในการคำนวณและทำให้การวิเคราะห์สายอากาศบ่วงสะดวกมากยิ่งขึ้น

Project title	Analysis of Loop Antennas
Name	Miss. Khanittha Suwankasarp ID. 50364461
Project advisor	Mr. Chairat Pinthong, Ph.D.
Major	Electrical Engineering
Department	Electrical and Computer Engineering
Academic year	2010

Abstract

The characteristics of circular loop antenna are presented. The analysis procedure involves using a vector potential and approximations for fields in far-field region. The approximations used are the methods of far-field approximation and Maclaurin's series. It is shown that a circular small loop is equivalent to an infinitesimal magnetic dipole whose axis is perpendicular to the plane of the loop. Radiation patterns of directivity are presented. All patterns have nulls along the axis and a maximum along the plane of the loop. The directivity and half-power beamwidth (HPBW) from two methods of approximation are compared yielding the results with good agreement. The larger loop is shown to produce smaller directivity, broader HPBW and higher radiation resistance. The MATLAB program is developed for the loop antennas to reduce computation time and making the analysis more convenient.

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการวิเคราะห์สายอากาศบ่วง ซึ่งสามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ผู้ดำเนินโครงงานขอขอบพระคุณบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือให้คำปรึกษาแนะนำ และให้ความอนุเคราะห์ในการดำเนินงานตลอดมาจนสำเร็จ ผู้ดำเนินโครงงานจึงขอขอบพระคุณทุกๆท่าน ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ดร.ชัยรัตน์ พินทอง อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ได้ให้ความรู้ ให้เอาใจใส่ดูแลให้คำแนะนำปรึกษาโครงงานอย่างสม่ำเสมอ และให้ความช่วยเหลือแก่ผู้จัดทำเป็นอย่างดีตลอดมาจนกระทั่งสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชา และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัครพันธ์ วงศ์กังแห อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นกรรมการคุมสอบโครงงานซึ่งเสียสละเวลาในการเข้าคุมสอบโครงงานและได้กรุณาให้คำชี้แนะในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้ดำเนินโครงงาน ซึ่งคำแนะนำและคำชี้แนะเหล่านี้สามารถนำไปปรับใช้กับการดำเนินงานในครั้งต่อๆไป

และขอขอบพระคุณผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ไม่ได้กล่าวนามมา ณ ที่นี้ ที่มีส่วนร่วมในการให้ข้อมูลและเป็นที่ปรึกษาในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์ ผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

นางสาวขนิษฐา สุวรรณกษาปณ์

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

สายอากาศบ่วงเป็นสายอากาศที่มีรูปแบบที่เรียบง่าย ราคาไม่แพง และที่สำคัญใช้งานได้อย่างอเนกประสงค์ สายอากาศประเภทนี้สามารถมีรูปทรงได้หลายลักษณะ เช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมผืนผ้า วงกลมและวงรี สายอากาศแบบบ่วงสามารถรับคลื่นได้กว้าง ส่วนมากจะใช้งานในย่าน HF (3-30 MHz), VHF (30-300 MHz) และ UHF (300-3000 MHz) สายอากาศประเภทนี้มักจะได้รับการใช้งานในโมดรับสัญญาณ ตัวอย่างการใช้งานได้แก่ ใช้เป็นตัวรับสัญญาณในระบบการสื่อสารเคลื่อนที่

โครงงานฉบับนี้จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับ คุณลักษณะทั่วไปของสายอากาศบ่วง โดยวิเคราะห์จากศักย์เชิงเวกเตอร์ ร่วมกับการประมาณในย่านสนามไกล และอนุกรมแมคลอริน

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. ศึกษาและวิเคราะห์สายอากาศทั่วไป
2. ศึกษาและวิเคราะห์สายอากาศบ่วง
3. ศึกษาหลักการของศักย์เชิงเวกเตอร์ร่วมกับการประมาณในย่านสนามไกล

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

1. ศึกษาและวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศบ่วงวงกลม
2. ศึกษาสนามที่แผ่ออกไป (radiation field) ความหนาแน่นกำลัง (power density) ความเข้มการแผ่พลังงาน (radiation intensity) สภาพเจาะจงทิศทาง (directivity) ของสายอากาศบ่วงวงกลม
3. ศึกษาและพัฒนาโปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการวิเคราะห์สายอากาศบ่วงวงกลม

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

กิจกรรม	ปี 2553			ปี 2554			ปี 2555			ปี 2556			ปี 2557		
	มิ.ย. - ธ.ค.			ม.ค. - มี.ค.			พ.ย. – ธ.ค.			ม.ค. – พ.ค.			เม.ย. - ก.ค.		
1. ศึกษาหลักการและทฤษฎีของสายอากาศทั่วไป	↔														
2. ศึกษาหลักการพื้นฐานและวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศบ่วงวงกลมและหลักการสนามสนามการแผ่พลังงาน		↔	↔	↔											
3. ศึกษาการใช้โปรแกรม MATLAB ที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์สายอากาศบ่วงวงกลม					↔	↔	↔	↔	↔						
4. รวบรวมข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์สายอากาศบ่วงวงกลม										↔	↔	↔	↔		
5. สรุปคุณสมบัติ และคุณลักษณะของสายอากาศบ่วงวงกลม														↔	↔

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจคุณสมบัติและคุณลักษณะของสายอากาศบ่วงวงกลม
2. สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ มาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์สายอากาศได้
3. เข้าใจเกี่ยวกับโปรแกรม MATLAB พร้อมการเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิก สำหรับวิเคราะห์สายอากาศบ่วงวงกลม

1.6 งบประมาณของโครงงาน

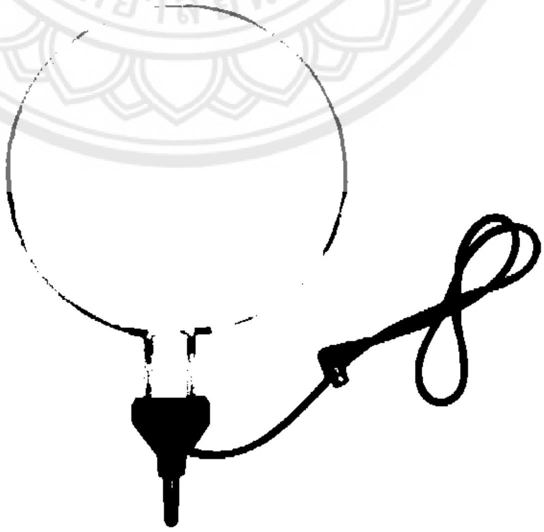
1. ค่าจัดทำเอกสารและเข้ารูปเล่มโครงงาน	700 บาท
2. ค่าวัสดุ อุปกรณ์สำนักงาน	200 บาท
3. อื่นๆ	100 บาท
รวมเป็นเงินทั้งสิ้น (หนึ่งพันบาทถ้วน)	1,000 บาท

หมายเหตุ: ถัวเฉลี่ยทุกรายการ

บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

สายอากาศบ่วงเป็นสายอากาศอย่างง่าย ราคาถูก และใช้ประโยชน์ได้หลายด้าน สายอากาศบ่วง มีหลายรูปแบบ เช่น วงกลมและรูปแบบอื่นๆ อีกมากมาย เพราะสามารถวิเคราะห์และสร้างขึ้นได้ง่าย สายอากาศบ่วงที่เป็นที่นิยมมากก็คือ บ่วงขนาดเล็ก สายอากาศบ่วงจะแบ่งออกเป็นสองประเภท คือ สายอากาศขนาดเชิงไฟฟ้าขนาดเล็ก (electrically small) และสายอากาศขนาดเชิงไฟฟ้าขนาดใหญ่ (electrically large) สายอากาศขนาดเชิงไฟฟ้าขนาดเล็กมีความยาวทั้งหมด (เส้นรอบวง, C) น้อยกว่า 1/10 ของความยาวคลื่น ($C<\lambda/10$) ส่วนสายอากาศขนาดเชิงไฟฟ้าขนาดใหญ่มีความยาวของเส้นรอบวงเกือบเท่าความยาวคลื่นอากาศว่าง ($C \sim \lambda$) สายอากาศที่มีขนาดเชิงไฟฟ้าขนาดใหญ่ ส่วนใหญ่แล้วจะใช้ในกลุ่มของสายอากาศ (array) เช่น สายอากาศแบบเกลียว (helical antenna) สายอากาศยากิ–อุดะ (Yagi – Uda antenna) สายอากาศบ่วงส่วนมากนั้นจะใช้งานที่ความช่วงถี่ HF (3 MHz – 30 MHz), VHF (30 MHz – 300 MHz) และ UHF (300 MHz – 3000 MHz)

ตัวอย่างของสายอากาศแบบบ่วงวงกลมแสดงได้ดังรูปที่ 2.1 ตามเอกสารของผู้ผลิตแสดงไว้ตามที่มาข้างล่างนี้ บ่วงตัวนี้ใช้งานที่ความถี่ 50 MHz – 220 MHz ตัวนำจะได้รับการตัดออกเป็นช่วงสั้นๆ และทำหน้าที่เป็นตัวป้อนของสายอากาศและต่อเข้ากับสายนำสัญญาณ



รูปที่ 2.1 ลักษณะทางกายภาพของสายอากาศบ่วง [8]

ที่มา : http://www.ecplaza.net/eparts/product/10000060_10000337/loop-antenna-loop-antenna.html

2.1 บ่วงวงกลมขนาดเล็ก (small circular loop)

พิจารณาสายอากาศบ่วงที่เส้นลวดมีขนาดผอมที่วางบนระนาบ xy มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z = 0$ ดังแสดงในรูปที่ 2.2 การแจกแจงกระแสที่อยู่บนเส้นลวดนี้มีค่าเป็น

$$I_\phi = I_0 \tag{2.1}$$

เมื่อ I_0 เป็นค่าคงที่ การแจกแจงกระแสตามสมการข้างบนนี้จะใช้ได้กับสายอากาศบ่วงที่มีเส้นรอบวงน้อยมากเท่านั้น

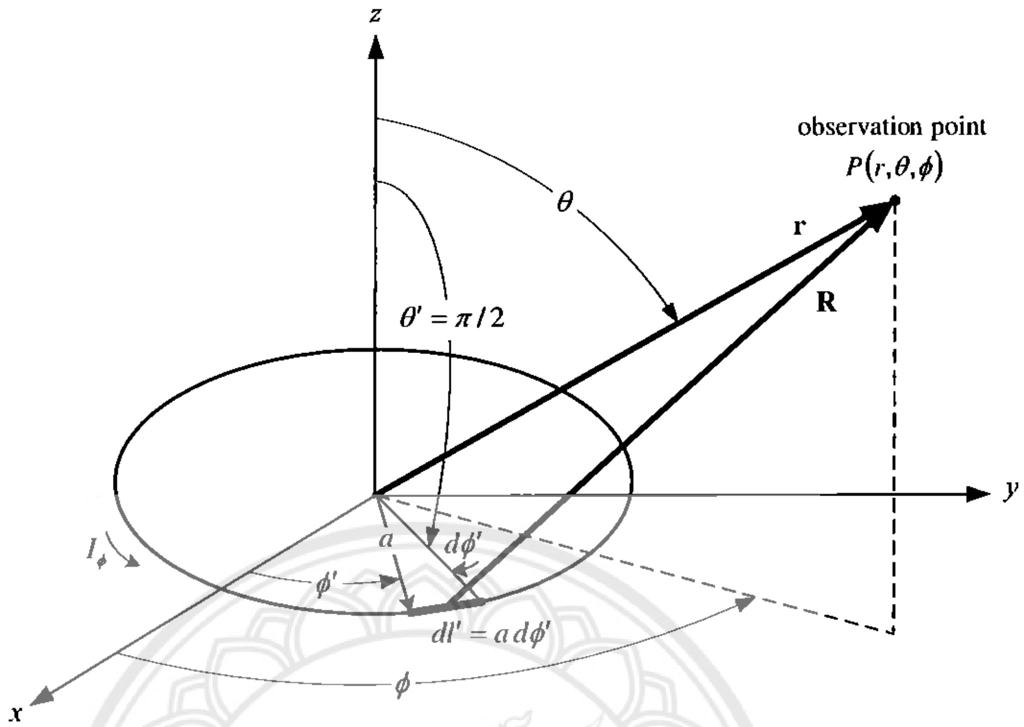
2.1.1 สนามการที่แผ่ออกไป (Radiated Fields)

สนามที่แผ่ออกไปของบ่วง สามารถหาได้โดยใช้ฟังก์ชันศักย์ (potential function) $\mathbf{A}$ ตามสมการดังต่อไปนี้

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{C} \mathbf{I}_e(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}dl' \tag{2.2}$$

จากรูปที่ 2.2 $\mathbf{R}$ เป็นระยะจากจุดใดๆ บนบ่วงถึงจุดที่สังเกต โดยทั่วไปแล้วกระแสเชิงอวกาศ $\mathbf{I}_e(x',y',z')$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{I}_e(x',y',z') = \hat{\mathbf{a}}_x I_x(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_y I_y(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_z I_z(x',y',z') \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.2 เรขาคณิตของสายอากาศบ่วง

เพื่อให้สอดคล้องกับโครงสร้าง องค์ประกอบของกระแสสำหรับปัญหานี้ จะได้รับการเขียนให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องแปลงกระแสจากในระบบพิกัดทรงกระบอกไปเป็นระบบพิกัดฉากเสียก่อน โดยอาศัยความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi' & -\sin\phi' & 0 \\ \sin\phi' & \cos\phi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\rho \\ I_\phi \\ I_z \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

เมื่อทำการกระจายเมทริกซ์แล้วจะเขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_\rho \cos\phi' - I_\phi \sin\phi' \\ I_y &= I_\rho \sin\phi' + I_\phi \cos\phi' \\ I_z &= I_z \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

โดยที่ความยาวปริมาณน้อยๆ dl' จะสอดคล้องตามโครงสร้างดังรูปที่ 2.2 สามารถเขียนในระบบพิกัดทรงกระบอกได้

$$dl' = a\,d\phi' \tag{2.6}$$

แทนสมการ (2.5) และ (2.6) ลงใน (2.2) จะได้

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[\hat{\mathbf{a}}_x\left(I_\rho\cos\phi' - I_\phi\sin\phi'\right) + \hat{\mathbf{a}}_y\left(I_\rho\sin\phi' + I_\phi\cos\phi'\right) + \hat{\mathbf{a}}_z I_z\right] \times \frac{e^{-jkR}}{R}\, d\phi' \tag{2.7}$$

กระจายสมการ (2.7) จะได้ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** ในแต่ละองค์ประกอบเป็น

$$A_x = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left(I_\rho\cos\phi' - I_\phi\sin\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \tag{2.8}$$

$$A_y = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left(I_\rho\sin\phi' + I_\phi\cos\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \tag{2.9}$$

$$A_z = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C I_z\,\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \tag{2.10}$$

เนื่องจากการแผ่พลังงานในย่านสนามไกลจะให้หน้าคลื่นที่มีลักษณะเป็นทรงกลม จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนระบบพิกัดสำหรับการวิเคราะห์ จากระบบพิกัดฉากแต่เดิมไปเป็นระบบพิกัดทรงกลมโดยอาศัยความสัมพันธ์ตามสมการเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

แทนค่า ลงใน ทำให้ได้ ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** ในระบบพิกัดทรงกลมมีค่าเป็น

$$A_r = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[I_\rho\sin\theta\cos(\phi-\phi') + I_\phi\sin\theta\sin(\phi-\phi') + I_z\cos\theta\right] \times \frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \tag{2.12}$$

$$A_\theta = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[I_\rho\cos\theta\cos(\phi-\phi') + I_\phi\cos\theta\sin(\phi-\phi') - I_z\sin\theta\right] \times \frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \tag{2.13}$$

$$A_\phi = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[-I_\rho\sin(\phi-\phi') + I_\phi\cos(\phi-\phi')\right]\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \tag{2.14}$$

โครงสร้างตามรูปที่ 2.2 กระแสที่ไหลในสายอากาศบ่วงมีเฉพาะในองค์ประกอบ ϕ เท่านั้น ฉะนั้น I_ρ และ I_z จึงมีค่าเป็น 0 ทำให้ได้

$$A_\phi = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C I_\phi \cos(\phi - \phi') \times \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \tag{2.15}$$

ขนาดของ **R** จากจุดใด ๆ บนบ่วงถึงจุดที่สังเกต สามารถเขียนได้ดังนี้

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{2.16}$$

เมื่อ พารามิเตอร์ตำแหน่งของจุดสังเกตในสมการ (2.16) จะสัมพันธ์กับพารามิเตอร์ในระบบพิกัดทรงกลมดังนี้

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{2.17}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{2.18}$$

$$z = r\cos\theta \tag{2.19}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{2.20}$$

พารามิเตอร์ ตำแหน่งของแหล่งกำเนิด กระแสไฟฟ้า จะสัมพันธ์กับพารามิเตอร์ในระบบพิกัดทรงกลมดังนี้

$$x' = a\cos\phi' \tag{2.21}$$

$$y' = a\sin\phi' \tag{2.22}$$

$$z' = 0 \tag{2.23}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \tag{2.24}$$

โดย สมการ (2.16) สามารถลดรูปได้ดังนี้

$$R = \sqrt{\left(x^2 - 2xx' + x'^2\right) + \left(y^2 - 2yy' + y'^2\right) + \left(z^2 - 2zz'\right)} \tag{2.25}$$

$$R = \sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(-2xx' - 2yy'\right) + \left(x'^2 + y'^2\right)} \tag{2.26}$$

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar(\sin\theta\cos\phi\cos\phi' + \sin\theta\sin\phi\sin\phi')} \tag{2.27}$$

จากสมการ (2.26) จะได้

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos(\phi - \phi')} \tag{2.28}$$

เพื่อที่จะหาสนามในย่านสนามไกล จะพิจารณาพจน์ เพียงหนึ่งพจน์ก่อน ในที่นี้จะแทนค่า R จากสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.15) ทำให้ได้

$$A_\phi = \frac{a\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi} I_\phi \cos(\phi - \phi') \frac{e^{-jk\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos(\phi-\phi')}}}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos(\phi - \phi')}} d\phi' \tag{2.29}$$

กระแสเชิงอวกาศ I_ϕ ตามสมการ (2.1) ซึ่งเป็นค่าคงที่ จึงทำให้สนามที่แผ่ออกไปของบ่วงจะไม่เกี่ยวข้องกับมุมสังเกต ϕ ดังนั้นจึงสามารถเลือกมุมสังเกตเป็นค่าใดๆก็ได้ แต่เพื่อให้ง่ายในการวิเคราะห์ควรเลือกใช้มุมสังเกตเท่ากับศูนย์ ($\phi = 0$) ดังนั้นสมการ (2.29) สามารถลดรูปได้เป็น

$$A_\phi = \frac{a\mu I_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos\phi' \frac{e^{-jk\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi'}} d\phi' \tag{2.30}$$

2.1.2 การประมาณย่านสนามไกลโดยใช้อนุกรมแมคลอริน

การอินทิเกรตเพื่อให้ได้คำตอบของ ตามสมการ (2.30) ทำได้ยากเป็นอย่างมาก ในที่นี้ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะได้รับการพิจารณา ณ จุดสังเกตในบริเวณที่มีระยะมากกว่ารัศมีของบ่วงมาก จึงทำให้สามารถประมาณค่าของคำตอบได้โดยอาศัย อนุกรมแมคลอรินดังนี้
กำหนดให้ฟังก์ชัน f มีค่าเป็น

$$f = \frac{e^{-jk\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi'}} \tag{2.31}$$

