การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม

ANALYSIS OF CIRCULAR CROSS-SECTION WAVEGUIDES

นางสาวศิริขวัญ โพธาเจริญ รหัส 47380427

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2550

ใบรับรองโครงงานวิศวกรรม

หัวข้อโครงงาน	การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม
ผู้ดำเนินโครงงาน	นางสาวศิริขวัญ โพธาเจริญ รหัส 47380427
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ชัยรัตน์ พินทอง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2550

....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้โครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะกรรมการการสอบโครงงานวิศวกรรม

....ประธานกรรมการ
(ดร.ชัยรัตน์ พินทอง)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชา)

....กรรมการ
(อาจารย์แสงชัย มังกรทอง)

หัวข้อโครงงาน	การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม
ผู้ดำเนินโครงงาน	นางสาวศิริขวัญ โพธาเจริญ รหัส 47380427
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ชัยรัตน์ พินทอง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2550

บทคัดย่อ

โครงงานนี้เป็นการศึกษาและวิเคราะห์คุณลักษณะของท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม ซึ่งจะเน้นการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก โดยการวิเคราะห์จะใช้สมการแมกซ์เวลล์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ไขปัญหาและกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของท่อนำคลื่นทั้งสองกรณี สำหรับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงถึง ค่าคงตัวเฟส ความถี่ตัด และแบบแผนคลื่น ซึ่งแบบแผนคลื่นเป็นใหญ่ ก็คือ แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง TE_{11} ซึ่งจะมีค่าความถี่ตัดเกิดขึ้นด้วย สนามไฟฟ้าตามขวางจะสามารถนำมาวาดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นและแสดงถึงขนาดและทิศทางของสนามไฟฟ้า สำหรับท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกขอบเขตภายนอกจะได้รับการเรียกว่าชั้นห่อหุ้ม แบบแผนคลื่นพื้นฐานก็คือแบบแผนคลื่นแบบผสม HE_{11} แบบแผนคลื่นชนิดนี้จะไม่มีความถี่ตัดเกิดขึ้น จึงทำให้การประยุกต์ใช้งานในย่านความถี่นี้ค่อนข้างกว้าง โครงงานนี้ได้พัฒนาโปรแกรม MATLAB พร้อมด้วยการเชื่อมต่อกับผู้ใช้ภายนอกสำหรับท่อนำคลื่นทั้งสองชนิดนี้ ซึ่งสามารถลดระยะเวลาในการคำนวณและทำให้การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นสะดวกยิ่งขึ้น

Project Title	Analysis of Circular Cross – Section Waveguides.
Name	Miss.Sirikhwan Phodhacharoen ID.47380427
Project Advisor	Chairat Pinthong , Ph.D
Major	Electrical Engineering.
Department	Electrical and Computer Engineering.
Academic Year	2007

....

ABSTRACT

This project is the study and analysis of the characteristics of circular waveguides emphasizing on waveguide with perfect conductor and dielectric waveguides. The Maxwell's equations with appropriate boundary condition are applied to solve both cases of problem. For the first waveguide case, the result including phase constant, cut-off frequency and field pattern are shown. The dominant mode is TE_{11} and has a cut-off frequency. Transverse electric field are plotted on the cross section of the waveguide displaying the field's direction and magnitude. For the dielectric waveguide case, the outer boundary is a dielectric called as cladding. The fundamental mode is hybrid mode referred to HE_{11}. The mode has no cut-off frequency leading to wide range of frequency operation. The MATLAB program together with graphic user interface is developed for both cases of waveguides, hence reducing computation time and making the analysis more convenient.

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานวิศวกรรมไฟฟ้าฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ผู้ดำเนินโครงงานขอขอบพระคุณบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือให้คำปรึกษา แนะนำ และให้ความอนุเคราะห์ในการดำเนินโครงงานตลอดมา จนสำเร็จดังนี้ พ่อและแม่ที่อบรมสั่งสอนเลี้ยงดูจนเติบใหญ่และสนับสนุนจนสำเร็จการศึกษา ดร.ชัยรัตน์ พินทอง อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ให้คำปรึกษาและแนะนำรวมทั้งให้ความช่วยเหลือตลอดมาจนโครงงานสำเร็จ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุรเชษฐ์ กานต์ประชา และอาจารย์แสงชัย มังกรทอง คณะกรรมการสอบโครงงานที่ให้คำแนะนำและเสียสละเวลาในการคุมสอบโครงงานนี้ สำนัก หอสมุด ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์ และศูนย์บริการเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร (CITCOM) มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ในการสืบค้นเนื้อหาและข้อมูลต่างๆรวมถึงการสืบค้นข้อมูลทางอินเตอร์เน็ตประกอบการทำโครงงาน

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณเพื่อนๆทุกคนและบุคลากรท่านอื่นๆที่ไม่ได้กล่าวถึง ที่ได้ให้คำปรึกษาและให้ความอนุเคราะห์ในการดำเนินโครงงานจนสำเร็จ

นางสาวศิริขวัญ โพธาเจริญ

ผู้จัดทำโครงงาน

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของโครงงาน

ในปัจจุบันท่อนำคลื่น (Waveguides) เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไปว่าเป็นส่วนประกอบสำคัญของระบบสื่อสารที่ใช้เป็นตัวกลางในการส่งผ่านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากต้นกำเนิดไปยังจุดหมายปลายทาง ท่อนำคลื่นจึงได้รับการพัฒนาให้ตอบสนองความต้องการในการใช้งานโดยเสมอมา และรูปร่างของท่อนำคลื่นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันออกไปมากมายหลากหลายรูปแบบด้วยกัน สมบัติที่ดีของท่อนำคลื่น ก็คือ มีการสูญเสียและสามารถรองรับกำลังได้สูง ซึ่งในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นนั้น เราจำเป็นที่จะต้องทราบคุณลักษณะของการแพร่กระจาย จะประกอบไปด้วยพารามิเตอร์เหล่านี้ คือ ความถี่ตัด (cutoff frequency) ค่าคงตัวเฟส (phase constant) แบบแผนคลื่น (mode) และรูปแบบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (field pattern) แต่สำหรับท่อนำคลื่นที่มีความซับซ้อนไม่มากนัก เราสามารถใช้สมการของแมกซ์เวลส์มาวิเคราะห์แทนได้

ในส่วนของโครงงานนี้ จะนำเสนอ การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลมในทางทฤษฎี ในสองลักษณะ คือ ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ และท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก โดยที่ในลักษณะแรกจะมีลักษณะเป็นข้อต่อที่รองรับการหมุนของสายอากาศในระบบเรดาห์ ส่วนในลักษณะที่สองจะเป็นท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกจะมีลักษณะคือ ไม่มีส่วนของตัวนำไฟฟ้าเป็นเปลือกหุ้ม ซึ่งได้รับการใช้งานในทางด้านการสื่อสารโดยใช้แสงเป็นตัวนำในการเดินทางของคลื่น โดยการเขียนโปรแกรม MATLAB วิเคราะห์ท่อนำคลื่นในลักษณะต่างๆ

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1.2.1 เพื่อศึกษาหลักการของท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางแบบวงกลม

1.2.2 เพื่อศึกษาพารามิเตอร์ต่างๆและศึกษาวิธีการแยกตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม

1.2.3 เพื่อศึกษาการเขียนโปรแกรม ที่ช่วยในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม

1.2.4 เพื่อนำความรู้ที่ได้มาไปประยุกต์ใช้ในงานออกแบบท่อนำคลื่นให้เหมาะสมกับงานสื่อสาร

1.2.5 เพื่อนำความรู้ที่ได้ไปเผยแพร่ให้กับผู้ที่สนใจ เพื่อที่จะทำการพัฒนาและศึกษาต่อไป

1.3 ขอบข่ายการทำโครงงาน

โครงงานนี้จะศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลมที่ไม่มีการสูญเสีย ได้แก่ ทฤษฎีของสมการแมกซ์เวลส์ ศักย์เชิงเวกเตอร์ และเงื่อนไขขอบเขต โดยจะแบ่งการศึกษาปัญหาออกเป็นสองกรณี ได้แก่

- ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบที่ไม่มีการสูญเสีย โดยทำการวิเคราะห์พารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง คือ ค่าคงตัวเฟส ค่าความถี่ตัด และแบบแผนคลื่น
- ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกที่ไม่มีการสูญเสีย โดยทำการวิเคราะห์พารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง คือ ค่าคงตัวเฟสและค่าความถี่ตัด

1.4 ตารางกิจกรรมการดำเนินโครงงาน

กิจกรรม	ปี 2550		ปี 2551			
	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาหลักการพื้นฐานและวิเคราะห์คุณลักษณะของท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก	←	→				
2. ศึกษาและพัฒนาโปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก			←	→		
3. รวบรวมข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์ท่อนำคลื่น					↔	
4. สรุปคุณสมบัติและคุณลักษณะของท่อนำคลื่น						↔

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้ความรู้ในการศึกษาหลักการของท่อนำคลื่น

1.5.2 ได้รู้จักพารามิเตอร์ต่างๆของท่อนำคลื่น

1.5.3 ได้ความรู้ในการเขียนโปรแกรมและโปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่น

1.5.4 ได้นำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริงได้ และนำไปพัฒนาคุณภาพงานให้มีศักยภาพที่ดีได้อย่างถูกต้อง

1.6 งบประมาณที่ใช้ในการทำโครงงาน

รายจ่าย	1. ค่าจัดทำเอกสาร		400	บาท
	2. ค่าวัสดุ อุปกรณ์สำนักงาน		200	บาท
	3. ค่าจัดทำรูปเล่มโครงงาน		300	บาท
	4. อื่นๆ		100	บาท
		รวม	1,000	บาท

หมายเหตุ : ขออนุญาตถัวเฉลี่ยทุกรายการ

รายรับ	ค่าดำเนินการโครงงานจากคณะ	1,000	บาท

บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

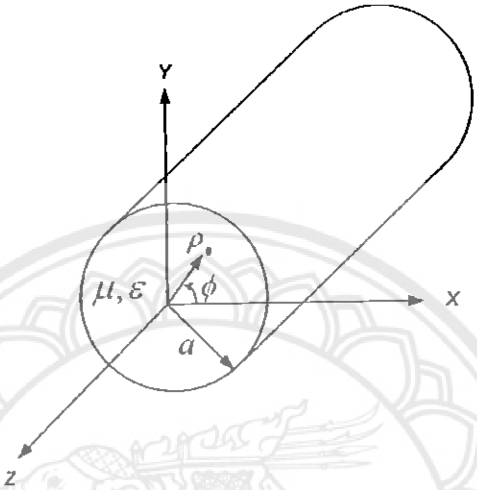
ในปัจจุบันท่อนำคลื่นมีบทบาทในระบบสื่อสารมากขึ้นโดยส่วนมากจะใช้ในการติดต่อสื่อสาร และมักจะมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป อาทิเช่น แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส แบบวงกลม และแบบวงรี เป็นต้น ในที่นี้จะกล่าวถึงทฤษฎีท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางแบบวงกลม ในสองลักษณะ คือ ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ และท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก ท่อนำคลื่นในลักษณะแรกโดยส่วนมากแล้วจะได้รับการใช้งานในส่วนของอุปกรณ์ที่เป็นข้อต่อที่มีลักษณะเป็นรูปทรงกระบอก ซึ่งจะมีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม ดังแสดงในรูปที่ 2.1 หรือมีลักษณะที่มีเกลียวหมุนด้านในเพื่อความสะดวกในการใช้งาน ส่วนท่อนำคลื่นในลักษณะที่สองจะได้รับการใช้งานในทางด้านการสื่อสาร โดยใช้แสงเป็นตัวนำในการเดินทางของคลื่น ดังแสดงในรูปที่ 2.2

รูปที่ 2.1 ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบในทางปฏิบัติ [2]

รูปที่ 2.2 ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกในทางปฏิบัติ [3]

2.1 ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ คือท่อนำคลื่นที่มีรูปทรงเป็นทรงกระบอกดังรูปที่ 2.3 จะมีแนวแกนอยู่ในทิศของ z และมีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลมในแนวแกน x และแกน y ในที่นี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์คุณสมบัติของท่อนำคลื่นแบบวงกลมที่ไม่มีการสูญเสีย



รูปที่ 2.3 ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบในทางทฤษฎี

2.1.1 แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE^z)

แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวางจะไม่มีส่วนประกอบสนามไฟฟ้าในทิศทางการแพร่กระจาย พฤติกรรมของคลื่นไฟฟ้าตามขวางสามารถได้มาจากการให้ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{F}$ มีค่าเท่ากับ

$$\mathbf{A} = 0 \tag{2.1}$$

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{a}}_z F_z(\rho, \phi, z) \tag{2.2}$$

ศักย์เชิงเวกเตอร์ $\mathbf{F}$ ต้องสอดคล้องกับสมการคลื่น ซึ่งในระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla^2(\hat{\mathbf{a}}_\rho F_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\phi F_\phi + \hat{\mathbf{a}}_z F_z) = -k_0^2(\hat{\mathbf{a}}_\rho F_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\phi F_\phi + \hat{\mathbf{a}}_z F_z) \tag{2.3}$$

โดยใช้ $\mathbf{F}$ ตาม (2.2) และ (2.3) จะลดรูปได้เป็น

$$\nabla^2 F_z(\rho,\phi,z) + k_0^2 F_z(\rho,\phi,z) = 0 \tag{2.4}$$

เมื่อขยายในพิกัดทรงกระบอกแล้ว (2.4) จะลดรูปได้เป็น

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + k_0^2 F_z = 0 \tag{2.5}$$

โดยวิธีการแยกตัวแปรผลเฉลยของ (2.5) คือ

$$\begin{aligned} F_z(\rho,\phi,z) = {} & [A_1 J_m(\beta_\rho \rho) + B_1 Y_m(\beta_\rho \rho)] \\ & \times [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)][\, A_3 e^{-j\beta_z z} + B_3 e^{+j\beta_z z}] \end{aligned} \tag{2.6}$$

โดยที่

$$\beta_\rho^2 + \beta_z^2 = k_0^2 \tag{2.7}$$

ค่าคงที่ของ $A_1, B_1, C_2, D_2, A_3, B_3, m, \beta_\rho$ และ β_z จะสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตและลักษณะทางกายภาพของพิกัดทรงกระบอก ดังนี้

$$E_\phi(\rho = a, \phi, z) = 0 \tag{2.8a}$$

The fields must be finite everywhere (2.8b)

The fields must repeat every 2π radians in ϕ (2.8c)

เนื่องจาก $Y_m(\rho = 0) \to \infty$ จะได้ $B_1 = 0$ เพื่อให้สอดคล้องกับ (2.9b) จะได้

$$m = 0,1,2,3,\ldots \tag{2.9}$$

เนื่องจากตัวกลางภายในท่อนำคลื่น คือ อวกาศว่าง การแพร่กระจายของคลื่นในทิศทาง $+z$ และ $-z$ จะเหมือนกัน ฉะนั้น เพื่อความสะดวกจะพิจารณาคลื่นที่มีการแพร่กระจายไปในทิศทาง $+z$ เท่านั้น (2.6) สามารถลดรูปได้เป็น

$$F_z^+(\rho,\phi,z) = A_{mn}J_m(\beta_\rho\rho)[C_2\cos(m\phi)+D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.10}$$

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะสามารถหาได้จากศักย์เชิงเวกเตอร์ตามสมการต่อไปนี้

$$E_\rho = -\frac{1}{\varepsilon\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} \tag{2.11a}$$

$$H_\rho = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 F_z}{\partial\rho\partial z} \tag{2.11b}$$

$$E_\phi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F_z}{\partial\rho} \tag{2.11c}$$

$$H_\phi = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon\rho}\frac{\partial^2 F_z}{\partial\phi\partial z} \tag{2.11d}$$

$$E_z = 0 \tag{2.11e}$$

$$H_z = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)F_z \tag{2.11f}$$

ตารางที่ 2.1 ค่า ศูนย์ χ'_{mn} ของอนุพันธ์ $J'_m(\chi'_{mn})=0$ โดยที่ n=1,2,3,... **ของฟังก์ชันเบสเซล** $J_m(x)$

