การวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบ
โดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ

ANALYSIS OF PLANE–WAVE REFLECTION BY DIELECTRIC SLAB SUPPORTED BY A CONDUCTING PLANE

นางสาวกันยาลักษณ์ เกตุสุวรรณ์ รหัส 50364430

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์
วันที่รับ 1 ส.ค. 2555
เลขทะเบียน 15732566
เลขเรียกหนังสือ ฟร.
มหาวิทยาลัยนเรศวร ก392 ก 2553

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
ปีการศึกษา 2553

ใบรับรองปริญญานิพนธ์

ชื่อหัวข้อโครงงาน	วิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบ โดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ
ผู้ดำเนินโครงงาน	นางสาวกันยาลักษณ์ เกตุสุวรรณ์ รหัส 50364430
ที่ปรึกษาโครงงาน	ดร.ชัยรัตน์ พินทอง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2553

....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้ปริญญานิพนธ์**ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของ**การศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

ชัยรัตน์ พินทอง ....ที่ปรึกษาโครงงาน
(ดร.ชัยรัตน์ พินทอง)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุรเชษฐ์ กานต์ประชา)

....กรรมการ
(ดร. อัครพันธ์ วงศ์กังแห)

ชื่อหัวข้อโครงงาน	วิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบ โดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ
ผู้ดำเนินโครงงาน	นางสาวกันยาลักษณ์ เกตุสุวรรณ์ รหัส 50364430
ที่ปรึกษาโครงงาน	ดร.ชัยรัตน์ พินทอง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2553

บทคัดย่อ

โครงงานนี้เป็นการศึกษาและวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ พิจารณาคลื่นโพราไรซ์แบบ E_z และ H_z และการตกกระทบบนแผ่นไดอิเล็ก-ตริกแผ่นจะถูกแบ่งออกเป็นท่อนบางๆ ซึ่งสนามสามารถหาได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบริทซ์และเงื่อนไขขอบเขตเทียม สัมประสิทธิ์การสะท้อนหาได้จากขอบของแผ่น ผลลัพธ์ที่ได้แสดงถึงสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นในกรณีคลื่นโพราไรซ์แบบ E_z ส่วนในกรณีโพราไรซ์แบบ H_z ปรากฏสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดหนึ่งค่าและนับจากค่านี้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้น

Project title Analysis of Plane–Wave Reflection by Dielectric Slab Supported by a Conducting Plane

Name Miss. Kanyalak Ketsuwan ID. 50364430

Project advisor Chairat Pinthong, Ph.D.

Major Electrical Engineering

Department Electrical and Computer Engineering

Academic year 2010

Abstract

This project is the study and analysis of the plane-wave reflection by dielectric slab supported by a conducting plane. The waves of E_z and H_z polarization are considered and incident on the dielectric slab. The slab is divided into many thin layers in which fields are found from Finite Element Method by means of Ritz's method and artificial boundary condition. The reflection coefficient is determined at the boundary of the slab. The results show that the reflection coefficient is increased in the E_z-polarized case. For the H_z-polarized case, it is shown that there exists one minimum value of the reflection coefficient and beyond this point the reflection coefficient increases.

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำซึ่งจะไม่มีทางสำเร็จไปได้ถ้าไม่ได้รับการช่วยเหลือจากบุคคลดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ดร.ชัยรัตน์ พินทอง อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ได้ให้ความรู้ ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ให้ความกรุณาในการตรวจทานปริญญานิพนธ์ และให้ความช่วยเหลือแก่ผู้จัดทำเป็นอย่างดีตลอดมา ผู้จัดทำโครงงานขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงและขอระลึกถึงความกรุณาของท่านไว้ตลอดไป

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชาและดร.อัครพันธ์ วงศ์กังแห อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นกรรมการคุมสอบโครงงานซึ่งเสียสละเวลาในการคุมสอบโครงงานและให้คำแนะนำเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้กับผู้จัดทำ

นอกจากนี้ยังต้องขอขอบพระคุณภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวรที่เอื้อเฟื้อสถานที่ในการจัดทำโครงงาน และทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เหนือสิ่งอื่นใดผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้มอบความรักความเมตตา สติปัญญา รวมทั้งเป็นผู้ให้ทุกสิ่งทุกอย่างตั้งแต่วัยเยาว์จวบจนถึงปัจจุบัน คอยเป็นกำลังใจทำให้ได้รับความสำเร็จอย่างทุกวันนี้ รวมทั้งขอขอบพระคุณทุกคนในครอบครัวของผู้จัดทำโครงงานที่ไม่ได้กล่าวมาด้วย

ท้ายนี้ผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ไม่ได้กล่าวนามมา ณ ที่นี้ ที่มีส่วนร่วมในการให้ข้อมูลเป็นที่ปรึกษาในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์ ผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

นางสาวกันยาลักษณ์ เกตุสุวรรณ์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

การวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์จะเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และงานทางวิศวกรรม วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้ได้อย่างกว้างขวางเนื่องจากเป็นวิธีที่มีความยืดหยุ่นสูง และสามารถประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาในหลายลักษณะ รวมถึงให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องและแม่นยำ

โครงงานฉบับนี้จะเป็นการนำทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์วิเคราะห์คุณลักษณะของการสะท้อนคลื่นระนาบ โดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ ผลลัพธ์ที่ได้จะได้รับการเปรียบเทียบผลเชิงวิเคราะห์และสามารถนำพื้นการวิเคราะห์ไปประยุกต์ใช้กับโครงสร้างในสภาวการณ์จริงได้

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. ศึกษาทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
2. ศึกษาทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์
3. ศึกษาทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

1. ศึกษาทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยวิธีของริทซ์
2. ศึกษาทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบหนึ่งมิติสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีพื้นผิวราบเรียบ

1.4 ขั้นตอนและแผนการดำเนินงาน

กิจกรรม	ปี 2553							ปี 2554		
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1 ศึกษาทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์และคุณลักษณะการสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ										
2 ศึกษาและพัฒนาโปรแกรม MATLABที่ใช้ในการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์ในการสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ										
3 รวมข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์ในการสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ										
4 สรุปคุณสมบัติและคุณลักษณะของการสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ										

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงงาน

1. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์
2. ได้เข้าใจถึงคุณลักษณะการสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ
3. มีความรู้ความเข้าใจทฤษฎีวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำโดยอาศัยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
4. มีความรู้ความเข้าใจทฤษฎีวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำโดยอาศัยวิธีเชิงวิเคราะห์
5. สามารถใช้โปรแกรม MATLAB พร้อมการเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟฟิกสำหรับการสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ

1.6 งบประมาณ

1. ค่าเอกสารในการค้นคว้าทำโครงงานและค่าเข้าเล่มโครงงาน	700 บาท
2. ค่าวัสดุคอมพิวเตอร์	300 บาท
รวม (หนึ่งพันบาทถ้วน)	1,000 บาท

หมายเหตุ: ถัวเฉลี่ยทุกรายการ

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาค่าขอบเขตของฟิสิกส์คณิตศาสตร์ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีประวัติยาวนาน 50 ปี ไฟไนต์อีลีเมนต์ถูกเสนอครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ. 1940 และเริ่มนำมาใช้ในการออกแบบเครื่องบิน หลังจากนั้นก็ได้รับการพัฒนาและมีการนำไปใช้อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาการวิเคราะห์โครงสร้างและปัญหาอื่นๆ ปัจจุบันนี้ไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นที่นิยมใช้ในงานวิศวกรรมและปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.1 การศึกษาวิธีปัญหาค่าขอบเขต

ในส่วนแรกจะเป็นการอธิบายปัญหาค่าขอบเขตและการแก้ปัญหาของ 2 วิธีทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ วิธีการแปรผันของริทซ์และวิธีกาเลอร์คิน ทั้งสองวิธีนี้เป็นพื้นฐานของไฟไนต์อีลีเมนต์

2.1.1 ปัญหาค่าขอบเขต

ปัญหาค่าขอบเขตเกิดจากการจำลองปัญหาทางด้านฟิสิกส์ และเป็นหัวข้อสำคัญในการแก้ปัญหาวิชาฟิสิกส์คณิตศาสตร์ ปัญหาค่าขอบเขตสามารถกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์ บนโดเมนโอเมก้า ภาษาที่ใช้เขียนโปรแกรมในไมโครคอนโทรลเลอร์

$$L\phi = f \tag{2.1}$$

พร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตบนขอบเขต Γ ที่ล้อมรอบด้วยโดเมนโอเมก้า

เมื่อ L คือ ตัวดำเนินการอนุพันธ์, ϕ คือ ตัวแปรไม่ทราบค่า, f คือ ตัวกระตุ้นหรือฟังก์ชันของแรง

ในสาขาวิชาแม่เหล็กไฟฟ้า รูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์จะอยู่ในรูปแบบสมการปัวส์ซอง สมการคลื่นเชิงสเกลาร์ สมการคลื่นเชิงเวกเตอร์ เงื่อนไขขอบเขตจะอยู่ในรูปของ รูปแบบไดริช-เล็กนอยมานน์ เงื่อนไขการแผ่พลังงาน และเงื่อนไขอันดับสูงๆ เป็นต้น ยังมีปัญหาในทางปฏิบัติทางวิศวกรรมศาสตร์หลายลักษณะยังไม่สามารถวิเคราะห์ได้โดยตรงจากสมการ จึงได้มีการพัฒนาวิธีการประมาณค่าขึ้น วิธีที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง คือ วิธีริทซ์และวิธีกาเลอร์คิน

2.1.2 วิธีริทซ์

วิธีริทซ์หรือเรเลย์-ริทซ์ เป็นวิธีการแปรผันภายใต้กำหนดเงื่อนไขเทอมนิพจน์การแปรผัน จะเรียกว่า ฟังก์ชันนอล จุดต่ำสุดของฟังก์ชันนอลจะต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต การลดค่าฟังก์ชันนอลให้มีค่าน้อยลงจะทำให้ ได้ผลลัพธ์ที่มีค่าประมาณที่มีความถูกต้อง เพื่อจะศึกษาวิธีของริทซ์เราจะกำหนดนิยามภายในดังต่อไปนี้

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \phi \psi^{*} d\Omega \tag{2.2}$$

เครื่องหมาย * เป็นสังยุคเชิงซ้อน และตัวดำเนินการ $\mathcal{L}$ มีคุณสมบัติผูกพันในตัวกล่าวคือ

$$\langle \mathcal{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathcal{L}\psi \rangle \tag{2.3}$$

พร้อมทั้งบวกแน่นอน

$$\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle = \begin{cases} > 0 & \phi \neq 0 \\ = 0 & \phi = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

ผลเฉลยของสมการ (2.1) หาจะได้ต่ำสุดของฟังก์ชันนอล

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}\tilde{\phi}, \tilde{\phi} \rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{\phi}, f \rangle - \frac{1}{2}\langle f, \tilde{\phi} \rangle \tag{2.5}$$

ในกรณี $\tilde{\phi}$ ซึ่ง $\tilde{\phi}$ เป็นฟังก์ชันทดลอง

เพื่อให้ฟังก์ชันนอลเป็นรากฐาน ผลลัพธ์สามารถหาได้จะกระบวนการทำแผนภูมิ เพื่อความง่ายจะสมมติให้ปัญหาเป็นค่าจำนวนจริง ทำให้ ϕ ใน (2.5) จะได้รับการค่าประมาณเป็น โดยการขยายออก

$$\tilde{\phi} = \sum_{j=1}^{N} c_j v_j = \{c\}^T \{v\} = \{v\}^T \{c\} \tag{2.6}$$

เมื่อ v_j คือ ฟังก์ชันขยายออกที่เลือกมาใช้บน โดเมนทั้งหมด, c_j คือ ค่าสัมประสิทธิ์คงตัวที่ไม่ทราบค่า, $\{\cdot\}$ เป็นสัญลักษณ์คอลัมน์เวกเตอร์, ตัวยก T คือ การสลับเปลี่ยนของเวกเตอร์

แทน (2.6) ลงใน (2.5) จะได้

$$F = \frac{1}{2}\{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} \mathcal{L} \{v\}^T d\Omega \{c\} - \{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} f d\Omega \tag{2.7}$$