ฟังก์ชัน f เมื่อกระจายด้วยอนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's Series) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2!}f''(0)a^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)a^{n-1} + \ldots \tag{2.32}$$

โดยที่ $f'(0) = \partial f/\partial a \big|_{a=0}$ และ $f''(0) = \partial^2 f/\partial a^2 \big|_{a=0}$

ในที่นี้จะพิจารณาพจน์ที่หนึ่ง และพจน์ที่สอง ของสมการ (2.32) เท่านั้น ฟังก์ชัน f ณ ตำแหน่ง $a = 0$ และ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ณ ตำแหน่ง $a = 0$ มีค่าเป็น

$$f(0) = \frac{e^{-jkr}}{r} \tag{2.33}$$

$$f'(0) = \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) e^{-jkr} \sin\theta \cos\phi' \tag{2.34}$$

เมื่อใช้สองพจน์ตามสมการ (2.33) และ (2.34) ทำให้ได้ค่าประมาณของฟังก์ชัน f มีค่าเป็น

$$f \cong \left[\frac{1}{r} + a\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\cos\phi'\right] e^{-jkr} \tag{2.35}$$

แทนค่า ลงในสมการ (2.30) ทำให้ได้

$$A_\phi \simeq \frac{a\mu I_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos\phi' \left[\frac{1}{r} + a\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\cos\phi'\right] e^{-jkr}\, d\phi' \tag{2.36}$$

โดยอาศัย $\int_0^{2\pi} \cos^2\phi'\, d\phi' = \left[\frac{\phi'}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\phi'\right]\Big|_{\phi'=0}^{2\pi}$ ทำให้ได้

$$A_\phi \simeq \frac{a\mu I_0}{4} e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta \tag{2.37}$$

ในทำนองเดียวกัน ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** ในองค์ประกอบ r และ θ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$A_r \simeq \frac{a\mu I_0}{4\pi}\sin\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi' \left[\frac{1}{r} + a\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\cos\phi'\right] e^{-jkr}\, d\phi' \tag{2.38}$$

$$A_\theta \simeq -\frac{a\mu I_0}{4\pi}\cos\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi' \left[\frac{1}{r} + a\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\cos\phi'\right] e^{-jkr}\, d\phi' \tag{2.39}$$

โดยที่ $\int_0^{2\pi} \sin\phi'\, d\phi' = 0$ และ $\int_0^{2\pi} \sin\phi' \cos\phi' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\phi'\, d\phi' = 0$

ซึ่งผลลัพธ์ของการอินทิเกรตสมการ (2.38) และสมการ (2.39) จะให้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ จึงทำให้เหลือ A_ϕ เพียงองค์ประกอบเดียว และสามารถเขียนได้เป็น

$$A \simeq \hat{\mathbf{a}}_\phi A_\phi = \hat{\mathbf{a}}_\phi \frac{a^2 \mu I_0}{4} e^{-jkr}\left[\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right]\sin\theta \tag{2.40}$$

$$= \hat{\mathbf{a}}_\phi j\frac{k\mu a^2 I_0 \sin\theta}{4r}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]e^{-jkr} \tag{2.41}$$

แทนค่าสมการ (2.41) ลงใน $\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$ ทำให้ได้สนามแม่เหล็กในแต่ละองค์ประกอบดังนี้

$$H_r = j\frac{ka^2 I_0 \cos\theta}{2r^2}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]e^{-jkr} \tag{2.42}$$

$$H_\theta = -\frac{(ka)^2 I_0 \sin\theta}{4r^2}\left[1+\frac{1}{jkr}-\frac{1}{(kr)^3}\right]e^{-jkr} \tag{2.43}$$

$$H_\phi = 0 \tag{2.44}$$

โดยใช้ $\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$ หรือ $\nabla\times\mathbf{H}_A = \mathbf{J} + j\omega\in\mathbf{E}_A$

และ $\mathbf{J} = 0$ ทำให้ได้สนามไฟฟ้าในแต่ละองค์ประกอบเป็นดังนี้

$$E_r = E_\theta = 0 \tag{2.45}$$

$$E_\phi = \eta\frac{(ka)^2 I_0 \sin\theta}{4r}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]e^{-jkr} \tag{2.46}$$

ซึ่งการประมาณย่านสนามไกลโดยใช้อนุกรมแมคลอริน และการประมาณในย่านสนามไกลโดยใช้รังสีขนานได้ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน

2.1.3 บ่วงขนาดเล็กและไดโพลแม่เหล็กขนาดเล็กมาก (Small Loop and Infinitesimal Magnetic Dipole)

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของไดโพลขนาดเล็กมาก สามารถหาได้ดังสมการต่อไปนี้

$$H_r = H_\theta = E_\phi = 0 \tag{2.47}$$

$$H_\phi = j\frac{kI_0 l \sin\theta}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]e^{-jkr} \tag{2.48}$$

$$E_r = \eta\frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi r^2}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]e^{-jkr} \tag{2.49}$$

$$E_\theta = j\eta\frac{k I_0 l \sin\theta}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{jkr}-\frac{1}{(kr)^2}\right]e^{-jkr} \tag{2.50}$$

ถ้าใช้หลักการของทฤษฎีบทคู่แฝง (duality theorem) กับสมการ (2.47) - (2.50) จะทำให้ได้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของบ่วงขนาดเล็ก ดังนี้

$$E_r = E_\theta = H_\phi = 0 \tag{2.51}$$

$$E_\phi = -j\frac{kI_m l\sin\theta}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]e^{-jkr} \tag{2.52}$$

$$H_r = \frac{I_m l\cos\theta}{2\pi\eta r^2}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]e^{-jkr} \tag{2.53}$$

$$H_\theta = j\frac{kI_m l\sin\theta}{4\pi\eta r}\left[1+\frac{1}{jkr}-\frac{1}{(kr)^2}\right]e^{-jkr} \tag{2.54}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (2.51) - (2.54) กับสมการ (2.47) - (2.50) จะพบว่าโมเมนต์ของไดโพลแม่เหล็กขนาดเล็กมาก ($I_m l$) จะเท่ากับบ่วงขนาดเล็กที่มีรัศมี (a) และมีกระแสไฟฟ้า I_0 คงที่ ดังนั้นกระแสเชิงอวกาศ I_m จะสามารถหาได้ดังนี้

$$I_m l = jS\omega\mu I_0 \tag{2.55}$$

เมื่อ $S = \pi a^2$ (พื้นที่ของบ่วง) ดังนั้นการวิเคราะห์บ่วงขนาดเล็ก จึงสามารถใช้ไดโพลแม่เหล็กเชิงเส้นขนาดเล็กที่มีกระแสคงที่วิเคราะห์แทนได้

2.1.4 ความหนาแน่นพลังงานและความต้านทานการแผ่พลังงาน (Power Density and Radiation Resistance)

ความหนาแน่นพลังงานจะเกิดขึ้นในบริเวณพื้นที่รอบตัวสายอากาศ สำหรับในบริเวณสนามใกล้ ($kr \ll 1$) จะมีความหนาแน่นพลังงานทั้งในส่วนที่เป็นพลังงานจริงและส่วนรีแอคทีฟ (reactive) ซึ่งในย่านสนามใกล้นั้นค่าความหนาแน่นพลังงานในส่วนรีแอคทีฟจะมีค่ามากกว่าส่วนจริง ความหนาแน่นพลังงงานเชิงซ้อนสามารถหาจาก

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi\right)\times\left(\hat{\mathbf{a}}_r \mathrm{H}_r^* + \hat{\mathbf{a}}_\theta \mathrm{H}_\theta^*\right)\right] \tag{2.56}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi\right)\times\left(\hat{\mathbf{a}}_r H_r^* + \hat{\mathbf{a}}_\theta H_\theta^*\right) \tag{2.57}$$

โดยที่ **E** และ **H** คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนสายอากาศ ตามลำดับ

* คือ สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate)

เมื่อแทน สนามไฟฟ้าตามสมการ (2.52) และสนามแม่เหล็กตาม (2.53) และ (2.54) ลงใน สมการ (2.57) จากนั้นพิจารณาเฉพาะองค์ประกอบ r จะได้ความหนาแน่นพลังงานในองค์ประกอบนี้มีค่าเป็น

$$\mathbf{W}_r = \eta \frac{(ka)^4}{32} |I_0|^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2} \left[1 + j\frac{1}{(kr)^3}\right] \tag{2.58}$$

พลังงานเชิงซ้อน (P_r) สามารถหาได้จากการอินทิเกรตความหนาแน่นพลังงาน (2.58) ทั่วพื้นผิวปิด ยังผลให้ได้

$$P_r = \oiint_S \mathbf{W}_r . \mathbf{d}s = \eta \frac{(ka)^4}{32} |I_0|^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[1 + j\frac{1}{(kr)^3}\right] \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi \tag{2.59}$$

ซึ่งเมื่อนำมาลดรูปจะได้

$$P_r = \eta\left(\frac{\pi}{12}\right)(ka)^4 |I_0|^2 \left[1 + j\frac{1}{(kr)^3}\right] \tag{2.60}$$

โดยจะได้พลังงานส่วนที่เป็นจริงเท่ากับ

$$P_{\text{rad}} = \text{Re}\{P_r\} = \eta\left(\frac{\pi}{12}\right)(ka)^4 |I_0|^2 \tag{2.61}$$

เมื่อ Re คือ ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน

ความต้านทานการแผ่พลังงานของบ่วงจะมีความสัมพันธ์กับ P_{rad} ตามสมการต่อไปนี้

$$R_r = \frac{2P_{rad}}{|I_0|^2} \tag{2.62}$$

แทนสมการ (2.61) ลงใน (2.62) ทำให้ได้

$$R_r = \eta\left(\frac{\pi}{6}\right)(k^2a^2)^2 = \eta\frac{2\pi}{3}\left(\frac{kS}{\lambda}\right)^2 = 20\pi^2\left(\frac{C}{\lambda}\right)^4 \simeq 31{,}171\left(\frac{S^2}{\lambda^4}\right) \tag{2.63}$$

โดยที่ $S = \pi a^2$ คือ พื้นที่ของบ่วง และ $C = 2\pi a$ คือ เส้นรอบรูปของบ่วง

ความต้านทานการแผ่พลังงานที่หาได้โดยสมการ (2.63) จะใช้ได้กับสายอากาศบ่วงที่มีจำนวนรอบ 1 รอบเท่านั้น แต่ถ้าสายอากาศบ่วงที่มีจำนวน N รอบ ความต้านทานการแผ่พลังงานจะเท่ากับสายอากาศบ่วงที่มีจำนวนรอบ 1 รอบ คูณกับ N^2 ซึ่งจะเขียนสมการได้ดังนี้

$$R_r = \eta \frac{2\pi}{3}\left(\frac{kS}{\lambda}\right)^2 N^2 = 20\pi^2\left(\frac{C}{\lambda}\right)^4 N^2 \simeq 31{,}171 N^2 \left(\frac{S^2}{\lambda^4}\right) \tag{2.64}$$

2.1.5 ย่านสนามใกล้ (kr << 1) (Near-Field Region)

สำหรับการประมาณในย่านสนามใกล้จะสามารถหาค่าได้จากสมการ (2.42) – (2.46) ซึ่งจากสมการดังกล่าวจะเห็นได้ว่า เมื่อ $kr << 1$ จะส่งผลให้พจน์ $1/kr$ และ $1/(kr)^2$ ที่อยู่ในวงเล็บของแต่ละสมการมีค่าสูงมาก ดังนั้นสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}
H_r &\simeq \frac{a^2 I_0 e^{-jkr}}{2r^3}\cos\theta && (2.65)\\
H_\theta &\simeq \frac{a^2 I_0 e^{-jkr}}{4r^3}\sin\theta && (2.66)\\
H_\phi &\simeq E_r = E_\theta = 0 && (2.67)\\
E_\phi &\simeq -j\frac{a^2 I_0 e^{-jkr}}{4r^2}\sin\theta && (2.68)
\end{aligned}\right\} kr << 1$$

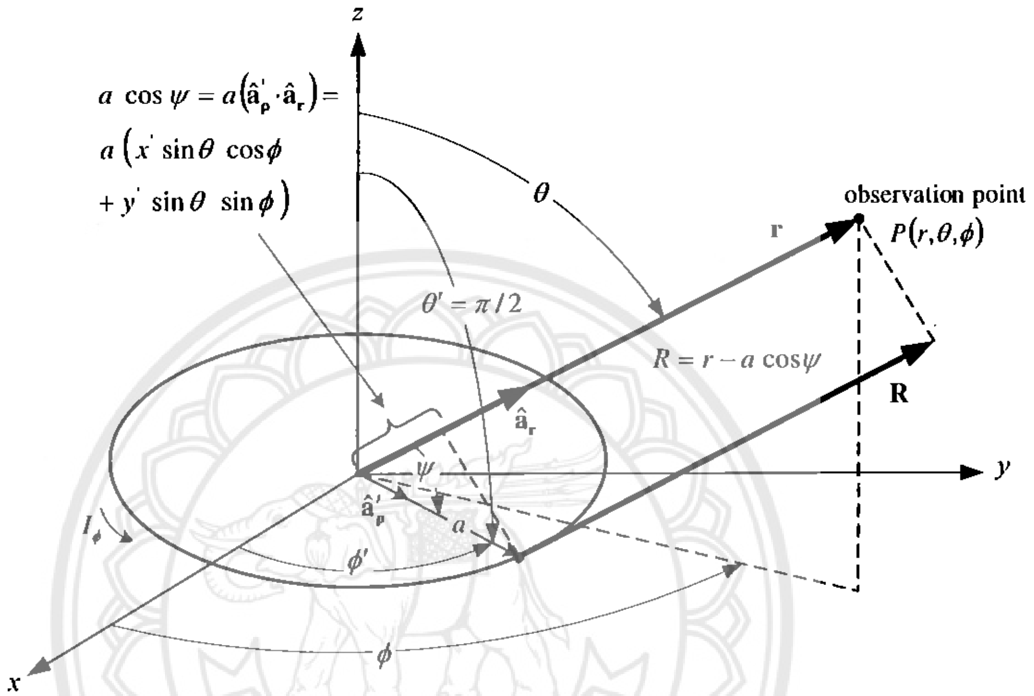
2.1.6 สนามไกล ($kr >> 1$) (Far-Field Region)

การวิเคราะห์ในย่านสนามไกลที่ $kr >> 1$ จะพบว่า พจน์ $1/kr$ และ $1/(kr)^2$ มีความสำคัญน้อย ทำให้สนามแม่เหล็กในองค์ประกอบ r หรือ H_r จะเป็นสัดส่วนที่ผกผันกับ r^2 ขณะที่ H_θ จะเป็นสัดส่วนผกผันกับ r ในที่นี้ $kr >> 1$ ฉะนั้นองค์ประกอบ H_r จะมีค่าน้อยกว่ามากเมื่อเทียบกับ H_θ จึงสามารถสมมติให้องค์ประกอบ H_r ค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการสนามไกลมีค่าเป็น

$$\left.\begin{aligned}
H_\theta &\simeq -\frac{k^2 a^2 I_0 e^{-jkr}}{4r}\sin\theta = -\frac{\pi S I_0 e^{-jkr}}{\lambda^2 r}\sin\theta && (2.69)\\
E_\phi &\simeq \eta\frac{k^2 a^2 I_0 e^{-jkr}}{4r}\sin\theta = \eta\frac{\pi S I_0 e^{-jkr}}{\lambda^2 r}\sin\theta && (2.70)\\
H_r &\simeq H_\phi = E_r = E_\theta = 0 && (2.71)
\end{aligned}\right\} kr >> 1$$

เมื่อ $S = \pi a^2$ เป็นพื้นที่เรขาคณิตของบ่วง อัตราส่วน $-E_\phi / H_\theta$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$Z_\omega = -\frac{E_\phi}{H_\theta} \simeq \eta \tag{2.72}$$



รูปที่ 2.3 เรขาคณิตสำหรับจุดสังเกตในสนามไกล

2.1.7 ความเข้มการแผ่พลังงานและสภาพเจาะจงทิศทาง **(Radiation Intensity and Directivity)**

ความหนาแน่นพลังงานที่แผ่ออกไปเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก และพิจารณาส่วนจริงดังนี้

$$\mathbf{W}_{\text{rad}} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right] \tag{2.73}$$

แทนสมการ (2.58) ลงใน (2.73) ยังผลให้ได้

$$\mathbf{W}_{\text{rad}} = \eta\frac{(ka)^4}{32}|I_0|^2\frac{\sin^2\theta}{r^2} \tag{2.74}$$

ความเข้มการแผ่พลังงาน (U) จะเป็นพลังงานที่แผ่จากสายอากาศต่อหนึ่งหน่วยของมุมตัน ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นพลังงานที่แผ่ออกไป $(\mathbf{W}_{\mathrm{rad}})$ ตามสมการต่อไปนี้

$$U = \hat{\mathbf{a}}_r \cdot r^2 \mathbf{W}_{\mathrm{rad}} = \frac{\eta}{2}\left(\frac{k^2 a^2}{4}\right)^2 |I_0|^2 \sin^2\theta = \frac{r^2}{2\eta}\left|E_\phi(r,\theta,\phi)\right|^2 \qquad (2.75)$$

โดยความเข้มการแผ่พลังงานจะมีค่าสูงสุด $U_{\max}$ อยู่ที่ $\theta = \pi/2$ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$U_{\max} = U\big|_{\theta=\pi/2} = \frac{\eta}{2}\left(\frac{k^2 a^2}{4}\right)^2 |I_0|^2 \qquad (2.76)$$

สภาพเจาะจงทิศทางเป็นพารามิเตอร์ที่บ่งบอกความสามารถในการส่งหรือรับสัญญาณในทิศทางหนึ่งๆของสายอากาศ ค่านี้จะเป็นฟังก์ชันของทิศทางรอบตัวสายอากาศ สภาพเจาะจงทิศทางที่นิยมใช้กันมาก คือสภาพเจาะจงทิศทางที่มากที่สุด ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$D_{\max} = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\mathrm{rad}}} = \frac{3}{2} \qquad (2.77)$$

โดยที่ $D_{\max}$ คือ สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด

$U_{\max}$ คือ ความเข้มการแผ่พลังงานสูงสุด

P_{rad} คือ พลังงานที่แผ่ออกไป

และเมื่อทราบพารามิเตอร์ $D_{\max}$ แล้ว สามารถหาพื้นที่สมมติในการรับคลื่น หรือพื้นที่ประสิทธิผลสูงสุดของบ่วงได้ดังนี้

$$A_{em} = \left(\frac{\lambda^2}{4\pi}\right) D_0 = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \qquad (2.78)$$

2.2 บ่วงวงกลมที่มีกระแสคงที่ (Circular loop of constant current)

สายอากาศบ่วงวงกลมที่มีกระแสคงที่สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 2.2 โดยจะสมมติให้กระแสมีค่าคงที่ตามสมการ (2.1) สนามที่แผ่ออกไปสามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้ฟังก์ชันศักย์เชิงเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ตามสมการ (2.19) ร่วมกับการประมาณในย่านสนามไกล และแสดงรายละเอียดในภาคผนวก ก มีรายละเอียดดังนี้