	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
n=1	3.8318	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4155	7.5013
n=2	7.0156	5.3315	6.7062	8.0153	9.2824	10.5199	11.7349
n=3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872	15.2682
n=4	13.3237	11.7060	13.1704	14.5859	15.9641	17.3129	18.6375
n=5	16.4706	14.8636	16.3475	17.7888	19.1960	20.5755	21.9317

พิจารณาสนามไฟฟ้าในแนว ϕ จะมีค่าเป็น

$$E_\phi^+ = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F_z^+}{\partial\rho} = \beta_\rho\frac{A_{mn}}{\varepsilon}J'_m(\beta_\rho\rho)[C_2\cos(m\phi)+D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.12}$$

เมื่อ

$$' = \frac{\partial}{\partial(\beta_\rho\rho)} \tag{2.13}$$

ให้เงื่อนไขขอบเขตของ (2.8a) แทนลงใน (2.12) ดังนั้นเราจะได้

$$E_{\phi}^{+}(\rho = a, \phi, z) = \beta_\rho \frac{A_{mn}}{\varepsilon} J'_m(\beta_\rho a)[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] e^{-j\beta_z z} = 0 \tag{2.14}$$

สมการ (2.14) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$J'_m(\beta_\rho a) = 0 \Rightarrow \beta_\rho a = \chi'_{mn} \Rightarrow \beta_\rho = \frac{\chi'_{mn}}{a} \tag{2.15}$$

ใน (2.15) χ'_{mn} คือค่าที่ทำให้ J'_m เป็นศูนย์ โดยที่ n คือค่าที่ทำให้ J'_m มีค่าเป็นศูนย์ที่เกิดขึ้นในลำดับที่ n โดยที่ $n = 1,2,3,\ldots$ J_m คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ m เมื่อ $m = 0,1,2,3,\ldots$ ค่าศูนย์ χ'_{mn} ของอนุพันธ์ $J'_m(\chi'_{mn})$ ของฟังก์ชันเบสเซลสามารถหาได้จากตารางที่ 2.1 โดยค่าที่ต่ำที่สุดของ χ'_{mn} คือ 1.8412 เมื่อ m=1, n=1 3.0542 เมื่อ m=2, n=1 3.8318 เมื่อ m=1, n=1 ตามลำดับ

โดยใช้ (2.7) และ (2.15) ค่า k_0 ของแบบแผนคลื่น mn จะสามารถเขียนได้เป็น

$$(\beta_z)_{mn} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \beta_\rho^2} = \sqrt{k_0^2 - \left(\dfrac{\chi'_{mn}}{a}\right)^2} & \text{when} \quad k_0 > \beta_\rho = \dfrac{\chi'_{mn}}{a} \quad (2.16\text{a}) \\[2ex] 0 & \text{when} \quad k_0 = \beta_c = \beta_\rho = \dfrac{\chi'_{mn}}{a} \quad (2.16\text{b}) \\[2ex] -j\sqrt{\beta_\rho^2 - k_0^2} = -j\sqrt{\left(\dfrac{\chi'_{mn}}{a}\right)^2 - k_0^2} & \text{when} \quad k_0 < \beta_\rho = \dfrac{\chi'_{mn}}{a} \quad (2.16\text{c}) \end{cases}$$

ในสภาวะตัด สามารถนิยามเมื่อ $(\beta_z)_{mn} = 0$ ดังนั้นแล้วจะได้สมการที่สอดคล้องกับ (2.16b) เป็น

$$\beta_c = \omega_c \sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta_\rho = \frac{\chi'_{mn}}{a} \tag{2.17a}$$

หรือ

$$(f_c)_{mn} = \frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{2.17b}$$

โดยใช้ (2.17a) และ (2.17b) สามารถเขียน (2.16a) จนถึง (2.16c) ได้เป็น

$$(\beta_z)_{mn} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2-\beta_\rho^2} = k_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta_\rho}{k_0}\right)^2} = k_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{k_0}\right)^2} \\ \quad = k_0\sqrt{1-\left(\frac{\chi'_{mn}}{k_0 a}\right)^2} = k_0\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \\ \quad when \quad f > f_c = (f_c)_{mn} & (2.18a) \\ 0 \qquad when \quad f = f_c = (f_c)_{mn} & (2.18b) \\ -j\sqrt{\beta_\rho^2-k_0^2} = -jk_0\sqrt{\left(\frac{\beta_\rho}{k_0}\right)^2-1} = -jk_0\sqrt{\left(\frac{\beta_c}{k_0}\right)^2-1} \\ \quad = -jk_0\sqrt{\left(\frac{\chi'_{mn}}{k_0 a}\right)^2-1} = -jk_0\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2-1} \\ \quad when \quad f < f_c = (f_c)_{mn} & (2.18c) \end{cases}$$

ความยาวของคลื่น (λ_g) สามารถนิยามได้เป็น

$$(\lambda_g)_{mn} = \frac{2\pi}{(\beta_z)_{mn}} \tag{2.19a}$$

จาก (2.18a) และ (2.18b) สามารถเขียนได้เป็น

$$(\lambda_g)_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{k_0\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad when \quad f > f_c = (f_c)_{\mathrm{mn}} & (2.19b) \\ \infty \qquad when \quad f = (f_c)_{mn} & (2.19c) \end{cases}$$

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแต่ละองค์ประกอบสามารถหาได้จาก (2.11) และ (2.12) ดังนี้

$$E_\rho^+ = -\frac{1}{\varepsilon\rho}\frac{\partial F_z^+}{\partial\phi} = -A_{mn}\frac{m}{\varepsilon\rho}J_m(\beta_\rho\rho)[-C_2\sin(m\phi)+D_2\cos(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.20a}$$

$$E_\phi^+ = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F_z^+}{\partial\rho} = A_{mn}\frac{\beta_\rho}{\varepsilon}J'_m(\beta_\rho\rho)[C_2\cos(m\phi)+D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.20b}$$

$$E_z^+ = 0 \tag{2.20c}$$

$$H_\rho^+ = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 F_z^+}{\partial\rho\partial z} = -A_{mn}\frac{\beta_\rho\beta_z}{\omega\mu\varepsilon}J'_m(\beta_\rho\rho)[C_2\cos(m\phi)+D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.20d}$$

$$\begin{aligned} H_\phi^+ &= -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 F_z^+}{\partial\phi\partial z} = -A_{mn}\frac{m\beta_z}{\omega\mu\varepsilon}\frac{1}{\rho}J_m(\beta_\rho\rho) \\ &\qquad \times[-C_2\sin(m\phi)+D_2\cos(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \end{aligned} \tag{2.20e}$$

$$\begin{aligned} H_z^+ &= -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta^2\right)F_z^+ = -jA_{mn}\frac{\beta_\rho^2}{\omega\mu\varepsilon}J_m(\beta_\rho\rho) \\ &\qquad \times[-C_2\cos(m\phi)+D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \end{aligned} \tag{2.20f}$$

เมื่อ

$$' = \frac{\partial}{\partial(\beta_\rho\rho)} \tag{2.20g}$$

โดยใช้ (2.20a) จนถึง (2.20f) ค่าอิมพิแดนซ์ของคลื่น $(Z_w^{+z})_{mn}^{TE}$ ของ $TE_{mn}^z(H_{mn}^z)$ ในทิศทางของ $+z$ สามารถเขียนได้เป็น

$$Z_{mn}^h = (Z_w^{+z})_{mn}^{TE} = \frac{E_\rho^+}{H_\phi^+} = -\frac{E_\phi^+}{H_\rho^+} = \frac{\omega\mu}{(\beta_z)_{mn}} \tag{2.21a}$$

จาก (2.18a) จนถึง (2.18c) ค่าอิมพิแดนซ์ของคลื่นสามารถลดรูปได้เป็น

$$Z^h_{mn} = \left(Z^{+z}_w\right)^{TE}_{mn} = \begin{cases} \dfrac{\omega\mu}{k_0\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}} = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}} \quad when\ f > f_c = (f_c)_{mn} & (2.21b) \\ \dfrac{\omega\mu}{0} = \infty \qquad when\ f = f_c = (f_c)_{mn} & (2.21c) \\ \dfrac{\omega\mu}{-jk_0\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2-1}} = +j\dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2-1}} = +j\dfrac{\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2-1}} \quad when\ f < f_c = (f_c)_{mn} & (2.21d) \end{cases}$$

จาก (2.21b) จนถึง (2.21d) สามารถทำตามข้อกำหนด อิมพิแดนซ์จะมีค่า ดังนี้

1. เมื่อสูงกว่าสภาวะความถี่ตัด ค่าอิมพิแดนซ์จะเป็นค่าจริงและมีค่ามากกว่าค่าอิมพิแดนซ์อินทรินซิกของตัวกลางในท่อนำคลื่น
2. ที่สภาวะความถี่ตัด จะมีค่าเป็นอนันต์
3. สภาวะความถี่ตัดที่ต่ำกว่านี้คือ ค่าอิมพิแดนซ์จินตภาพ แสดงให้เห็นว่าท่อนำคลื่นที่ต่ำกว่าสภาวะความถี่ตัด จะมีคุณสมบัติเสมือนตัวเหนี่ยวนำ

2.2.2 แบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวาง (TM^z)

แบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวางนี้จะไม่มีส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กในทิศทางการแพร่กระจาย พฤติกรรมของแบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวางสามารถหาได้ในทำนองเดียวกันกับแบบรูปสนามไฟฟ้าตามขวาง โดยให้

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_z A_z(\rho,\phi,z) \qquad (2.22a)$$

$$\mathbf{F} = 0 \qquad (2.22b)$$

ศักย์เชิงเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ จะสอดคล้องกับสมการคลื่นตาม (2.3) สำหรับ $\mathbf{A}$ ที่มีค่าตาม (2.22a) สมการคลื่นจะลดรูปได้เป็น

$$\nabla^2 A_z(\rho,\phi,z) + k_0^2 A_z(\rho,\phi,z) = 0 \tag{2.23}$$

ในทำนองเดียวกันกับ (2.4) และ (2.6) จะหาผลเฉลยของ (2.23) คือ

$$\begin{aligned} A_z(\rho,\phi,z) &= [A_1 J_m(\beta_\rho \rho) + B_1 Y_m(\beta_\rho \rho)] \\ &\quad \times [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)][A_3 e^{-j\beta_z z} + B_3 e^{+j\beta_z z}] \end{aligned} \tag{2.24a}$$

เมื่อ

$$\beta_\rho^2 + \beta_z^2 = k_0^2 \tag{2.24b}$$

ค่าคงที่ของ $A_1, B_1, C_2, D_2, A_3, B_3, m, \beta_\rho$ และ β_z จะสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตและลักษณะทางกายภาพของพิกัดทรงกระบอก ดังนี้

$$E_\phi(\rho = a, \phi, z) = 0 \tag{2.25a}$$

หรือ

$$E_z(\rho = a, \phi, z) = 0 \tag{2.25b}$$

The fields must be finite everywhere (2.25c)

The fields must repeat every 2π radians in ϕ (2.25d)

เนื่องจาก $Y_m(\rho = 0) \Rightarrow \infty$ จะได้ $B_1 = 0$ และเพิ่มเติมให้สอดคล้องใน (2.25d) จะได้

$$m = 0,1,2,3,... \tag{2.26}$$

พิจารณาคลื่นที่มีการแพร่กระจายไปในทิศทาง $+z$ เท่านั้น จะสามารถลดรูป จาก (2.24a) ได้เป็น

$$A_z^+(\rho,\phi,z) = B_{mn} J_m(\beta_\rho \rho)[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] e^{-j\beta_z z} \tag{2.27}$$

ค่าเจาะจงของ β_ρ หาได้โดยใช้ (2.25a) หรือ (2.25b) สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสามารถหาได้จากศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ดังนี้

$$E_\rho = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\partial z} \quad (2.28a) \qquad H_\rho = \frac{1}{\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} \quad (2.28b)$$

$$E_\phi = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi\partial z} \quad (2.28c) \qquad H_\phi = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial\rho} \quad (2.28d)$$

$$E_z = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)A_z \quad (2.28e) \qquad H_z = 0 \quad (2.28f)$$

เมื่อพิจารณา (2.27) ทิศทางของสนามไฟฟ้า (E_z) จะมีค่าเป็น

$$E_z^+ = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta^2\right)A_z^+$$

$$= -jB_{mn}\frac{\beta_\rho^2}{\omega\mu\varepsilon}J_m(\beta_\rho\rho)[C_2\cos(m\phi)+D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \quad (2.29)$$

ให้เงื่อนไขขอบเขตใน (2.19b) แทนค่าใน (2.29) จะทำให้

$$E_z^+ = (\rho = a, \phi, z) = -jB_{mn}\frac{\beta_\rho^2}{\omega\mu\varepsilon}J_m(\beta_\rho\rho)[C_2\cos(m\phi)+D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} = 0 \quad (2.30)$$

สมการ (2.30) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$J_m(\beta_\rho a) = 0 \Rightarrow \beta_\rho a = \chi_{mn} \Rightarrow \beta_\rho = \frac{\chi_{mn}}{a} \quad (2.31)$$

ตารางที่ 2.2 ค่าศูนย์ χ_{mn} ของอนุพันธ์ $J_m(\chi_{mn})=0$ โดยที่ n=1,2,3,... ของฟังก์ชันเบสเซล $J_m(x)$

	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
n=1	2.4049	3.8318	5.1357	6.3802	7.5884	8.7715	9.9361
n=2	5.5201	7.0156	8.4173	9.7610	11.0647	12.3386	13.5893
n=3	8.6537	10.1735	11.6199	13.0152	14.3726	15.7002	17.0038
n=4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	20.3208
n=5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	23.5861

ใน (2.31) χ_{mn} คือค่าที่ทำให้ J_m เป็นศูนย์ โดยที่ n คือค่าที่ทำให้ J_m มีค่าเป็นศูนย์ที่เกิดขึ้นในลำดับที่ n โดยที่ $n=1,2,3,...$ ค่าศูนย์ χ_{mn} ของอนุพันธ์ $J_m(\chi_{mn})$ ของฟังก์ชันเบสเซลได้จากตารางที่ 2.2 โดยค่าที่ต่ำที่สุดของ χ_{mn} คือ 2.4049 เมื่อ m=0, n=1 3.8318 เมื่อ m=1, n=1 5.1357 เมื่อ m=2, n=1 ตามลำดับ

โดยใช้ (2.24a) และ (2.31) ค่า β_z ของแบบแผนคลื่น mn จะสามารถเขียนได้เป็น

$$(\beta_z)_{mn} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2-\beta_\rho^2} = \sqrt{k_0^2-\left(\dfrac{\chi_{mn}}{a}\right)^2} \\ \qquad when\ k_0 > \beta_\rho = \dfrac{\chi_{mn}}{a} & (2.32a) \\ 0 \qquad when\ \ k_0 = \beta_c = \beta_\rho = \dfrac{\chi_{mn}}{a} & (2.32b) \\ -j\sqrt{\beta_\rho^2-k_0^2} = -j\sqrt{\left(\dfrac{\chi_{mn}}{a}\right)^2-k_0^2} \\ \qquad when\ \ k_0 < \beta_\rho = \dfrac{\chi_{mn}}{a} & (2.32c) \end{cases}$$

โดยทำตามขั้นตอนของ TE ทฤษฎีของแบบรูปสนามไฟฟ้าตามขวาง สามารถเขียนแสดงความหมายสำหรับสภาวะความถี่ตัด $(f_c)_{mn}$, ค่าคงตัวของเฟส $(\beta_z)_{mn}$ และค่าความยาวคลื่น $(\lambda_g)_{mn}$ แสดงได้ดังนี้

$$(f_c)_{mn} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (2.33)$$

$$
(\beta_z)_{mn} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \beta_\rho^2} = k_0\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta_\rho}{k_0}\right)^2} = k_0\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta_c}{k_0}\right)^2} \\ \qquad = k_0\sqrt{1-\left(\dfrac{\chi_{mn}}{k_0 a}\right)^2} = k_0\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2} \\ \qquad\qquad when \quad f > f_c = (f_c)_{mn} & (2.34a) \\ 0 \qquad\qquad when \quad f = f_c = (f_c)_{mn} & (2.34b) \\ -j\sqrt{\beta_\rho^2 - k_0^2} = -jk_0\sqrt{\left(\dfrac{\beta_\rho}{k_0}\right)^2 - 1} = -jk_0\sqrt{\left(\dfrac{\beta_c}{k_0}\right)^2 - 1} \\ \qquad = -jk_0\sqrt{\left(\dfrac{\chi_{mn}}{k_0 a}\right)^2 - 1} = -jk_0\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2 - 1} \\ \qquad\qquad when \quad f < f_c = (f_c)_{mn} & (2.34c) \end{cases}
$$

$$
(\lambda_g)_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{k_0\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}} \quad when \quad f > f_c = (f_c)_{mn} & (2.35a) \\ \infty \qquad\qquad when \quad f = f_c = (f_c)_{mn} & (2.35b) \end{cases}
$$