เพื่อจะหาจุดต่ำสุดของ $F(\tilde{\phi})$ สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ c_i จะได้เซตของสมการพีชคณิตเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} v_i \mathcal{L}\{v\}^T d\Omega \{c\} + \frac{1}{2}\{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} \mathcal{L} v_i d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} c_j \int_{\Omega} (v_i \mathcal{L} v_j + v_j \mathcal{L} v_i) d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega$$

$$= 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N \tag{2.8}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการเมตริก

$$[S]\{c\} = \{b\} \tag{2.9}$$

องค์ประกอบในเมตริกอีลีเมนต์ใน $[S]$ และอีลีเมนต์ใน $\{b\}$ มีค่าเป็นดังนี้

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (v_i \mathcal{L} v_j + v_j \mathcal{L} v_i) d\Omega \tag{2.10}$$

$$b_i = \int_{\Omega} v_i f \quad d\Omega \tag{2.11}$$

โดยทั่วไปแล้ว $[S]$ เป็นเมตริกสมมาตร ถ้าใช้คุณสมบัติผูกพันในตัวของตัวดำเนินการ $\mathcal{L}$ และ S_{ij} สามารถเขียนได้เป็น

$$S_{ij} = \int_{\Omega} v_i \mathcal{L} v_j d\Omega \tag{2.12}$$

คำตอบการประมาณสำหรับ (2.1) คือ ใน (2.6) ที่ซึ่ง c_i สามารถหาได้การหาผลเฉลยสมการเมตริก (2.9)

2.1.3 วิธีกาเลอร์คิน

วิธีกาเลอร์คินจะเป็นหนึ่งวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง การแก้ปัญหาโดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างทำโดยการแทนคำตอบทดลอง $\tilde{\phi}$ ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเศษตกค้างไม่เท่ากับศูนย์

$$r = \mathcal{L}\tilde{\phi} - f \quad \neq 0 \tag{2.13}$$

การประมาณค่าที่ดีที่สุดของ $\tilde{\phi}$ ก็คือค่าที่สามารถลดลงเศษตกค้าง (r) ที่มีค่าน้อยที่สุดบนโดเมน Ω การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะบังคับด้วยเงื่อนไขตามด้านล่าง

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r \quad d\Omega \qquad = 0 \tag{2.14}$$

เมื่อ R_i คือ อินทิกรัลของการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง, w_i คือ ฟังก์ชันให้น้ำหนัก

ในวิธีกาเลอร์คิน ฟังก์ชันน้ำหนักที่ถูกเลือกจะเหมือนการใช้ฟังก์ชันการขยายที่ใช้ในคำตอบทดลอง การเลือกตามลักษณะนี้ทำให้ได้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องมาก และเป็นวิธีที่นิยมใน

การพัฒนาสมการไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อคำตอบทดลองเป็นไปตาม (2.6) ฟังก์ชันน้ำหนักที่ถูกเลือก คือ w_i

$$w_i = v_i \qquad i=1,2,3,\ldots,N \tag{2.15}$$

ดังนั้น (2.14) จะกลายเป็น

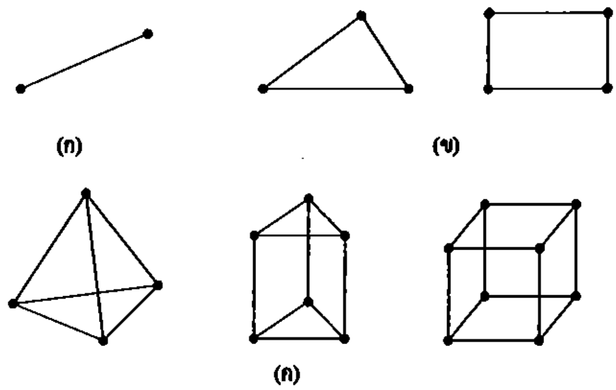
$$R_i = \int_{\Omega} (v_i \mathcal{L}\{v\}^T\{c\} + v_i f)d\Omega \;\; = 0 \qquad i = 1,2,3,\ldots, N \tag{2.16}$$

2.2 ขั้นตอนการทำไฟไนต์อีลีเมนต์

ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยการใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะมีด้วยกัน 4 **ขั้นตอน ซึ่งจะอธิบาย**ในหัวข้อต่อไปนี้

2.2.1 การแบ่งโดเมนเป็นส่วนย่อย

การแบ่งโดเมน Ω เป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญที่สุดในการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์ เนื่องจากวิธีการจะกระทำในการเลือกโดเมนแบ่งออกเป็นส่วนย่อย อาจจะเกิดผลกระทบต่อการเก็บข้อมูลของคอมพิวเตอร์ การคำนวณระยะเวลา และความถูกต้องของคำตอบตัวเลข ในขั้นตอนนี้โดเมน Ω ทั้งหมด คือ การแบ่งเป็นส่วนๆในจำนวนโดเมนย่อย สัญลักษณ์คือ Ω^e (e=1,2,3,…,M) M เป็นสัญลักษณ์จำนวนทั้งหมดของโดเมนย่อย โดเมนย่อยนี้จะกล่าวถึงอีลีเมนต์ สำหรับโดเมนหนึ่งมิติ อีลีเมนต์จะเป็นท่อนสั้นๆ ดังรูปที่ 2.1(ก) สำหรับโดเมนสองมิติ อีลีเมนต์จะเป็นรูปสามเหลี่ยมเล็กๆและสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังรูปที่ 2.1(ข) ในผลเฉลยสามมิติ โดเมนจะถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยในรูปพีระมิด ปริซึมสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยมลูกบาศก์ดังรูปที่ 2.1(ค)



รูปที่ 2.1 ไฟไนต์อีลีเมนต์แบบต่างๆ (ก) แบบหนึ่งมิติ (ข) แบบสองมิติ (ค) แบบสามมิติ

เส้นอีลีเมนต์เชิงเส้นมี 2 โนด แต่ละโนดอยู่ที่ปลายทั้งสองข้าง อีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่เป็นรูปสามเหลี่ยมเชิงเส้นมี 3 โนด ตั้งอยู่ที่สามจุดยอด ขณะที่รูปพีระมิดเชิงเส้นมี 4 โนด ตั้งอยู่ที่ 4 มุม

2.2.2 การเลือกคำตอบทดลอง

ขั้นตอนที่ 2 ในการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์คือการเลือกคำตอบทดลอง ด้วยการกำหนดการประมาณค่าผลเฉลยที่ไม่ทราบค่าด้วยอีลีเมนต์ การประมาณค่าในช่วงคือการเลือกจากพหุนามอันดับหนึ่ง, อันดับสองหรืออันดับสูงๆ พหุนามอันดับสูงๆแม้ว่าจะมีความถูกต้องมาก การสรุปเป็นสูตรจะมีความยุ่งยากกว่าพหุนามอันดับต่ำๆ ด้วยเหตุนี้การประมาณค่าในช่วงจะใช้เป็นลักษณะเชิงเส้นง่ายๆ ซึ่งเป็นที่ใช้อย่างกว้างขวางจนถึงทุกวันนี้ อันดับของพหุนามที่ถูกเลือกสามารถหาได้จากนิพจน์ของผลเฉลยที่ไม่ทราบค่าในอีลีเมนต์ เมื่อกล่าวถึงอีลีเมนต์ e ในรูปแบบตามนี้

$$\tilde{\phi}^e = \sum_{j=1}^{n} N_j^e \phi_j^e = \{N^e\}^T\{\phi^e\} = \{\phi^e\}^T\{N^e\} \tag{2.17}$$

เมื่อ n คือ จำนวนโนดในอีลีเมนต์, ϕ_j^e คือ ค่า ณ โนด j ของอีลีเมนต์, N_j^e คือ การคัดเลือกเกี่ยวกับฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของโนด j

เลือกค่าที่ทราบค่าขณะที่การแพร่ขยายหรือพื้นฐานฟังก์ชัน อันดับสูงๆของฟังก์ชัน N_j^e ให้อีลีเมนต์ คือ อันดับของอีลีเมนต์ เช่น ค่า N_j^e เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้น อีลีเมนต์ e ในอีลีเมนต์เชิงเส้น มีลักษณะพิเศษของฟังก์ชัน N_j^e คือ ความไม่เป็นศูนย์ อยู่ภายใต้อีลีเมนต์ e และนอกอีลีเมนต์ก็จะหายไป

2.2.3 การจัดสูตรของระบบสมการ

ขั้นตอนที่ 3 ของการวิเคราะห์วิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์ คือ การนำระบบสมการมาจัดเป็นสูตร โดยการใช้ 2 วิธี คือ การแปรผันของริทซ์และวิธีกาเลอร์คิน

การจัดสูตรโดยวิธีริทซ์

ทำการพิจารณาปัญหา (2.1) พิจารณาเฉพาะปัญหาที่เป็นจำนวนจริง ให้ฟังก์ชันนอล F คือ (2.5)

สามารถเขียนได้เป็น

$$F(\tilde{\phi}) = \sum_{e=1}^{M} F^e(\tilde{\phi})^e \tag{2.18}$$

เมื่อ M คือจำนวนของอีลีเมนต์ของโดเมนทั้งหมด

$$F^e(\tilde{\phi}^e) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \tilde{\phi}^e \mathcal{L} \tilde{\phi}^e d\Omega - \int_{\Omega^e} \tilde{\phi}^e f d\Omega \tag{2.19}$$

แทน (2.17) ลงใน (2.19) จะได้

$$F^e = \frac{1}{2}\{\phi^e\}^T \int_{\Omega^e} \{N^e\}\mathcal{L}\{N^e\}^T d\Omega \{\phi^e\} \ - \{\phi^e\}^T \int_{\Omega^e} f\{N^e\} d\Omega \tag{2.20}$$

สามารถเขียนสมการเมตริกได้ในรูป

$$F^e = \frac{1}{2}\{\phi^e\}^T [K^e]\{\phi^e\} \ - \{\phi^e\}^T\{b^e\} \tag{2.21}$$

เมื่อ $[K^e]$ คือ เมตริกขนาด $n \times n$ และ $\{b^e\}$ คือ คอลัมน์เวกเตอร์ขนาด $n \times 1$ และอีลีเมนต์เหล่านี้จะได้

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \mathcal{L} N_j^e \ \ d\Omega \tag{2.22}$$

และ

$$b_i^e = \int_{\Omega^e} f \, N_i^e \ \ d\Omega \tag{2.23}$$

หมายเหตุ เมตริกอีลีเมนต์ $[K^e]$ จะสมมาตร เนื่องจาก $\mathcal{L}$ เป็นคุณสมบัติผูกพันในตัว

แทน (2.21) ลงใน (2.18) จะได้

$$F(\tilde{\phi}) = \sum_{e=1}^{M}\left(\frac{1}{2}\{\phi^e\}^T[K^e]\{\phi^e\} \ - \{\phi^e\}^T\{b^e\}\right) \tag{2.24}$$

โดยการแสดงการรวมและการนำจำนวนโนดทั้งหมดมาใช้ สามารถเขียนได้เป็น

$$F = \frac{1}{2}\{\phi\}^T[K]\{\phi\} - \{\phi\}^T\{b\} \tag{2.25}$$

เมื่อ $[K]$ คือ เมตริกสมมาตรขนาด $N \times N$, N คือ จำนวนทั้งหมดของตัวแปรไม่ทราบค่าหรือโนด, $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ที่ไม่ทราบค่าขนาด $N \times 1$ ของอีลีเมนต์เป็นตัวเลขสัมประสิทธิ์ที่มีค่าเพิ่มขึ้นที่ไม่ทราบค่า, $\{b\}$ คือ เวกเตอร์ที่ทราบค่าขนาด $N \times 1$

ระบบสมการนี้ $\delta F = 0$ โดยการอนุพันธ์ F เทียบ ϕ_i

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(K_{ij} + K_{ji})\phi_j - b_i = 0 \qquad i = 1,2,3,\ldots,N \tag{2.26}$$

เนื่องจาก $[K]$ สมมาตร $K_{ij} = K_{ji}$ จาก (2.26) จะกลายเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \sum_{j=1}^{N} K_{ij}\phi_j - b_i = 0 \qquad i = 1,2,3,...,N \tag{2.27}$$