2.2.1 การประมาณในย่านสนามไกล (Far-Field Approximation)

ในบริเวณย่านสนามไกล ระยะของ R ตามรูปที่ 2.2 สามารถหาได้โดย

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi'} \tag{2.79}$$

เนื่องจาก a มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับระยะจุดสังเกต r สมการ (2.41) สามารถประมาณได้เป็น

$$R \approx \sqrt{r^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi'} \quad for \;\; r >> a \tag{2.80}$$

ใช้การกระจายไบโนเมียล (binomial expansion) กับสมการ (2.41ก) ทำให้ได้

$$R = r - z'\cos\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{z'^2}{2}\sin^2\theta\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{z'^3}{2}\cos\theta\sin^2\theta\right) + \ldots \tag{2.81}$$

จากสมการ (2.80) สามารถจัดรูปแบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$R \approx r\sqrt{r - 2a\sin\theta\cos\phi'} \tag{2.82}$$

$$R \approx r\sqrt{1 - \frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi'} \tag{2.83}$$

ค่าของ R จะได้รับการนำไปใช้ในสมการ (2.81) ดังนี้

$$R \approx r\sqrt{1 - \frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi'} = r - a\sin\theta\cos\phi' = r - a\cos\psi_0\,, \quad \text{for phase terms} \tag{2.84}$$

$$R \approx r\,, \quad \text{for amplitude terms} \tag{2.85}$$

โดยที่

$$\cos\psi_0 = \hat{\mathbf{a}}'_\rho \cdot \hat{\mathbf{a}}_r\big|_{\phi=0} \tag{2.86}$$

$$= \left(\hat{\mathbf{a}}_x\cos\phi' + \hat{\mathbf{a}}_y\sin\phi'\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{a}}_x\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{a}}_y\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{a}}_z\cos\theta\right)\Big|_{\phi=0} \tag{2.87}$$

$$= \sin\theta\cos\phi' \tag{2.88}$$

2.2.2 สนามที่แผ่ออกไป (Radiated Fields)

จากความสัมพันธ์ระหว่าง **R** และ **r** ดังแสดงในรูปที่ 2.2 จะเห็นได้ว่าสนามที่แผ่ออกไปของบ่วงจะไม่เกี่ยวข้องกับมุมสังเกต ϕ ดังนั้นจึงสามารถเลือกมุมสังเกตเป็นค่าใดๆก็ได้ แต่เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ควรเลือกใช้มุมสังเกตเท่ากับศูนย์ ($\phi=0$) ดังที่กำหนดโดยสมการ (2.86) ดังนั้นจากการประมาณค่า R ตามสมการ (2.16) ทำให้สมการ (2.30) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$A_\phi \cong \frac{a\mu I_0 e^{-jkr}}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\cos\phi'\, e^{+jkr\sin\theta\cos\phi'}\,d\phi' \tag{2.89}$$

จากนั้นนำมาแยกออกได้เป็น 2 พจน์ ได้ดังนี้

$$A_\phi \cong \frac{a\mu I_0 e^{-jkr}}{4\pi r}\left[\int_0^{\pi}\cos\phi'\, e^{+jkr\sin\theta\cos\phi'}\,d\phi' + \int_{\pi}^{2\pi}\cos\phi'\, e^{+jkr\sin\theta\cos\phi'}\,d\phi'\right] \tag{2.90}$$

โดยที่พจน์ที่สองสามารถเปลี่ยนรูปแบบได้เป็น

$$\phi' = \phi'' + \pi \tag{2.91}$$

ดังนั้น สมการ (2.90) จึงเขียนได้ดังนี้

$$A_\phi \cong \frac{a\mu I_0 e^{-jkr}}{4\pi r}\left[\int_0^{\pi}\cos\phi'\, e^{+jkr\sin\theta\cos\phi'}\,d\phi' - \int_0^{\pi}\cos\phi''\, e^{-jkr\sin\theta\cos\phi''}\,d\phi''\right] \tag{2.92}$$

อินทิเกรตสมการ (2.92) โดยใช้รูปแบบการอินทิเกรตดังนี้

$$\pi\, j^n J_n(z) = \int_0^{\pi}\cos(n\phi)e^{+jz\cos\phi}\,d\phi \tag{2.93}$$

จากสมการ (2.93) จะสามารถเขียนสมการ (2.92) ใหม่ได้ดังนี้

$$A_\phi \cong \frac{a\mu I_0 e^{-jkr}}{4\pi r}\left[\pi\, j J_1(ka\sin\theta) - \pi\, j J_1(-ka\sin\theta)\right] \tag{2.94}$$

โดยที่ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ n เขียนได้

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!} \tag{2.95}$$

$$J_n(-z) = (-1)^n \; J_n(z) \tag{2.96}$$

ถ้าแทน $n = 1$ ในสมการ (2.96) จะทำให้ได้

$$J_1(-z) = -J_1(z) \tag{2.97}$$

จากสมการ (2.97) สามารถเขียนสมการ (2.94) ใหม่ได้ดังนี้

$$A_\phi \cong j\frac{a\mu I_0 e^{-jkr}}{2r} J_1(ka\sin\theta) \tag{2.98}$$

เมื่อทราบศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** แล้ว [ดังที่แสดงรายละเอียดในภาคผนวก ก] จะสามารถหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในย่านสนามไกล ได้จาก

$$\mathbf{E}_A \cong -j\omega\mathbf{A}_t \tag{2.99}$$

$$\mathbf{H}_A \cong \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{\eta}\times\mathbf{E}_A = -j\frac{\omega}{\eta}\hat{\mathbf{a}}_r\times\mathbf{A}_t \tag{2.100}$$

ซึ่งสามารถเขียนแยกองค์ประกอบของ $\mathbf{E}_A$ และ $\mathbf{H}_A$ ได้เป็น

$$E_r \cong 0 \tag{2.101}$$

$$E_\theta \cong -j\omega A_\theta \tag{2.102}$$

$$E_\phi \cong -j\omega A_\phi \tag{2.103}$$

$$H_r \cong 0 \tag{2.104}$$

$$H_\theta \cong +j\frac{\omega}{\eta}A_\phi = -\frac{E_\phi}{\eta} \tag{2.105}$$

$$H_\phi \cong -j\frac{\omega}{\eta}A_\theta = +\frac{E_\theta}{\eta} \tag{2.106}$$

จากสมการ (2.38) - (2.41) จะทราบว่าศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** ในองค์ประกอบ r และ θ ให้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ จึงทำให้เหลือ A_ϕ เพียงองค์ประกอบเดียว ดังนั้นจากสมการ (2.98) การแผ่พลังงานของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในย่านสนามไกลจะมีเฉพาะองค์ประกอบ E_ϕ และ H_θ เท่านั้น ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_r \cong E_\theta = 0 \tag{2.107}$$

$$E_\phi \cong \frac{ak\eta I_0 e^{-jkr}}{2r} J_1\left(ka\sin\theta\right) \tag{2.108}$$

$$H_r \cong H_\phi = 0 \tag{2.109}$$

$$H_\theta \cong -\frac{E_\phi}{\eta} = -\frac{akI_0 e^{-jkr}}{2r} J_1\left(ka\sin\theta\right) \tag{2.110}$$

2.2.3 พารามิเตอร์ของสายอากาศบ่วง (Parameter of loop antennas)

ความหนาแน่นพลังงานเฉลี่ยสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้ดังนี้

$$\mathbf{W}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi \times \hat{\mathbf{a}}_\theta H_\theta^*\right] = \hat{\mathbf{a}}_r \frac{1}{2\eta}\left|E_\phi\right|^2 \tag{2.111}$$

โดยที่ **E** และ **H** คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนสายอากาศ ตามลำดับ

* คือ สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate)

เมื่อแทน สนามไฟฟ้าตามสมการ (2.108) ลงใน สมการ (2.111) ทำให้ได้ความหนาแน่นพลังงานเฉลี่ยเขียนได้เป็น

$$\mathbf{W}_{av} = \hat{\mathbf{a}}_r W_r = \hat{\mathbf{a}}_r \frac{(a\omega\mu)^2\left|I_0\right|^2}{8\eta r^2} J_1^2(ka\sin\theta) \tag{2.112}$$

และสามารถหาความเข้มการแผ่พลังงานซึ่งมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นพลังงานได้ดังสมการต่อไปนี้

$$U = r^2 W_r = \frac{(a\omega\mu)^2\left|I_0\right|^2}{8\eta} J_1^2(ka\sin\theta) \tag{2.113}$$

จากสมการ (2.112) เมื่อทราบค่าความหนาแน่นพลังงานแล้ว แบบรูปการแผ่พลังงาน (radiated power) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$P_{\text{rad}} = \oiint_S \mathbf{W}_{\text{av}} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\pi (a\omega\mu)^2 \left|I_0\right|^2}{4\eta} \int_0^{\pi} J_1^2 \left(ka \ \sin\theta\right) \sin\theta \ d\theta \tag{2.114}$$

สำหรับพจน์ของการอินทิเกรตในสมการ (2.114) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\int_0^{\pi} J_1^2 \left(ka \ \sin\theta\right) \sin\theta \ d\theta = \frac{1}{ka} \int_0^{2ka} J_2(x)\, dx \tag{2.115}$$

ซึ่งการอินทิเกรตของสมการ (2.115) สามารถใช้วิธี Q method ได้ดังนี้

$$\int_0^{\pi} J_1^2 \left(ka \ \sin\theta\right) \sin\theta \ d\theta = \frac{1}{ka} \int_0^{2ka} J_2(x)\, dx = 2Q_{11}^{(1)}(ka) \tag{2.116}$$

โดยที่

$$Q_{11}^{(1)}(ka) = \frac{1}{ka} \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+3}(2ka) \tag{2.117}$$

และ $J_m(x)$ เป็นฟังก์ชันเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ m

แทนสมการ (2.60) และ (2.61ข) ลงในสมการ (2.59) จะได้

$$P_{\text{rad}} = \frac{\pi (a\omega\mu)^2 \left|I_0\right|^2}{4\eta} \times \frac{1}{ka} \int_0^{2ka} J_2(x)\, dx \tag{2.118}$$

และ

$$P_{\text{rad}} = \frac{\pi (a\omega\mu)^2 \left|I_0\right|^2}{4\eta} Q_{11}^{(1)}(ka) \tag{2.119}$$

2.2.4 การประมาณค่าบ่วงขนาดใหญ่ (Large Loop Approximation)

บ่วงขนาดใหญ่ได้รับการกำหนดให้มีค่ารัศมีเป็น $(a \geq \lambda/2)$ ซึ่งในกรณีนี้สมการ (2.115) จะประมาณค่าได้ดังนี้

$$\int_0^{\pi} J_1^2(ka\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{ka}\int_0^{2ka} J_2(x)dx \approx \frac{1}{ka} \tag{2.120}$$

ทำให้ได้พลังงานที่แผ่ออกไปมีค่าดังนี้

$$P_{\mathrm{rad}} \approx \frac{\pi(a\omega\mu)^2|I_0|^2}{4\eta(ka)} \tag{2.121}$$

ความเข้มสูงสุดของการแผ่พลังงานจะเกิดขึ้นเมื่อ $ka\sin\theta = 1.84$ ดังนั้น

$$U\big|_{\max} = \frac{(a\omega\mu)^2|I_0|^2}{8\eta}\; J_1^2(ka\sin\theta)\Big|_{ka\sin\theta=1.84} = \frac{(a\omega\mu)^2|I_0|^2}{8\eta}\,(0.582)^2 \tag{2.122}$$

ความต้านทานการแผ่พลังงานสามารถเขียนได้ดังนี้

$$R_r = \frac{2P_{\mathrm{rad}}}{|I_0|^2} = \frac{2\pi(a\omega\mu)^2}{4\eta(ka)} = \eta\left(\frac{\pi}{2}\right)ka = 60\pi^2\,(ka) = 60\pi^2\left(\frac{C}{\lambda}\right) \tag{2.123}$$

และสภาพเจาะจงทิศทางจะมีค่าเป็น

$$D_{\max} = 4\pi\frac{U_{\max}}{P_{\mathrm{rad}}} = 4\pi\,\frac{ka\,(0.582)^2}{2\pi} = 2ka(0.582)^2 = 0.677\left(\frac{C}{\lambda}\right) \tag{2.124}$$

ค่าสูงสุดพื้นที่ประสิทธิผลมีค่าเป็น

$$A_{em} = \frac{\lambda^2}{4\pi}\,D0 = \frac{\lambda^2}{4\pi}\left[0.677\left(\frac{C}{\lambda}\right)\right] = 5.39\times10^{-2}\;\lambda C \tag{2.125}$$

โดยที่ C (เส้นรอบวง) $= 2\pi a$

η คือ อิมพิแดนซ์อินทรินซิก (intrinsic impedance) มีค่าเท่ากับ $\eta \approx 120\pi$

2.2.5 การประมาณค่าบ่วงขนาดกลาง (Intermediate Loop Approximation)

บ่วงขนาดกลางจะได้รับการกำหนดรัศมีของบ่วงมีค่าเป็น $\lambda/(6\pi) = 0.053\lambda \le a < \lambda/2$ โดยสามารถหาได้จากสมการ (2.114) - (2.117) โดย P_{rad} หาได้จากสมการ (2.119) ทำให้ได้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ

$$P_{\text{rad}} = \frac{\pi (a\omega\mu)^2 |I_0|^2}{4\eta} Q_{11}^{(1)}(ka)$$

$$R_r = \frac{2P_{\text{rad}}}{|I_0|^2} = \eta\pi (ka)^2 \, Q_{11}^{(1)}(ka) \quad (2.126)$$

$$D_{\max} = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = \frac{F_m(ka)}{Q_{11}^{(1)}(ka)} \quad (2.127)$$

โดยที่

$$F_m(ka) = J_1^2(ka\sin\theta)\big|_{\max} = \begin{cases} J_1^2(1.840) = (0.582)^2 = 0.339 \\ \quad ka > 1.840\ (a > 0.293\lambda) & (2.128) \\ J_1^2(ka) \\ \quad ka < 1.840\ (a < 0.293\lambda) & (2.129) \end{cases}$$

2.2.6 การประมาณค่าบ่วงขนาดเล็ก (Small Loop Approximation)

บ่วงขนาดเล็กจะได้รับการกำหนดให้รัศมีของบ่วงมีค่าเป็น $(a < \lambda/6\pi)$ และสามารถหาได้จากสมการ (2.95) โดยใช้ฟังก์ชันเบสเซล ดังสมการต่อไปนี้

$$J_1(ka\sin\theta) = \frac{1}{2}(ka\sin\theta) - \frac{1}{16}(ka\sin\theta)^3 + \ldots \quad (2.130)$$

แต่เนื่องจากค่า ka ของบ่วงขนาดเล็กจะมีค่าน้อยกว่า 1/3 $(ka < 1/3)$ ดังนั้นค่าของฟังก์ชันเบสเซลจะได้รับการประมาณดังนี้

$$J_1(ka\sin\theta) \cong \frac{ka\sin\theta}{2} \quad (2.131)$$

แทนค่าของฟังก์ชันเบสเซลจากสมการ (2.131) ลงในสมการ (2.107) - (2.110) ทำให้สามารถเขียนสมการ (2.107) - (2.110) ใหม่ได้ดังนี้

$$E_r \cong E_\theta = 0 \tag{2.132}$$

$$E_\phi \cong \frac{a^2 \omega\mu k I_0 e^{-jkr}}{4r} \sin\theta = \eta \frac{a^2 k^2 I_0 e^{-jkr}}{4r} \sin\theta \tag{2.133}$$

$$H_r \cong H_\phi = 0 \tag{2.134}$$

$$H_\theta \cong -\frac{E_\phi}{\eta} = -\frac{a^2 \omega\mu k I_0 e^{-jkr}}{4\eta r} \sin\theta = -\frac{a^2 k^2 I_0 e^{-jkr}}{4r} \sin\theta \tag{2.135}$$

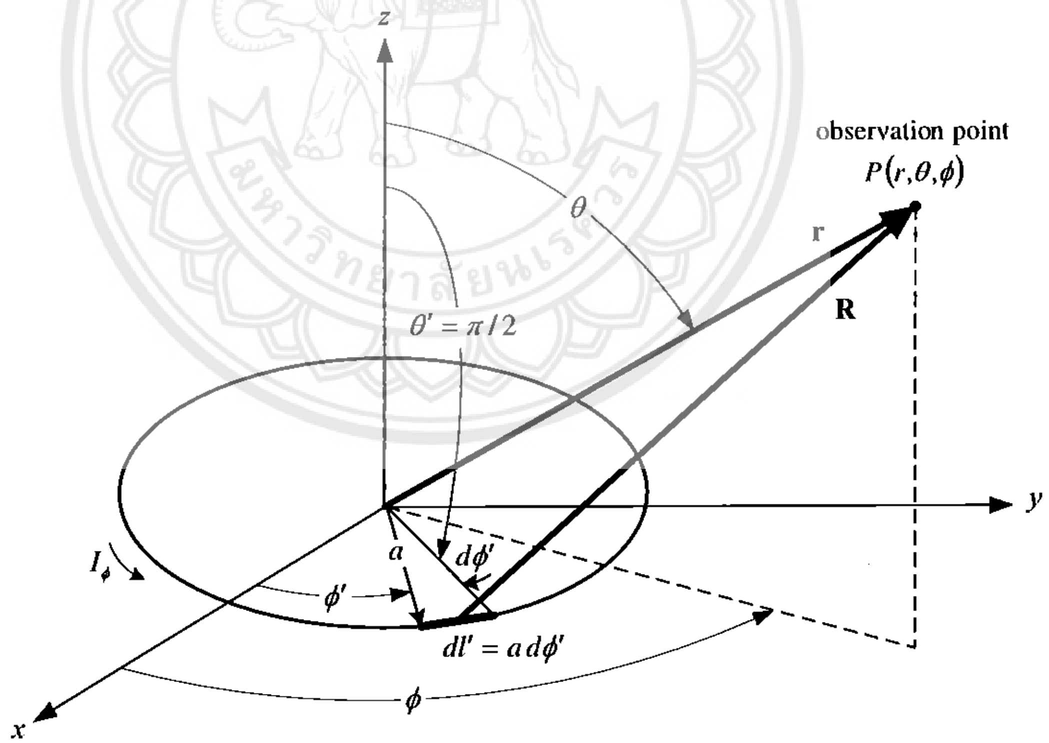
โดยสมการ (2.132) - (2.135) จะใช้กับบ่วงขนาดเล็กที่มี $a < \lambda / 6\pi$

บทที่ 3
ผลการวิเคราะห์สายอากาศบ่วง

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์สายอากาศบ่วง โดยอาศัยหลักการและทฤษฎีในบทก่อนหน้านี้ ลำดับแรกจะกล่าวถึงการประมาณในย่านสนามไกล (far - field approximation) และอนุกรม แมคลอริน (Maclaurin's series) จากนั้นจะศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงทางกายภาพ ผลการวิเคราะห์จะแสดงในรูปของแบบสภาพเจาะจงทิศทาง (directivity pattern) จากนั้นจะกล่าวถึงความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW) และความต้านทานการแผ่พลังงาน (radiation resistance) ผลของความยาวรัศมีของสายอากาศบ่วง (radius) และความยาวเส้นรอบวงของสายอากาศบ่วง (loop circumference)