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแต่ละองค์ประกอบสามารถหาได้จาก (2.27) และ (2.28) ดังนี้

$$
E_\rho^+ = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z^+}{\partial\rho\partial z} = -B_{mn}\frac{\beta_\rho\beta_z}{\omega\mu\varepsilon}J'_m(\beta_\rho\rho)[C_2\cos(m\phi) + D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.36a}
$$

$$
E_\phi^+ = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 A_z^+}{\partial\phi\partial z} = -B_{mn}\frac{m\beta_z}{\omega\mu\varepsilon\rho}J_m(\beta_\rho\rho)[-C_2\sin(m\phi) + D_2\cos(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.36b}
$$

$$
\begin{aligned} E_z^+ = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2\right)A_z^+ &= -jB_{mn}\frac{\beta_\rho^2}{\omega\mu\varepsilon}J_m(\beta_\rho\rho) \\ &\times[C_2\cos(m\phi) + D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \end{aligned} \tag{2.36c}
$$

$$
H_\rho^+ = \frac{1}{\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z^+}{\partial\phi} = B_{mn}\frac{m}{\mu}\frac{1}{\rho}J_m(\beta_\rho\rho)[-C_2\sin(m\phi) + D_2\cos(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.36d}
$$

$$H_{\phi}^{+} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z^{+}}{\partial \rho} = -B_{mn}\frac{\beta_{\rho}}{\mu}J'_m(\beta_{\rho}\rho)[C_2\cos(m\phi) + D_2\sin(m\phi)]e^{-j\beta_z z} \tag{2.36e}$$

$$H_z^{+} = 0 \tag{2.36f}$$

เมื่อ

$$' = \frac{\partial}{\partial(\beta_{\rho}\rho)} \tag{2.36g}$$

โดยใช้ (2.36a) จนถึง (2.36f) ค่าอิมพิแดนซ์ของคลื่นในทิศทาง $+z$ จะสามารถเขียนได้เป็น

$$(Z_w^{+z})_{mn}^{TM} = \frac{E_{\rho}^{+}}{H_{\phi}^{+}} = -\frac{E_{\phi}^{+}}{H_{\rho}^{+}} = \frac{(\beta_z)_{mn}}{\omega\varepsilon} \tag{2.37}$$

และใน (2.34a) จนถึง (2.34c) จะทำให้ค่าอิมพิแดนซ์ ใน (2.37) ลดรูปลงจะได้

$$\left(Z_w^{+z}\right)_{mn}^{TM} = \begin{cases} \dfrac{k_0\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2} = \eta\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2} \quad when \;\; f > f_c = \left(f_c\right)_{mn} & (2.38a) \\ \dfrac{0}{\omega\varepsilon} = 0 \quad when \;\; f = f_c = \left(f_c\right)_{mn} & (2.38b) \\ \dfrac{-jk_0\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2 - 1}}{\omega\varepsilon} = -j\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2 - 1} = -j\eta\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2 - 1} \quad when \;\; f < f_c = \left(f_c\right)_{mn} & (2.38c) \end{cases}$$

จาก (2.38a) จนถึง (2.38c) สามารถทำตามข้อกำหนด อิมพิแดนซ์จะมีค่า ดังนี้

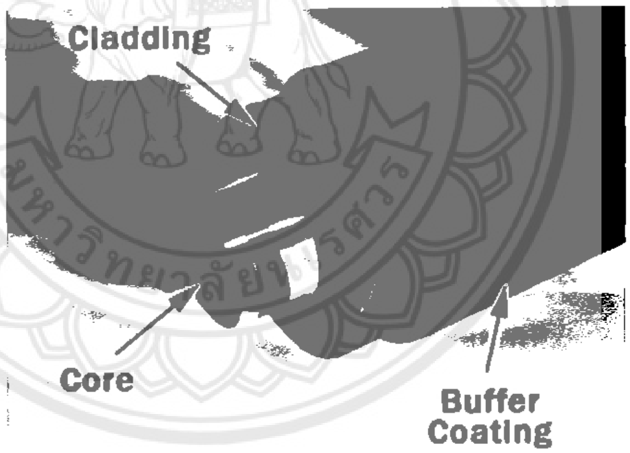
1. เมื่อสูงกว่าสภาวะความถี่ตัด ค่าอิมพิแดนซ์จะเป็นค่าจริงและมีค่าน้อยกว่าค่าอิมพิแดนซ์อินทรินซิกของตัวกลางในท่อนำคลื่น
2. ที่สภาวะความถี่ตัด จะมีค่าเป็นอนันต์
3. สภาวะความถี่ตัดที่ต่ำกว่านี้คือ ค่าอิมพิแดนซ์จินตภาพ แสดงให้เห็นว่าท่อนำคลื่นที่ต่ำกว่าสภาวะความถี่ตัด จะมีคุณสมบัติเสมือนตัวเก็บประจุ

2.2 ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก (dielectric waveguide) หรือที่คุ้นเคยกันโดยทั่วไปก็คือ ใยแก้วนำแสง ซึ่งในปัจจุบันนี้ระบบการสื่อสารผ่านท่อนำแสงนี้ก็ได้เข้ามามีบทบาท ในการสื่อสารโทรคมนาคมมากขึ้น เนื่องจากเป็นระบบการสื่อสารที่ มีประสิทธิภาพสูง มีแบนด์วิดท์ที่กว้าง อัตราการสูญเสียของแสงต่ำ สามารถรองรับปริมาณข้อมูลข่าวสารได้เป็นจำนวนมาก ปราศจากสัญญาณรบกวนทางคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เนื่องจากเป็นการส่งผ่านข้อมูลในรูปของแสง หน้าที่ของท่อนำแสงนี้ก็คือ กักพลังงานไม่ให้แพร่กระจายออกไปภายนอก และนำคลื่นจากแหล่งกำเนิดไปสู่จุดหมายปลายทาง

โครงสร้างของท่อนำแสงแสดงได้ดังรูป 2.4 ใยแก้วจะประกอบด้วยส่วนที่สำคัญ ดังนี้คือ

1. แกน (core) จะทำหน้าที่เป็นช่องทาง เพื่อให้คลื่นนำพลังงานจากตัวส่งไปยังตัวรับ
2. ชั้นห่อหุ้ม (cladding) จะอยู่ถัดออกมาจากชั้นแกน ทำหน้าที่ห่อหุ้มส่วนของแกนไว้ มีความสามารถในการยืดหยุ่นและสามารถดัดให้โค้งงอได้
3. ส่วนป้องกัน (buffer coating) จะทำหน้าที่เสริมความแข็งแรงและป้องกันแกนจากสภาพแวดล้อมที่อยู่ภายนอก



รูปที่ 2.4 โครงสร้างของท่อนำแสงที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม [3]

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไดอิเล็กตริก สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไดอิเล็กตริกได้ โดยอาศัยทฤษฎีสองทฤษฎี คือ ทฤษฎีรังสี (Ray Theory) และ ทฤษฎีแบบรูป (Mode Theory) ในทฤษฎีแรกจะเป็นวิธีที่อาศัยรังสีของคลื่น ใช้ได้กับคลื่นที่มีความถี่สูงมากๆ ในระดับของแสงเท่านั้น หลักการของ Ray Theory มีอยู่ว่า "จุดที่อยู่บนหน้าคลื่นเดียวกันจะต้องมีเฟสสอดคล้องกัน (in phase)" ทฤษฎีนี้เหมาะสำหรับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีโครงสร้างง่ายๆ อย่างเช่น ท่อนำคลื่นแผ่นบาง (Slap waveguides) ซึ่งจะไม่กล่าวถึง ในที่นี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีแบบรูป

สามารถหาได้โดยการวิเคราะห์หาคำตอบจามสมการแมกซ์เวลล์ (Solution of Maxwell's equation) ดังนี้

2.2.1 สมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation)

เราสามารถวิเคราะห์คุณลักษณะของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกได้ โดยอาศัยสมการแมกซ์เวลล์ ในบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด (source free region) และอยู่ในอาณาจักรเวลา (time domain) สมการแมกซ์เวลล์จะเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{Faraday's Law} \tag{2.39a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{Maxwell-Ampere} \tag{2.39b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \qquad \text{Gauss's Law} \tag{2.39c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{Gauss's Law-magnetic} \tag{2.39d}$$

ความหนาแน่นฟลักซ์มีความสัมพันธ์ผ่าน constitutive relation ดังนี้

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{2.40a}$$

และ

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{2.40b}$$

เมื่อ ε คือ สภาพยอม (Permittivity) ของตัวกลาง มีค่าเท่ากับ 8.8542×10^{-12} F/m

μ คือ ความซาบซึมได้ (Permeability) ของตัวกลาง มีค่าเท่ากับ $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

โดยอาศัย (2.39) และ (2.40) สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{2.41a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.41b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.41c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.41d)$$

เมื่อคลื่นมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาในลักษณะไซน์ หรือโคไซน์ สามารถใช้การวิเคราะห์เชิงซ้อนมาช่วยในการหาคำตอบของสมการได้

ในการวิเคราะห์เชิงซ้อน สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก สามารถเขียนได้ตามสมการต่อไปนี้

$$\mathbf{E}(\rho,\phi,z;t) = \mathrm{Re}\{E(\rho,\phi,z)e^{j\omega t}\} \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{H}(\rho,\phi,z;t) = \mathrm{Re}\{H(\rho,\phi,z)e^{j\omega t}\} \quad (2.42b)$$

ใน (2.42) ตัวแปรในมิติอวกาศจะอยู่ในรูปของพิกัดทรงกระบอก (ρ,ϕ,z) ก็เพราะว่า โครงสร้างที่จะวิเคราะห์ คือ ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลมและวางตัวในแนวแกน z ดังแสดงในรูปที่ 2.3 การวิเคราะห์โครงสร้างนี้ด้วยพิกัดทรงกระบอกจะทำได้ง่ายกว่าการวิเคราะห์โดยอาศัยพิกัดฉาก

แทน (2.42) ลงใน (2.41) ทำให้ได้สมการแมกซ์เวลล์ที่อยู่ในรูป เวลา – ฮาร์โมนิก (time-harmonic) ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\varepsilon\mathbf{H} \quad (2.43a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (2.43b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.43c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.43d)$$

ใน (2.43) Re และ $e^{j\omega t}$ จะละไว้ในฐานที่เข้าใจ

เนื่องจากท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกมีการทอดตัวไปตามแกน z ฉะนั้นคลื่นจรจะเกิดขึ้นในทิศเดียวกันนี้ ถ้าพิจารณาคลื่นจรในทิศ $+z$ แต่เพียงอย่างเดียว $E(\rho,\phi,z)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$E(\rho,\phi,z) = e(\rho,\phi)e^{-j\beta z} \quad (2.44a)$$

และในทำนองเดียวกัน

$$H(\rho,\phi,z) = h(\rho,\phi)e^{-j\beta z} \quad (2.44b)$$

เมื่อ β คือค่าคงตัวเฟสในทิศ z หรือตัวเลขคลื่น (wave number) ในทิศ z

$$e(\rho,\phi) = e_\rho(\rho,\phi)\hat{\mathbf{a}}_\rho + e_\phi(\rho,\phi)\hat{\mathbf{a}}_\phi + e_z(\rho,\phi)\hat{\mathbf{a}}_z \tag{2.45a}$$

$$h(\rho,\phi) = h_\rho(\rho,\phi)\hat{\mathbf{a}}_\rho + h_\phi(\rho,\phi)\hat{\mathbf{a}}_\phi + h_z(\rho,\phi)\hat{\mathbf{a}}_z \tag{2.45b}$$

โดยที่ $\hat{\mathbf{a}}_\rho, \hat{\mathbf{a}}_\phi, \hat{\mathbf{a}}_z$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ ρ, ϕ และ z ตามลำดับ

แทน (2.44) ลงใน (2.43a) ได้

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial e_z}{\partial \phi} + j\rho\beta e_\phi\right) = -j\omega\mu h_\rho \tag{2.46a}$$

$$j\beta e_\rho + \frac{\partial e_z}{\partial \rho} = j\omega\mu h_\phi \tag{2.46b}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho e_\phi) - \frac{\partial e_\rho}{\partial \phi}\right] = -j\omega\mu h_z \tag{2.46c}$$

แทน (2.44) ลงใน (2.43b) ได้

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial h_z}{\partial \phi} + j\rho\beta h_\phi\right) = j\omega\varepsilon e_\rho \tag{2.47a}$$

$$j\beta h_\rho + \frac{\partial h_z}{\partial \rho} = -j\omega\varepsilon e_\phi \tag{2.47b}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho h_\phi) - \frac{\partial h_\rho}{\partial \phi}\right] = j\omega\varepsilon e_z \tag{2.47c}$$

โดยการจัดรูป (2.46) และ (2.47) สนามไฟฟ้าในแนวขวาง สามารถเขียนในรูปของสนามในแนวแกนได้ดังนี้

$$e_\rho = -\frac{j}{q^2}\left(\beta\frac{\partial e_z}{\partial \rho} + \frac{\omega\mu}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial \phi}\right) \tag{2.48a}$$

$$e_\phi = -\frac{j}{q^2}\left(\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial \phi} - \omega\mu\frac{\partial h_z}{\partial \rho}\right) \tag{2.48b}$$

ในทำนองเดียวกัน สนามแม่เหล็กในแนวตามขวาง สามารถเขียนในรูปของสนามในแนวแกน ได้ ดังนี้

$$h_\rho = -\frac{j}{q^2}\left(\beta\frac{\partial h_z}{\partial\rho} - \frac{\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial\phi}\right) \tag{2.49a}$$

$$h_\phi = -\frac{j}{q^2}\left(\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\phi} + \omega\varepsilon\frac{\partial e_z}{\partial\rho}\right) \tag{2.49b}$$

q คือค่าคงตัวเฟสในแนวตามขวาง หรือ ตัวเลขคลื่นในแนวตามขวาง (Lateral wave number)

$$q^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \beta^2 = k^2 - \beta^2 \tag{2.50}$$

เมื่อแทน h_ρ ตาม (2.49a) และ h_ϕ ตาม (2.49b) ลงใน (2.47c) จะได้สมการคลื่นที่อยู่ในรูปของสนามไฟฟ้าในแนวแกน ดังนี้

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 e_z}{\partial\phi^2} + q^2 e_z = 0 \tag{2.51a}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อแทน e_ρ ตาม (2.48a) และ e_ϕ ตาม (2.48b) ลงใน (2.46c) จะได้สมการคลื่นที่อยู่ในรูปของสนามแม่เหล็กในแนวแกน ดังนี้

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h_z}{\partial\phi^2} + q^2 h_z = 0 \tag{2.51b}$$

สมการ (2.51a) และ (2.51b) แสดงให้เห็นว่า องค์ประกอบในแนวแกนของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กไม่มีส่วนที่เกี่ยวโยงถึงกัน สนามทั้งคู่นี้จะใช้เป็นสมการหลักในการวิเคราะห์แบบแผนคลื่นที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

2.2.2 การหาผลเฉลยของสมการคลื่น (Solution to the wave equation)

สมการคลื่นที่จะหาคำตอบ ก็คือ สมการที่อยู่ในรูปสนามไฟฟ้าตาม (2.51a) เมื่อได้คำตอบของ (2.51a) แล้วผลเฉลยของสมการคลื่นในรูปสนามแม่เหล็กตาม (2.51b) ก็จะมีลักษณะอย่างเดียวกัน

พิจารณา สมการคลื่นในรูปสนามไฟฟ้า

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 e_z}{\partial \phi^2}+q^2 e_z=0 \tag{2.51a}$$

เมื่อ e_z เป็นฟังก์ชันของ (ρ,ϕ)

เราจะหาคำตอบของ (2.51a) โดยใช้วิธีการแยกตัวแปร (Separation of variable) โดยกำหนดให้

$$e_z(\rho,\phi)=f(\rho)g(\phi) \tag{2.52}$$

แทน (2.52) ลงใน (2.51a) จะได้

$$g\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+g\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+f\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}+q^2 fg=0 \tag{2.53}$$