หรือในรูปเมตริก

$$[K]\{\phi\} = \{b\} \tag{2.28}$$

ทำการอนุพันธ์ (2.28) โดยอนุพันธ์ F^e เทียบ ϕ_i^e

$$\frac{\partial F^e}{\partial \phi_i^e} = \int_{\Omega^e} \{N_i^e\} L\{N^e\}^T d\Omega\{\phi^e\} - \int_{\Omega^e} f\{N_i^e\} d\Omega \qquad i = 1, 2, 3,..., n \tag{2.29}$$

$$\left\{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}\right\} = [K^e]\{\phi^e\} - \{b^e\} \tag{2.30}$$

เมื่อ

$$\left\{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}\right\} = \left[\frac{\partial F^e}{\partial \phi_1^e}, \frac{\partial F^e}{\partial \phi_2^e}, ..., \frac{\partial F^e}{\partial \phi_n^e}\right]^T$$

จะได้ระบบสมการหา $\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\}$ เมื่อ

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\} = \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_1}, \frac{\partial F}{\partial \phi_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial \phi_N}\right]^T$$

อีลีเมนต์ที่มีการเชื่อมต่อโดยตรงกับโนด i และ $\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi_i}\right\}$ สามารถช่วยหา $\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\}$ อาจจะได้จากการขยาย $\left\{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}\right\}$ ในคอลัมน์เวกเตอร์ขนาด $N\times 1$ เพื่อแต่ละอีลีเมนต์ที่ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโลเคิลโนด (local node) กับโกลเบิลโนด (global node) และมีค่าเพิ่มขึ้น

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\} = \sum_{e=1}^{M} \left\{\overline{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}}\right\} \tag{2.31}$$

สัญลักษณ์ตัวลอยฟ้าจะแสดงเป็นเวกเตอร์ที่มีค่าขยายออกหรือเพิ่มขึ้น ในระบบสมการจะได้เงื่อนไขตำแหน่งที่มีค่าใหญ่มากๆ

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\} = \sum_{e=1}^{M} \left\{\overline{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}}\right\} = \sum_{e=1}^{M} ([\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} - \{\overline{b}^e\}) = \{0\} \tag{2.32}$$

เมื่อเวกเตอร์ทั้งหมดเมตริกดังต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์การบวกที่มีค่าขยายออกหรือเพิ่มขึ้น $[\overline{K}^e]$ คือ ขยายออกหรือเพิ่มขึ้น จาก $[K^e]$ ด้วยเมตริกขนาด $N\times N$ ที่มีความสัมพันธ์ระหว่าง

จำนวนโลเคิลโนดกับโกลเบิลโนด $\{\bar{\phi}^e\}$ และ $\{\bar{b}^e\}$ จะเป็นค่าที่เพิ่มขึ้นด้วยคอลัมน์เวกเตอร์ขนาด $N\times 1$ สรุปได้ว่า (2.32) สามารถเขียนได้เป็น (2.28)

2.2.4 ผลเฉลยของระบบสมการ

ผลเฉลยของระบบสมการเป็นขั้นตอนสุดท้ายของการวิเคราะห์วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อรวมทุกอีลีเมนต์เข้าด้วยกันทำให้ได้สมการของระบบดังนี้

$$[K]\{\phi\} = \{b\} \tag{2.33}$$

สมการ (2.33) เป็นประเภทดีเทอร์มินิสติก (deterministic) สรุปจากทั้งสองข้างสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเอกพันธ์หรือค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่เป็นเอกพันธ์หรือทั้งคู่ ในวิชาแม่เหล็กไฟฟ้าระบบดีเทอร์มินิสติก จะเกี่ยวข้องด้วยการกระเจิง การแพร่กระจายและปัญหาอื่นๆ ที่ซึ่งแหล่งกำเนิดยังคงอยู่หรือภาวะถูกกระตุ้น สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้น โดยที่ $[K]$ คือค่าสัมประสิทธิ์, $\{\phi\}$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และ $\{b\}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่ทราบค่า

2.3 การวิเคราะห์วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในหนึ่งมิติ

วิธีการปัญหาค่าขอบเขตเป็นการแก้ปัญหาเส้นแรกของระบบหนึ่งมิติทั่วไป โดยการพิจารณากรณีพิเศษบางประการที่จะอธิบายวิธีการประยุกต์ใช้ และจะนำไปสู่แนวคิดอีลีเมนต์อันดับสูงๆและจะใช้ในการหาผลเฉลยที่เพิ่มความถูกต้องแม่นยำ ไฟไนต์อีลีเมนต์ไม่นิยมใช้ในปัญหาวิชาแม่เหล็กไฟฟ้าหนึ่งมิติ เนื่องจากในรูปแบบที่ซับซ้อนจะได้ผลลัพธ์ของปัญหาเหล่านี้ที่ต้องการผลเฉลยแสดงเป็นลักษณะตัวเลขมีจำนวนน้อย อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่ปัญหาหนึ่งมิติมีความง่ายในการเป็นแนวคิดสำหรับการพิสูจน์และนำมาจัดเป็นสูตรของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

2.3.1 ปัญหาค่าขอบเขต

ปัญหาค่าขอบเขตจะพิจารณาโดยการแสดงสมการเชิงอนุพันธ์

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha\frac{d\phi}{dx}\right) + \beta\phi = f \qquad x \in (0, L) \tag{2.34}$$

เมื่อ ϕ คือ ฟังก์ชันไม่ทราบค่า, α และ β คือ ตัวแปรที่ทราบค่าหรือฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับผลเฉลยโดเมนที่มีคุณสมบัติทางกายภาพ, F คือ แหล่งกำเนิดที่ทราบค่าหรือฟังก์ชันการกระตุ้น

ลาปลาซ, ปัวส์ซอง เป็นมาตรฐานของหนึ่งมิติและสมการเฮมม์โฮส (Helmholtz) หรือสมการคลื่น เป็นเฉพาะรูปแบบสมการ (2.34)

สำหรับตัวอย่างนี้จะให้ค่าเงื่อนไขขอบเขตของ ϕ เป็น

$$\phi\big|_{x=0} = p \tag{2.35}$$

และ

$$\left[\alpha\frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi\right]_{x=L} = q \tag{2.36}$$

เมื่อ p, γ และ q เป็นตัวแปรที่ทราบค่าหรือฟังก์ชัน ยิ่งไปกว่านั้น (2.35) มีความเกี่ยวข้องกับเงื่อนไขขอบเขตสำหรับเฟิร์สทไคด์หรือเงื่อนไขของไดริทช์เลท ขณะที่ (2.36) มีความเกี่ยวข้องกับเงื่อนไขขอบเขตของเธิร์คไคด์ ส่วนเงื่อนไขขอบเขตของเซคเคินไคด์ เป็นเฉพาะรูปแบบ (2.36) ด้วย $\gamma = 0$

2.3.2 การจัดสูตรแปรผัน

ใช้วิธีการแปรผันไปสู่การใช้สูตรสมการไฟไนต์อีลีเมนต์ ขั้นแรกจะต้องกำหนดหลักการแปรผันที่ต้องการ สำหรับปัญหาที่กล่าวถึงมันสามารถแสดงวิธีการแก้ปัญหาได้โดยปัญหาแปรผันสมมูล ดังที่แสดง

$$\begin{cases} \delta F(\phi) = 0 \\ \phi\big|_{x=0} = p \end{cases} \tag{2.37}$$

เมื่อ

$$F(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\alpha\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \beta\phi^2\right]dx - \int_0^L f\phi \; dx + \left[\frac{\gamma}{2}\phi^2 - q\phi\right]_{x=L} \tag{2.38}$$

ที่เกี่ยวข้องกับ (2.37) คือการเจาะจงจุดนิ่งของฟังก์ชันนอล $F(\phi)$ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต ไดริทช์เลท หมายเหตุ เพื่อความสะดวกจะใช้ ϕ แทนโดย $\tilde{\phi}$ ในฟังก์ชันนอลที่ เมื่อใดก็ตามที่ ϕ ปรากฏในฟังก์ชันนอล หรือสมการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะทำการพิจารณาที่ฟังก์ชันทดลองหรือผลเฉลยค่าประมาณแทนที่จะเป็นสมการแม่นตรง

ทำการพิสูจน์การจัดสูตรแปรผันที่กล่าวไว้ข้างต้นจะเท่ากับปัญหาค่าเงื่อนไขที่แสดงใน (2.34) ถึง (2.36) จะใช้รูปแบบแรกของ $F(\phi)$ ที่เกี่ยวกับ ϕ

$$\delta F(\phi) = \int_0^L \left[\alpha\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{d\delta\phi}{dx}\right) + \beta\phi\delta\phi \right] dx + \left[\gamma(\phi - q)\delta\phi\right]_{x=L} - \int_0^L f\delta\phi \ \ dx \tag{2.39}$$

สมมติว่าปัจจุบัน α เป็นความต่อเนื่องในโดเมนทั้งหมด (2.39) สามารถเขียนได้เป็น

$$\delta F(\phi) = \int_0^L \left[-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{d\phi}{dx}\right) + \beta\phi \right] \delta\phi \ \ dx + \left[\alpha \frac{d\phi}{dx}\delta\phi \right]_{x=0}^{x=L}$$

$$+ \left[(\gamma\phi - q)\delta\phi\right]_{x=L} - \int_0^L f\delta\phi \ \ dx \tag{2.40}$$

ทำการอินทิกรัลเทอมแรกทางขวามือโดยการบายพาท เนื่องจาก ϕ มีค่าคงที่ $x = 0$ และ $\delta\phi|_{x=0} = 0$ ผลที่ได้เป็น

$$\delta F(\phi) = \int_0^L \left[-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{d\phi}{dx}\right) + \beta\phi \right] \delta\phi \ \ dx + \left[\left(\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi - q \right) \delta\phi \right]_{x=L} - \int_0^L f\delta\phi \ \ dx \tag{2.41}$$

จะได้

$$\int_0^L \left[-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{d\phi}{dx}\right) + \beta\phi - f \right] \delta\phi \ \ dx + \left[\left(\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi - q \right) \delta\phi \right]_{x=L} = 0 \tag{2.42}$$

เพราะ $\delta\phi$ คือการเปลี่ยนแปลงไม่เจาะจง (2.42) แสดงให้เห็นว่าทั้งเทอมอินทิกรัลและเงื่อนไขจะต้องหายไป ดังนั้น

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{d\phi}{dx}\right) + \beta\phi - f = 0 \tag{2.43}$$

$$\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi - q = 0 \tag{2.44}$$

2.3.3 การวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์

2.3.3.1 การแบ่งย่อยและการประมาณค่าในช่วง

เพื่อให้สอดคล้องกับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ขั้นแรกคือการแบ่งโดเมน $(0,L)$ เพื่อไปสู่โดเมนย่อย ซึ่งในกรณีนี้จะมีส่วนเส้นสั้นๆ ให้ f $(e=1,2,3,\ldots,M)$ สัญลักษณ์ความยาวของอีลีเมนต์ที่ e และ M คือจำนวนอีลีเมนต์ทั้งหมด นอกจากนี้ ให้ x_i $(i= 1, 2, 3,\ldots, N)$ แสดงตำแหน่งโนดที่ i พร้อมด้วย $x_1 = 0$ และ $x_N = L$ ทั้งอีลีเมนต์และโนดเป็นตัวเลขในลำดับจากซ้ายไปขวาที่แสดงดังรูปที่ 2.2 ผลที่ได้คือไม่จำเป็นต้องนำไปสู่ระบบจำนวนโลเคิล อย่างไรก็ตาม เพื่อให้