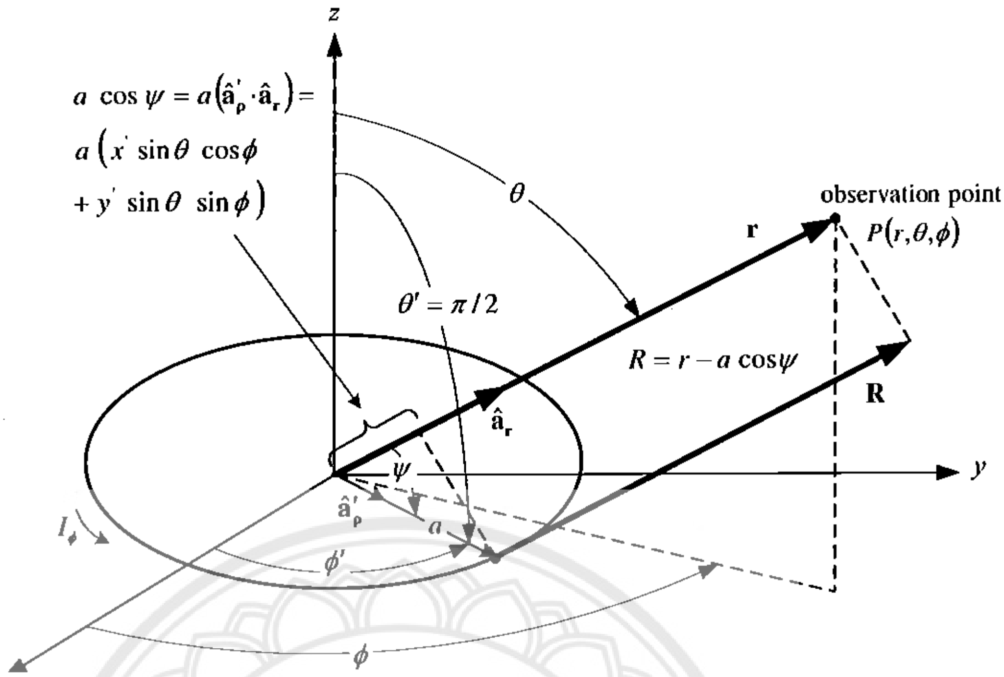
3.1 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity pattern)

พิจารณาสายอากาศบ่วงที่วางบนระนาบ xy มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=0$ ดังแสดงในรูปที่ 3.1



(ก) เรขาคณิตของสายอากาศบ่วง

รูปที่ 3.1 เรขาคณิตสำหรับการวิเคราะห์สายอากาศบ่วง

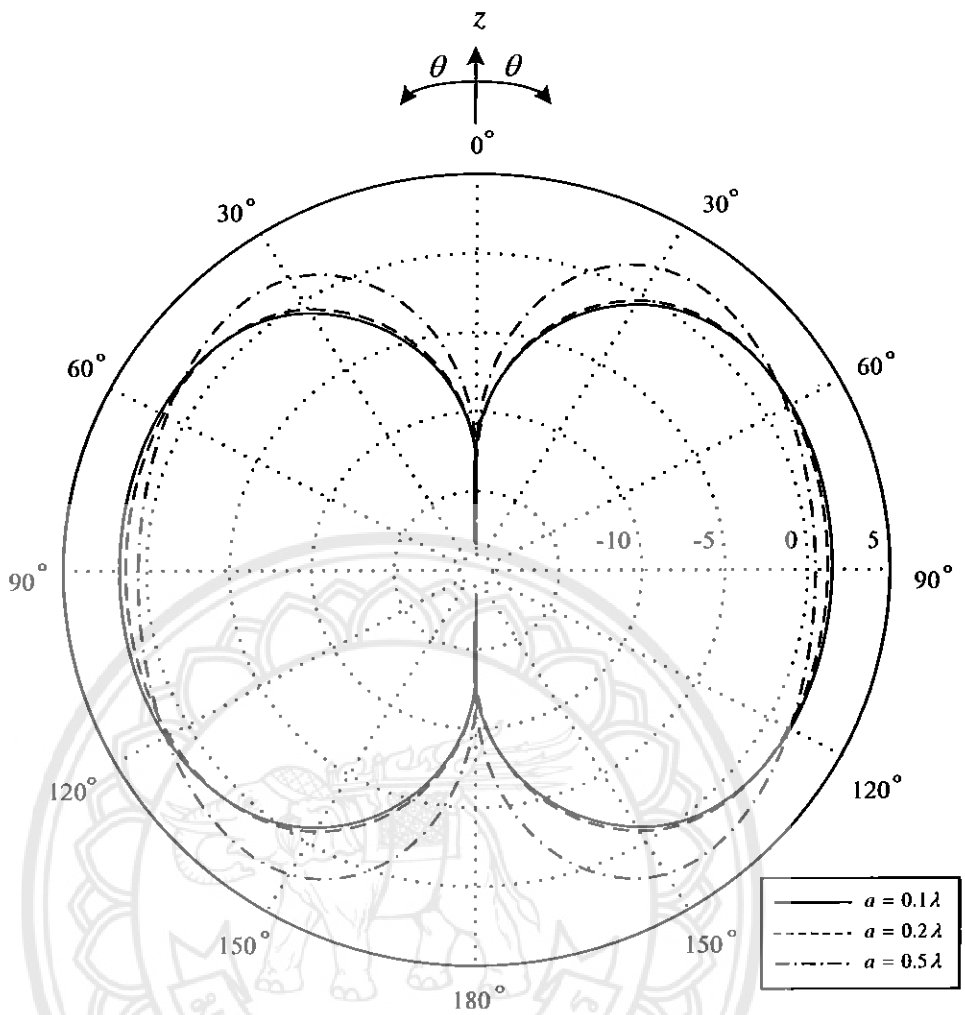


(ข) เรขาคณิตสำหรับจุดสังเกตในย่านสนามไกล

รูปที่ 3.1 เรขาคณิตสำหรับการวิเคราะห์สายอากาศบ่วง (ต่อ)

สายอากาศบ่วงวางอยู่บนระนาบ xy มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=0$ ที่จุดสังเกต P จะได้รับการบ่งโดยอาศัยระบบพิกัดทรงกลม (r,θ,ϕ) กระแสไฟฟ้าที่ไหลในบ่วงระบุโดยอาศัยระบบพิกัดทรงกระบอก (ρ',ϕ',z') โดยที่มีมุม ϕ' และ θ' วัดจากแกน x และ z ตามลำดับ โดยที่สายอากาศบ่วงจะได้รับการสมมติว่า เส้นลวดมีขนาดผอมมากและการแจกแจงกระแสที่อยู่บนเส้นลวดนี้มีค่าสมมติให้เป็นค่าคงที่

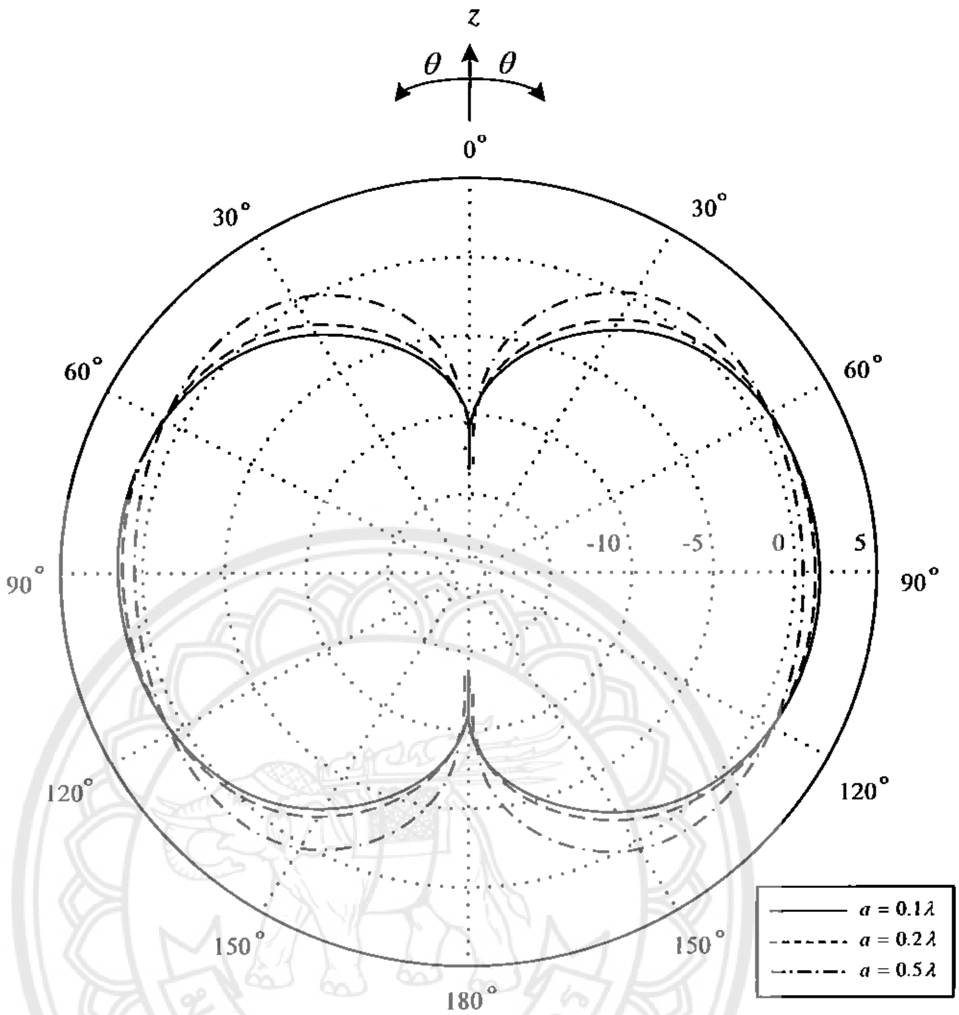
การวิเคราะห์สนามที่แผ่ออกไปและความเข้มการแผ่พลังงาน ทำให้ได้สภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงวงกลม พารามิเตอร์ดังกล่าวจะวิเคราะห์โดยอาศัยการประมาณในย่านสนามไกล (far-field approximation) โดยใช้สมการ (2.70) และ (2.75) และจากอนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's series) โดยใช้สมการ (2.45) - (2.46) และ (2.75) ผลการคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB ที่แสดงไว้ในภาคผนวก ง จะได้แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศบ่วง และสามารถนำมาวาดเป็นแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทาง (directivity pattern) ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 3.2 และ รูปที่ 3.3



รูปที่ 3.2 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงจากการประมาณในย่านสนามไกล

รูปที่ 3.2 แสดงแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วง โดยอาศัยการประมาณในย่านสนามไกล a มีการเปลี่ยนไปเป็น $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$ เส้นทึบจะแสดงสภาพเจาะจงทิศทางสำหรับค่า $a = 0.1\lambda$ เส้นประสำหรับค่า $a = 0.2\lambda$ และเส้นประจุดสำหรับค่า $a = 0.5\lambda$ แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงแสดงการแผ่พลังงานในปริภูมิว่างรอบตัวสายอากาศในระนาบ ϕ เท่ากับค่าคงที่ โดยพลังงานที่แผ่ออกมาจะครอบคลุมบริเวณระนาบตั้งฉากกับบ่วง จะเห็นได้ว่าทุกๆค่าของ a จะมีค่าต่ำสุดอยู่ที่ 0° และจะมีค่าพลังงานที่มากที่สุดอยู่ที่ 90° โดย $a = 0.1\lambda$ จะมีค่า D_{max} คือ 1.6582 dB, $a = 0.2\lambda$ จะมีค่า D_{max} คือ 1.5947 dB และ $a = 0.5\lambda$ จะมีค่า D_{max} อยู่ที่ 1.3064 dB

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าเมื่อมีการแปรเปลี่ยนค่า a เป็น $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$ โดยให้ λ เป็นค่าคงที่ จะส่งผลให้การแผ่พลังงานในลักษณะของแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงมีค่าการแผ่พลังงานที่ลดลงเมื่อให้ a มีค่าเพิ่มมากขึ้น



รูปที่ 3.3 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงจากอนุกรมแมคลอริน

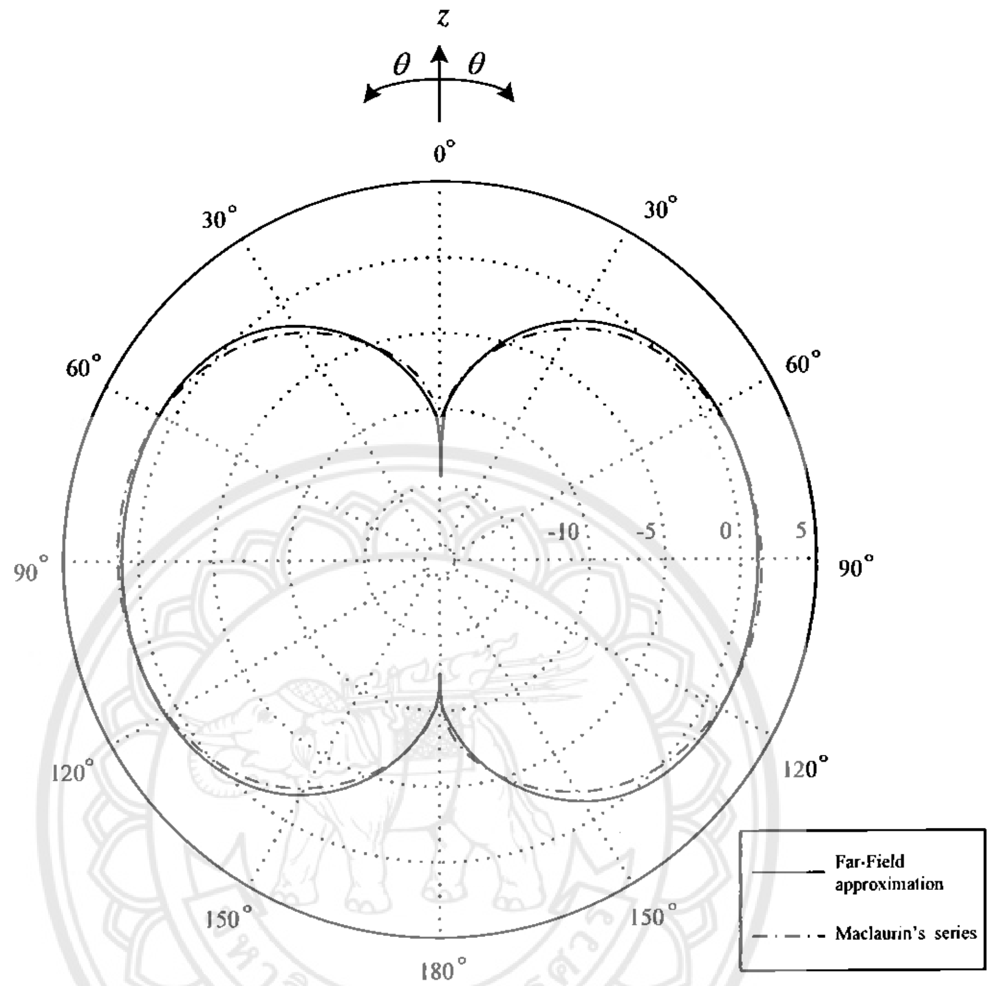
รูปที่ 3.3 แสดงแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วง โดยอาศัยอนุกรมแมคลอริน a มีการเปลี่ยนไปเป็น $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$ เส้นทึบจะแสดงแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางสำหรับค่า $a = 0.1\lambda$ เส้นประสำหรับค่า $a = 0.2\lambda$ และเส้นประจุดสำหรับค่า $a = 0.5\lambda$ โดยให้ λ เป็นค่าคงที่ เช่นเดียวกันกับกรณีรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าเมื่อค่า a มีค่าเพิ่มมากขึ้นจะส่งผลให้ค่า D_{max} มีค่าลดลง โดยจะมีค่าพลังงานที่ต่ำที่สุดอยู่ที่ 0° และจะมีค่าพลังงานที่มากที่สุดอยู่ที่ 90° โดย $a = 0.1\lambda$ จะมีค่า D_{max} คือ 1.6759 dB $a = 0.2\lambda$ จะมีค่า D_{max} คือ 1.6131 dB และ $a = 0.5\lambda$ จะมีค่า D_{max} คือ 1.3820 dB

จากรูปที่ 3.2 และ รูปที่ 3.3 จะพบได้ว่า สายอากาศบ่วงจะมีการแผ่พลังงานที่ครอบคลุมระนาบตั้งฉากกับบ่วง เมื่อแปรเปลี่ยนค่า a พบว่า สภาพเจาะจงทิศทางสูงที่สุด สำหรับสายอากาศบ่วงทุกตัวเกิด ณ 90° ตำแหน่งเดียวกันทั้งหมด

จากการเปรียบเทียบวิเคราะห์ของทั้งสองแบบ คือ ในรูปแบบของการประมาณในย่านสนามไกลและในรูปแบบของอนุกรมแมคลอริน ค่าสูงสุดของสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศบ่วงจะมีค่าที่ใกล้เคียงกัน จากข้อมูลข้างต้นนี้ สามารถนำมาแสดงได้ดังตารางข้างล่าง

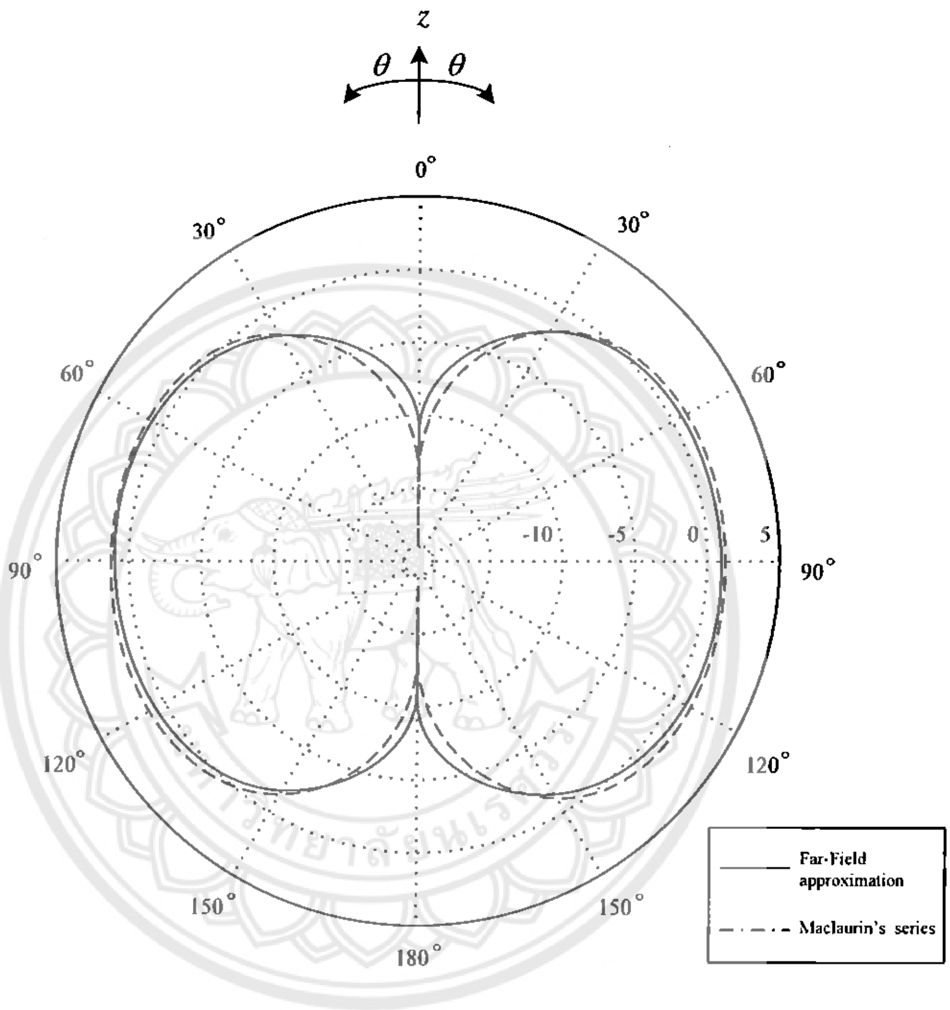
ตารางที่ 3.1 แสดงค่าสภาพเจาะจงทิศทางสำหรับสายอากาศบ่วงที่ค่าสูงสุด (D_{max}) ของพลังงานที่แผ่ออกไป ที่ค่า $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$

a	D_{max} (เกิดที่ $\theta = 90^{\circ}$)	
	การประมาณในย่านสนามไกล (far-field approximation)	อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)
0.1λ	1.6582 dB	1.6759 dB
0.2λ	1.5947 dB	1.6131 dB
0.5λ	1.3064 dB	1.3820 dB