นำ $\frac{\rho^2}{fg}$ คูณตลอดทั้งสองข้างของ (2.53) จะได้

$$\frac{\rho^2}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}+q^2\rho^2=0 \tag{2.54}$$

สนามจะกลับมามีค่าเดิมเสมอ เมื่อ ϕ เปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ 2π (เมื่อคลื่นเคลื่อนที่ในแนวเส้นรอบวงครบ 1 รอบแล้ว จะกลับมาสู่ค่าเดิมเสมอ) นั่นคือ สนามในแนว ϕ จะเป็นฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2π คลื่นในแนวเส้นรอบวงของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกต้องเป็นคลื่นนิ่ง

$$g(\phi)=e^{jv\phi} \tag{2.55}$$

แทน (2.55) ลงใน (2.54) จะได้

$$\rho^2\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}+\left[(q\rho)^2-v^2\right]f=0 \tag{2.56}$$

สมการนี้ คือ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ในระบบพิกัดทรงกระบอก

ผลเฉลยของ (2.56) จะแยกเป็นสองกรณี คือ กรณีสำหรับภายในแกน (core) และภายนอกแกน (core) หรือชั้นห่อหุ้ม (cladding)

กรณีที่ 1 : ผลเฉลยสำหรับบริเวณภายในแกน (core)

ในบริเวณที่เป็นแกน (core) สมการอนุพันธ์ตาม (2.56) จะกลายเป็น

$$\rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \left[(u\rho)^2 - \nu^2\right] f = 0 \tag{2.57}$$

สมการ (2.57) จะได้จาก (2.56) โดยการแทน

$$q = u \tag{2.58}$$

เมื่อ u คือ ค่าคงตัวเฟสในแนวตามขวาง หรือ ตัวเลขคลื่นในแนวตามขวางในส่วนแกน (core) ของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

$$u^2 = k_1^2 - \beta^2 \tag{2.59}$$

k_1 คือ ค่าคงตัวเฟสในแกน (core) ของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

$$k_1 = n_1 k_0 \tag{2.60}$$

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.61}$$

k_0 คือ ค่าคงตัวเฟสในอวกาศว่าง ε_0 คือ สภาพะยอมของอวกาศว่าง μ_0 คือ ความซาบซึมได้ของอวกาศว่าง n_1 คือ ดัชนีหักเหของแกน (core)

ผลเฉลยของ (2.57) คือ

$$f(\rho) = AJ_\nu(u\rho) \tag{2.62}$$

เมื่อ A คือ ค่าคงที่ $J_\nu(u\rho)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซล ชนิดที่หนึ่ง อันดับ ν (Bessel function of the first kind of order ν)

กรณีที่ 2 : ผลเฉลยสำหรับบริเวณภายนอกแกน (core) หรือในชั้นห่อหุ้ม (cladding)

ในบริเวณที่เป็นชั้นห่อหุ้ม (cladding) เราต้องเขียนสมการอนุพันธ์ตาม (2.56) ในรูปของ

$$\rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \left[(-jw\rho)^2 - \nu^2\right] f = 0 \tag{2.63}$$

สมการ (2.63) จะได้จาก (2.56) โดยการแทน

$$q = -jw \tag{2.64}$$

เมื่อ w คือ ตัวเลขคลื่นในแนวตามขวางในส่วนของชั้นห่อหุ้ม (cladding) ของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

$$w^2 = \beta^2 - k_2^2 \tag{2.65}$$

k_2 คือ ค่าคงตัวเฟสในชั้นห่อหุ้ม (cladding) ของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

$$k_2 = n_2 k_0 \tag{2.66}$$

n_2 คือ ดัชนีหักเหของบริเวณชั้นห่อหุ้ม (cladding)

ใน (2.64) เหตุผลของการเขียน q ให้อยู่ในรูปของจินตภาพ ก็เพราะว่าในบริเวณชั้นห่อหุ้ม (cladding) คลื่นในแนวตามขวางจะต้องลดลงและจางหายไป (evanescent)

ผลเฉลยของ (2.63) คือ

$$f(\rho) = CK_\nu(w\rho) \tag{2.67}$$

เมื่อ C คือ ค่าคงที่ $K_\nu(w\rho)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซล แบบปรับปรุงชนิดที่สอง อันดับ ν (Modified Bessel function of the second kind of order ν)

แทน f, g ที่หาได้ลงใน e_z ตาม (2.52) จะได้สนามไฟฟ้าในแกน (core) มีค่าเป็น

$$e_z = AJ_\nu(u\rho)e^{j\nu\phi} \quad , \quad \rho \le a \tag{2.68a}$$

เมื่อ a คือ รัศมีของแกน (core) ของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

สนามไฟฟ้าภายนอกแกน (core) หรือภายในชั้นห่อหุ้ม (cladding) มีค่าเป็น

$$e_z = CK_\nu(w\rho)e^{j\nu\phi} \quad , \quad \rho > a \tag{2.68b}$$

โดยอาศัยขั้นตอนดังที่เสนอมาแล้ว เราสามารถแสดงให้เห็นว่า สนามแม่เหล็กในแนวแกน z จะอยู่ในรูปเหมือนกับสนามไฟฟ้า ซึ่งจะมีค่า ดังนี้

$$h_z = BJ_\nu(u\rho)e^{j\nu\phi} \quad , \quad \rho \le a \tag{2.69a}$$

และ

$$h_z = DK_\nu(w\rho)e^{j\nu\phi} \quad , \quad \rho > a \tag{2.69b}$$

สนามไฟฟ้าในแนว ρ และในแนว ϕ สามารถหาได้จากการแทน (2.68) และ (2.69) ลงใน (2.48a) และ (2.48b) พร้อมด้วย

$$q^2 = \begin{cases} u^2 & , \quad \rho \le a \\ -w^2 & , \quad \rho > a \end{cases} \tag{2.70}$$

ทำให้ได้

$$e_\rho = \begin{cases} -\dfrac{j}{u^2}\left[A\beta u J'_\nu(u\rho) + B\dfrac{j\omega\mu_0\nu}{\rho}J_\nu(u\rho)\right]e^{j\nu\phi} & , \quad \rho \le a \\ \dfrac{j}{w^2}\left[C\beta w K'_\nu(w\rho) + D\dfrac{j\omega\mu_0\nu}{\rho}K_\nu(w\rho)\right]e^{j\nu\phi} & , \quad \rho > a \end{cases} \tag{2.71}$$

และ

$$e_\phi = \begin{cases} -\dfrac{j}{u^2}\left[A\dfrac{j\nu\beta}{\rho}J_\nu(u\rho) - B\omega\mu_0 u J'_\nu(u\rho)\right]e^{j\nu\phi} & , \quad \rho \le a \\ \dfrac{j}{w^2}\left[C\dfrac{j\nu\beta}{\rho}K_\nu(w\rho) - D\omega\mu_0 w K'_\nu(w\rho)\right]e^{j\nu\phi} & , \quad \rho > a \end{cases} \tag{2.72}$$

สนามแม่เหล็กในแนว ρ และในแนว ϕ สามารถหาได้จากการแทน (2.68) และ (2.69) ลงใน (2.49a) และ (2.49b) พร้อมด้วย (2.70) จะได้

$$h_\rho = \begin{cases} -\dfrac{j}{u^2}\left[B\beta u J'_v(u\rho) + A\dfrac{j\omega\varepsilon_1 v}{\rho}J_v(u\rho)\right]e^{jv\phi} & , \quad \rho \le a \\ \dfrac{j}{w^2}\left[D\beta w K'_v(w\rho) + C\dfrac{j\omega\varepsilon_2 v}{\rho}K_v(w\rho)\right]e^{jv\phi} & , \quad \rho > a \end{cases} \tag{2.73}$$

และ

$$h_\phi = \begin{cases} -\dfrac{j}{u^2}\left[B\dfrac{jv\beta}{\rho}J_v(u\rho) + A\omega\varepsilon_1 u J'_v(u\rho)\right]e^{jv\phi} & , \quad \rho \le a \\ \dfrac{j}{w^2}\left[D\dfrac{jv\beta}{\rho}K_v(w\rho) + C\omega\varepsilon_2 w K'_v(w\rho)\right]e^{jv\phi} & , \quad \rho > a \end{cases} \tag{2.74}$$

ค่าคงตัวเฟสในทิศทาง z (β) สามารถหาได้จากการให้เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ซึ่งได้แก่

- The tangential electric field at the interface between $\rho = a$ must be continuous (2.75a)

- The tangential magnetic field at the interface between $\rho = a$ must be continuous (2.75b)

องค์ประกอบในแนวสัมผัสจะมีอยู่สององค์ประกอบ คือ องค์ประกอบในแนว z และองค์ประกอบในแนว ϕ ฉะนั้น จะมีเงื่อนไขขอบเขตที่จะต้องพิจารณา 4 เงื่อนไข ดังนี้

เงื่อนไขที่ 1 : สนามไฟฟ้าในแนว z ต้องต่อเนื่อง

เมื่อให้เงื่อนไขขอบเขต สนามไฟฟ้าในแนว z ต้องต่อเนื่อง ณ บริเวณรอยต่อ นั่นคือ

$$e_{z1}\big|_{\rho=a} = e_{z2}\big|_{\rho=a} \tag{2.76}$$

จะได้

$$AJ_v(ua) - CK_v(wa) = 0 \tag{2.77}$$

เมื่อตัวห้อย 1 และ 2 ใน (2.76) คือในแกน (core) และชั้นห่อหุ้ม (cladding) ตามลำดับ

เงื่อนไขที่ 2 : สนามไฟฟ้าในแนว ϕ ต้องต่อเนื่อง

เมื่อให้เงื่อนไขขอบเขต สนามไฟฟ้าในแนว ϕ ต้องต่อเนื่อง ณ บริเวณรอยต่อ นั่นคือ

$$e_{\phi 1}\Big|_{\rho=a} = e_{\phi 2}\Big|_{\rho=a} \tag{2.78}$$

จะได้

$$-\frac{j}{u^2}\left[A\frac{jv\beta}{a}J_v(ua) - B\omega\mu_0 uJ'_v(ua)\right] - \frac{j}{w^2}\left[C\frac{jv\beta}{a}K_v(wa) - D\omega\mu_0 wK'_v(wa)\right] = 0 \tag{2.79}$$

เงื่อนไขที่ 3 : สนามแม่เหล็กในแนว z ต้องต่อเนื่อง

เมื่อให้เงื่อนไขขอบเขต สนามแม่เหล็กในแนว z ต้องต่อเนื่อง ณ บริเวณรอยต่อ นั่นคือ

$$h_{z1}\Big|_{\rho=a} = h_{z2}\Big|_{\rho=a} \tag{2.80}$$

จะได้

$$BJ_v(ua)\_\,DK_v(wa) = 0 \tag{2.81}$$

เงื่อนไขที่ 4 : สนามแม่เหล็กในแนว ϕ ต้องต่อเนื่อง

เมื่อให้เงื่อนไขขอบเขต สนามแม่เหล็กในแนว ϕ ต้องต่อเนื่อง ณ บริเวณรอยต่อ นั่นคือ

$$h_{\phi 1}\Big|_{\rho=a} = h_{\phi 2}\Big|_{\rho=a} \tag{2.82}$$

จะได้

$$-\frac{j}{u^2}\left[B\frac{jv\beta}{a}J_v(ua) + A\omega\varepsilon_1 uJ'_v(ua)\right] - \frac{j}{w^2}\left[D\frac{jv\beta}{a}K_v(wa) + C\omega\varepsilon_2 wK'_v(wa)\right] = 0 \tag{2.83}$$

สมการ (2.77), (2.79), (2.81) และ (2.83) นำมาเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} J_v(ua) & 0 & -K_v(wa) & 0 \\ \frac{\beta v}{au^2}J_v(ua) & \frac{j\omega\mu}{u}J_v'(ua) & \frac{\beta v}{aw^2}K_v'(wa) & \frac{j\omega\mu}{w}K_v'(wa) \\ 0 & J_v(ua) & 0 & -K_v(wa) \\ -\frac{j\omega\varepsilon_1}{u}J_v'(ua) & \frac{\beta v}{au}J_v(ua) & -\frac{j\omega\varepsilon_2}{w}K_v'(wa) & \frac{\beta v}{aw^2}K_v(wa) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.84)$$

สมการ (2.84) คือ ระบบของสมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่า 4 ตัวแปร คือ A, B, C และ D สมการนี้จะให้คำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ก็ต่อเมื่อ ค่าดีเทอร์มิเนนท์ (determinant) ของสัมประสิทธิ์ใน (2.84) มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} J_v(ua) & 0 & -K_v(wa) & 0 \\ \frac{\beta v}{au^2}J_v(ua) & \frac{j\omega\mu}{u}J_v'(ua) & \frac{\beta v}{aw^2}K_v'(wa) & \frac{j\omega\mu}{w}K_v'(wa) \\ 0 & J_v(ua) & 0 & -K_v(wa) \\ -\frac{j\omega\varepsilon_1}{u}J_v'(ua) & \frac{\beta v}{au}J_v(ua) & -\frac{j\omega\varepsilon_2}{w}K_v'(wa) & \frac{\beta v}{aw^2}K_v(wa) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.85)$$

การคำนวณดีเทอร์มิเนนท์ตาม (2.85) จะได้ผลลัพธ์เป็นสมการต่อไปนี้

$$(J_v + K_v)(k_1^2 J_v + k_2^2 K_v) = \left(\frac{\beta v}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)^2 \qquad (2.86a)$$

เมื่อ

$$J_v = \frac{J_v'(ua)}{uJ_v(ua)} \qquad (2.86b)$$

$$K_v = \frac{K_v'(wa)}{wK_v(wa)} \qquad (2.86c)$$

สมการ (2.86a) จะเป็นสมการที่ใช้หาค่า β ของท่อนำคลื่น และเป็นคำตอบที่เราต้องการ ค่า β ที่เป็นคำตอบของ (2.86a) ณ ความถี่ใช้งานหนึ่งๆ จะมีลักษณะไม่ต่อเนื่อง (discrete) มีจำนวนจำกัด และจะต้องอยู่ในช่วง ดังนี้

$$k_2 \le \beta \le k_1 \tag{2.87a}$$

เมื่อ

$$k_1 = n_1 k_0 \tag{2.87b}$$

และ

$$k_2 = n_2 k_0 \tag{2.87c}$$

เพื่อที่จะได้คำตอบของ (2.86a) ออกมาโดยง่าย เราจะจัด (2.86a) เสียใหม่ ดังนี้

$$(J_v + K_v)(n_1 k_0^2 J_v + n_2 k_0^2 K_v)\frac{1}{a^2}a^2 = \left(a^2\right)^2\left(\frac{1}{a^2}\right)^2\left(\frac{\beta v}{a}\right)^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}\right)^2 \tag{2.88a}$$

จัดรูปจะได้

$$(J_v + K_v)\left[n_1(k_0 a)^2 J_v + n_2(k_0 a)^2 K_v\right]\frac{1}{a^2} = (\beta a)^2 v^2\left[\frac{1}{(ua)^2}+\frac{1}{(wa)^2}\right]^2 \tag{2.88b}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{a}J_v + \frac{1}{a}K_v\right]\left[n_1(k_0 a)^2\left(\frac{1}{a}J_v\right) + n_2(k_0 a)^2\left(\frac{1}{a}K_v\right)\right]\\ = (\beta \mathrm{a})^2 v^2\left[\frac{1}{(ua)^2}+\frac{1}{(wa)^2}\right]^2\end{aligned} \tag{2.88c}$$

$$\left[\frac{1}{a}J_v + \frac{1}{a}K_v\right]\left[n_1\left(\frac{1}{a}J_v\right) + n_2\left(\frac{1}{a}K_v\right)\right] = \left(\frac{\beta a}{k_0 a}\right)^2 v^2\left[\frac{1}{(ua)^2}+\frac{1}{(wa)^2}\right]^2 \tag{2.88d}$$

พารามิเตอร์ u ตาม (2.59) นำมาเขียนอีกครั้งได้เป็นสมการข้างล่างนี้

$$(ua)^2 = n_1(k_0 a)^2 - (\beta a)^2 \tag{2.89a}$$

$$(ua)^2 = (k_0 a)^2\left[n_1 - \left(\frac{\beta a}{k_0 a}\right)^2\right] \tag{2.89b}$$