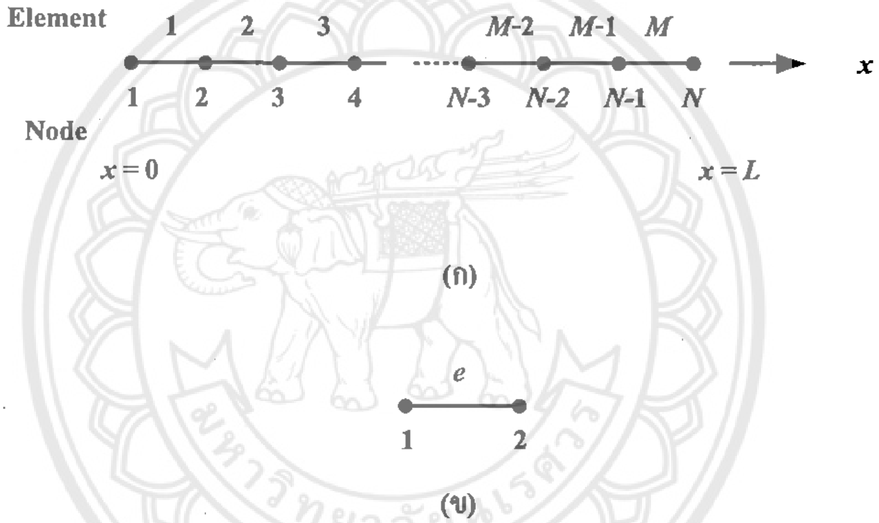
กำหนดสอดคล้องกับกรณีสองมิติและสามมิติ ระบบจำนวนโลเคิลยังคงนำมาใช้ในการแปลงเป็นสูตร เครื่องหมายตัวยก e ใช้แสดงปริมาณจำนวนโลเคิลของมันคือตัวห้อย ขณะที่ปริมาณตัวห้อยคือ จำนวนโกลเบิล ระบบโลเคิลและโกลเบิลที่เกี่ยวข้องโดย

$$x_1^e = x_e \qquad \text{และ} \qquad x_2^e = x_{e+1} \tag{2.45}$$

สำหรับ e=1, 2, 3,…, M

ขั้นตอนที่สองของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นการเลือกฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงหรือการเลือกคำตอบทดลอง และสำหรับภาวะเชิงเดียวจะใช้ฟังก์ชันเชิงเส้น เพราะฉะนั้นภายในอีลีเมนต์ที่ e และ $\phi(x)$ อาจจะประมาณค่าโดย

$$\phi^e(x) = a^e + b^e x \tag{2.46}$$



รูปที่ 2.2 การแบ่งเป็นโดเมนย่อยแบบหนึ่งมิติ

(ก) จำนวนอีลีเมนต์และโกลเบิลโนด (ข) จำนวนโลเคิลโนด

ซึ่ง a^e และ b^e คือค่าคงที่ที่ต้องการหา สำหรับอีลีเมนต์เชิงเส้น มีสองโนดรวมกันด้วยแต่ละอีลีเมนต์ ตำแหน่งหนึ่งที่ x_1^e และอื่นๆที่ x_2^e เฉพาะ (2.46) ที่สองโนดจะได้

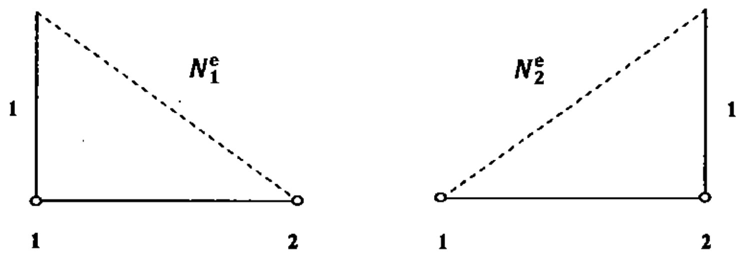
$$\phi_1^e = a^e + b^e x_1^e$$
$$\phi_2^e = a^e + b^e x_2^e$$

ซึ่ง ϕ_1^e และ ϕ_2^e แสดงค่าของ $\phi(x)$ ที่ x_1^e และ x_2^e ตามลำดับ การแก้ปัญหาสำหรับ a^e และ b^e และแทนค่าใน (2.46) จะได้

$$\phi^e(x) = \sum_{j=1}^{2} N_j^e(x)\phi_j^e \tag{2.47}$$

ซึ่ง N_1^e และ N_2^e แสดงประมาณค่าในช่วง หรือฟังก์ชันพื้นฐาน โดยให้

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{l^e} \qquad \text{และ} \qquad N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{l^e} \tag{2.48}$$



รูปที่ 2.3 การประมาณค่าในช่วงแบบหนึ่งมิติ

พร้อมด้วย $l^e = x_2^e - x_1^e$ อย่างที่เห็น $N_j^e(x_i^e) = \delta_{ij}$ เมื่อ δ_{ij} คือ เดลต้า Kronecker ที่ทราบค่า โดย $\delta_{ij}=1$ สำหรับ $i=j$ และ $\delta_{ij}=0$ สำหรับ $i \neq j$ ฟังก์ชัน $N_j^e(x)$ จะแสดงดังรูปที่ 2.3

2.3.3.2 การจัดสูตรโดยวิธีของริทซ์

ขั้นตอนที่ 3 ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นการนำสมการของระบบมาจัดเป็นสูตร ในที่นี้จะพิจารณาวิธีริทซ์

ก. การอนุพันธ์สมการอีลีเมนต์

เพื่อความง่ายจะให้เงื่อนไขขอบเขต (2.36) จำกัดชั่วคราว ไปยังเงื่อนไขนิวมานน์ (Neumann) $\gamma = q = 0$ จะกลับมาที่เงื่อนไขขอบเขตทั่วไป ภายใต้ข้อจำกัดนี้ ฟังก์ชัน-นอลของ (2.34) สามารถเขียนได้เป็น

$$F(\phi) = \sum_{e=1}^{M} F^e(\phi)^e \tag{2.49}$$

เมื่อ

$$F^e(\phi^e) = \frac{1}{2}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left[\alpha\left(\frac{d\phi^e}{dx}\right)^2 + \beta(\phi^e)^2\right]dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e}\phi^e f \ dx \tag{2.50}$$

แทน (2.47) ลงใน (2.50) ทำการอนุพันธ์ F^e เทียบ ϕ_i^e จะได้

$$\frac{\partial F^e}{\partial \phi_i^e} = \sum_{j=1}^{2}\left[\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left(\alpha\frac{dN_i^e}{dx}\frac{dN_j^e}{dx} + \beta N_i^e N_j^e\right)dx\right]\phi_j^e - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e f \ dx \qquad (2.51)$$

สามารถเขียนในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\left\{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}\right\} = [K^e]\{\phi^e\} - \{b^e\} \qquad (2.52)$$

ในที่นี้ $\phi^e = [\phi_1^e, \phi_2^e]^T$ และ

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e}\left(\alpha\frac{dN_i^e}{dx}\frac{dN_j^e}{dx} + \beta N_i^e N_j^e\right)dx \qquad (2.53)$$

$$b_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e f \ dx \qquad (2.54)$$

หมายเหตุ $[K^e]$ เป็นเมตริกสมมาตร และถ้า α และ β เป็นค่าคงที่หรือสามารถประมาณค่าโดยค่าคงที่ภายในแต่ละอีลีเมนต์ เมตริกอีลีเมนต์ของมันสามารถวิเคราะห์หาค่าได้ ผลลัพธ์คือ

$$K_{11}^e = K_{22}^e = \frac{\alpha^e}{l^e} + \beta^e \frac{l^e}{3} \qquad (2.55)$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e = \frac{\alpha^e}{l^e} + \beta^e \frac{l^e}{6} \qquad (2.56)$$

และในลักษณะเดียวกัน สำหรับ b_i^e จะได้

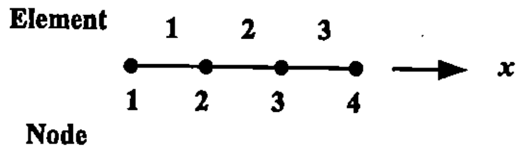
$$b_1^e = b_2^e = f^e \frac{l^e}{2} \qquad (2.57)$$

ซึ่ง α^e, β^e และ f^e แสดงค่าตรงกันตามส่วนของ α , β และ f ภายในอีลีเมนต์ e

ข. การรวมกลุ่มของรูปแบบระบบสมการ

สมการอีลีเมนต์โดยให้ (2.52) ระบบโกลเบิลของสมการสามารถหาได้โดยการบวกกันของอีลีเมนต์ทั้งหมด และเมื่อกำหนดให้มีความต้องการคงที่

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\} = \sum_{e=1}^{M}\left\{\overline{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}}\right\} = \sum_{e=1}^{M}([\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} - \{\overline{b}^e\}) = \{0\} \qquad (2.58)$$



รูปที่ 2.4 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนย่อยแบบหนึ่งมิติ

พิจารณากรณีที่จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 3 ซึ่งจะได้โนดเท่ากับ 4 ที่แสดงในรูป รูปที่ 2.4 ซึ่งใช้ความสัมพันธ์จำนวนโกลเบิลโนดและโลเคิลโนด จะสามารถขยาย $[K^e]$ ไปเป็นเมตริกขนาด 4×4 และ $\{\phi^e\}$ ไปเป็นคอลัมน์ 4×1 สำหรับตัวอย่าง $[K^e]$ และ $\{\phi^e\}$ เกี่ยวข้องกับอีลีเมนต์แรกที่สามารถขยายออกได้ เช่น

$$[\overline{K}^{(1)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \{\overline{\phi}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \phi_1^{(1)} \\ \phi_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.59}$$

จะได้

$$[\overline{K}^{(1)}]\{\overline{\phi}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} K_{11}^{(1)}\phi_1^{(1)} + K_{12}^{(1)}\phi_2^{(1)} \\ K_{21}^{(1)}\phi_1^{(1)} + K_{22}^{(1)}\phi_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.60}$$

แทนค่า จะได้

$$[\overline{K}^{(2)}]\{\overline{\phi}^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ K_{11}^{(2)}\phi_1^{(2)} + K_{12}^{(2)}\phi_2^{(2)} \\ K_{21}^{(2)}\phi_1^{(2)} + K_{22}^{(2)}\phi_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.61}$$

และ

$$[\overline{K}^{(3)}]\{\overline{\phi}^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{11}^{(3)}\phi_1^{(3)} + K_{12}^{(3)}\phi_2^{(3)} \\ K_{21}^{(3)}\phi_1^{(3)} + K_{22}^{(3)}\phi_2^{(3)} \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

เมื่อทั้งสามสมการคือ (2.60), (2.61) และ (2.62) บวกกันจะได้

$$\sum_{e=1}^{3}[\overline{K}^{e}]\{\overline{\phi}^{e}\} = \begin{Bmatrix} K_{11}^{(1)}\phi_1^{(1)} + K_{12}^{(1)}\phi_2^{(1)} \\ K_{21}^{(1)}\phi_1^{(1)} + K_{22}^{(1)}\phi_2^{(1)} + K_{11}^{(2)}\phi_1^{(2)} + K_{12}^{(2)}\phi_2^{(2)} \\ K_{21}^{(2)}\phi_1^{(2)} + K_{22}^{(2)}\phi_2^{(2)} + K_{11}^{(3)}\phi_1^{(3)} + K_{12}^{(3)}\phi_2^{(3)} \\ K_{21}^{(3)}\phi_1^{(3)} + K_{22}^{(3)}\phi_2^{(3)} \end{Bmatrix} \tag{2.63}$$

เพื่อความสอดคล้องกับความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโกลเบิลโนดและโลเคิลโนด

$$\phi_1^{(1)} = \phi_1, \qquad \phi_2^{(1)} = \phi_1^{(2)} = \phi_2, \qquad \phi_2^{(2)} = \phi_1^{(3)} = \phi_3 \qquad \text{และ} \qquad \phi_2^{(3)} = \phi_4$$

เมื่อแทนค่าของ ϕ ข้างต้นใน (2.63) จะได้

$$\sum_{e=1}^{3}[\overline{K}^{e}]\{\overline{\phi}^{e}\} = \begin{Bmatrix} K_{11}^{(1)}\phi_1 + K_{12}^{(1)}\phi_2 \\ K_{21}^{(1)}\phi_1 + (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)})\phi_2 + K_{12}^{(2)}\phi_3 \\ K_{21}^{(2)}\phi_2 + (K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)})\phi_3 + K_{12}^{(3)}\phi_4 \\ K_{21}^{(3)}\phi_3 + K_{22}^{(3)}\phi_4 \end{Bmatrix} \tag{2.64}$$

หรือเวกเตอร์เมตริก

$$\sum_{e=1}^{3}[\overline{K}^{e}]\{\overline{\phi}^{e}\} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \tag{2.65}$$

เมื่อ

$$\sum_{e=1}^{3}\{\overline{b}^{e}\} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} + b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} + b_1^{(3)} \\ b_2^{(3)} \end{Bmatrix} \tag{2.66}$$

ถ้าให้

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

และ

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} + b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} + b_1^{(3)} \\ b_2^{(3)} \end{Bmatrix} \tag{2.68}$$

ระบบสมการ (2.58) สามารถเขียนได้เป็น

$$[K]\{\phi\} = \{b\} \tag{2.69}$$

ซึ่ง (2.69) จะเป็นคำตอบสุดท้ายของระบบสมการ ที่จะใช้ในการหาผลเฉลยโดยอาศัยหลักการวิธีไฟไนต์แบบวิธีริทซ์