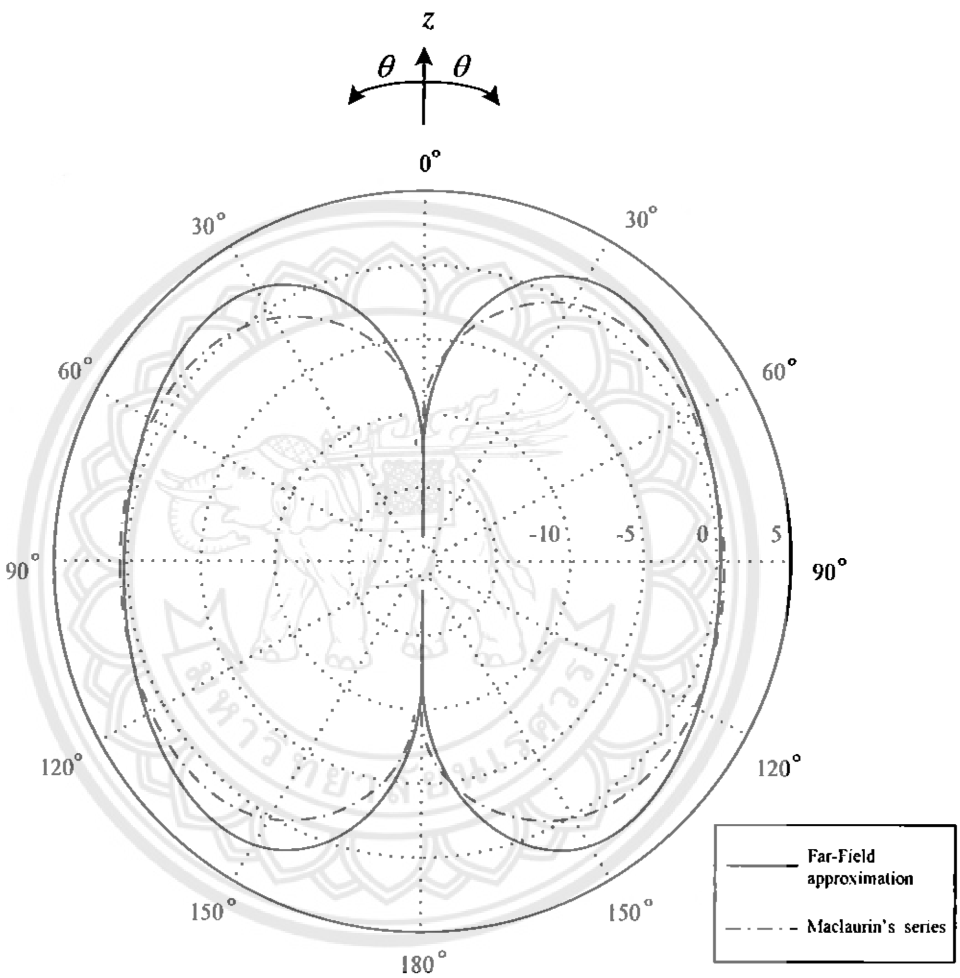


รูปที่ 3.4 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงจากการประมาณในย่านสนามไกล และอนุกรมแมคลอริน เมื่อ $a = 0.1\lambda$

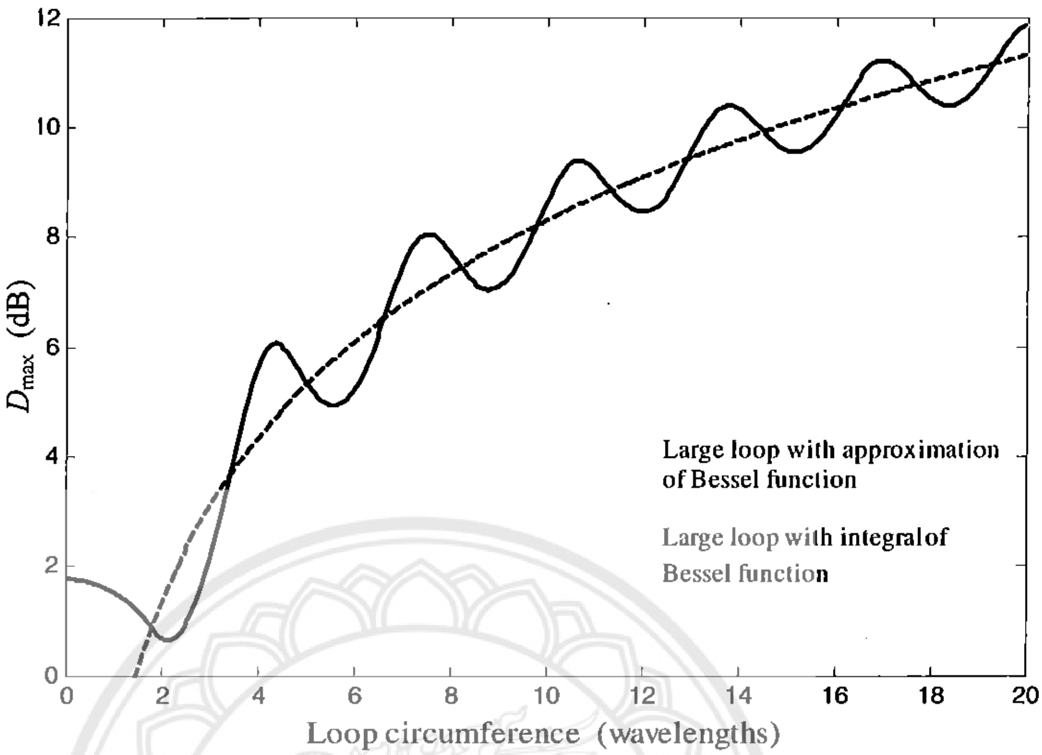
รูปที่ 3.4 ถึง 3.6 แสดงแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงจากการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคลอรินของบ่วงที่ $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$ ตามลำดับ โดยเส้นทึบจะแสดงค่าที่ได้จากการประมาณในย่านสนามไกล และเส้นประจุดจะแสดงค่าที่ได้จากการวิเคราะห์โดยอาศัยอนุกรมแมคลอริน จะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์ทั้งสองวิธีนี้ให้ผลแบบรูปที่สอดคล้องกัน ณ ตำแหน่ง $\theta = 0^\circ$ และ $\theta = 180^\circ$ จะให้สภาพเจาะจงทิศทางมีค่าเป็นต่อ 0 และจะให้ค่าที่มากที่สุดที่ $\theta = 90^\circ$ สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดสำหรับสองวิธีที่ว่านี้จะให้ผลที่ใกล้เคียงกัน



รูปที่ 3.5 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงจากการประมาณในย่านสนามไกล และอนุกรมแมคลอริน เมื่อ $a = 0.2\lambda$



รูปที่ 3.6 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของบ่วงจากการประมาณในย่านสนามไกล และอนุกรมแมคลอริน เมื่อ $a = 0.5\lambda$



รูปที่ 3.7 สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดของสายอากาศบ่วงเทียบกับความยาวเส้นรอบวง

ผลของความยาวเส้นรอบวงต่อสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดแสดงได้ดังรูปที่ 3.7 ในรูปนี้แกนนอนแสดงเส้นรอบวงซึ่งได้รับการเปลี่ยนแปลงตั้งแต่ 0λ ถึง 20λ และแกนตั้งแสดงสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด (dB) สภาพเจาะจงทิศทางจะคำนวณจากการวิเคราะห์ในกรณีบ่วงใหญ่ เส้นประได้จากการวิเคราะห์โดยอาศัยการประมาณฟังก์ชันเบสเซล ตามสมการที่ (2.124) และเส้นกราฟเส้นทึบจะวิเคราะห์จากการอินทิเกรตฟังก์ชันเซล ตามสมการที่ (2-118), (2-122) และ (2-124) ผลที่ได้พบว่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศบ่วงจะเพิ่มขึ้นเมื่อความยาวของเส้นรอบวงมีค่าเพิ่มขึ้นและเส้นกราฟที่แสดงเป็นเส้นทึบจะมีการแกว่งเป็นลูกคลื่นรอบๆ เส้นประ ซึ่งเป็นผลจากการอินทิเกรตฟังก์ชันเบสเซล J_2 และจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงแรก และจะเพิ่มขึ้นในอัตราที่ช้าลงเมื่อความยาวเส้นรอบวงของบ่วงเพิ่มมากขึ้น

3.2 ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (Half Power Beamwidth)

ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW) หมายถึง มุมระหว่างแนวสองแนวที่มีกำลังเท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุด ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังจะพิจารณาจากสภาพเจาะจงทิศทางในระนาบอิลิเวชัน ที่ซึ่ง ϕ เท่ากับค่าคงที่ และเลือกเป็น $\phi=90^{\circ}$ สภาพเจาะจงทิศทางในรูปที่ 3.2 ได้จากการประมาณในย่านสนามไกล และ รูปที่ 3.3 ได้จากอนุกรมแมคลอริน ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW) จะหาจากการประมาณเชิงเส้น (linear approximation) กับจุดสองจุดของสภาพเจาะจงทิศทางบนระนาบที่ตั้งฉากกับบ่วง ผลการคำนวณโดยการใช้โปรแกรม MATLAB ที่แสดงไว้ในภาคผนวก ง ทำให้ได้ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง แสดงได้ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW) เมื่อค่า $a=0.1\lambda$, $a=0.2\lambda$ และ $a=0.5\lambda$

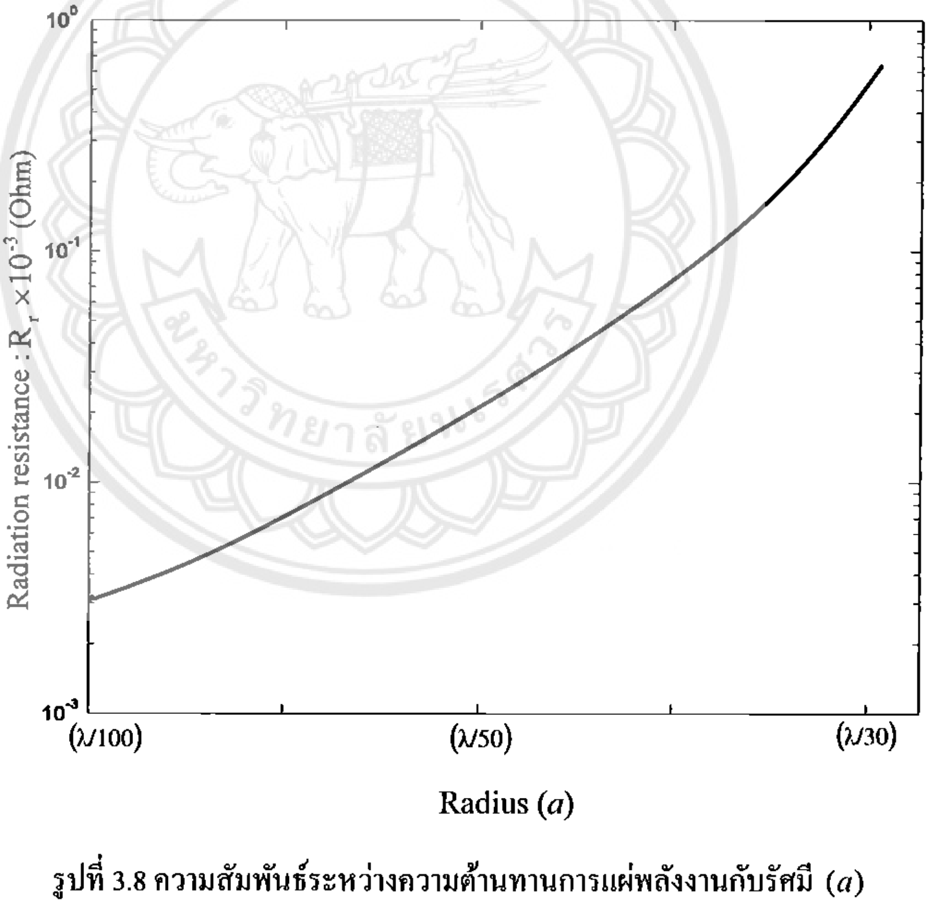
a	ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW)	
	การประมาณในย่านสนามไกล (far-field approximation)	อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)
0.1λ	174.0692°	174.0913°
0.2λ	174.3980°	174.6308°
0.5λ	175.7314°	175.8182°

ตารางที่ 3.2 แสดงให้เห็นว่าการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคลอริน ให้ค่าของความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW) ที่สอดคล้องกัน

3.3 ความต้านทานการแผ่พลังงาน (Radiation Resistance)

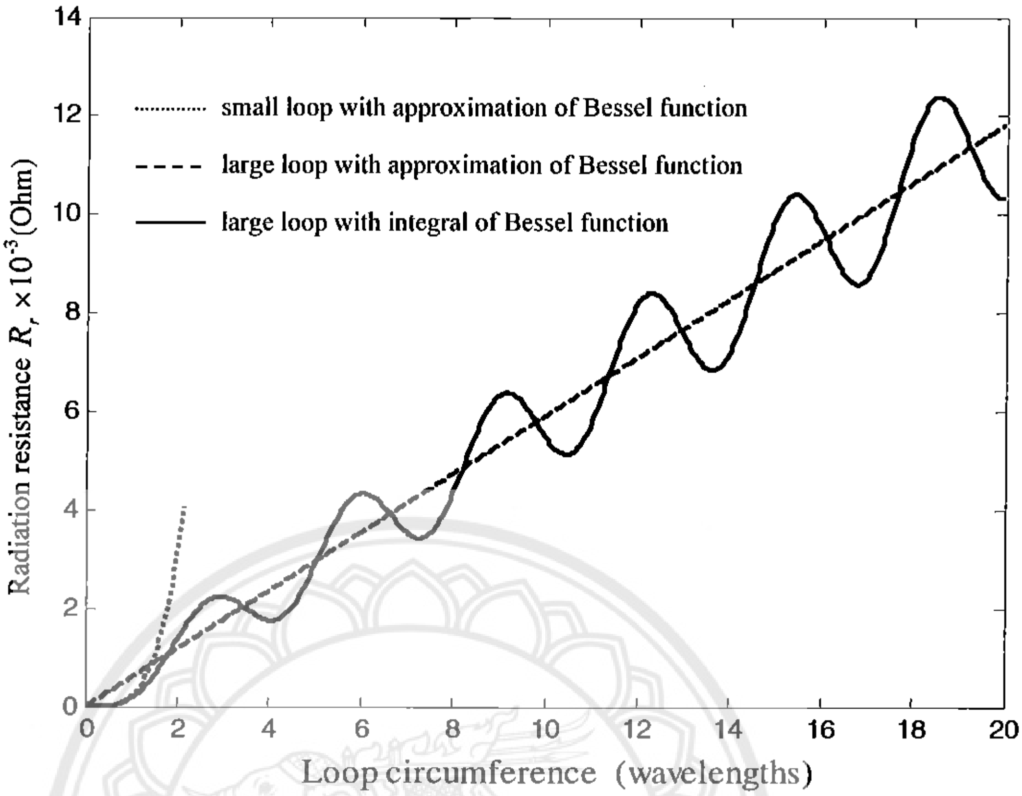
ความต้านทานการแผ่พลังงาน เป็นพารามิเตอร์ที่หมายถึง ความต้านทานสมมติซึ่งเมื่อแทนเข้าไปที่ตัวสายอากาศแล้วจะทำให้เกิดพลังงานมีค่าเท่ากับพลังงานที่แผ่ออกไปโดยสายอากาศตัวนั้น ความต้านทานการแผ่พลังงานในที่นี้จะพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ สายอากาศบ่วงขนาดเล็ก และสายอากาศบ่วงขนาดใหญ่

รูปที่ 3.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานกับรัศมี (a) ของสายอากาศบ่วงขนาดเล็กซึ่งมีความยาวรัศมีตั้งแต่ $\lambda/100$ ถึง $\lambda/30$ ความต้านทานการแผ่พลังงาน (R_r) จะได้รับการพิจารณาให้เป็นบ่วงเล็ก และมีค่าตามสมการ (2-126) และ (2-131) ผลการคำนวณโดยโปรแกรม MATLAB ที่แสดงไว้ในภาคผนวก ง สามารถนำมาวาดเป็นกราฟแสดงการเปรียบเทียบได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 3.8 ความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานกับรัศมี (a)

รูป 3.8 แสดงให้เห็น ความต้านทานการแผ่พลังงานของสายอากาศบ่วง จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องเมื่อรัศมีเพิ่มขึ้น



รูปที่ 3.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานเทียบกับความยาวเส้นรอบวง

รูปที่ 3.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานเทียบกับความยาวเส้นรอบวง โดยการวาดกราฟแสดงความยาวเส้นรอบวงเริ่มจาก 0λ ถึง 20λ

ในรูปนี้สายอากาศบ่วงขนาดเล็กเป็นสายอากาศที่มีความยาวเส้นรอบวงตั้งแต่ 0λ ถึง 2λ ความต้านทานการแผ่พลังงานจะคำนวณโดยอาศัยการประมาณของเบสเซลฟังก์ชัน ตามสมการ (2-126) และ (2-131) ผลการคำนวณแสดงเป็นเส้นจุด โดยจะเห็นได้ว่าความต้านทานการแผ่พลังงานจะเพิ่มขึ้นอย่างอย่างรวดเร็วตั้งแต่ความยาวเส้นรอบวงเท่ากับ 1λ