พารามิเตอร์ w ตาม (2.65) นำมาเขียนอีกครั้งได้เป็นสมการข้างล่างนี้

$$(wa)^2 = (\beta a)^2 - n_2(k_0 a)^2 \tag{2.90a}$$

$$(wa)^2 = (k_0 a)^2\left[\left(\frac{\beta a}{k_0 a}\right)^2 - n_2\right] \tag{2.90b}$$

โดยให้

$$\bar{u} = ua \tag{2.91a}$$

$$\bar{w} = wa \tag{2.91b}$$

$$\bar{\beta} = \beta a \tag{2.91c}$$

$$\bar{k}_0 = k_0 a \tag{2.91d}$$

สมการ (2.88d) สามารถเขียนได้เป็น

$$\left[\bar{J}_\nu + \bar{K}_\nu\right]\left[n_1\bar{J}_\nu + n_2\bar{K}_\nu\right] = \left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{k}_0}\right)^2 \nu^2\left[\frac{1}{(\bar{u})^2} + \frac{1}{(\bar{w})^2}\right]^2 \tag{2.92}$$

เมื่อ

$$\bar{J}_\nu = \frac{J_\nu'(\bar{u})}{\bar{u}J_\nu(\bar{u})} \tag{2.93a}$$

$$\bar{K}_\nu = \frac{K_\nu'(\bar{w})}{\bar{w}K_\nu(\bar{w})} \tag{2.93b}$$

โดยอาศัย (2.91) ทำให้ (2.89b) และ (2.90b) สามารถเขียนได้เป็น

$$(\bar{u})^2 = (\bar{k}_0)^2\left[n_1 - \left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{k}_0}\right)^2\right] \tag{2.94a}$$

$$(\bar{w})^2 = (\bar{k}_0)^2\left[\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{k}_0}\right)^2 - n_2\right] \tag{2.94b}$$

ในที่สุด จะได้สมการที่ใช้วิเคราะห์คุณลักษณะของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกดังนี้

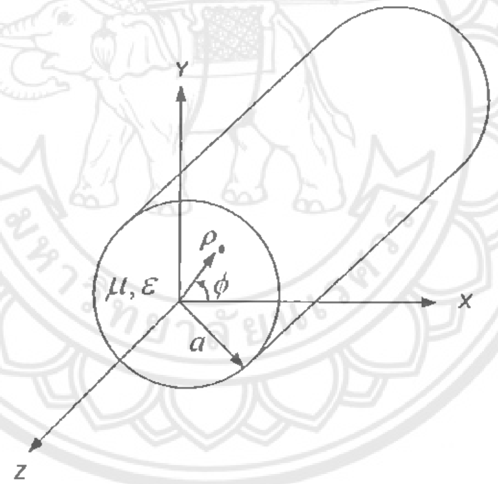
$$\left[\bar{J}_{\nu}+\bar{K}_{\nu}\right]\left[n_1\bar{J}_{\nu}+n_2\bar{K}_{\nu}\right]=\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{k}_0}\right)^2\nu^2\left[\frac{1}{(\bar{u})^2}+\frac{1}{(\bar{w})^2}\right]^2 \tag{2.95}$$

บทที่ 3
ผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่น

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยอาศัยหลักการและทฤษฎีในบทก่อนหน้านี้ ลำดับแรกจะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์ในกรณีท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ และในส่วนถัดไปจะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

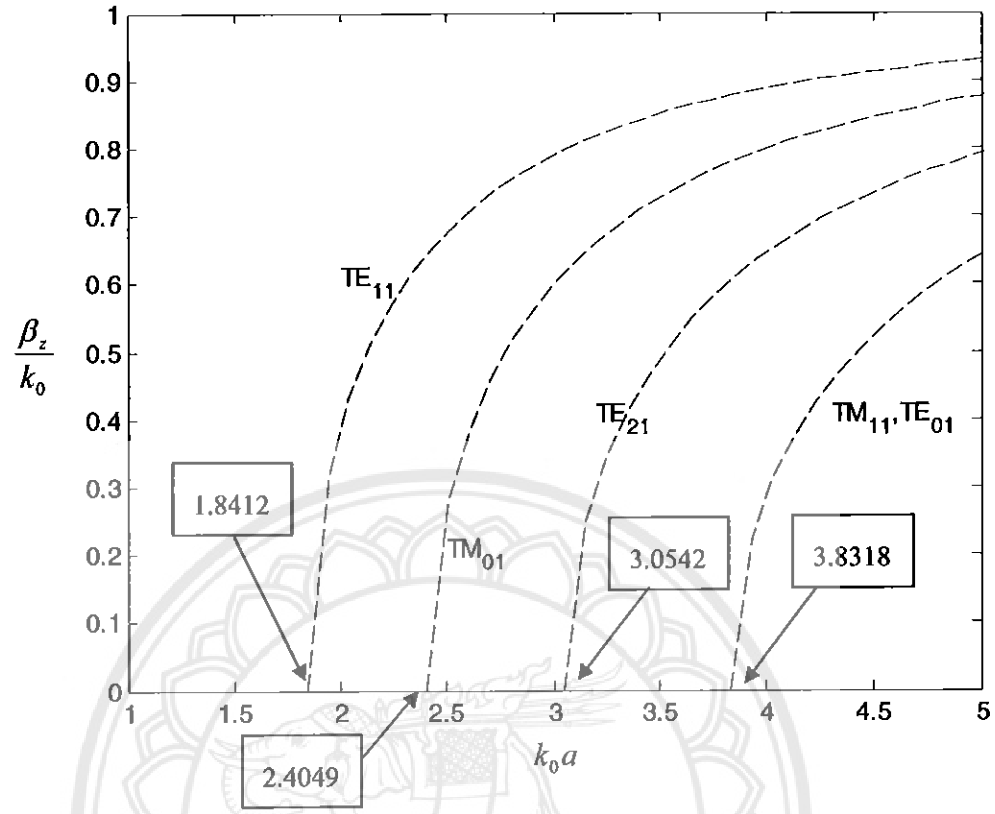
3.1 ผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

พิจารณาท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบภายในเป็นอวกาศว่าง ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบในทางทฤษฎี

เนื่องจากตัวกลางภายในท่อนำคลื่น คือ อวกาศว่าง การแพร่กระจายของคลื่นในทิศทาง $+z$ และ $-z$ จะเหมือนกัน ฉะนั้นเพื่อความสะดวกจะพิจารณาคลื่นที่มีการแพร่กระจายไปในทิศทาง $+z$ เท่านั้น ผลการวิเคราะห์โดยอาศัย (2.18) ในการหาผลเฉลยของ (2.18) จะป้อนค่า χ'_{mn} หรือ χ_{mn} ที่ต่ำที่สุดตามตารางที่ 2.1 หรือ ตารางที่ 2.2 และจากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MATLAB ที่แสดงไว้ในภาคผนวก (ข) จะสามารถนำมาแสดงเป็นกราฟใน 5 แบบแผนแรก ได้ดังนี้



รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง k_0a และค่า β_z/k_0 ในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าแบบแผนคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวาง TE_{11} จะเกิดขึ้นได้ในท่อนำคลื่นเมื่อความถี่ k_0a มีค่ามากกว่า 1.8412 และแบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง TM_{01} จะเกิดขึ้นได้ในท่อนำคลื่นเมื่อความถี่ k_0a มีค่ามากกว่า 2.4049 ความถี่ต่ำสุดของแบบแผนคลื่นหนึ่งๆ จะได้รับการเรียกว่า "ความถี่ตัด (Frequency Cutoff)" เมื่อพิจารณาที่ความถี่ $k_0a \le 4$ พบว่าจะมีแบบแผนคลื่นเกิดขึ้นทั้งหมด 5 แบบแผนคลื่น คือ $TE_{11},TM_{01},TE_{21},TM_{11},TE_{01}$ ซึ่งจะสามารถนำมาเขียนตารางแสดงค่าความถี่ตัดในแต่ละแบบแผนคลื่นได้ดังนี้

ตารางที่ 3.1 ความถี่ตัดของแบบแผนคลื่นในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

แบบแผนคลื่น	ค่าความถี่ตัด (frequency cutoff)
TE_{11}	1.8412
TM_{01}	2.4049
TE_{21}	3.0542
TM_{11}	3.8318
TE_{01}	3.8318

พารามิเตอร์อื่นๆที่สำคัญในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นจะประกอบไปด้วย $(f_c)_{mn},(\lambda_g)_{mn},(\beta_z)_{mn}$ และ (Z^h_{mn}) โดยที่พารามิเตอร์แต่ละตัวสามารถหาได้ตามลำดับจากสมการ ดังนี้

$$(f_c)_{mn} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.1a}$$

สมการ (3.1a) ใช้วิเคราะห์แบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวาง

$$(f_c)_{mn} = \frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.1b}$$

สมการ (3.1b) ใช้วิเคราะห์แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง

$$(\lambda_g)_{mn} = \frac{2\pi}{(\beta_z)_{mn}} \tag{3.2}$$

$$\left(Z_w^{+z}\right)_{mn}^{TM} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{3.3a}$$

สมการ (3.3a) ใช้วิเคราะห์แบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวาง

$$\left(Z_w^{+z}\right)_{mn}^{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{3.3b}$$

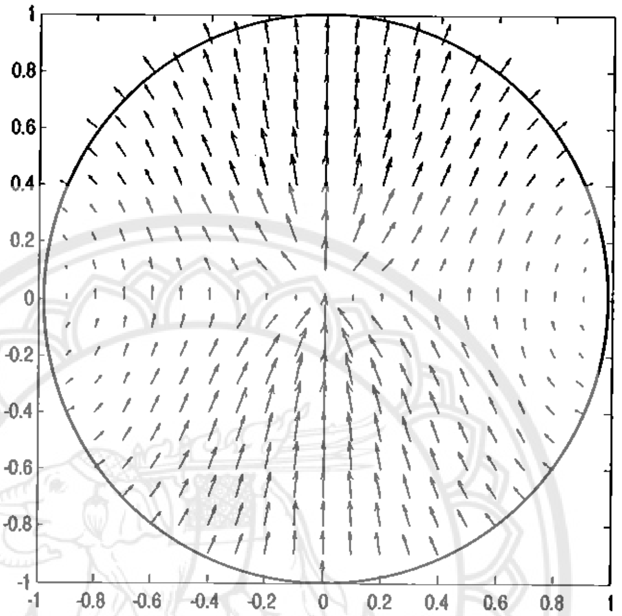
สมการ (3.3b) ใช้วิเคราะห์แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง

พารามิเตอร์ที่กล่าวมาข้างต้น สำหรับแต่ละแบบแผนคลื่นสามารถแสดงได้ตามตารางที่ 3.2 โดยที่ค่า $(f_c)_{mn}, (\lambda_g)_{mn}, (\beta_z)_{mn}$ และ (Z_{mn}^h) ได้รับการพิจารณาที่ $k_0 a = 4$

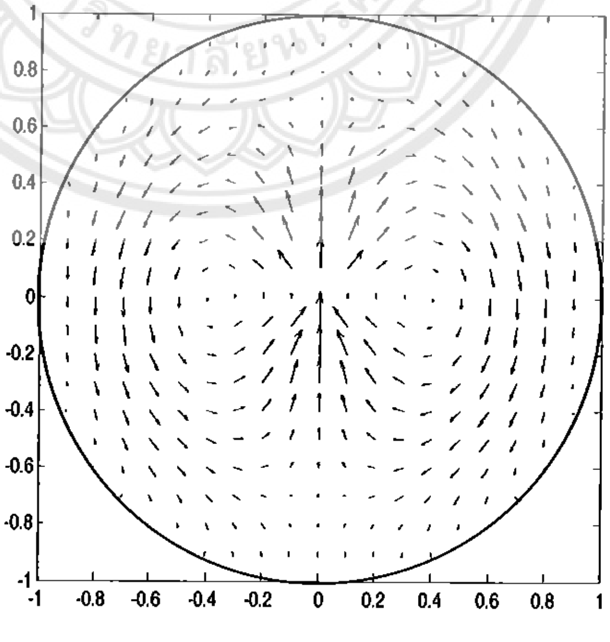
ตารางที่ 3.2 พารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

แบบแผนคลื่น	**ความยาวคลื่น** $\frac{(\lambda_g)_{mn}}{a}\left(\frac{cm}{m}\right)$	**ความถี่ตัด** $(f_c)_{mn}\cdot a$ $(MHz\cdot m)$	**ค่าคงตัวเฟส** $(\beta_z)_{mn}\cdot a$ **เมื่อ** $k_0 a = 4$ $\left(\frac{rad\cdot m}{cm}\right)$	**ค่าอิมพิแดนซ์ของคลื่น** (Z_{mn}^h) **(ohms)**
TE_{11}	7.058	87.85	0.8902	377.355
TM_{01}	7.858	114.05	0.7996	376.3777
TE_{21}	9.5547	144.84	0.6576	377.984
TM_{11}	20.203	181.72	0.311	375.4318
TE_{01}	20.203	181.72	0.311	378.557

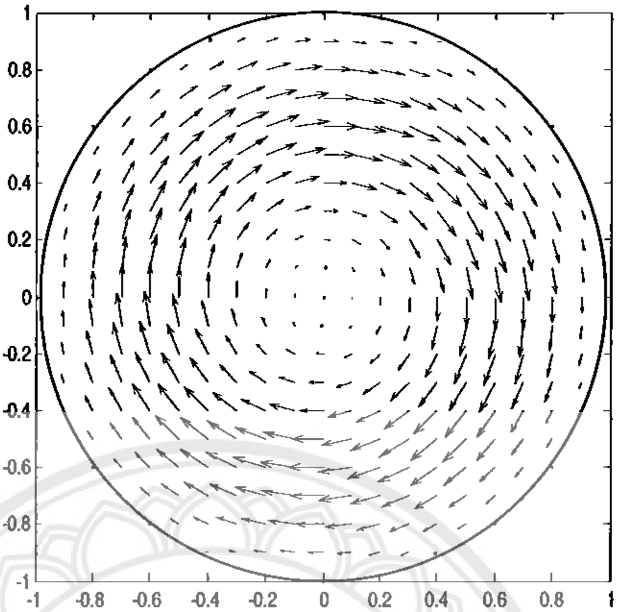
การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE Mode) บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ สามารถหาได้จาก (2.20a) และ (2.20b) เมื่อให้ $k_0 a$ มีค่าเท่ากับ 4 และจากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MATLAB ที่แสดงไว้ในภาคผนวก (ข) รูปที่ได้ใน 4 แบบแผนแรกแสดงได้ดังนี้



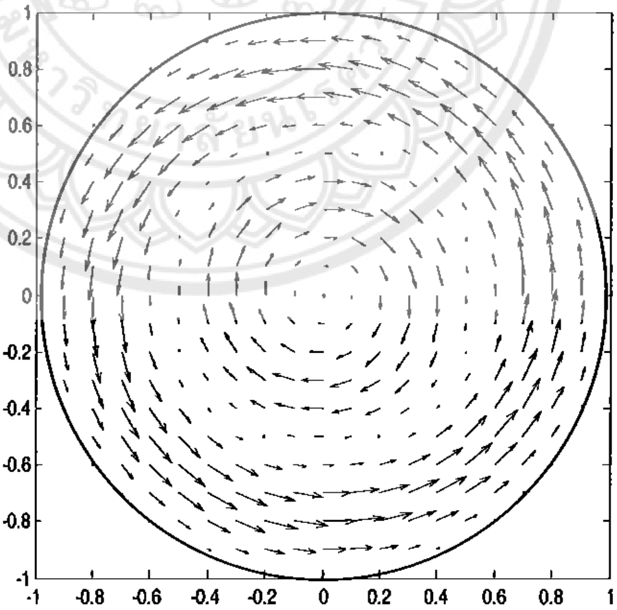
รูปที่ 3.3 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TE_{11}