ค. การให้เงื่อนไขขอบเขตแบบเธิร์ดไคด์

ในการนำมาจัดเป็นสูตรข้างต้น ควรพิจารณาเหมือนกับเงื่อนไขขอบเขตแบบนิวมานน์ ที่ $x = L$ พิจารณารูปแบบทั่วไปของเงื่อนไขขอบเขตเธิร์ดไคด์ใน (2.36) เพื่อให้สอดคล้องกับ (2.38) ในกรณีนี้จะต้องเพิ่มฟังก์ชันนอล F ใน (2.49) เทอมใหญ่

$$F_b(\phi) = \left[\frac{\gamma}{2}\phi^2 - q\phi\right]_{x=L} \tag{2.70}$$

เมื่อ ตัวห้อย b ที่ตั้งอยู่เป็นเงื่อนไข ซึ่งในกรณีนี้เป็นจุดปลาย ในเทอมที่แยกออกจากกัน (2.70) สามารถเขียนได้เป็น

$$F_b = \left[\frac{\gamma}{2}\phi_N^2 - q\phi_N\right]_{x=L} \tag{2.71}$$

หมายเหตุ F_b ถูกจำกัดด้วย ϕ_N

$$\frac{\partial F_b}{\partial \phi_N} = \gamma\phi_N - q \tag{2.72}$$

อย่างเห็นได้ชัด ว่าได้รับการสนับสนุนจาก F_b, K_{NN} ในสมการนี้

$$K_{NN} = K_{22}^{(M)} = \frac{\alpha^{(M)}}{l^{(M)}} + \beta^{(M)}\frac{l^{(M)}}{3}$$

จึงกลายเป็น

$$K_{NN} = \frac{\alpha^{(M)}}{l^{(M)}} + \beta^{(M)}\frac{l^{(M)}}{3} + \gamma \tag{2.73}$$

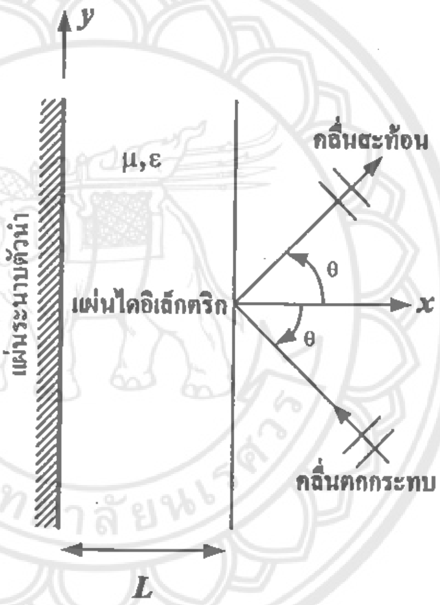
และแทนค่า จะได้

$$b_N = f^{(M)}\frac{l^{(M)}}{2} + q \tag{2.74}$$

2.4 การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ

ในส่วนนี้เราจะพิจารณาเฉพาะปัญหาที่แสดงการประยุกต์ของการพัฒนาวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์หนึ่งมิติ

ทำการพิจารณาปัญหาที่แสดงในรูปที่ รูปที่ 2.5 ข้างล่างนี้ ซึ่งจะอยู่ในรูปของคลื่นระนาบ คือ จะตกกระทบบนแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำที่ไม่เป็นเอกพันธ์ แผ่นไดอิเล็กตริกจะมีความหนา L, ค่าคงที่ไดอิเล็กตริกสัมพัทธ์ ε_r และค่าซึบซาบสัมพัทธ์ μ_r ทั้งสองค่าสามารถเลือกจากฟังก์ชันของ x ในสภาพแวดล้อมที่อวกาศอิสระจะมีค่า $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ เราจะสนใจในการหาพลังงานสะท้อนโดยแผ่นโลหะ



รูปที่ 2.5 ระนาบคลื่นสะท้อนบนแผ่นไดอิเล็กตริก

เป็นที่รู้ดีว่าคลื่นระนาบจะสลายตัวเมื่อไปเข้าสู่ E_z ซึ่งคลื่นระนาบโพราไรซ์จะมีส่วนประกอบ z อย่างเดียวสำหรับสนามไฟฟ้า และ H_z ซึ่งคลื่นระนาบโพราไรซ์จะมีส่วนประกอบ z อย่างเดียวสำหรับสนามแม่เหล็ก ด้วยเหตุนี้ มันเป็นเหตุผลเพียงพอที่จะพิจารณาสองโพราไรซ์เซชัน สำหรับกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z คลื่นตกกระทบสามารถแสดงโดย

$$E_z^{inc}(x,y) = E_0 e^{jk_0 x\cos\theta - jk_0 y\sin\theta} \tag{2.75}$$

ซึ่ง E_o เป็นค่าคงที่ที่แสดงขนาดของสนามตกกระทบ และ θ คือ มุมตกกระทบที่แสดงในรูปที่ 2.5 ทำให้ได้เงื่อนไขความต่อเนื่องของสนาม ณ เส้นตั้งฉากในแนวแกน x ค่าสนาม

โดยรวมจะต้องมีตัวประกอบสามัญ $e^{-jk_0 y\sin\theta}$ พร้อมนี้การสังเกต สมการเฮมม์โฮส (Helmhotz) จะช่วยลดรูปสนามไฟฟ้า E_z เป็น

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{dE_z}{dx}\right)+k_0^2\left(\varepsilon_r-\frac{1}{\mu_r}\sin^2\theta\right)E_z=0 \qquad (2.76)$$

เงื่อนไขขอบเขตเพื่อที่กำหนดให้ E_z เป็นเงื่อนไขขอบเขตไดริทช์เลท

$$E_z\big|_{x=0}=0 \qquad (2.77)$$

ในลักษณะเดียวกัน สำหรับกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z คลื่นตกกระทบสามารถแสดงโดย

$$H_z^{inc}(x,y)=H_0 e^{jk_0 x\cos\theta-jk_0 y\sin\theta} \qquad (2.78)$$

สนามแม่เหล็กทั้งหมดตรงตามสมการเฮมม์โฮส

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dH_z}{dx}\right)+k_0^2\left(\mu_r-\frac{1}{\varepsilon_r}\sin^2\theta\right)H_z=0 \qquad (2.79)$$

และเงื่อนไขขอบเขตนิวมานน์

$$H_z\big|_{x=0}=0 \qquad (2.80)$$

2.5 การหาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

ปัญหานี้โดเมนจะอยู่ในช่วงอนันต์ $(0\le x<\infty)$ แต่วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ไม่สามารถใช้กับโดเมนที่ไม่จำกัด ดังนั้นเราจำเป็นที่จะต้องลดโดเมนลงโดยใช้ขอบเขตเทียมด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพ ขอบเขตเทียมควรจะเป็นโดเมนที่มีขนาดเล็กที่สุดที่เป็นไปได้ สำหรับในปัญหานี้จะให้ $x=L$, เมื่อ L แสดงเป็นความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริก

ต่อไปเราจะหาเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมของขอบเขตนี้ หมายเหตุ นอกแผ่นไดอิเล็ก-ตริก ผลรวมของสนามจะแสดงในรูปซุปเปอร์โพสิชันในสนามตกกระทบและสนามสะท้อน สำหรับในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z จะได้ว่า

$$E_z(x)=E_0 e^{jk_0 x\cos\theta}+RE_0 e^{-jk_0 x\cos\theta} \qquad x>L \qquad (2.81)$$

เมื่อ R แสดงเป็นค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนและตัวประกอบร่วม $e^{-jk_0 y\sin\theta}$ จะถูกยกเลิก ทำการอนุพันธ์ E_z เทียบ x จะได้

$$\frac{dE_z}{dx}=jk_0\cos\theta\left(E_0 e^{jk_0 x\cos\theta}-RE_0 e^{-jk_0 x\cos\theta}\right) \qquad x>L \qquad (2.82)$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{dE_z}{dx} = 2jk_0\cos\theta E_0 e^{jk_0 x\cos\theta} - jk_0\cos\theta E_z(x) \qquad x > L \tag{2.83}$$

หรือ

$$\left[\frac{dE_z}{dx} + jk_0\cos\theta E_z(x)\right]_{x=L+0} = 2jk_0\cos\theta E_0 e^{jk_0 L\cos\theta} \tag{2.84}$$

เงื่อนไขนี้สามารถใช้ได้กับขอบเขตภายนอกพื้นผิวแผ่นไดอิเล็กตริก เมื่อ $\mu_r = 1$ ถ้าอยู่ภายในพื้นผิวแผ่นไดอิเล็กตริก เงื่อนไขขอบเขตจะหาได้จาก (2.84) โดยเห็นว่า

$$E_x\big|_{x=L-0} = E_z\big|_{x=L0} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{\mu_r}\frac{dE_x}{dx}\bigg|_{x=L-0} = \frac{dE_z}{dx}\bigg|_{x=L+0} \tag{2.85}$$

ซึ่งเป็นผลมาจากเงื่อนไขความต่อเนื่องสำหรับ E_z และ H_z ดังนั้นเราจะพบว่า

$$\left[\frac{1}{\mu_r}\frac{dE_z}{dx} + jk_0\cos\theta E_z(x)\right]_{x=L-0} = 2jk_0\cos\theta E_0 e^{jk_0 L\cos\theta} \tag{2.86}$$

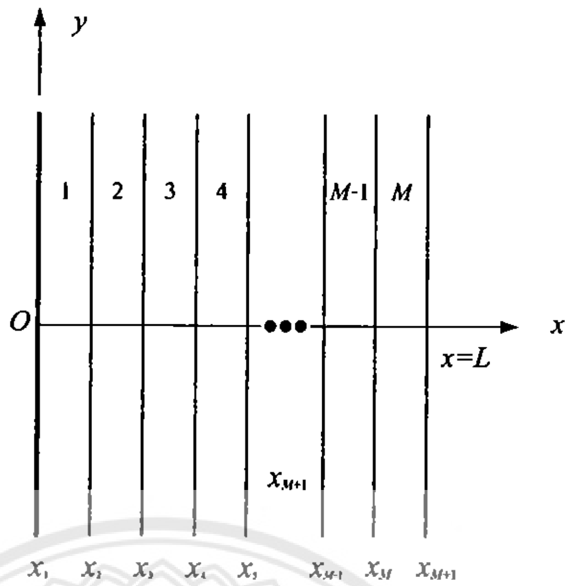
ในลักษณะเดียวกัน สำหรับกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เราสามารถหาเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดบน H_z คือ

$$\left[\frac{dH_z}{dx} + jk_0\cos\theta H_z(x)\right]_{x=L+0} = 2jk_0\cos\theta H_0 e^{jk_0 L\cos\theta} \tag{2.87}$$

หรือ

$$\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dH_z}{dx} + jk_0\cos\theta H_z(x)\right]_{x=L-0} = 2jk_0\cos\theta H_0 e^{jk_0 L\cos\theta} \tag{2.88}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดโดย (2.76) และ (2.79) เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดโดย (2.77) และ (2.80) ที่ $x = 0$ และที่ $x = L$ เราสามารถดำเนินการเพื่อใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา ขั้นแรกจะต้องแบ่งแผ่นไดอิเล็กตริกหรือโดเมน $(0,L)$ เป็นชั้นๆ จนถึงชั้น M แต่ละชั้นจะเรียกว่า อิลีเมนต์ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 การแบ่งแผ่นไดอิเล็กตริกเป็นท่อนบางๆจำนวน M ชั้น

เปรียบเทียบ (2.76) กับ (2.34) และ (2.84) หรือ (2.86) กับ (2.36) ในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z จะได้

$$\phi = E_z, \qquad \alpha = \frac{1}{\mu_r}, \qquad \beta = -k_0^2\left(\varepsilon_r - \frac{1}{\mu_r}\sin^2\theta\right) \tag{2.89}$$

$$\gamma = jk_0\cos\theta, \qquad q = 2jk_0\cos\theta E_0 e^{jk_0 L\cos\theta} \tag{2.90}$$

ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนหาได้จาก (2.81)

$$R = \frac{E_z(x=L) - E_0 e^{jk_0 L\cos\theta}}{E_0 e^{-jk_0 L\cos\theta}} \tag{2.91}$$

สำหรับกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z จะได้ว่า

$$\phi = H_z, \qquad \alpha = \frac{1}{\varepsilon_r}, \qquad \beta = -k_0^2\left(\mu_r - \frac{1}{\varepsilon_r}\sin^2\theta\right) \tag{2.92}$$

$$\gamma = jk_0\cos\theta, \qquad q = 2jk_0\cos\theta H_0 e^{jk_0 L\cos\theta} \tag{2.93}$$

ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน

$$R = \frac{H_z(x=L) - H_0 e^{jk_0 L\cos\theta}}{H_0 e^{-jk_0 L\cos\theta}} \tag{2.94}$$

บทที่ 3

ผลการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ โดยอาศัยหลักการและทฤษฎีในบทก่อนหน้านี้ ในการซึ่งการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำจะศึกษาในสองกรณีคือ คลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z และคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z โดยการอาศัยหลักการวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

3.1 คลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z

คลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z ซึ่งหมายถึงคลื่นระนาบที่มีสนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ z เพียงตัวเดียว ในที่นี้แสดงได้ตามสมการ (2.75)

กำหนดแผ่นไดอิเล็กตริกมีค่า $\varepsilon_r = 4 + (2 - j0.1)(1 - x/L)^2$ เมื่อ $\mu_r = 2 - j0.1$ และ $L = 5\lambda$

การวิเคราะห์โดยอาศัยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สามารถพิจารณาได้จากสมการ β และ α ตามสมการ (2.89ก) โดยมีค่าดังนี้

$$\beta = -k_0^2\left(\left(4 + (2 - j0.1)(1 - x/5\lambda)^2\right) - \frac{1}{2 - j0.1}\sin^2\theta\right)$$

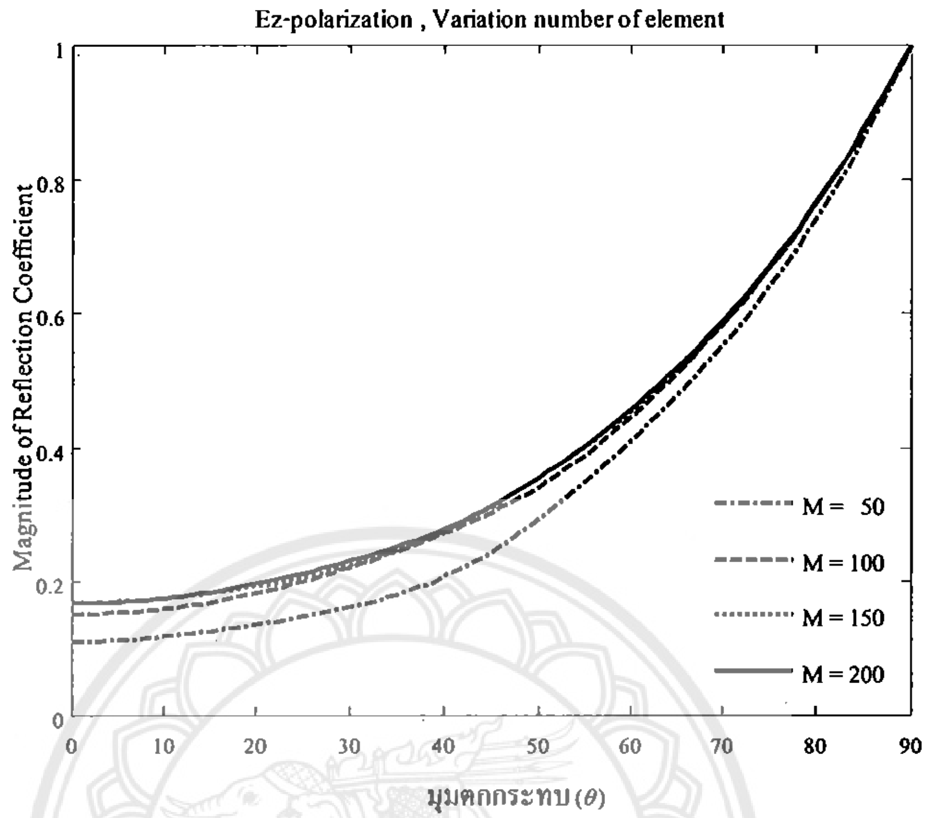
และ

$$\alpha = \frac{1}{2 - j0.1}$$

รวมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบไดริทซ์เลทตามสมการ (2.76) สัมประสิทธิ์การสะท้อนสามารถหาได้จากสนามไฟฟ้าที่โนด M+1

$$R = \frac{E_z(x = L) - e^{j10\pi\cos\theta}}{e^{-j10\pi\cos\theta}}$$

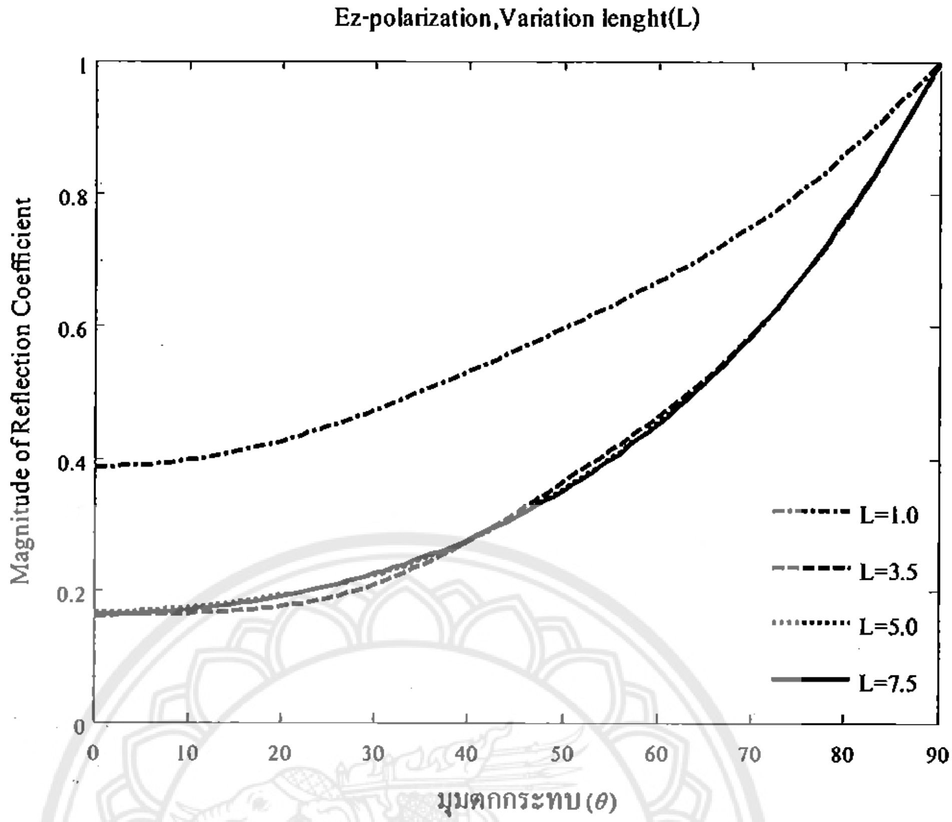
ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร



รูปที่ 3.1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z เมื่อแปรเปลี่ยนจำนวนอีลีเมนต์ (M)

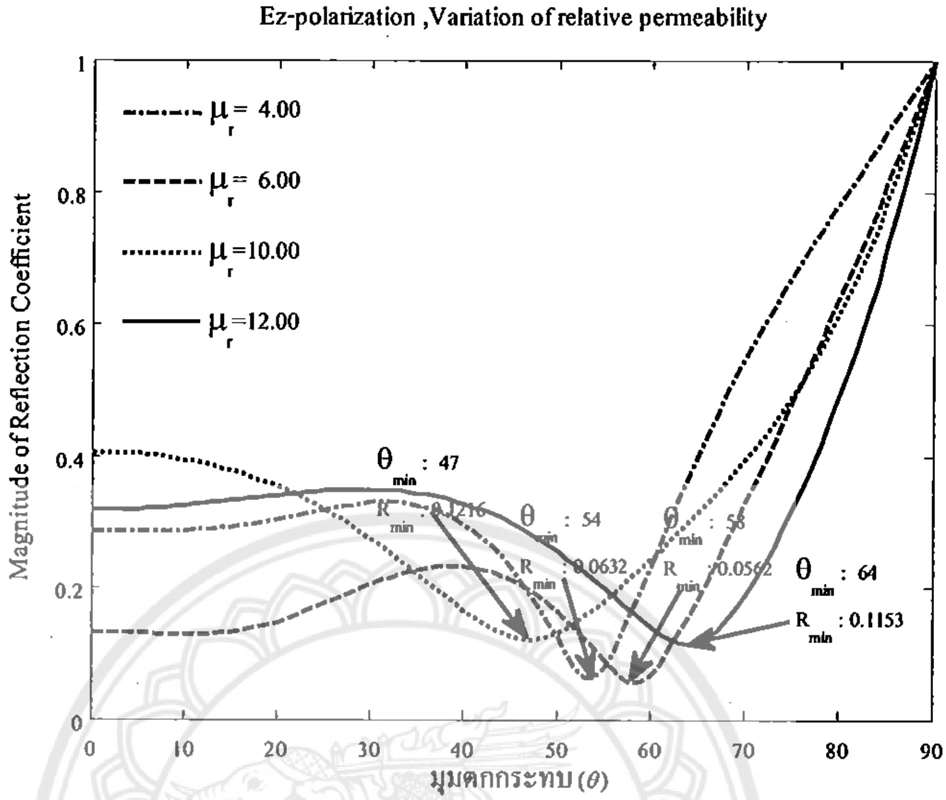
รูปที่ 3.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z เมื่อแปรเปลี่ยนจำนวนอีลีเมนต์ (M) แกนนอนจะเป็นมุมตกกระทบ (θ) ที่เกิดจากการวัดเทียบกับแกน x ดังแสดงในรูปที่ 2.5 และแกนตั้งของกราฟแสดงเป็นขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน M แสดงเป็นจำนวนของอีลีเมนต์ โดยให้ M มีค่าเป็น 50, 100, 150 และ 200 เส้นกราฟทั้งสี่เส้นขนาดสัมประสิทธ์การสะท้อนเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องและเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา และกราฟจะลู่เข้าเมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 150

15732566
ฟง.
ว 392ว
2563



รูปที่ 3.2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z เมื่อแปรเปลี่ยนความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริก (L)

รูปที่ 3.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z เมื่อแปรเปลี่ยนความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริก (L) แกนนอนจะเป็นมุมตกกระทบ (θ) เช่นเดียวกับรูปที่ 3.1 และแกนตั้งจะเป็นขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน ความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริกมีค่าเป็น $L = 1\lambda$, 3.5λ , 5λ และ 7.5λ เพื่อจะรักษาความยาวในแต่ละอีลีเมนต์เท่ากัน จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้มีค่า M = 30, 105, 150 และ 225 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อ L มากกว่า 3.5λ เส้นกราฟทั้งสี่เส้นจะให้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่ใกล้เคียงกัน และเมื่อมุมตกกระทบมีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา



รูปที่ 3.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z เมื่อแปรเปลี่ยนค่าซึมซาบสัมพัทธ์ (μ_r)

กำหนดแผ่นไดอิเล็กตริกมีค่าเป็น $\varepsilon_r = 4 + (2 - j0.1)(1 - x/L)^2$ และ $L = 5\lambda$

รูปที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z เมื่อแปรเปลี่ยนค่าซึมซาบสัมพัทธ์ $\mu_r = 4, 6, 10$ และ 12 จำนวนของอีลีเมนต์จะใช้ $M = 150$ สำหรับกราฟแต่ละกรณีจะมีการปรากฏของขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดหนึ่งค่า ซึ่งในที่นี้ได้แก่ 0.0632, 0.0562, 0.1216 และ 0.1153 ตามลำดับ สำหรับกรณีที่ $\mu_r = 4, 6, 10$ และ 12 ซึ่งจะแสดงตำแหน่งดังตารางที่ 3.1 และนับจากค่าเหล่านี้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา

ตารางที่ 3.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดและมุมตกกระทบที่สอดคล้องกันในกรณีการโพราไรซ์แบบ E_z เมื่อแปรเปลี่ยนค่าซึมซาบสัมพัทธ์ (μ_r)