ความต้านทานการแผ่พลังงานของสายอากาศบ่วงขนาดใหญ่ จะคำนวณในช่วงตั้งแต่ 0λ ถึง 20λ โดยอาศัยจากการอินทิเกรตฟังก์ชันเบสเซล และการประมาณค่าฟังก์ชันเบสเซล ผลจากการประมาณค่าฟังก์ชันเบสเซลตลอดช่วงความยาวเส้นรอบวง ตามสมการ (2.118), (2.120), (2.121) และ (2.123) แสดงเป็นเส้นประใหญ่ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ความต้านทานการแผ่พลังงานจะเพิ่มขึ้นเป็นเชิงเส้นอย่างต่อเนื่องเมื่อความยาวเส้นรอบวงเพิ่มขึ้น และจากสมการตั้งต้นเดียวกันนี้ถ้าอินทิเกรตฟังก์ชันเบสเซล J_2 แทนการประมาณค่า จะพบว่า ความต้านทานการแผ่พลังงานจะได้ผลการวิเคราะห์เป็นเส้นทึบ ซึ่งความต้านทานการแผ่พลังงานจะแสดงการแกว่งเป็นลูกคลื่นรอบๆ เส้นประใหญ่ และมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความยาวเส้นรอบวงเพิ่มขึ้น

บทที่ 4
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิเคราะห์

โครงงานนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์สายอากาศบ่วง โดยอาศัยหลักการการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคลอริน ผลการวิเคราะห์จะแสดงในรูปของแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทาง ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง ความต้านทานการแผ่พลังงาน พร้อมทั้งผลจากรัศมีและความยาวเส้นรอบวงของบ่วง

การเปรียบเทียบระหว่างการวิเคราะห์ในการประมาณในย่านสนามไกล กับการวิเคราะห์ในอนุกรมแมคคลอริน พบว่าสายอากาศแบบบ่วงให้แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางเป็นแบบกึ่งทิศทาง (omni-directivity) จากการวิเคราะห์ทั้งสองวิธีนี้ให้แบบรูปที่สอดคล้องกัน สภาพเจาะจงทิศทางมีค่าเป็น 0 ณ ตำแหน่ง $\theta=0^{\circ}$ และ $\theta=180^{\circ}$ และจะให้ค่าที่มากที่สุดที่ $\theta=90^{\circ}$ พบว่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด และค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง สำหรับสองวิธีนี้จะให้ผลที่ ใกล้เคียงกัน

การเพิ่มขนาดของรัศมีและความยาวเส้นรอบวงของสายอากาศบ่วง โดยที่บ่วงขนาดเล็กจะมีความยาวเส้นรอบวงที่ $(0-2\lambda)$ และบ่วงขนาดใหญ่มีความยาวเส้นรอบวง $(0-20\lambda)$ โดยอาศัยจากการอินทิเกรตฟังก์ชันเบสเซล และการประมาณค่าฟังก์ชันเบสเซล จะส่งผลให้ความต้านทานการแผ่พลังงานมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อรัศมีและความยาวเส้นรอบวงของสายอากาศบ่วงเพิ่มขึ้น

4.2 ข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์สายอากาศบ่วงนี้ อาศัยหลักการของการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคคลอริน ซึ่งเป็นเพียงการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์โดยวิธีการทางทฤษฎีเท่านั้น ผลที่ได้ก็จะเป็นไปตามทฤษฎีเท่านั้น แต่เนื่องจากในการใช้งานจริงอาจมีปัจจัยภายนอกเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น ภูมิอากาศ สภาพแวดล้อมและปัจจัยอื่นๆ ที่อาจทำให้ผลการวิเคราะห์นี้มีความคลาดเคลื่อนไปบ้าง หากต้องการที่จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบรูปการแผ่พลังงาน และสภาพเจาะจงทิศทางได้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงความจริงมากที่สุด ก็สามารถทำได้โดยการวัดและทดสอบกับอุปกรณ์จริง

เอกสารอ้างอิง

[1] พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์. (2540). **สมการเชิงอนุพันธ์.** (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ห้างหุ้นส่วนจำกัด นำอักษรการพิมพ์.

[2] พิสิฐ วนิชชานันท์และคณะ. (2551). **MATLAB การประยุกต์ใช้งานทางวิศกรรมไฟฟ้า.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[3] ศิริขวัญ โพธาเจริญ. (2550). **การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม.** ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.

[4] คนึงนิตย์ สุวรรณแสง. (2553). **การวิเคราะห์สายอากาศเส้นลวดเส้นผ่านศูนย์กลางจำกัด.** ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.

[5] Constantine A. Balanis. (2005). **Antenna Theory Analysis and Design.** (Third edition). United States of America : John Wiley & Sons.

[6] Sherman K. Stein and Anthony Barcellos. (1992). **Calculus and Analytic Geometry.** (Fifth edition). United States of America : McGraw-Hill.

[7] Warren L. Stutzman and Gary A. Thiele. (1998). **Antenna Theory Analysis and Design.** (Second edition). United States of America : John Wiley & Sons.

[8] Soyea Corporation. (1996). **Loop Antenna.** ECPlaza Network Inc. Retrieved July 18, 2014, from http://www.ecplaza.net/eparts/product/10000060_ 10000337/%20loop-antenna-loop-antenna.html

ภาคผนวก ก

ศักย์เชิงเวกเตอร์ A จากกระแสไฟฟ้า

การวิเคราะห์หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของสายอากาศบ่วง จะไม่ได้วิเคราะห์หาคำตอบโดยตรงจากแหล่งกำเนิด แต่จะหาจากศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** ซึ่งเมื่อทราบ **A** แล้ว จากนั้นจึงนำมาหาสนามที่แผ่ออกไปของบ่วงเป็นลำดับถัดไป

เมื่อแหล่งกำเนิดเป็นกระแสไฟฟ้าเชิงเส้น ($\mathbf{I}_e$) ศักย์เชิงเวกเตอร์ $\overline{\mathbf{A}}$ สามารถหาได้จาก

$$\mathbf{A}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathrm{C}} \mathbf{I}_e(x',y',z')\frac{e^{-jkR}}{R}dl' \quad (\text{ก.1})$$

จากรูปที่ 2.2 R เป็นระยะจากจุดใด ๆ บนบ่วงถึงจุดที่สังเกต โดยทั่วไปแล้วกระแสไฟฟ้า สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\mathbf{I}_e(x',y',z') = \hat{\mathbf{a}}_x I_x(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_y I_y(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_z I_z(x',y',z') \quad (\text{ก.2})$$

dl' คือ พื้นที่มีขนาดเล็กมากบนสายอากาศบ่วง สามารถเขียนในระบบพิกัดทรงกระบอกได้เป็น

$$dl' = a\,d\phi' \quad (\text{ก.3})$$

แทนสมการ (ก.2) และ (ก.3) ลงใน (ก.1) จะได้

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{C}\left[\hat{\mathbf{a}}_x I_x(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_y I_y(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_z I_z(x',y',z')\right]\frac{e^{-jkR}}{R}a\,d\phi' \quad (\text{ก.4})$$

กระแสที่ปรากฏใน (ก.4) อยู่ในรูปพิกัดฉาก เพื่อให้สอดคล้องกับโครงสร้างสายอากาศบ่วงและเพื่อให้การวิเคราะห์ง่ายขึ้น จะแปลงกระแสจากระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบพิกัดทรงกระบอกโดยอาศัยสมการเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi' & -\sin\phi' & 0 \\ \sin\phi' & \cos\phi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_\rho \\ I_\phi \\ I_z \end{bmatrix} \quad (\text{ก.5})$$

เมื่อทำการกระจายเมทริกซ์ (ก.5) จะได้

$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_\rho \cos\phi' - I_\phi \sin\phi' \\ I_y &= I_\rho \sin\phi' + I_\phi \cos\phi' \\ I_z &= I_z \end{aligned}\right\} \quad (ก.6)$$

แทนสมการ (ก.6) ลงใน (ก.4) จะได้ศักย์เชิงเวกเตอร์ $\overline{\mathbf{A}}$ ที่เขียนในรูปกระแสตามโครงสร้างของสายอากาศบ่วงเป็น

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[\hat{\mathbf{a}}_x\left(I_\rho \cos\phi' - I_\phi \sin\phi'\right) + \hat{\mathbf{a}}_y\left(I_\rho \sin\phi' + I_\phi \cos\phi'\right) + \hat{\mathbf{a}}_z I_z\right] \times \frac{e^{-jkR}}{R}\, d\phi' \quad (ก.7)$$

และได้ศักย์เชิงเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ในแต่ละองค์ประกอบ ดังนี้

$$A_x = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left(I_\rho \cos\phi' - I_\phi \sin\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \quad (ก.8)$$

$$A_y = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left(I_\rho \sin\phi' + I_\phi \cos\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \quad (ก.9)$$

$$A_z = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C I_z \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \quad (ก.10)$$

เนื่องจากการแผ่พลังงานในย่านสนามไกลจะให้หน้าคลื่นที่มีลักษณะเป็นทรงกลม จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนระบบพิกัดสำหรับการวิเคราะห์จากระบบพิกัดฉากแต่เดิมไปเป็นระบบพิกัดทรงกลมโดยอาศัยสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (ก.11)$$

กระจาย สมการ (ก.11) ทำให้ได้

$$A_r = A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z \cos\theta \quad (ก.12)$$

$$A_\theta = A_x \cos\theta\cos\phi + A_y \cos\theta\sin\phi - A_z \sin\theta \quad (ก.13)$$

$$A_\phi = -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \quad (ก.14)$$

แทน (ก.8) - (ก.10) ลงใน (ก.12) - (ก.14) ตามลำดับ ซึ่งจะทำให้ได้ค่าของ A_r , A_θ และ A_ϕ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของกระแสตามโครงสร้างสายอากาศบ่วง ดังนี้

$$\begin{aligned} A_r = & \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left(I_\rho \cos\phi' - I_\phi \sin\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \sin\theta\cos\phi \\ & + \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left(I_\rho \sin\phi' + I_\phi \cos\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \sin\theta\sin\phi \\ & + \frac{a\mu}{4\pi}\int_C I_z \frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \cos\theta \end{aligned} \quad (ก.15)$$

$$\begin{aligned} A_r = & \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[\left(I_\rho \cos\phi' - I_\phi \sin\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \sin\theta\cos\phi \right.\\ & + \left(I_\rho \sin\phi' + I_\phi \cos\phi'\right)\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \sin\theta\sin\phi \\ & \left. + I_z \frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \cos\theta\right]\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \end{aligned} \quad (ก.16)$$

$$\begin{aligned} A_r = & \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[I_\rho\left(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'\right)\right. \\ & \left. + I_\phi\left(-\sin\phi'\cos\phi + \cos\phi'\sin\phi\right) + I_z \cos\theta\right]\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \end{aligned} \quad (ก.17)$$

$$A_r = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[I_\rho \sin\theta\cos(\phi - \phi') + I_\phi \sin\theta\sin(\phi-\phi') + I_z\cos\theta\right] \times \frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \quad (ก.18)$$

$$\begin{aligned} A_\theta = & \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[I_\rho \cos\phi'\cos\theta\cos\phi - I_\phi \sin\phi'\cos\theta\cos\phi \right.\\ & + I_\rho \sin\phi'\cos\theta\sin\phi + I_\phi\cos\phi'\cos\theta\sin\phi \\ & \left. + I_z \sin\theta\right]\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \end{aligned} \quad (ก.19)$$

$$\begin{aligned} A_\theta = & \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[I_\rho \cos\theta\left(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'\right)\right. \\ & \left. + I_\phi\cos\theta\left(-\cos\phi\sin\phi' + \sin\phi\cos\phi'\right) + I_z\sin\theta\right]\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \end{aligned} \quad (ก.20)$$

$$A_\theta = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[I_\rho \cos\theta\cos(\phi-\phi') + I_\phi \cos\theta\sin(\phi-\phi') - I_z \sin\theta\right] \times \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \qquad (ก.20)$$

$$A_\phi = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C -\left[I_\rho \cos\phi'\sin\phi - I_\phi \sin\phi \sin\phi\right.$$
$$\left. + I_\rho \sin\phi'\cos\phi + I_\phi \cos\phi'\cos\right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \qquad (ก.22)$$

$$A_\phi = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[-I_\rho(\cos\phi'\sin\phi - \sin\phi'\cos\phi)\right.$$
$$\left. + (I_\phi \sin\phi'\sin\phi + \cos\phi'\cos\phi)\right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \qquad (ก.23)$$

$$A_\phi = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C \left[-I_\rho \sin(\phi-\phi') + I_\phi \cos(\phi-\phi')\right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \qquad (ก.24)$$

ดังนั้น เมื่อนำสมการของศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** ในสมการที่ (ก.18) , (ก.21) และ (ก.24) มาเปรียบเทียบกับสมการที่ (2.3) จะสามารถนำมาเขียนเป็นสมการกระแสไฟฟ้า ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_e = {} & \hat{\mathbf{a}}_r\left[I_\rho \sin\theta\cos(\phi-\phi') + I_\phi \sin\theta\sin(\phi-\phi') + I_z \cos\theta\right] \\ & + \hat{\mathbf{a}}_\theta\left[I_\rho \cos\theta\cos(\phi-\phi') + I_\phi \cos\theta\sin(\phi-\phi') - I_z \sin\theta\right] \\ & + \hat{\mathbf{a}}_\phi\left[-I_\rho \sin(\phi-\phi') + I_\phi \cos(\phi-\phi')\right]\end{aligned} \qquad (ก.25)$$

สายอากาศบ่วงตามรูปจะมีกระแสเฉพาะในองค์ประกอบ ϕ เท่านั้น สำหรับองค์ประกอบ ρ และ z จะมีค่าเป็นศูนย์ ยังผลให้ได้

$$A_\phi = \frac{a\mu}{4\pi}\int_C I_\phi \cos(\phi-\phi') \times \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \qquad (ก.26)$$

ภาคผนวก ข

ฟังก์ชันเบสเซล

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับ p (Bessel's differential equation of order p) คือ สมการซึ่งอยู่ในรูป

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0 \qquad (ข.1)$$

โดยที่ p เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริงและ $p \geq 0$
โดยวิธีของโฟรเบนิอุสเราจะสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \quad , \quad a_0 \neq 0 \qquad (ข.2)$$

แล้วแทนค่า (ข.2) ลงใน (ข.1) จะได้

$$(r^2 - p^2) a_0 x^r + [(r+1)^2 - p^2] a_1 x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [\{(k+r)^2 - p^2\} a_k + a_{k+2}] x^{k+r} = 0 \qquad (ข.3)$$

ซึ่งจะเป็นจริงเมื่อสัมประสิทธิ์ของ x กำลังต่างๆเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้สมการดัชนี

$$r^2 - p^2 = 0 \qquad (ข.4)$$

และ

$$[(r+1)^2 - p^2] a_1 = 0 \qquad (ข.5)$$

และเมื่อ $k \geq 2$ จะได้

$$[(k+r)^2 - p^2] a_k = -a_{k-2} \qquad (ข.6)$$

หรือ

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+r)^2 - p^2} = -\frac{a_{k-2}}{[k+r-p][k+r+p]} \qquad (ข.7)$$

จาก (ข.4) จะได้รากของสมการคือ $r_1 = p$ และ $r_2 = -p$
แทนค่า $r = r_1 = p$ ใน (ข.5) จะได้ว่า $a_1 = 0$ และจาก (ข.7) จะได้

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2p)} \quad , \quad k \geq 2 \qquad \text{(ข.8)}$$

เนื่องจาก $a_1 = 0$ ดังนั้นจาก (ค.5ข) จะได้ว่า $a_3 = a_5 = ... = 0$ และสำหรับ k ที่เป็นเลขคู่ ให้ $k = 2m$ จะได้

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+p)} \quad , \quad m = 1,2,3,... \qquad \text{(ข.9)}$$

เนื่องจาก a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ในที่นี้เราจะใช้ $a_0 = \dfrac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ ดังนั้น

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(p+1)} = -\frac{1}{2^{2+p}1!(p+1)\Gamma(p+1)} = -\frac{1}{2^{2+p}1!\Gamma(p+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(p+2)} = \frac{1}{2^{4+p} \cdot 2 \cdot 1!(p+2)\Gamma(p+2)} = \frac{1}{2^{4+p}2!\Gamma(p+3)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(p+3)} = -\frac{1}{2^{6+p} \cdot 3 \cdot 2!(p+3)\Gamma(p+3)} = -\frac{1}{2^{6+p}3!\Gamma(p+4)} \quad , ...$$

โดยทั่วไปจะได้

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+p} m!\Gamma(p+m+1)} \quad , \quad m = 0,1,2,3,... \qquad \text{(ข.10)}$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ลงในผลเฉลยที่สมมติไว้จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการเบสเซล ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $J_p(x)$ นั่นคือ

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+r} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \qquad \text{(ข.11)}$$

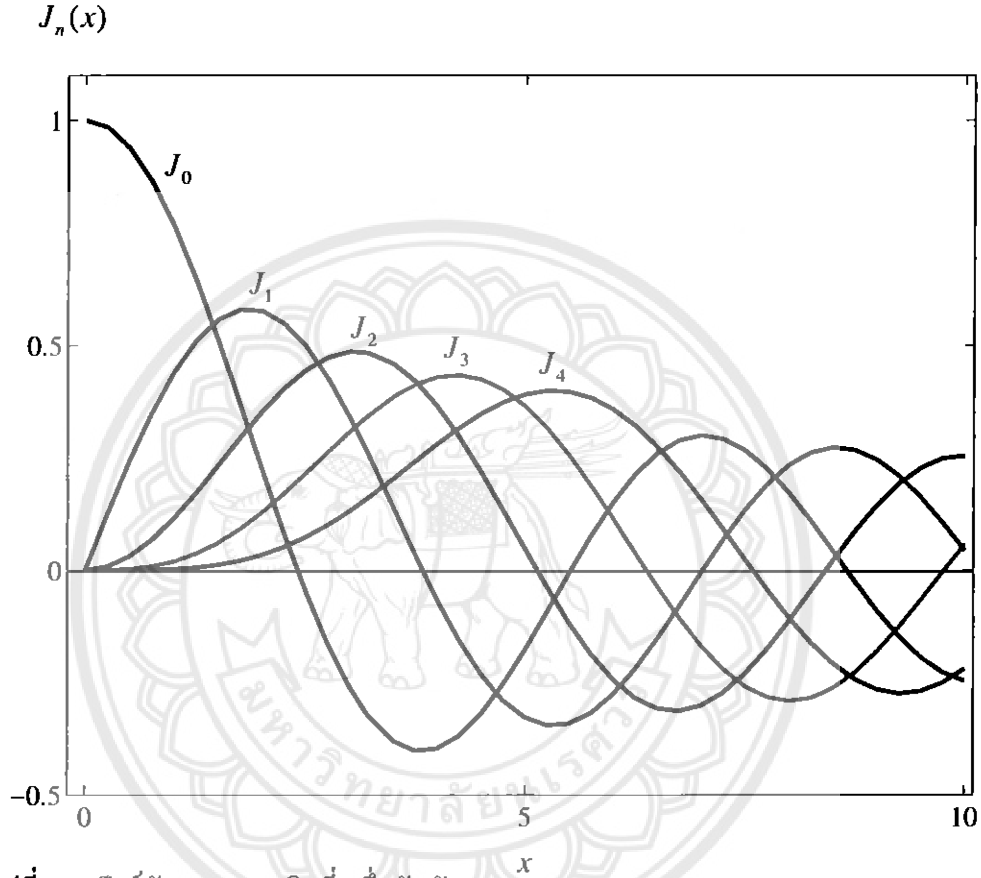
และเรียก $J_p(x)$ ว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ** p (Bessel's differential equation of order *p*) สังเกตว่า $J_0(0) = 1$ และ $J_p(0) = 0$ สำหรับ $p > 0$