รูปที่ 3.4 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TE_{12}

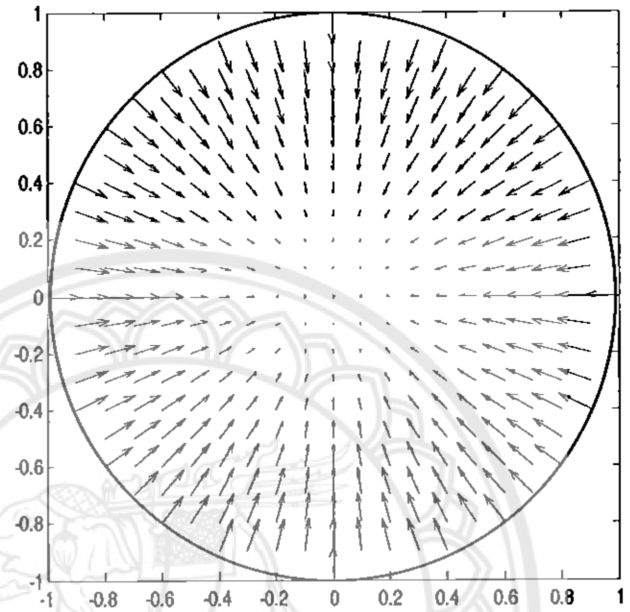


รูปที่ 3.5 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TE_{01}

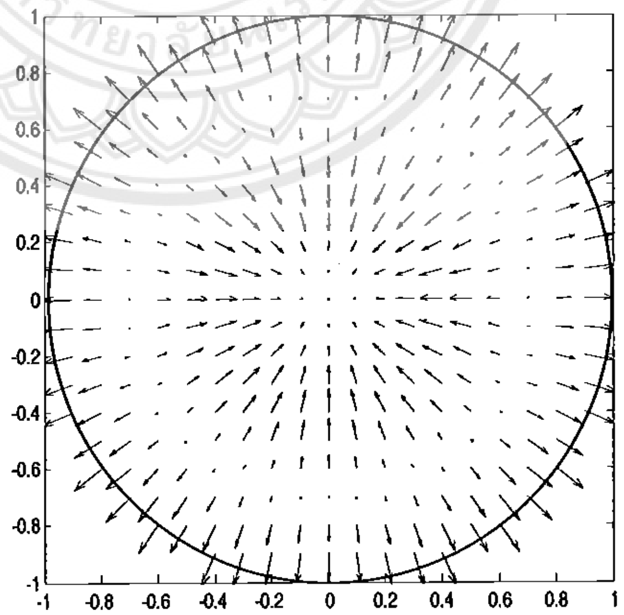


รูปที่ 3.6 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TE_{02}

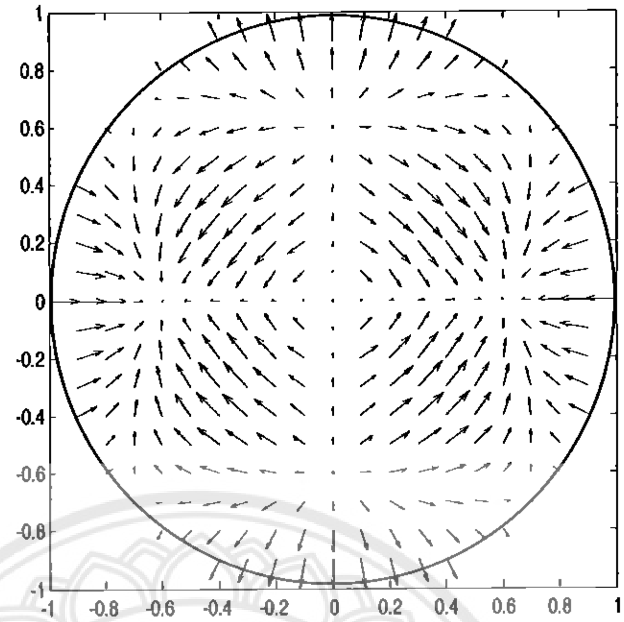
การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวางบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ สามารถหาได้จาก (2.20a) และ (2.20b) เมื่อให้ k_0a มีค่าเท่ากับ 4 และจากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MATLAB ที่แสดงไว้ในภาคผนวก (ข) รูปที่ได้ใน 4 แบบแผนแรกแสดงได้ ดังนี้



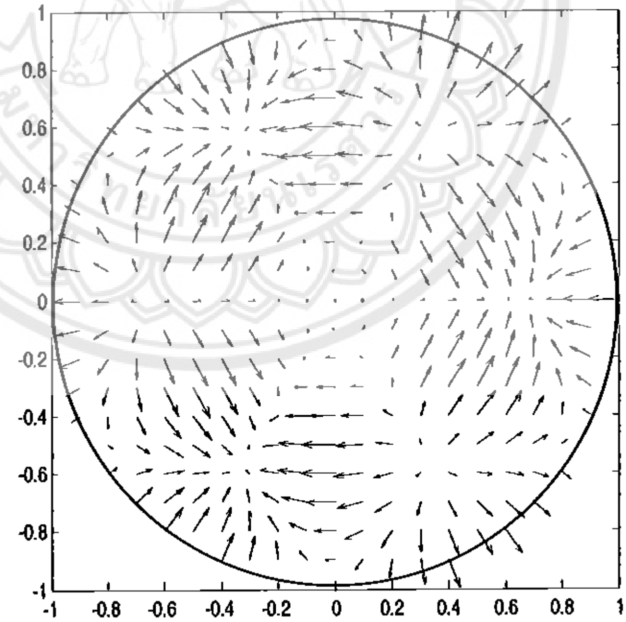
รูปที่ 3.7 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TM_{01}



รูปที่ 3.8 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TM_{02}



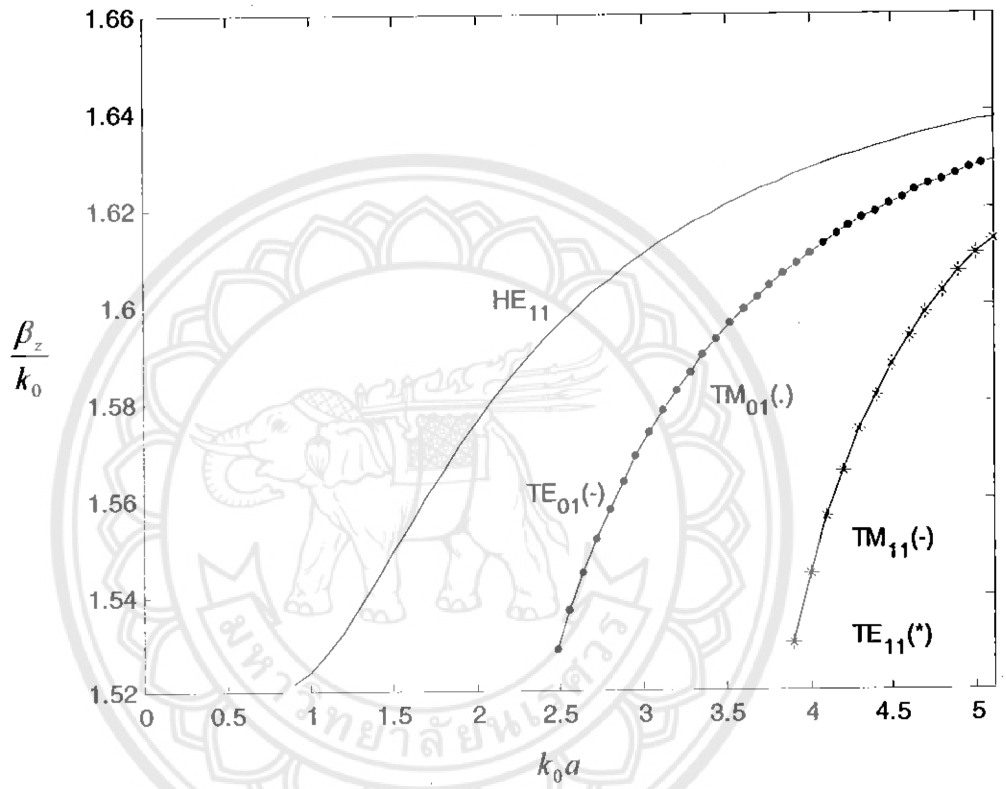
รูปที่ 3.9 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TM_{21}



รูปที่ 3.10 การกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในแบบแผน TM_{31}

3.2 ผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

ในการวิเคราะห์ความถี่ตัดในท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกนี้ จะสามารถวิเคราะห์โดยพิจารณาตาม (2.94) และจากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MATLAB ที่แสดงไว้ในภาคผนวก (ข) จะสามารถนำมาแสดงเป็นกราฟใน 5 แบบแผนแรก ได้ดังนี้



รูปที่ 3.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง k_0a และค่า β_z / k_0 ในท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

จากรูปที่ 3.11 จะเห็นได้ว่า ค่าความถี่ตัดของแต่ละแบบแผนคลื่นมีค่าแตกต่างกันออกไป คือ แบบแผน TE_{01} และ TM_{01} จะเกิดขึ้นได้ในท่อนำคลื่นที่ความถี่มีค่ามากกว่า 2.4049 และแบบแผน TM_{11} และ TE_{11} จะเกิดขึ้นได้ในท่อนำคลื่นที่ความถี่มีค่ามากกว่า 3.8318 เมื่อพิจารณาที่ความถี่ $k_0a \le 4$ จะเห็นได้ว่าแบบแผน TE_{01} และ TM_{01} จะให้ผลลัพธ์ในบางส่วนเหมือนกัน คือ ค่าความถี่ตัดและค่าคงตัวเฟส เราจะเรียกแบบแผนคลื่นที่มีลักษณะที่คล้ายกันนี้ว่า แบบแผนคลื่นดีเจนเนอร์เรจ โดยทั่วไปแล้วทุกๆแบบแผนคลื่นจะมีความถี่ตัดเสมอ ยกเว้นแบบแผนคลื่นแบบผสม HE_{11} จะมีความถี่ต่ำสุด คือ $k_0a = 0$ ซึ่งค่านี้ไม่ถือว่าเป็นความถี่ตัด ซึ่งจะสามารถนำมาเขียนตารางแสดงค่าความถี่ตัดในแต่ละแบบแผนคลื่นได้ดังตารางที่ 3.3 ดังนี้

ตารางที่ 3.3 ค่าความถี่ตัดของแบบแผนคลื่นในท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

แบบแผนคลื่น	**ค่าความถี่ตัด (frequency cutoff)**
HE_{11}	0
TM_{01}	2.4049
TE_{01}	2.4049
TM_{11}	3.8318
TE_{11}	3.8318

บทที่ 4
สรุปผลการวิเคราะห์และข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิเคราะห์

จากการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม ซึ่งประกอบด้วย ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกที่ไม่มีการสูญเสียในทางคณิตศาสตร์ โดยการวิเคราะห์จะใช้สมการแมกซ์เวลล์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ไขปัญหาและกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมของท่อนำคลื่นทั้งสองกรณี สำหรับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงถึง ค่าคงตัวเฟส ความถี่ตัด และแบบแผนคลื่น ซึ่งแบบแผนคลื่นที่มีความสำคัญ ก็คือ แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง TE_{11} ซึ่งจะมีค่าความถี่ตัดเท่ากับ 1.8412 สามารถนำมาประยุกต์ใช้เป็นข้อต่อที่รองรับการหมุนของสายอากาศในระบบเรดาห์ สนามไฟฟ้าตามขวางจะสามารถทำการพล็อตบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นจะแสดงถึงขนาดและทิศทางของสนามไฟฟ้า สำหรับท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกจะไม่มีส่วนของตัวนำไฟฟ้าเป็นเปลือกหุ้มแต่จะมีส่วนป้องกัน (buffer coating) และชั้นห่อหุ้ม (cladding) เป็นเปลือกหุ้มแทน แบบแผนคลื่นพื้นฐานก็คือแบบแผนคลื่นแบบผสม HE_{11} แบบแผนคลื่นชนิดนี้จะไม่มีค่าความถี่ตัดเกิดขึ้น จึงทำให้การประยุกต์ใช้งานในย่านความถี่นี้ค่อนข้างกว้าง และในแบบแผนคลื่น TE_{01} และ TM_{01} ก็จะมีความถี่ตัดเท่ากันและเท่ากับ 2.4049

4.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นในโครงงานนี้เป็นเพียงการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการจำลองข้อมูลทางทฤษฎีเท่านั้น ในการใช้งานจริงอาจมีปัจจัยภายนอกเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น ความไม่สมบูรณ์ของท่อนำคลื่นหรือตัวกลางของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก การสูญเสียของท่อนำคลื่นและปัจจัยอื่นๆ ที่อาจทำให้ผลการวิเคราะห์นี้มีความคลาดเคลื่อนไปบ้าง หากต้องการที่จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับสมรรถนะในขณะปฏิบัติงานใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุดก็สามารถทำได้โดยการวัดและทดสอบในย่านทดสอบจริง

เอกสารอ้างอิง

[1] Constantine A.Balanis. **Advanced Engineering Electromagnetics**. Hoboken,NJ07030: John Wiley&Sons,Inc.1938

[2] http://www.millitech.com/pdfs/specsheets/IS000024-POL-WAC.pdf

[3] http://honors.rit.edu/amitraywiki/index.php/User:Ens3401

[4] Gerd Keiser . **Optical Fiber Communications**. third edition .,United States of America : McGRAW-HALL international Editions , Inc.2000

[5] ลัญฉกร วุฒิสิทธิกุลกิจ และคณะ.**การใช้งานโปรแกรม MATLAB เบื้องต้น**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.2549

[6] ผศ.ดร.พรชัย สารทวาหา.**สมการเชิงอนุพันธ์**.พิมพ์ครั้งที่ 2 .กรุงเทพมหานคร:สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.2545

[7] รองศาสตราจารย์ ดร.บัณฑิต โรจน์อารยานนท์.**วิศวกรรมไมโครเวฟ**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2536

[8] ดร.ชัยรัตน์ พินทอง.**ประสิทธิภาพของวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์สำหรับการวิเคราะห์เกนโมดในท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกที่ไม่มีการสูญเสีย**.วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,2539

[9] พรชัย พุกอูต. **การวิเคราะห์กลุ่มสายอากาศเส้นตรงระยะห่างคงรูปและแอมปลิจูดไม่คงรูป**. วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า. มหาวิทยาลัยนเรศวร. 2550

ภาคผนวก

ภาคผนวก (ก)

ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Function)

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับ p (Bessel's differential equation of order p) คือ สมการซึ่งอยู่ในรูป

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (ก.1)$$

โดยที่ p เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริงและ $p \geq 0$
โดยวิธีของโฟรเบนิอุสเราจะสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \quad , \quad a_0 \neq 0 \qquad (ก.2)$$

แล้วแทนค่า (ก.2) ลงใน (ก.1) จะได้

$$(r^2 - p^2)a_0 x^r + [(r+1)^2 - p^2]a_1 x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty}[\{(k+r)^2 - p^2\}a_k + a_{k+2}]x^{k+r} = 0 \qquad (ก.3)$$

ซึ่งจะเป็นจริงเมื่อสัมประสิทธิ์ของ x กำลังต่างๆเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้

สมการดัชนี $$r^2 - p^2 = 0 \qquad (ก.4a)$$

และ $$[(r+1)^2 - p^2]a_1 = 0 \qquad (ก.4b)$$

และเมื่อ $k \geq 2$ จะได้

$$[(k+r)^2 - p^2]a_k = -a_{k-2} \qquad (ก.5a)$$

หรือ $$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+r)^2 - p^2} = -\frac{a_{k-2}}{[k+r-p][k+r+p]} \qquad (ก.5b)$$

จาก (ก.4a) จะได้รากของสมการคือ $r_1 = p$ และ $r_2 = -p$
แทนค่า $r = r_1 = p$ ใน (ก.4b) จะได้ว่า $a_1 = 0$ และจาก (ก.5b) จะได้

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2p)} \quad , \quad k \geq 2 \tag{ก.6}$$

เนื่องจาก $a_1 = 0$ ดังนั้นจาก (ก.5b) จะได้ว่า $a_3 = a_5 = \ldots = 0$ และสำหรับ k ที่เป็นเลขคู่ ให้ $k = 2m$ จะได้

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+p)} \quad , \quad m = 1,2,3,\ldots \tag{ก.7}$$

เนื่องจาก a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ในที่นี้เราจะใช้ $a_0 = \dfrac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ ดังนั้น