ค่าซึมซาบสัมพัทธ์ (μ_r)	**มุมตกกระทบ (องศา)**	**ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน** $\lvert R_{min} \rvert$
4.00	54	0.0632
6.00	58	0.0562
10.00	47	0.1216
12.00	64	0.1153

3.2 คลื่นที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z

คลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z ซึ่งหมายถึงคลื่นระนาบที่มีสนามแม่เหล็กในองค์ประกอบ z เพียงตัวเดียว ในที่นี้แสดงได้ตามสมการ (2.77)

กำหนดแผ่นไดอิเล็กตริกมีค่าดังนี้ $\varepsilon_r = 4 + (2 - j0.1)(1 - x/L)^2$, $\mu_r = 2 - j0.1$ และ $L = 5\lambda$

การวิเคราะห์โดยอาศัยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สามารถพิจารณาได้จากสมการ β และ α ตามสมการ (2.91ก) โดยมีค่าดังนี้

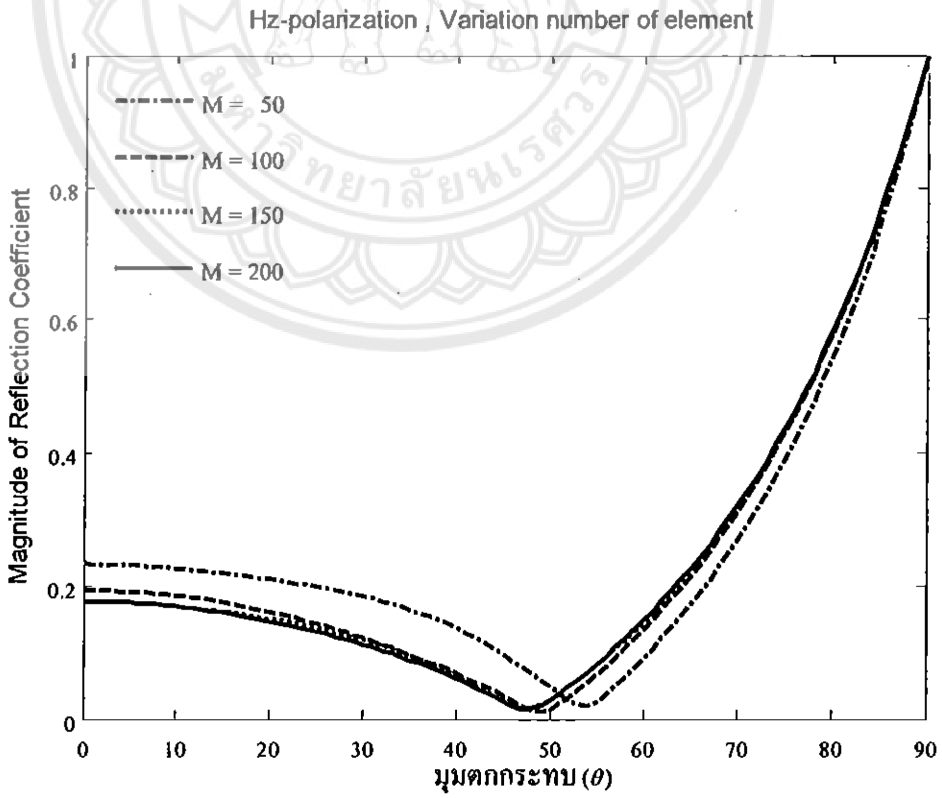
$$\beta = -k_0^2\left(2 - j0.1 - \frac{1}{4 + (2 - j0.1)(1 - x/5\lambda)^2}\sin^2\theta\right)$$

และ

$$\alpha = \frac{1}{4 + (2 - j0.1)(1 - x/5\lambda)^2}$$

รวมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบไดริทช์เลทตามสมการ (2.78) สัมประสิทธิ์การสะท้อนสามารถหาสนามแม่เหล็กได้จากที่โนด M+1

$$R = \frac{H_z(x = L) - e^{j10\pi\cos\theta}}{e^{-j10\pi\cos\theta}}$$

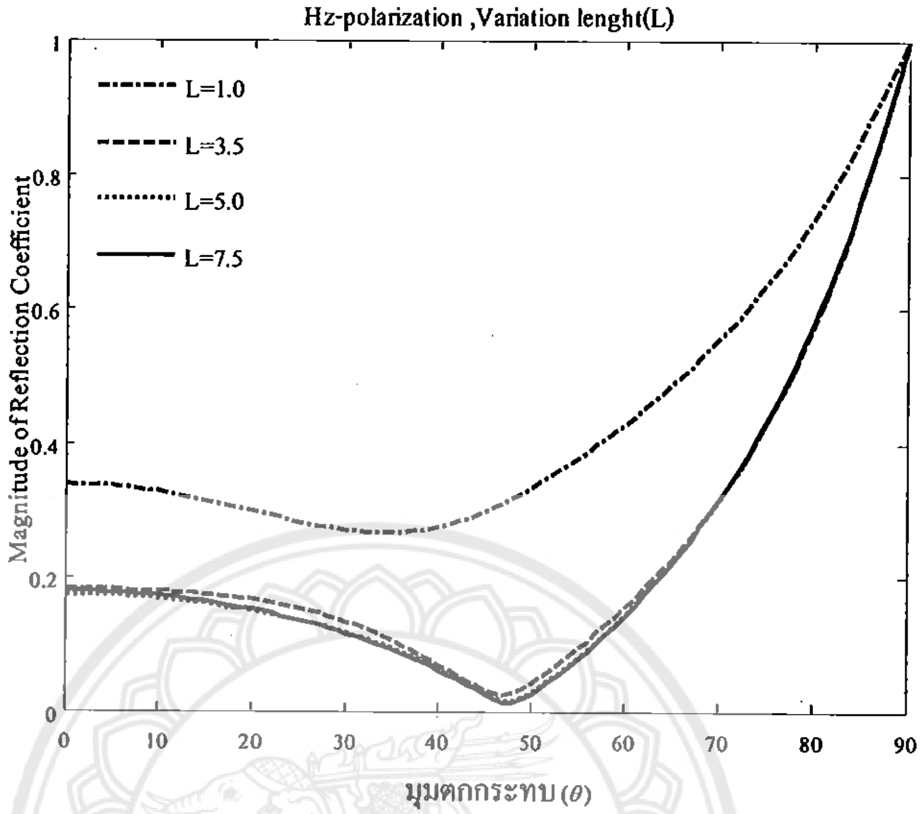


รูปที่ 3.4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนจำนวนอีลีเมนต์ (M)

รูปที่ 3.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนจำนวนอีลีเมนต์ (M) แกนนอนจะแสดงเป็นมุมตกกระทบ (θ) และแกนตั้งจะแสดงเป็นขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน เมื่อ M เป็นจำนวนของอีลีเมนต์ โดยให้ M มีค่าเป็น 50, 100, 150 และ 200 กราฟแต่ละกรณีจะปรากฏขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดหนึ่งค่า ซึ่งในที่นี้ได้แก่ 0.2670, 0.0100, 0.0158 และ 0.0147 ตามลำดับ สำหรับกรณีที่ M = 50, 100, 150 และ 200 ซึ่งจะแสดงตำแหน่งดังตารางที่ 3.2 และนับจากค่าเหล่านี้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา กราฟนี้จะลู่เข้าเมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 150

ตารางที่ 3.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดและมุมตกกระทบ ที่สอดคล้องกันในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนจำนวนอีลีเมนต์ (M)

M (อีลีเมนต์)	มุมตกกระทบ (องศา)	ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน $\lvert R_{min} \rvert$
50	34	0.2670
100	49	0.0100
150	48	0.0158
200	47	0.0147

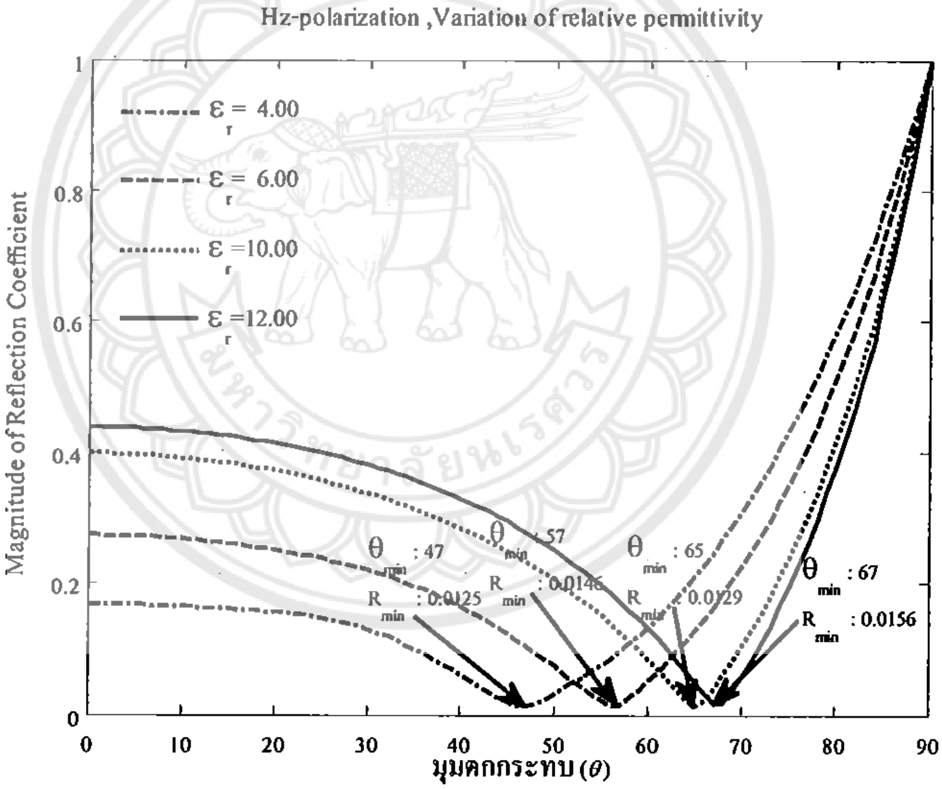


รูปที่ 3.5 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริก (L)

รูปที่ 3.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริก (L) ความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริกมีค่าเป็น $L = 1\lambda$, 3.5λ, 5λ และ 7.5λ เพื่อจะรักษาความยาวในแต่ละอีลีเมนต์เท่ากัน จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้มีค่า $M = 30, 105, 150$ และ 225 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อ L มากกว่า 3.5λ กราฟทั้งสี่เส้นจะให้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่ใกล้เคียงกัน และเมื่อมุมตกกระทบเพิ่มขึ้น กราฟแต่ละกรณีจะปรากฏของขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดหนึ่งค่า ซึ่งในที่นี้ได้แก่ 0.2670, 0.0262, 0.0132 และ 0.0158 ตามลำดับ สำหรับกรณีที่ $L = 1\lambda$, 3.5λ, 5λ และ 7.5λ ซึ่งจะแสดงตำแหน่งดังตารางที่ 3.3 และนับจากค่าเหล่านี้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นและเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา

ตารางที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดและมุมตกกระทบที่สอดคล้องกัน ในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนความหนาของแผ่นไดอิเล็กตริก (L)

M (อีลีเมนต์)	L ($\times\lambda$)	มุมตกกระทบ (องศา)	ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน $\lvert R_{min}\rvert$
30	1.0	34	0.2670
105	3.5	47	0.0262
150	5.0	48	0.0132
225	7.5	48	0.0158



รูปที่ 3.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนค่าสภาพยอมสัมพันธ์ (ε_r)

กำหนดแผ่นไดอิเล็กตริกมีค่าเป็น $\mu_r = 2 - j0.1$ และ $L = 5\lambda$

รูปที่ 3.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับมุมตกกระทบ ในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อค่าสภาพยอมสัมพันธ์มีค่าเป็น 4, 6, 10 และ 12 จำนวนของอีลีเมนต์จะใช้ 150 สำหรับกราฟแต่ละกรณีจะปรากฏของขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดหนึ่งค่า ซึ่งในที่นี้ได้แก่ 0.0125, 0.0129, 0.0129 และ 0.0156 ตามลำดับ สำหรับกรณีที่ ε_r = 4, 6, 10 และ 12 ซึ่งจะแสดงตำแหน่งดังตารางที่ 3.4 และนับจากค่าเหล่านี้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นและเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา

ตารางที่ 3.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดกับมุมตกกระทบที่สอดคล้องในกรณีการโพราไรซ์แบบ H_z เมื่อแปรเปลี่ยนค่าสภาพยอมสัมพันธ์ (ε_r)

สภาพยอมสัมพันธ์ (ε_r)	มุมตกกระทบ (องศา)	ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อน $\lvert R_{min} \rvert$
4.00	47	0.0125
6.00	56	0.0129
10.00	65	0.0129
12.00	67	0.0156

มหาวิทยาลัยนเรศวร

บทที่ 4

สรุปผลการวิเคราะห์และข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิเคราะห์

การวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำจะได้รับการวิเคราะห์โดยอาศัยหลักการวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบริทซ์และเงื่อนไขขอบเขตเทียม ซึ่งจะพิจารณาคลื่นโพราไรซ์สองแบบคือ การโพราไรซ์แบบ E_z และ H_z ผลการวิเคราะห์จะแสดงให้เห็นว่า สำหรับกรณีคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา ส่วนในกรณีคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z จะปรากฏขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนต่ำสุดหนึ่งค่า และนับจากค่านี้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าเท่ากับ 1 ที่ 90 องศา

4.2 ข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำที่เสนอมานี้ อาศัยหลักการวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบริทซ์และเงื่อนไขขอบเขตเทียม ทำให้ได้ขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนในกรณีของคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z และคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z ซึ่งวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และงานทางวิศวกรรม และสามารถประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาในหลายลักษณะ รวมถึงให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องและแม่นยำ แต่เนื่องจากการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำที่ได้นำเสนอนี้เป็นเพียงการวิเคราะห์ในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการจำลองทางทฤษฎีเท่านั้น ในการใช้งานจริงอาจมีปัจจัยภายนอกที่เกี่ยวข้องที่อาจทำให้ผลการวิเคราะห์นี้คลาดเคลื่อนไปบ้าง

เอกสารอ้างอิง

[1] Jianming Jin. (1938). **The Finite Element Method In Electromagnetics**, United States of America : John Wiley & Sons.

[2] Matthew N.O. Sadiku. (1992). **Numerical Techniques in Electromagnetics**, Boca Raton Lodon Tokyo:CRC Press.

[3] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2537). **ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม**. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[4] ผศ.ดร.ธงชัย ฟองสมุทร. (2549). **วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เบื้องต้น**. มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[5] พรชัย พุกอูต. (2550). **การวิเคราะห์กลุ่มสายอากาศเส้นตรงระยะห่างคงรูปและแอมพลิจูดไม่คงรูป**. ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ภาคผนวก ก

การให้เงื่อนไขขอบเขตแบบไดริทซ์เลท

ภาคผนวก ก

การให้เงื่อนไขขอบเขตแบบไดริทช์เลท

เงื่อนไขขอบเขตแบบไดริทช์เลทจะพบในการโพราไรซ์แบบ E_z จะอยู่ในรูปทั่วไป ถ้ากำหนดให้เงื่อนไขขอบเขตแบบไดริทช์เลท ณ ตำแหน่ง $x = 0$ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ ϕ จะมีสามารถเขียนได้เป็นค่าสมการดังนี้

$$\phi\Big|_{x=0} = p \tag{ก.1}$$

และโนด 1 วางอยู่ ณ $x = 0$ จะได้สมการ

$$\phi_1 = p \tag{ก.2}$$

เมื่อกำหนดให้

$$K_{11} = 1, \qquad b_{11} = p, \qquad K_{1j} = 0, \qquad j = 2, 3, 4, \ldots, N. \tag{ก.3}$$

เมื่อ N แสดงเป็นจำนวนโนด และแทนค่าของสมการ (ก.3) จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \tag{ก.4}$$

เมื่อ ϕ_2, ϕ_3 และ ϕ_4 เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และเมื่อย้าย $K_{i1} = 0$, $i = 2, 3, 4, \ldots, N.$ ไปทางขวามือจะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ b_2 - K_{21}p \\ b_3 - K_{31}p \\ b_4 - K_{41}p \end{Bmatrix} \tag{ก.5}$$

จากสมการ (ก.5) และ $\{\phi\}$ จะมีค่าที่ไม่ทราบสามตัวแปร เพื่อที่จะหาค่าตัวแปรโดยอาศัยวิธีการเชิงตัวเลขจะลดจำนวนสมการในเมตริกให้เท่ากับตัวแปร ซึ่งสามารถทำได้โดยการตัดแถวและตัดหลัก

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_2 - K_{21}p \\ b_3 - K_{31}p \\ b_4 - K_{41}p \end{Bmatrix} \tag{ก.6}$$

ภาคผนวก ข

โปรแกรมการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ

ภาคผนวก ข
โปรแกรมการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ

โปรแกรม MATLAB ได้รับการพัฒนาเพื่อใช้ในการวิเคราะห์การสะท้อนคลื่นระนาบโดยแผ่นไดอิเล็กตริกรองรับด้วยระนาบตัวนำ ซึ่งจะพิจารณาในสองกรณีคือ คลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z และคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z

โปรแกรมหาขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกรณีคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z

โปรแกรม MATLAB ได้รับการประยุกต์ขึ้นเพื่อหาขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกรณีคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ E_z โดยอาศัยหลักการไฟไนต์อีลีเมนต์และสมการ (2.89)-(2.91) ซึ่งเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
%Reflection Coefficient of Ez-polarization
clear all
clc


ne=50;     %number of elements
nd=ne+1;   %number of nodes
ii=1;


%**********************************************************
%*******************Initualization*******************
%**********************************************************


ur=2-(i*0.1);       %relative permeability
a=1/ur;             %alpha
L=5;                %dielectric slab has thickness
k=2*pi;
```

```
%****************************************************
%************Establish local to global node************
%****************************************************


for m=1:1:ne
 nl(m,1)=m;
 nl(m,2)=m+1;
end


%****************************************************
%****************Corordinate of nodes****************
%****************************************************


step=L/ne;
for m=1:nd
 x(m,1)=(m-1)*step;
end


%****************************************************
%****************************************************
%****************************************************


for theta=0:1:90          %theta for degree
 thetas=theta*pi/180;     %theta for radial


 K=zeros(nd,nd);
 b=zeros(nd,1);


 for m=1:1:ne
  x1=x(m,1);
  x2=x(m+1,1);
  x_avg=(x1+x2)/2;
  Le=x2-x1;


  temp1=1-(x_avg/L);
  er(m,1)=4+(2-(i*0.1))*temp1;     %relative permittivity
```

```
 temp2=a*(sin(thetas))^2;
 beta=-((k^2)*(er(m,1)-temp2));    %beta

 %*****************************************************
 %*****************************************************
 %*****************************************************

 for mm=1:1:2
  for nn=1:1:2
   ir=nl(m,mm);
   ic=nl(m,nn);

   if ir==ic
    Kl(mm,nn)=(a/Le)+beta*(Le/3);
    K(ir,ic)=K(ir,ic)+Kl(mm,nn);
   else
    Kl(mm,nn)=-(a/Le)+beta*(Le/6);
    K(ir,ic)=K(ir,ic)+Kl(mm,nn);
   end

  end %for nn
 end  %for mm
end   %for m

%*****************************************************
%***************Impose boundary condition**************
%*****************************************************

gamma=i*k*cos(thetas);       %gamma
K(nd,nd)=K(nd,nd)+gamma;

temp3=exp(L*i*k*cos(thetas));
q=2*i*k*cos(thetas)*temp3;

b(nd,1)=q;
```

```
K(1,:)=[];
K(:,1)=[];
b(1,:)=[];
%*****************************************************
%***************phi or Ez-polarization***************
%*****************************************************


phi=inv(K)*b;
temp4=exp(i*k*L*cos(thetas));
temp5=exp(-i*k*L*cos(thetas));


%*****************************************************
%***************Reflection Coefficient***************
%*****************************************************


R=(phi((nd-1),1)-temp4)/temp5;


temp6(ii)=[R];          %Keep variable R
ii = ii+1;
temp7(ii-1)=theta;      %Keep variable theta


%*****************************************************
%***********************end***********************
%*****************************************************
end   %for theta
temp8=abs(temp6);             %absolute of variable R
plot(temp7,temp8,'--k');      %plot theta(degree)and
                              Reflection Coefficient(R)
axis([0,90,0,1])
legend('M=50 ',4)
title('Ez-polarization')
xlabel('\theta(degrees)');ylabel('Reflection Coefficient')
```

โปรแกรมหาขนาดสัมประสิทธิ์การสะท้อนกรณีคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z

การประยุกต์ใช้โปรแกรม MATLAB เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนกรณีคลื่นตกกระทบที่มีการโพราไรซ์แบบ H_z ซึ่งจะอาศัยวิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์และสมการ (2.92)-(2.94) ซึ่งเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
%Reflection Coefficient of Hz-polarization
clear all
clc


ne=50;     %number of elements
nd=ne+1;   %number of nodes
ii = 1;


%*****************************************************
%*******************Initualization*******************
%*****************************************************


ur=2-(i*0.1);     %relative permeability
L=5;              %dielectric slab has thickness
k=2*pi;


%*****************************************************
%************Establish local to global node************
%*****************************************************



for m=1:1:ne
 nl(m,1)=m;
 nl(m,2)=m+1;
end
```

```
%*****************************************************
%****************Corordinate of nodes****************
%*****************************************************

step=L/ne;
for m=1:nd
 x(m,1)=(m-1)*step;
end

%*****************************************************
%*****************************************************
%*****************************************************

for theta=0:1:90;         %theta of degree
 thetas=theta*pi/180;     %theta of radial

 K=zeros(nd,nd);
 b=zeros(nd,1);

 for m=1:1:ne
  x1=x(m,1);
  x2=x(m+1,1);
  x_avg=(x1+x2)/2;
  Le=x2-x1;

  temp1=1-(x_avg/L);
  er(m,1)=4+(2-(i*0.1))*temp1;        %relative permittivity
  a=1/er(m,1);                         %alpha
  temp2=a*(sin(thetas))^2;
  beta=-((k^2)*(ur-temp2));           %beta

%*****************************************************
%*****************************************************
%*****************************************************
```

```
  for mm=1:1:2
   for nn=1:1:2
    ir=nl(m,mm);
    ic=nl(m,nn);

    if ir==ic
     Kl(mm,nn)=(a/Le)+beta*(Le/3);
     K(ir,ic)=K(ir,ic)+Kl(mm,nn);
    else
     Kl(mm,nn)=-(a/Le)+beta*(Le/6);
     K(ir,ic)=K(ir,ic)+Kl(mm,nn);
    end

   end %for nn
  end  %for mm
end   %for m

%*********************************************************
%**************Impose boundary condition*************
%*********************************************************

gamma=i*k*cos(thetas);                     %gamma
K(nd,nd)=K(nd,nd)+gamma;

temp3=exp(L*i*k*cos(thetas));
q=2*i*k*cos(thetas)*temp3;

b(nd,1)=q;

K(1,:)=[];
K(:,1)=[];
b(1,:)=[];
```

```
%*****************************************************
%***************phi or Hz-polarization***************
%*****************************************************

phi=inv(K)*b;
temp4=exp(i*k*L*cos(thetas));
temp5=exp(-i*k*L*cos(thetas));

%*****************************************************
%***************Reflection Coefficient***************
%*****************************************************

R=(phi((nd-1),1)-temp4)/temp5;

temp6(ii)=[R];        %Keep variable R
ii = ii+1;
temp7(ii-1)=theta;    %Keep variable theta

%*****************************************************
%***********************end***************************
%*****************************************************
end   %for theta

temp8 = abs(temp6);             %absolute of variable R
plot(temp7,temp8,'--k');        %plot theta(degree) and
                                Reflection Coefficient(R)
axis([0,90,0,1])
legend('M = 50 ',4)
title('Hz-polarization')
xlabel('\theta(degrees)');ylabel('Reflection Coefficient')
```

ประวัติผู้ดำเนินโครงงาน

ชื่อ นางสาวกันยาลักษณ์ เกตุสุวรรณ์

ภูมิลำเนา 172 หมู่ 8 ต. ชัยนาม อ.วังทอง จ.พิษณุโลก

ประวัติการศึกษา

- จบระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนวังทองพิทยาคม จ.พิษณุโลก
- ปัจจุบันกำลังศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

Email: **kanyalak_ketsuwan@hotmail.com**