ฟังก์ชันเบสเซลที่พบมากในทางประยุกต์ คือ $J_0(x)$ และ $J_1(x)$ ซึ่งเขียนออกมาอย่างชัดเจนได้เป็น

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + ... \qquad \text{(ข.12)}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + \ldots \qquad (ข.13)$$

และแสดงได้ดังรูปที่ ข.1



รูปที่ ข.1 ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ p (Bessel function of the first kind of order p)

ต่อไปพิจารณาหาผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซล

เนื่องจาก $r_1 - r_2 = p - (-p) = 2p$

กรณีที่ 1 ถ้า $2p$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า p ไม่เป็นจำนวนเต็มด้วย

ใช้ $r_2 = -p$ หาผลเฉลยในทำนองเดียวกับการใช้ $r_1 = p$ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการเป็น

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \qquad (ข.14)$$

เนื่องจาก $J_{-p}(x)$ มีพจน์ x^{-p} ในขณะที่ $J_p(x)$ ไม่มี เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $J_p(x)$ และ $J_{-p}(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน แต่เพื่อจุดประสงค์หลายๆอย่าง จะสะดวกกว่าที่จะใช้

$$Y_p(x) = \frac{(\cos p\pi)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \tag{ข.15}$$

แทน $J_{-p}(x)$ เป็นผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซลและเรียก $Y_p(x)$ ว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ** p (Bessel's differential equation of order p)

กรณีที่ 2 ถ้า $2p$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า p ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ $2p = N$

แทนค่า $r_2 = -p$ ลงในสมการ (ค.5b) จะได้

$$k(k-N)a_k = -a_{k-2} \quad , \quad k \geq 2 \tag{ข.16}$$

เมื่อแทนค่า $k = 2,3,4,...$ ลงในสมการ (ค.13) เป็นลำดับไปจนกระทั่งถึง $k = N$ **จะได้**

$$a_3 = a_5 = ... = a_{N-2} = 0 \text{ และ } 0 \cdot a_N = a_{N-2} = 0 \tag{ข.17}$$

เนื่องจาก a_N เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ดังนั้นเลือก $a_N = 0$ ผลที่ตามมาคือ **เหลือสัมประสิทธิ์** a_k **เมื่อ** $k = 2,4,6,...$ และเราจะได้ผลเฉลยที่สองจากค่า $r_2 = -p$ เช่นเดียวกับ**กรณีที่ 1**

กรณีที่ 3 ถ้า $2p$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า p เป็นจำนวนเต็ม ให้ $p = n$ จะได้

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \tag{ข.18}$$

แต่ $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = 0$ ทุกค่า $x = 0,-1,-2,...$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\Gamma(-n+m+1)} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad m = 0,1,2,3,...,(n-1) \tag{ข.19}$$

ผลที่ได้คือ

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \tag{ข.20}$$

ให้ $k = m - n$ จะได้

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned} \qquad (ข.21)$$

ซึ่งแสดงว่า $J_n(x)$ และ $J_{-n}(x)$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ดังนั้นเมื่อ $p = n = 0,1,2,\ldots$ เราจะได้ผลเฉลยของสมการเบสเซลเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นคือ $J_n(x)$ แต่เราสามารถหาผลเฉลยที่สองได้ในรูป $J_n(x)\int \frac{1}{xJ_n^2(x)}dx$ หรืออาจจะหาได้อีกอย่างในรูปของลิมิตของ $Y_p(x)$ เมื่อ $p \to n$ ซึ่งสามารถแสดงได้ว่าลิมิตนี้มีค่าและจะเขียนแทนด้วย $Y_n(x)$ นั่นคือ

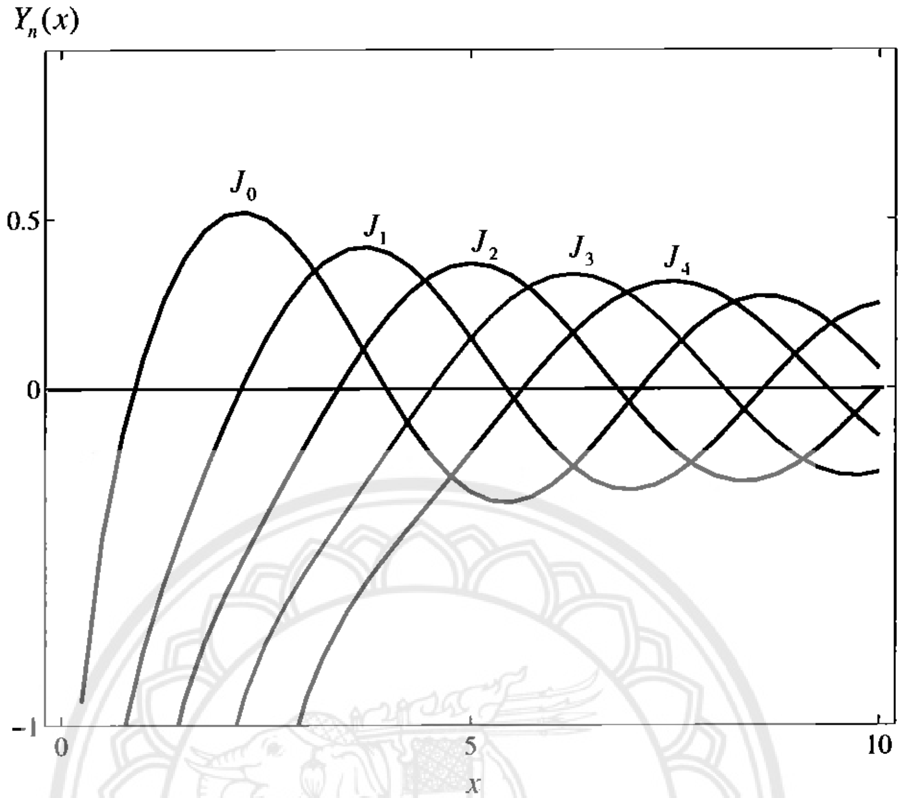
$$Y_n(x) = \lim_{p\to n} Y_p(x) = \lim_{p\to n} \frac{(\cos p\pi)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \qquad (ข.22)$$

ดังนั้นผลเฉลยสุดท้ายของสมการเบสเซลอันดับ p จะอยู่ในรูป

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x) \qquad (ข.23)$$

และถ้า p ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะเขียนผลเฉลยสุดท้ายของสมการเบสเซลอันดับ p ได้อีกอย่าง คือ

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \qquad (ข.24)$$



รูปที่ ข.2 ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ p (Bessel's differential equation of order p)

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function identities)

จะพิจารณาคุณสมบัติที่สำคัญ ดังนี้

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \tag{ข.25}$$

ถ้า p เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p}}{2^{2m+p} \cdot m!(p+m)!}$$

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1} m!(p+m-1)!}$$

$$= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p-1}}{2^{2m+p-1} m!(p+m-1)!}$$

$$= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x) \tag{ข.26}$$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{ข.27}$$

จาก (ข.26) จะได้

$$px^{p-1} J_p(x) + x^p J'_p(x) = x^p J_{p-1}(x)$$

$$J'_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \tag{ข.28}$$

จาก (ข.27) จะได้

$$J'_p(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x) \tag{ข.29}$$

นำ (ข.28) - (ข.29) จะได้

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) \tag{ข.30}$$

นำ (ข.28) + (ข.29) จะได้

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x) \tag{ข.31}$$

สมการ (ข.30) มีประโยชน์ในการหาฟังก์ชันเบสเซลที่มีอันดับสูงขึ้น โดยเขียนในพจน์ของฟังก์ชันเบสเซลที่มีอันดับน้อยกว่า

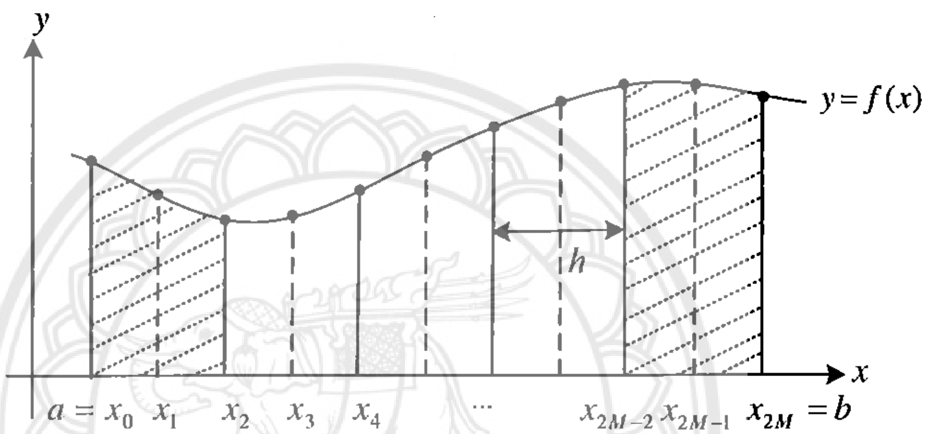
ภาคผนวก ค

การอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สัน

พิจารณาการอินทิเกรตฟังก์ชัน $f(x)$ ช่วง $[a,b]$ ตามสมการข้างล่างนี้

$$\int_a^b f(x)dx \approx s(f,h) \tag{ค.1}$$

เพื่อที่หาค่าของการอินทิเกรตสมมติให้ $[a,b]$ แบ่งย่อยออกเป็น $2M$ ในส่วนย่อย $[x_k , x_{k+1}]$ ด้วยความกว้างเท่ากันที่ $h=(b-a)/2M$ โดยใช้ $x_k = a+kh$ สำหรับ $k=0, 1, \ldots, 2M$ แสดงได้ดังรูป



รูปที่ ค.1 การแบ่งช่วงของการอินทริเกรทแบบซิมป์สัน

ค่าของการอินทิเกรตตั้งแต่ช่วง a ถึง b สามารถประมาณได้จากหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน (Simpson's rule) ซึ่งประมาณได้จากองค์ประกอบ ตั้งแต่ช่วง a ถึง b ดังนี้

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{M}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) \tag{ค.2}$$

หรือ

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{2M-2} + 4f_{2M-1} + f_{2M}\right) \tag{ค.3}$$

หรือ

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b)\right) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1}) \tag{ค.4}$$

ภาคผนวก ง

โปรแกรมวิเคราะห์สายอากาศบ่วง

โปรแกรมแสดงสภาพเจาะจงทิศทาง (directivity) ของสายอากาศบ่วงภาคสนามไฟฟ้า โดยอาศัยการวิเคราะห์ในย่านสนามไกล (far-field region)

ค่าสภาพเจาะจงทิศทางจะพิจารณาในย่านสนามไกล ตามสมการ (2.70) และ (2.75) โดยจะมีการกำหนดค่า a ให้แตกต่างกัน โดยให้ a มีค่า $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$ โปรแกรม MATLAB สำหรับการหาค่าสภาพเจาะจงทิศทางและแบบรูป สามารถแสดงได้ดังนี้ได้ดังนี้

```
clc
clear all
close all

%********
%constant
%********
k=2*pi;
c=3*10^8;
w=2*pi*c;
I0=1;
u=4*pi*10^-7; % permeability
n=120*pi;     % intrinsic impedance
E1=1;
r=1;
max1=2*0.999*pi;
max=200;
step=max1/(max-1);


ak=0.1*2*pi;      %a= 0.1
%************************************
%              E_plane
%************************************
for ii=1:max
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*n);
  temp2=ak*n*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
  UMAX=temp1*abs(temp2*temp3)^2;

%f1 = besselj(1,ak*sin(x));
%f2 = char(f1);
%f3 = [f2,'.*',f2,'.*sin(x)'];
%f3=besselj(1,ak*sin(x))*besselj(1,ak*sin(x))*sin(x);

Total_integral_value=quadl('besselj(1,0.1*2*pi*sin(x)).*besselj(1,0.1
*2*pi*sin(x)).*si n(x)',0,pi);

  Constant_value = (pi*((ak*w*u)^2)*((I0)^2))/(4*n);
  PRAD=Constant_value*Total_integral_value;
  D(ii)=4*pi*UMAX/PRAD;
  DDB(ii)=5.35*log10(D(ii));
  Xaxis(ii)=theta;
end
  DDB_off=DDB-min(DDB(2:end));
polar(Xaxis,DDB_off,'-k')
```

```
ak=0.2*2*pi;       %a= 0.2
%************************************
%              E_plane
%************************************
for ii=1:max
   theta=(ii-1)*step;
   temp1=r^2/(2*n);
   temp2=ak*n*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
   temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
   UMAX=temp1*abs(temp2*temp3)^2;

%f1 = besselj(1,ak*sin(x));
%f2 = char(f1);
%f3 = [f2,'.*',f2,'.*sin(x)'];
%f3=besselj(1,ak*sin(x))*besselj(1,ak*sin(x))*sin(x);

Total_integral_value=quadl('besselj(1,0.2*2*pi*sin(x)).*besselj(1,0.2
*2*pi*sin(x)).*sin(x)',0,pi);

   Constant_value = (pi*((ak*w*u)^2)*((I0)^2))/(4*n);
   PRAD=Constant_value*Total_integral_value;
   D(ii)=4*pi*UMAX/PRAD;
   DDB(ii)=5.35*log10(D(ii));
   Xaxis(ii)=theta;
end
   DDB_off=DDB-min(DDB(2:end));
hold on
grid on
polar(Xaxis,DDB_off,'--k')


ak=0.5*2*pi;       %a= 0.5
%************************************
%              E_plane
%************************************
for ii=1:max
   theta=(ii-1)*step;
   temp1=r^2/(2*n);
   temp2=ak*n*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
   temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
   UMAX=temp1*abs(temp2*temp3)^2;

%f1 = besselj(1,ak*sin(x));
%f2 = char(f1);
%f3 = [f2,'.*',f2,'.*sin(x)'];
%f3=besselj(1,ak*sin(x))*besselj(1,ak*sin(x))*sin(x);

Total_integral_value=quadl('besselj(1,0.5*2*pi*sin(x)).*besselj(1,0.5
*2*pi*sin(x)).*sin(x)',0,pi);

   Constant_value = (pi*((ak*w*u)^2)*((I0)^2))/(4*n);
   PRAD=Constant_value*Total_integral_value;
   D(ii)=4*pi*UMAX/PRAD;
   DDB(ii)=6.3*log10(D(ii));
      Xaxis(ii)=theta;
end
   DDB_off=DDB-min(DDB(2:end));
polar(Xaxis,DDB_off,'-.k')
legend('\alpha = 0.1','\alpha = 0.2','\alpha = 0.5')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

โปรแกรมแสดงสภาพเจาะจงทิศทาง (directivity) ของสายอากาศบ่วงภาคสนามไฟฟ้า โดยอาศัยการวิเคราะห์ของอนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)

ค่าสภาพเจาะจงทิศทางพิจารณาโดยใช้อนุกรมแมคลอริน ตามสมการ (2.45) - (2.46) และ (2.75) โดยจะมีการกำหนดค่า a ให้แตกต่างกัน โดยให้ a มีค่า $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$ โปรแกรม MATLAB สำหรับการหาค่าสภาพเจาะจงทิศทางและแบบรูป สามารถแสดงได้ดังนี้

```
clc
clear all
close all

%********
%constant
%********
k=2*pi;
int=120*pi;
E1=1;
I0=1;
r=1;
max_1=2*0.999*pi;
n=200;
step=max_1/(n-1);


ak=0.1*2*pi;       %a =0.1
%************************************
%              E_plane
%************************************
for ii=1:n
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*int);
  temp2=(ak)^2*int*I0*sin(theta)*(1+1/j*k*r)*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=temp1*abs(temp2)^2;
  y_db(ii,1)=5.35*log10(temp3);
  x(ii,1)=theta;
end
 y_db_off1=y_db-min(y_db(2:end));
polar(x,y_db_off1,'-k')


ak=0.2*2*pi;       %a =0.2
%************************************
%              E_plane
%************************************
for ii=1:n
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*int);
  temp2=ak^2*int*I0*sin(theta)*(1+1/j*k*r)*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=temp1*abs(temp2)^2;
  y_db(ii,1)=5*log10(temp3);
  x(ii,1)=theta;
end
  y_db_off2=y_db-min(y_db(2:end));
hold on
grid on
polar(x,y_db_off2,'--k')
```

```
ak=0.5*2*pi;        %a =0.5
%***********************************
%               E_plane
%***********************************
for ii=1:n
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*int);
  temp2=ak^2*int*I0*sin(theta)*(1+1/j*k*r)*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=temp1*abs(temp2)^2;
  y_db(ii,1)=4.5*log10(temp3);
  x(ii,1)=theta;
end
  y_db_off3=y_db-min(y_db(2:end));
polar(x,y_db_off3,'-.k')

legend('\alpha = 0.1','\alpha = 0.2','\alpha = 0.5')
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

โปรแกรมแสดงการเปรียบเทียบสภาพเจาะจงทิศทาง (directivity) ของสายอากาศจากการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคลอริน

สภาพเจาะจงทิศทางจะได้รับการวิเคราะห์จากการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคลอริน โดยจะมีการกำหนดค่า a ให้แตกต่างกัน โดยให้ a มีค่า $a = 0.1\lambda$, $a = 0.2\lambda$ และ $a = 0.5\lambda$ ผลลัพธ์ที่ได้จะมีลักษณะของการแผ่พลังงานที่มีค่าใกล้เคียงกัน ผลลัพธ์นำมาวาดกราฟโดยใช้โปรแกรม MATLAB ดังนี้

กำหนดค่า a โดยให้ a มีค่า $a = 0.1\lambda$

```
clc
clear all
close all

%********
%constant
%********
k=2*pi;
c=3*10^8;
w=2*pi*c;
I0=1;
u=4*pi*10^-7; % permeability
n=120*pi;     % intrinsic impedance
E1=1;
r=1;
max1=2*0.999*pi;
max=200;
step=max1/(max-1);

ak=0.1*2*pi;        %a= 0.1
%***********************************
%               E_plane
%***********************************
for ii=1:max
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*n);
```

```
    temp2=ak*n*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
    temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
    UMAX=temp1*abs(temp2*temp3)^2;

%f1 = besselj(1,ak*sin(x));
%f2 = char(f1);
%f3 = [f2,'.*',f2,'.*sin(x)'];
%f3=besselj(1,ak*sin(x))*besselj(1,ak*sin(x))*sin(x);

Total_integral_value=quadl('besselj(1,0.1*2*pi*sin(x)).*besselj(1,0.1
*2*pi*sin(x)).*sin(x)',0,pi);
    Constant_value = (pi*((ak*w*u)^2)*((I0)^2))/(4*n);
    PRAD=Constant_value*Total_integral_value;
    D(ii)=4*pi*UMAX/PRAD;
    DDB(ii)=5.35*log10(D(ii));
    Xaxis(ii)=theta;
end
    DDB_off=DDB-min(DDB(2:end));
polar(Xaxis,DDB_off,'-k')


ak=0.1*2*pi;        %a =0.1
%***********************************
%             E_plane
%***********************************
for ii=1:max
    theta=(ii-1)*step;
    temp1=r^2/(2*n);
    temp2=(ak)^2*n*I0*sin(theta)*(1+1/j*k*r)*exp(-j*k*r)/(2*r);
    temp3=temp1*abs(temp2)^2;
    y_db(ii,1)=5.35*log10(temp3);
    x(ii,1)=theta;
end
    y_db_off1=y_db-min(y_db(2:end));
hold on
grid on
polar(x,y_db_off1,'-.k')
legend('\alpha = 0.1','\alpha = 0.1')
```

และค่า a ที่ค่า $a = 0.2\lambda$

```
clc
clear all
close all

%********
%constant
%********
k=2*pi;
c=3*10^8;
w=2*pi*c;
I0=1;
u=4*pi*10^-7; % permeability
n=120*pi;     % intrinsic impedance
E1=1;
r=1;
max1=2*0.999*pi;
max=200;
step=max1/(max-1);
```

```
ak=0.2*2*pi;        %a= 0.1
%***********************************
%              E_plane
%***********************************
for ii=1:max
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*n);
  temp2=ak*n*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
  UMAX=temp1*abs(temp2*temp3)^2;

%f1 = besselj(1,ak*sin(x));
%f2 = char(f1);
%f3 = [f2,'.*',f2,'.*sin(x)'];
%f3=besselj(1,ak*sin(x))*besselj(1,ak*sin(x))*sin(x);

Total_integral_value=quadl('besselj(1,0.1*2*pi*sin(x)).*besselj(1,0.1
*2*pi*sin(x)).*sin(x)',0,pi);
  Constant_value = (pi*((ak*w*u)^2)*((I0)^2))/(4*n);
  PRAD=Constant_value*Total_integral_value;
  D(ii)=4*pi*UMAX/PRAD;
  DDB(ii)=5.35*log10(D(ii));
  Xaxis(ii)=theta;
end
DDB_off=DDB-min(DDB(2:end));
polar(Xaxis,DDB_off,'-k')


ak=0.2*2*pi;        %a =0.1
%***********************************
%              E_plane
%***********************************
for ii=1:max
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*n);
  temp2=(ak)^2*n*I0*sin(theta)*(1+1/j*k*r)*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=temp1*abs(temp2)^2;
  y_db(ii,1)=5*log10(temp3);
  x(ii,1)=theta;
end
  y_db_off1=y_db-min(y_db(2:end));
hold on
grid on
polar(x,y_db_off1,'-.k')
legend('\alpha = 0.2','\alpha = 0.2')
```

และค่า a ที่ค่า $a = 0.5\lambda$

```
clc
clear all
close all

%********
%constant
%********
k=2*pi;
c=3*10^8;
w=2*pi*c;
I0=1;
u=4*pi*10^-7; % permeability
n=120*pi;     % intrinsic impedance
```

```
E1=1;
r=1;
max1=2*0.999*pi;
max=200;
step=max1/(max-1);


ak=0.5*2*pi;      %a= 0.1
%*************************************
%             E_plane
%*************************************
for ii=1:max
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*n);
  temp2=ak*n*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
  UMAX=temp1*abs(temp2*temp3)^2;
%f1 = besselj(1,ak*sin(x));
%f2 = char(f1);
%f3 = [f2,'.*',f2,'.*sin(x)'];
%f3=besselj(1,ak*sin(x))*besselj(1,ak*sin(x))*sin(x);

Total_integral_value=quadl('besselj(1,0.1*2*pi*sin(x)).*besselj(1,0.1
*2*pi*sin(x)).*sin(x)',0,pi);
  Constant_value = (pi*((ak*w*u)^2)*((I0)^2))/(4*n);
  PRAD=Constant_value*Total_integral_value;
  D(ii)=4*pi*UMAX/PRAD;
  DDB(ii)=6.3*log10(D(ii));
  Xaxis(ii)=theta;
end
DDB_off=DDB-min(DDB(2:end));
polar(Xaxis,DDB_off,'-k')


ak=0.5*2*pi;      %a =0.1
%*************************************
%             E_plane
%*************************************
for ii=1:max
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*n);
  temp2=(ak)^2*n*I0*sin(theta)*(1+1/j*k*r)*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=temp1*abs(temp2)^2;
  y_db(ii,1)=4.5*log10(temp3);
  x(ii,1)=theta;
end
  y_db_off1=y_db-min(y_db(2:end));
hold on
grid on
  polar(x,y_db_off1,'-.k')
legend('\alpha = 0.5','\alpha = 0.5')
```

%%

โปรแกรมแสดงความต้านทานการแผ่พลังงาน (radiation resistance) ของสายอากาศบ่วง เทียบกับรัศมี (a) ของสายอากาศบ่วง

ความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานและรัศมี (a) ของสายอากาศบ่วงขนาดเล็ก มีค่าตามสมการ (2-126) และ (2-131) ขนาดของบ่วงได้รับการกำหนดให้มีรัศมีตั้งแต่ $\lambda/100$ ถึง $\lambda/30$ โดยที่ให้ λ เท่ากับค่าคงที่ โปรแกรม MATLAB สำหรับการหาค่าแสดงกราฟดังกล่าว ได้ดังนี้

```
clear all
close all

%*****************
%    constant
%*****************
num=181;
step=pi/(num-1);
ii=1;
lamda=1;
N=100;
n=30;

for a=lamda/N:0.001:lamda/n
  temp3=2*pi/lamda;
  temp4=(temp3*a)^4;
  temp5=(120*pi);
  temp6=pi/8;
  temp7=temp4*temp5*temp6;
  temp8=0;

  for jj=1:num
    theta=(jj-1)*step;
    temp9=(sin(theta))^3;
    temp1=mod(jj,2);
     if jj==1
      temp2=step/3;
    elseif jj==(num+1)
      temp2=step/3;
    elseif temp1==0
      temp2=4*step/3;
    else
       temp2=2*step/3;
    end

  temp10=temp2*temp9;
  temp8=temp8+temp10;
  end
  temp11(ii)=temp7*temp8;
  temp12(ii)=a;
  ii=ii+1;
end

semilogy(temp12,temp11,'-k','linewidth',2)
```

%%%

โปรแกรมแสดงสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดของสายอากาศบ่วงเทียบกับความยาวเส้นรอบวง

สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดของสายอากาศบ่วงเทียบกับความยาวเส้นรอบวง โดยค่าสภาพเจาะจงทิศทางจะคำนวณจากการวิเคราะห์ในกรณีบ่วงใหญ่ ร่วมกับการประมาณฟังก์ชันเบสเซล ความยาวเส้นรอบวงจะได้รับการเปลี่ยนแปลงตั้งแต่ 0λ ถึง 20λ ตามสมการที่ (2-118), (2-122) และ (2-124) โปรแกรม MATLAB แสดงได้ดังนี้

```
clear all;
clc;
j=1;
N=20;
for ka=0.01:0.04:N
  temp0(j)=10*log10(0.677*ka);
  temp99(j)=ka;
  j=j+1;
end
hold on;
Integrate3_9b(0,pi);
axis([0  20  0  12])
plot(temp99,temp0,'--b','linewidth',2)
```

%%

โปรแกรมแสดงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานเทียบกับความยาวเส้นรอบวง

ความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานเทียบกับความยาวเส้นรอบวง จะได้รับการวิเคราะห์ในสองกรณี คือ บ่วงเล็กและบ่วงใหญ่ ในสายอากาศบ่วงขนาดเล็ก ความยาวเส้นรอบวงจะได้รับการกำหนดให้แปรเปลี่ยน ตั้งแต่ 0λ ถึง 2λ ความต้านทานการแผ่พลังงานจะคำนวณโดยอาศัยการประมาณของฟังก์ชันเบสเซล ตามสมการ (2-126) และ (2-131) ในสายอากาศบ่วงขนาดใหญ่ ความยาวเส้นรอบวงจะได้รับการกำหนดให้แปรเปลี่ยน ตั้งแต่ 0λ ถึง 20λ ความต้านทานการแผ่พลังงานจะคำนวณ โดยอาศัยจากการประมาณค่า และการอินทิเกรตของฟังก์ชันเบสเซล ตามสมการ (2-120) และ (2-123) โปรแกรม MATLAB สำหรับการหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานการแผ่พลังงานเทียบกับความยาวเส้นรอบวง สามารถแสดงได้ดังนี้

```
clear all
clc
ii=1;
N=20;
for ka=0.01:0.04:N
  temp1=pi^2;
  temp2(ii)=60*temp1*ka;
  temp3(ii)=ka;
  ii=ii+1;
end
  plot(temp3,temp2*1e-3,'--b','linewidth',2)
hold on
```

```
ii=1;
n=2.15;
for ka=0.01:0.04:n
  temp4=pi^2;
  temp5=ka^4;
  temp6(ii)=20*temp4*temp5;
  temp7(ii)=ka;
  ii=ii+1;
end

Integrate3_9a(0,pi);
plot(temp7,temp6*1e-3,':black','linewidth',2)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

โปรแกรมแสดงวิธีการอินทิเกรตสมการโดยใช้หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

การอินทิเกรต J_2 เพื่อค่าในสมการ (2.120) จะใช้วิธีการทำการอินทิเกรตเชิง**ตัวเลขตามหลักเกณฑ์ของ**ซิมป์สัน ดังแสดงในภาคผนวก ค ซึ่งสามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
function Output =Integrate(a,b)
j=1;
N=20;
for ka=0.01:0.04:N
  temp3=0;
  n=200;
  h=(b-a)/(n-1);
   for i=1:n
    theta(i)=(i-1)*h;
    temp10=sin(theta(i));
    temp4(i)=((besselj(1,ka*temp10))^2).*temp10;
    temp1=mod(i,2);
      if i==1
    temp2=h/3;
       elseif i==(n+1)
     temp2=h/3;
       elseif temp1==0
     temp2=4*h/3;
       else
     temp2=2*h/3;
    end
    temp5=temp2*temp4(i);
    temp3=temp3+temp5;
  end
  temp6=(pi/2);
  temp7=ka^2;
  temp8=(120*pi);
  temp9=temp6*temp7*temp8;
  Output(j)=temp9*temp3;
  value(j)=ka;
  j=j+1;
end
plot(value,Output*1e-3,'r','linewidth',2)

function temp0=Integrate3_9b(a,b)
```

```
%****************
%   constant
%****************
k=2*pi;
c=3*10^8;
w=2*pi*c;
I0=1;
u=4*pi*10^-7; %permeability
n=120*pi; %intrinsic impedance
a1=0.1;
j=1;
N=20; %number of point
for ka=0.01:0.04:N
  temp3=0;
  n=181;
  h=(b-a)/(n-1);
  for i=1:n
    theta(i) =(i-1)*h;
    temp18=sin(theta(i));
    temp4(i)=((besselj(1,ka*temp18))^2).*temp18;
    temp1=mod(i,2);
    if i==1
       temp2=h/3;
    elseif i==(n+1)
       temp2=h/3;
    elseif temp1==0
       temp2=4*h/3;
    else
       temp2=2*h/3;
    end
    temp5=temp2*temp4(i);
    temp3=temp3+temp5;
    end
  temp6=(ka*w*u)^2;
  temp7=pi;
  temp8=(I0)^2;
  temp9=4*n;
  temp10=((temp7*temp6)*temp8)/temp9;
  temp11=temp10*temp3;
U=0;
UMAX=0;
n=181;
h=(b-a)/(n-1);
for i=1:n
  theta=(i-1)*h;
  temp12=8*n;
  temp13=(temp6*temp8)/temp12;
  U=temp13*((besselj(1,ka*sin(theta)))^2);
     if(U>UMAX)
     UMAX=U;
   end
  end
  temp14(j)=UMAX;
  temp15(j)=4*pi*UMAX/temp11;
  temp0(j)=10*log10(temp15(j));
  temp17(j)=ka;
  j=j+1;
end
plot(temp17,temp0,'r','linewidth',2)
```

%%

โปรแกรมแสดงการหาค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW)

ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังจะพิจารณาจากสภาพเจาะจงทิศทางในระนาบอิลิเวชัน ที่ซึ่ง ϕ เท่ากับค่าคงที่ สภาพเจาะจงทิศทางจะได้รับการวิเคราะห์จากการประมาณในย่านสนามไกลและอนุกรมแมคลอริน ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง จะคำนวณจากการประมาณเชิงเส้นกับจุดสองจุดของสภาพเจาะจงทิศทางบนระนาบที่ตั้งฉากกับบ่วง โปรแกรม MATLAB สำหรับการหาค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง แสดงได้ดังนี้

```
clc
clear all
close all

%*********
%constant
%*********
k=2*pi;
int=120*pi;
E1=1;
I0=1;
r=1;
max_1=2*0.999*pi;
n=2000;
step=max_1/(n-1);

ak=0.1*2*pi;     %a= 0.1
%************************************
%            E_plane_1
%************************************
for ii=1:n
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*int);
  temp2=ak*int*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
  temp4=temp1*abs(temp2*temp3)^2;
  y_db(ii,1)=5.35*log10(temp4);
  x(ii,1)=theta;
end

y_db_off=y_db-min(y_db(2:end));
polar(x,y_db_off,'-k')
title('\alpha = 0.1')

%***************************************************
% Half Power Beamwidth
%***************************************************
temp68 =max(y_db_off)/2;
for ii=2:(n)
  theta=(ii-1)*step;
  theta_now(ii,1)=theta;
  temp69=y_db_off(ii-1,1)<temp68;
  temp70=y_db_off(ii,1)>temp68;
    if temp69&temp70
      break
    end
end
```

```
del_theta=theta_now(ii,1)-theta_now(ii-1,1);
del_dir=y_db_off(ii,1)-y_db_off(ii-1,1);
temp71=temp68-y_db_off(ii-1,1);
temp72=theta_now(ii-1,1)+del_theta*temp71/del_dir;
hpbw_degree1=temp72*180/pi;
hold on
ylin=0:max(y_db_off);
xlin=temp72*ones(1,length(ylin));
polar(xlin,ylin,'k')

for ii=2:(n)
  theta=(ii-1)*step;
  theta_now(ii,1)=theta;
  temp69=y_db_off(ii-1,1)>temp68;
  temp70=y_db_off(ii,1)<temp68;
    if temp69&temp70
      break
    end
end

del_theta=theta_now(ii,1)-theta_now(ii-1,1);
del_dir=y_db_off(ii,1)-y_db_off(ii-1,1);
temp71=temp68-y_db_off(ii-1,1);
temp72=theta_now(ii-1,1)+del_theta*temp71/del_dir;
hpbw_degree2=temp72*180/pi;
hold on
ylin=0:max(y_db_off);
xlin=temp72*ones(1,length(ylin));
polar(xlin,ylin,'k')
hpbw_degreea01=hpbw_degree2-hpbw_degree1
hpbw_db01=temp68

figure()
ak=0.2*2*pi;     %a =0.2
%************************************
%            E_plane_1
%************************************
for ii=1:n
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*int);
  temp2=ak*int*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
  temp4=temp1*abs(temp2*temp3)^2;
  y_db(ii,1)=5.35*log10(temp4);
  x(ii,1)=theta;
end
y_db_off=y_db-min(y_db(2:end));
polar(x,y_db_off,'--k')
title('\alpha = 0.2')

%****************************************************
% Half Power Beamwidth
%****************************************************
temp68 =max(y_db_off)/2;
for ii=2:(n)
  theta=(ii-1)*step;
  theta_now(ii,1)=theta;
  temp69=y_db_off(ii-1,1)<temp68;
  temp70=y_db_off(ii,1)>temp68;
    if temp69&temp70
      break
```

```
    end
end

del_theta=theta_now(ii,1)-theta_now(ii-1,1);
del_dir=y_db_off(ii,1)-y_db_off(ii-1,1);
temp71=temp68-y_db_off(ii-1,1);
temp72=theta_now(ii-1,1)+del_theta*temp71/del_dir;
hpbw_degree1=temp72*180/pi;
hold on

ylin=0:max(y_db_off);
xlin=temp72*ones(1,length(ylin));
polar(xlin,ylin,'k')

for ii=2:(n)
  theta=(ii-1)*step;
  theta_now(ii,1)=theta;
  temp69=y_db_off(ii-1,1)>temp68;
  temp70=y_db_off(ii,1)<temp68;
    if temp69&temp70
      break
    end
end
del_theta=theta_now(ii,1)-theta_now(ii-1,1);
del_dir=y_db_off(ii,1)-y_db_off(ii-1,1);
temp71=temp68-y_db_off(ii-1,1);
temp72=theta_now(ii-1,1)+del_theta*temp71/del_dir;
hpbw_degree2=temp72*180/pi;
hold on

ylin=0:max(y_db_off);
xlin=temp72*ones(1,length(ylin));
polar(xlin,ylin,'k')
hpbw_degree02=hpbw_degree2-hpbw_degree1
hpbw_db02=temp68

figure()
ak=0.5*2*pi;     %a =0.5
%************************************
%            E_plane_1
%************************************
for ii=1:n
  theta=(ii-1)*step;
  temp1=r^2/(2*int);
  temp2=ak*int*I0*exp(-j*k*r)/(2*r);
  temp3=besselj(1,ak*sin(theta));
  temp4=temp1*abs(temp2*temp3)^2;
  y_db(ii,1)=6.3*log10(temp4);
  x(ii,1)=theta;
end
y_db_off=y_db-min(y_db(2:end));
polar(x,y_db_off,'-b')

%**************************************************
% Half Power Beamwidth
%**************************************************
temp68 =max(y_db_off)/2;
for ii=2:(n)
  theta=(ii-1)*step;
  theta_now(ii,1)=theta;
  temp69=y_db_off(ii-1,1)<temp68;
```

```
  temp70=y_db_off(ii,1)>temp68;
    if temp69&temp70
      break
    end
end

del_theta=theta_now(ii,1)-theta_now(ii-1,1);
del_dir=y_db_off(ii,1)-y_db_off(ii-1,1);
temp71=temp68-y_db_off(ii-1,1);
temp72=theta_now(ii-1,1)+del_theta*temp71/del_dir;
hpbw_degree1=temp72*180/pi;
hold on

ylin=0:max(y_db_off);
xlin=temp72*ones(1,length(ylin));
polar(xlin,ylin,'k')

for ii=2:(n)
  theta=(ii-1)*step;
  theta_now(ii,1)=theta;
  temp69=y_db_off(ii-1,1)>temp68;
  temp70=y_db_off(ii,1)<temp68;
    if temp69&temp70
      break
    end
end

del_theta=theta_now(ii,1)-theta_now(ii-1,1);
del_dir=y_db_off(ii,1)-y_db_off(ii-1,1);
temp71=temp68-y_db_off(ii-1,1);
temp72=theta_now(ii-1,1)+del_theta*temp71/del_dir;
hpbw_degree2=temp72*180/pi;
hold on

ylin=0:max(y_db_off);
xlin=temp72*ones(1,length(ylin));
polar(xlin,ylin,'k')
hpbw_degree05=hpbw_degree2-hpbw_degree1
hpbw_db05=temp68
title('\alpha = 0.5')
% legend('\alpha = 0.1','\alpha = 0.2','\alpha = 0.5')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```