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(p+1)} = -\frac{1}{2^{2+p}1!(p+1)\Gamma(p+1)} = -\frac{1}{2^{2+p}1!\Gamma(p+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(p+2)} = \frac{1}{2^{4+p} \cdot 2 \cdot 1!(p+2)\Gamma(p+2)} = \frac{1}{2^{4+p}2!\Gamma(p+3)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(p+3)} = -\frac{1}{2^{6+p} \cdot 3 \cdot 2!(p+3)\Gamma(p+3)} = -\frac{1}{2^{6+p}3!\Gamma(p+4)} \quad ,\ldots$$

โดยทั่วไปจะได้

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+p} m!\Gamma(p+m+1)} \quad , \quad m = 0,1,2,3,\ldots \tag{ก.8}$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ลงในผลเฉลยที่สมมติไว้จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการเบสเซล ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $J_p(x)$ นั่นคือ

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+r} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \tag{ก.9}$$

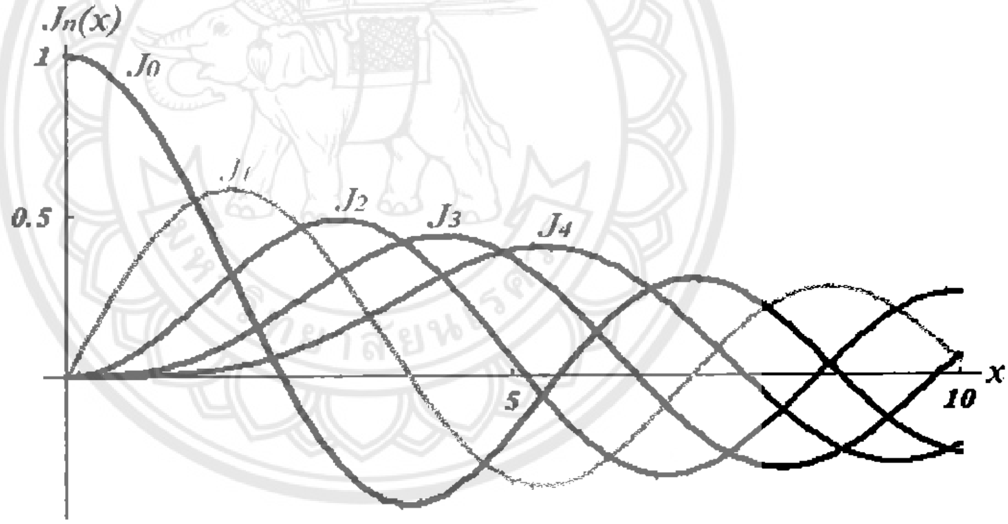
และเรียก $J_p(x)$ ว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ** p (Bessel function of the first kind of order p) สังเกตว่า $J_0(0)=1$ และ $J_p(0)=0$ สำหรับ $p>0$

ฟังก์ชันเบสเซลที่พบมากในทางประยุกต์ คือ $J_0(x)$ และ $J_1(x)$ ซึ่งเขียนออกมาอย่างชัดเจนได้เป็น

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\ldots \qquad (ก.10a)$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3 1!2!}+\frac{x^5}{2^5 2!3!}-\frac{x^7}{2^7 3!4!}+\ldots \qquad (ก.10b)$$

และแสดงได้ดังรูปที่ 1ก.



รูปที่ 1ก. ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ p (Bessel function of the first kind of order p)

ต่อไปพิจารณาหาผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซล

เนื่องจาก $r_1-r_2=p-(-p)=2p$

กรณีที่ 1 ถ้า $2p$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า p ไม่เป็นจำนวนเต็มด้วย

ใช้ $r_2=-p$ หาผลเฉลยในทำนองเดียวกับการใช้ $r_1=p$ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการเป็น

$$J_{-p}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \qquad (ก.11)$$

เนื่องจาก $J_{-p}(x)$ มีพจน์ x^{-p} ในขณะที่ $J_p(x)$ ไม่มี เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $J_p(x)$ และ $J_{-p}(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน แต่เพื่อจุดประสงค์หลายๆอย่าง จะสะดวกกว่าที่จะใช้

$$Y_p(x)=\frac{(\cos p\pi)J_p(x)-J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \qquad (ก.12)$$

แทน $J_{-p}(x)$ เป็นผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซลและเรียก $Y_p(x)$ ว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ** p (Bessel function of the second kind of order p)

กรณีที่ 2 ถ้า $2p$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า p ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ $2p=N$
แทนค่า $r_2=-p$ ลงในสมการ (ก.5b) จะได้

$$k(k-N)a_k=-a_{k-2} \quad , \qquad k\geq 2 \qquad (ก.13)$$

เมื่อแทนค่า $k=2,3,4,...$ ลงในสมการ (ก.13) เป็นลำดับไปจนกระทั่งถึง $k=N$ จะได้

$$a_3=a_5=...=a_{N-2}=0 \text{ และ } 0\cdot a_N=a_{N-2}=0 \qquad (ก.14)$$

เนื่องจาก a_N เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ดังนั้นเลือก $a_N=0$ ผลที่ตามมาคือ เหลือสัมประสิทธิ์ a_k เมื่อ $k=2,4,6,...$ และเราจะได้ผลเฉลยที่สองจากค่า $r_2=-p$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 ถ้า $2p$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า p เป็นจำนวนเต็ม ให้ $p=n$ จะได้

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \qquad (ก.15)$$

แต่ $\frac{1}{\Gamma(x)}=0$ ทุกค่า $x=0,-1,-2,...$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\Gamma(-n+m+1)}=0 \quad \text{เมื่อ} \quad m=0,1,2,3,...,(n-1) \qquad (ก.16)$$

ผลที่ได้คือ

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \quad (ก.17)$$

ให้ $k=m-n$ จะได้

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+n)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=(-1)^n J_n(x) \quad (ก.18)$$

ซึ่งแสดงว่า $J_n(x)$ และ $J_{-n}(x)$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ดังนั้นเมื่อ $p=n=0,1,2,...$ เราจะได้ผลเฉลยของสมการเบสเซลเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นคือ $J_n(x)$ แต่เราสามารถหาผลเฉลยที่สองได้ในรูป $J_n(x)\int\frac{1}{xJ_n^2(x)}dx$ หรืออาจจะหาได้อีกอย่างในรูปของลิมิตของ $Y_p(x)$ เมื่อ $p\to n$ ซึ่งสามารถแสดงได้ว่าลิมิตนี้มีค่าและจะเขียนแทนด้วย $Y_n(x)$ นั่นคือ

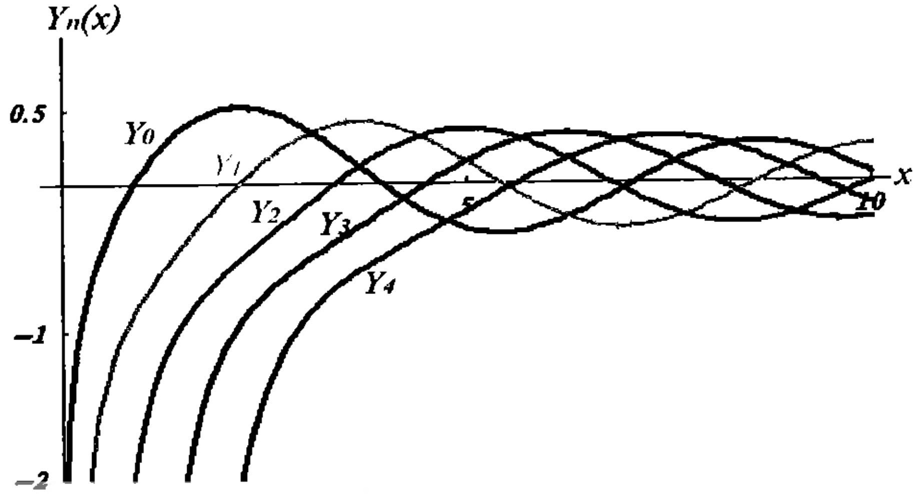
$$Y_n(x)=\lim_{p\to n}Y_p(x)=\lim_{p\to n}\frac{(\cos p\pi)J_p(x)-J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \quad (ก.19)$$

ดังนั้นผลเฉลยสุดท้ายของสมการเบสเซลอันดับ p จะอยู่ในรูป

$$y(x)=c_1J_p(x)+c_2Y_p(x) \quad (ก.20a)$$

และถ้า p ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะเขียนผลเฉลยสุดท้ายของสมการเบสเซลอันดับ p ได้อีกอย่าง คือ

$$y(x)=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x) \quad (ก.20b)$$



รูปที่ 2ก. แสดงฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ p (Bessel function of the second kind of order p)

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function identities)

จะพิจารณาคุณสมบัติที่สำคัญ ดังนี้

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \tag{ก.21}$$

ถ้า p เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p}}{2^{2m+p} \cdot m!(p+m)!}$$

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1} m!(p+m-1)!}$$

$$= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p-1}}{2^{2m+p-1} m!(p+m-1)!}$$

$$= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[x^{p} J_{p}(x)] = x^{p} J_{p-1}(x) \tag{ก.22}$$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[x^{-p} J_{p}(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{ก.23}$$

จาก (ก.22) จะได้

$$p x^{p-1} J_{p}(x) + x^{p} J'_{p}(x) = x^{p} J_{p-1}(x)$$

$$J'_{p}(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_{p}(x) \tag{ก.24}$$

จาก (ก.23) จะได้

$$J'_{p}(x) = \frac{p}{x} J_{p}(x) - J_{p+1}(x) \tag{ก.25}$$

นำ (ก.24) - (ก.25) จะได้

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_{p}(x) \tag{ก.26}$$

นำ (ก.24) + (ก.25) จะได้

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_{p}(x) \tag{ก.27}$$

สมการ (ก.26) มีประโยชน์ในการหาฟังก์ชันเบสเซลที่มีอันดับสูงขึ้น โดยเขียนในพจน์ของฟังก์ชันเบสเซลที่มีอันดับน้อยกว่า

ภาคผนวก (ข)

โปรแกรมวิเคราะห์ท่อนำคลื่น

โปรแกรมหาค่าศูนย์ χ'_{mn} ของอนุพันธ์ $J'_m(\chi'_{mn}) = 0$ โดยที่ n=1,2,3,... ของฟังก์ชันเบสเซล $J_m(x)$

ในการหาค่าศูนย์ของ อนุพันธ์ $J'_m(\chi'_{mn}) = 0$ เราสามารถหาค่าได้โดยการพิจารณาตาม (ก.23) ซึ่งจะนำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)] = -x^{-p}J_{p+1}(x) \qquad \text{(ก.23)}$$

ค่าต่างๆที่หาค่าได้จะแสดงดังตารางที่ 2.1 และสามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

ที่ m=0

```
function y=f(x);
a = -besselj(1,x);
b = 0;
y = a+b;
```

→ file diff_bessel.m

```
>> x=fzero('diff_bessel',3)
   x=3.8317        → m=0 , n=1
>> x=fzero('diff_bessel',8)
   x=7.0156        → m=0 , n=2
>> x=fzero('diff_bessel',11)
   x=10.1735       → m=0 , n=3
>> x=fzero('diff_bessel',14)
   x=13.3237       → m=0 , n=4
>> x=fzero('diff_bessel',17)
   x=16.4706       → m=0 , n=5
```

ที่ m=1

```
function y=f(x);
a = -besselj(2,x);
b = (1/x)*besselj(1,x);
y = a+b;
```

→ file diff_bessel1.m

```
>> x=fzero('diff_bessel1',2)
   x=1.8412        → m=1 , n=1
>> x=fzero('diff_bessel1',6)
   x=5.3314        → m=1 , n=2
>> x=fzero('diff_bessel1',9)
   x=8.5363        → m=1 , n=3
>> x=fzero('diff_bessel1',12)
   x=11.7060       → m=1 , n=4
>> x=fzero('diff_bessel1',15)
   x=14.8636       → m=1 , n=5
```

ที่ m=2

```
function y=f(x);
a = -besselj(3,x);
b = (2/x)*besselj(2,x);
y = a+b;
```

→ file diff_bessel2.m

```
>> x=fzero('diff_bessel2',4)
   x=3.0542        → m=2 , n=1
>> x=fzero('diff_bessel2',7)
   x=6.7061        → m=2 , n=2
>> x=fzero('diff_bessel2',10)
   x=9.9695        → m=2 , n=3
>> x=fzero('diff_bessel2',14)
   x=13.1704       → m=2 , n=4
>> x=fzero('diff_bessel2',17)
   x=16.3475       → m=2 , n=5
```

ที่ m=3

```
function y=f(x);
a = -besselj(4,x);
b = (3/x)*besselj(3,x);
y = a+b;
```

$\longrightarrow$ file diff_bessel3.m

```
>> x=fzero('diff_bessel3',5)
   x=4.2012                → m=3 , n=1
>> x=fzero('diff_bessel3',9)
   x=8.0152                → m=3 , n=2
>> x=fzero('diff_bessel3',12)
   x= 11.3459              → m=3 , n=3
>> x=fzero('diff_bessel3',15)
   x=14.5858               → m=3 , n=4
>> x=fzero('diff_bessel3',18)
   x=17.7887               → m=3 , n=5
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

โปรแกรมหาค่า χ_{mn} ของอนุพันธ์ $J_m(\chi_{mn}) = 0$ โดยที่ n=1,2,3,... ของฟังก์ชันเบสเซล $J_m(x)$

ในการหาค่าศูนย์ของอนุพันธ์ $J_m(\chi_{mn}) = 0$ เราสามารถหาค่าได้โดยเรียกใช้ฟังก์ชัน besselj ในโปรแกรม MATLAB ได้เลย ซึ่งฟังก์ชัน besselj ในโปรแกรม MATLAB จะเป็นฟังก์ชันของเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ p (Bessel function of the first kind of order p) ค่าต่างๆที่หามาได้จะแสดงดังตารางที่ 2.2 จะสามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

ที่ m=0

```
function y=f(x)
y=besselj(0,x);
```

$\longrightarrow$ file f.m

```
x=fzero('f',3)
x=2.4048          → m=0 , n=1
x=fzero('f',6)
```

x=5.5201 ⟶ m=0 , n=2

x=fzero('f',9)

x=8.6537 ⟶ m=0 , n=3

x=fzero('f',12)

x=11.7915 ⟶ m=0 , n=4

x=fzero('f',15)

x=14.9309 ⟶ m=0 , n=5

ที่ m=1

```
function y=f(x)
y=besselj(1,x);
```
⟶ file f.m

x=fzero('f',4)

x= 3.8317 ⟶ m=1 , n=1

x=fzero('f',7)

x=7.0156 ⟶ m=1 , n=2

x=fzero('f',10)

x=10.1735 ⟶ m=1 , n=3

x=fzero('f',14)

x=13.3237 ⟶ m=1 , n=4

x=fzero('f',17)

x=16.4706 ⟶ m=1 , n=5

ที่ m=2

```
function y=f(x)
y=besselj(2,x);
```
⟶ file f.m

x=fzero('f',5)

x= 5.1356 ⟶ m=2 , n=1

x=fzero('f',9)

x=8.4172 ⟶ m=2 , n=2

x=fzero('f',12)

x=11.6198 ⟶ m=2 , n=3

x=fzero('f',15)

```
x=14.7960 ──────────► m=2 , n=4
x=fzero('f',18)
x=17.9598 ──────────► m=2 , n=5
```

ที่ m=3

```
function y=f(x)
y=besselj(3,x);      ──────────►   file f.m
x=fzero('f',7)
x= 6.3802 ──────────► m=3 , n=1
x=fzero('f',10)
x=9.7610 ──────────► m=3 , n=2
x=fzero('f',13)
x=13.0152 ──────────► m=3 , n=3
x=fzero('f',15)
x=16.2235 ──────────► m=3 , n=4
x=fzero('f',20)
x=19.4094 ──────────► m=3 , n=5
```

%%

โปรแกรมหาค่าความถี่ตัด (Frequency cutoff) ในแบบแผนต่างๆของท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

ในการหาค่าความถี่ตัดในแบบแผนต่างๆนั้น เราจะหาค่าได้โดยพิจารณาตาม (2.18a) จะสามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
clear all
clc
%Mode TE_11
x=[1.8412:0.1:7];
y=1-(((1.8412)./x).^2);
z=sqrt(y);
```

```
plot(x,z,'k--')
hold on
axis([1 5 0 1]);
xlabel('k_0.a')
ylabel('\beta_z/k_0')
text(2.0,0.6,'TE_1_1')

 %Mode TM_01
x=[2.4049:0.1:7];
y=1-(((2.4049)./x).^2);
z=sqrt(y);
plot(x,z,'k--')
hold on
text(2.5,0.2,'TM_0_1')

 %Mode TE_21
x=[3.0542:0.1:7];
y=1-(((3.0542)./x).^2);
z=sqrt(y);
plot(x,z,'k--')
hold on
text(3.2,0.4,'TE_2_1')

%Mode TM_11 and TE_01
x=[3.8318:0.1:7];
y=1-(((3.8318)./x).^2);
z=sqrt(y);
plot(x,z,'k--')
hold on
text(4.3,0.4,'TM_1_1,TE_0_1')
```

โปรแกรมหาแบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE^z) ในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

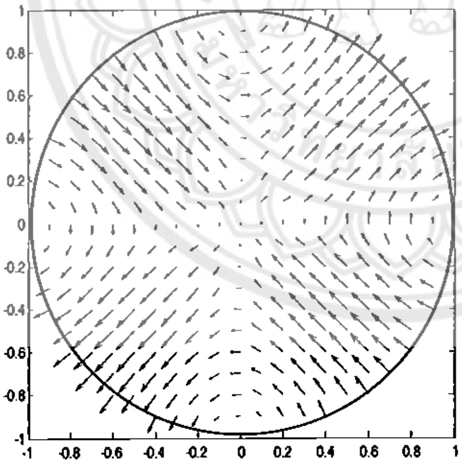
ในการหาแบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE^z) สามารถหาได้จากการพิจารณาตาม (2.20a) และ (2.20b) เนื่องจากเราจะพิจารณาเฉพาะในส่วนของสนามไฟฟ้าเท่านั้น โปรแกรมนี้จะแสดงแบบแผนคลื่นในแบบแผนต่างๆ โดยที่จะต้องใส่ค่า input ของแต่ละโหมดที่เราต้องการลงไป อย่างเช่น ถ้าเราต้องการแบบแผนคลื่นในแบบแผน TE_{01} เราจะต้องป้อนค่า input m=0 และ beta_n จะหาได้จากตารางที่ 2.1 ดังนั้นแบบแผนคลื่นในแบบแผน TE_{01} จะสามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
%--------TE01----------%
clear all
clc

 m=0;  %%-------------------------------- input m value
 beta_n1=3.8318;  %%---------------------------- input beta_n value

 [x,y] = meshgrid(-1:.1:1,-1:.1:1);
temp1=size(x);
temp2=temp1(1,1);
ex=zeros(temp1);
ey=zeros(temp1);
phi1=zeros(temp1);
rho=zeros(temp1);

 for ii=1:temp2
   for jj=1:temp2
         temp3=x(ii,jj);
         temp4=y(ii,jj);
         temp5=(temp3^2)+(temp4^2);
         rho(ii,jj)=sqrt(temp5);
```

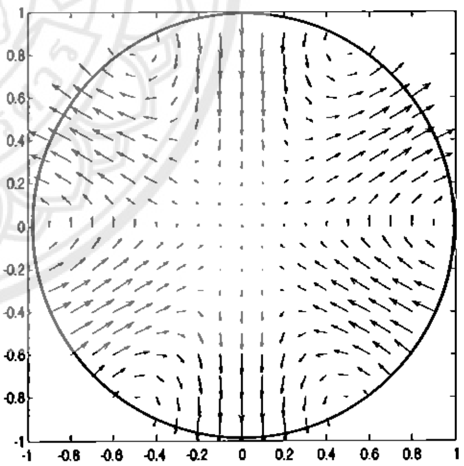
```
if (x(ii,jj)>0)&(y(ii,jj)>=0)
      phi1(ii,jj)=atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
 elseif  (x(ii,jj)<0)&(y(ii,jj)>=0)
      phi1(ii,jj)=pi+atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
elseif  (x(ii,jj)<0)&(y(ii,jj)<=0)
      phi1(ii,jj)=pi+atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
elseif  (x(ii,jj)>0)&(y(ii,jj)<=0)
     phi1(ii,jj)=(2*pi)+atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
elseif (x(ii,jj)==0)&(y(ii,jj)>0)
     phi1(ii,jj)=(pi/2);
elseif (x(ii,jj)==0)&(y(ii,jj)<0)
     phi1(ii,jj)=((3*pi)/2);
end
 end
    end

index1 = find(rho>1);

for ii=1:temp2
  for jj=1:temp2

     phi=phi1(ii,jj);
     beta_rho=beta_n1*rho(ii,jj);

     e_rho=(m/rho(ii,jj))*besselj(m,beta_rho)*sin(m*phi);

     temp7=-besselj(m+1,beta_rho);
     temp8=(m/beta_rho)*besselj(m,beta_rho);
     bessel_dat=temp7+temp8;

    e_phi=beta_rho*bessel_dat*cos(m*phi);
```

```
    ex(ii,jj)=cos(phi)*e_rho-sin(phi)*e_phi;
   ey(ii,jj)=sin(phi)*e_rho+cos(phi)*e_phi;
 end
   end

ex(index1) = 0;
ey(index1) = 0;
x(index1)=0;
y(index1)=0;

quiver(x,y,ex,ey)
hold on
axis([-1,1,-1,1])

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

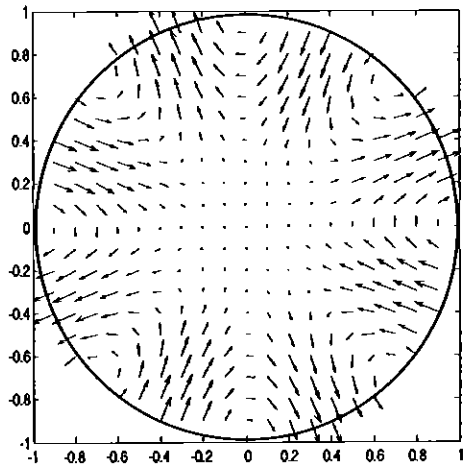
แสดงผลการวิเคราะห์แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวางในทิศทางของสนามไฟฟ้า ดังนี้



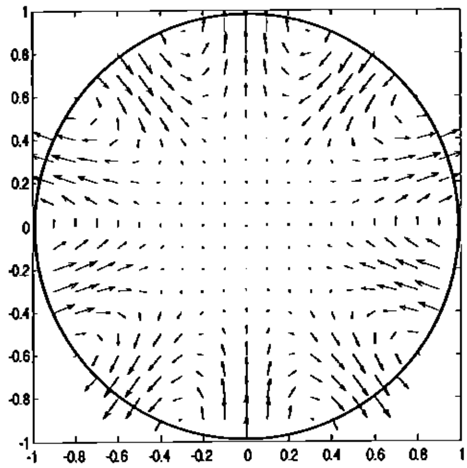
รูปที่ 1ข. TE_{21}



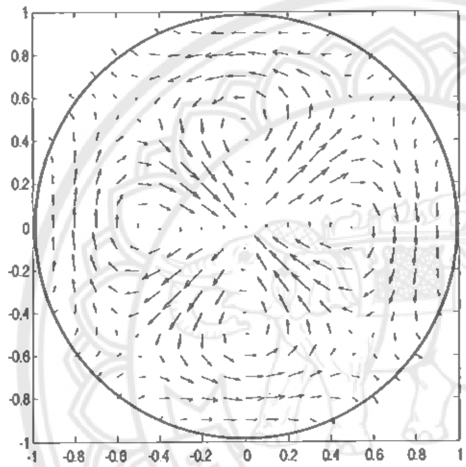
รูปที่ 2ข. TE_{31}



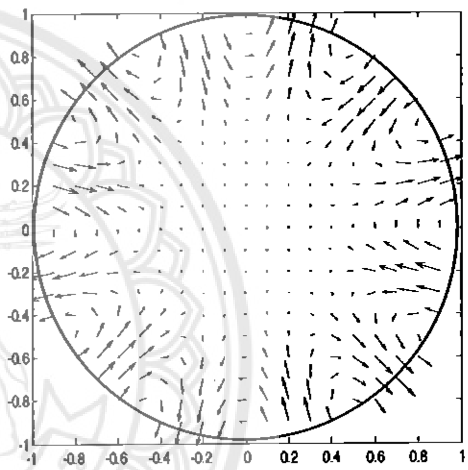
รูปที่ 3ข. TE_{41}



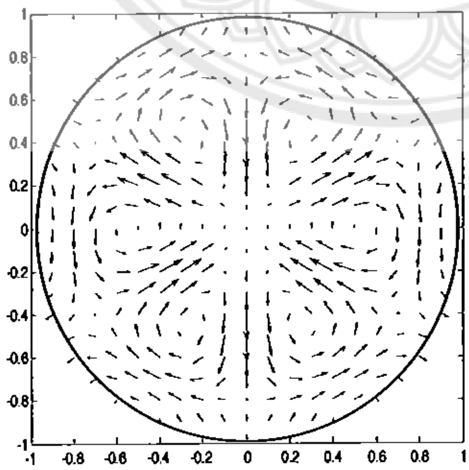
รูปที่ 4ข. TE_{51}



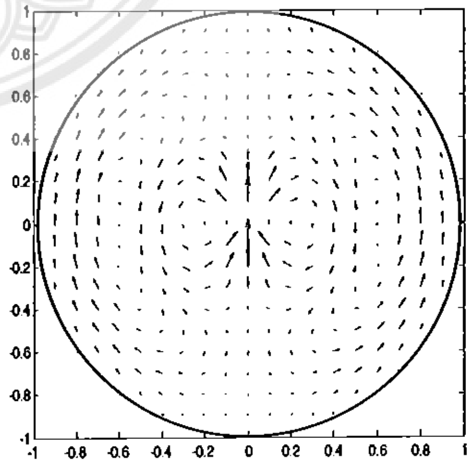
รูปที่ 5ข. TE_{22}



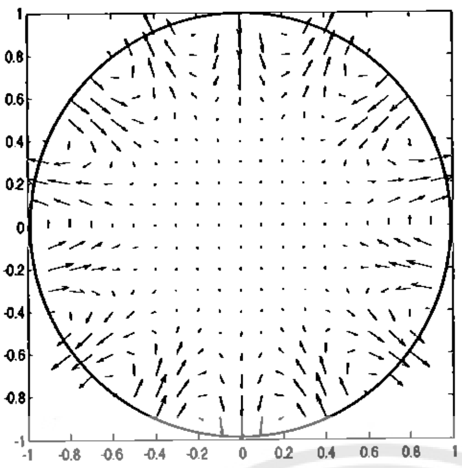
รูปที่ 6ข. TE_{61}



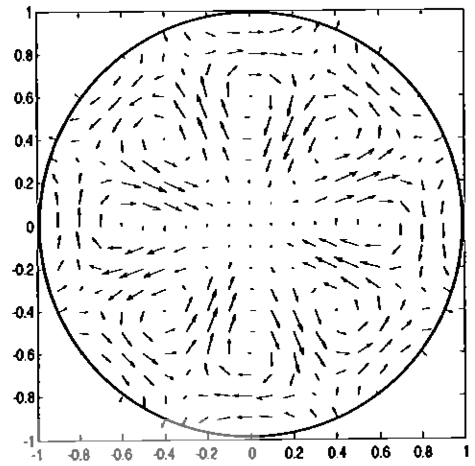
รูปที่ 7ข. TE_{32}



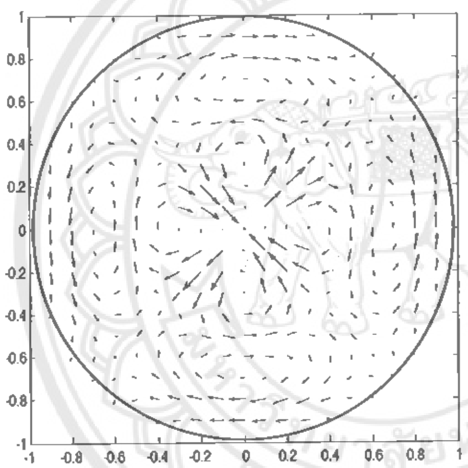
รูปที่ 8ข. TE_{13}



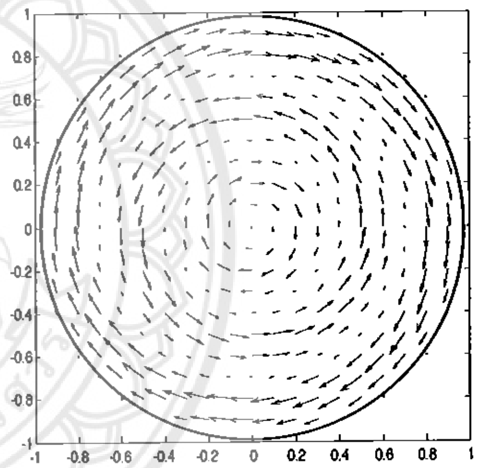
รูปที่ 9ข. TE_{71}



รูปที่ 10ข. TE_{42}



รูปที่ 11ข. TE_{23}



รูปที่ 12ข. TE_{03}

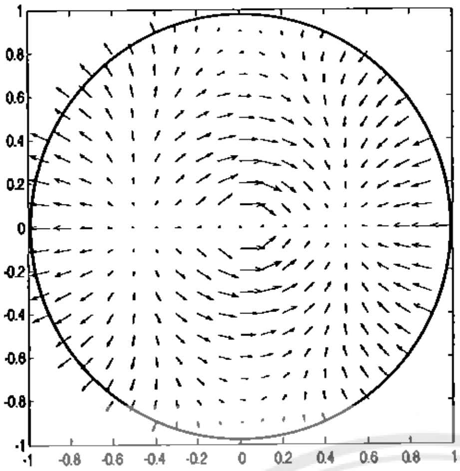
โปรแกรมหาแบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวาง (TM^z) ในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

ในการหาแบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TM^z) สามารถหาได้จากการพิจารณาตาม (2.36a) และ (2.36b) เนื่องจากเราจะพิจารณาเฉพาะในส่วนของสนามไฟฟ้าเท่านั้น โปรแกรมนี้จะแสดงแบบแผนคลื่นในแบบแผนต่างๆ โดยที่จะต้องใส่ค่า input ของแต่ละแบบแผนที่เราต้องการลงไป อย่างเช่น ถ้าเราต้องการแบบแผนคลื่นในแบบแผน TM_{01} เราจะต้องป้อนค่า input m=0 และ beta_n จะหาได้จากตารางที่ 2.2 ดังนั้นแบบแผนคลื่นในแบบแผน TM_{01} จะสามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

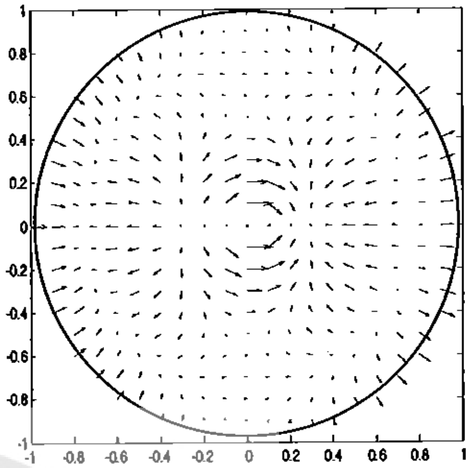
```
%--------TM01-----------%
clear all
clc
  m=0;  %%--------------------------------- input m value
 beta_n1=2.4049;  %%---------------------------- input beta_n value
 [x,y] = meshgrid(-1:.1:1,-1:.1:1);
temp1=size(x);
temp2=temp1(1,1);
ex=zeros(temp1);
ey=zeros(temp1);
phi1=zeros(temp1);
rho=zeros(temp1);

 for ii=1:temp2
    for jj=1:temp2
        temp3=x(ii,jj);
        temp4=y(ii,jj);
       temp5=(temp3^2)+(temp4^2);
       rho(ii,jj)=sqrt(temp5);

  if (x(ii,jj)>0)&(y(ii,jj)>=0)
      phi1(ii,jj)=atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
 elseif  (x(ii,jj)<0)&(y(ii,jj)>=0)
      phi1(ii,jj)=pi+atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
 elseif  (x(ii,jj)<0)&(y(ii,jj)<=0)
      phi1(ii,jj)=pi+atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
 elseif  (x(ii,jj)>0)&(y(ii,jj)<=0)
      phi1(ii,jj)=(2*pi)+atan((y(ii,jj))/(x(ii,jj)));
 elseif (x(ii,jj)==0)&(y(ii,jj)>0)
      phi1(ii,jj)=(pi/2);
 elseif (x(ii,jj)==0)&(y(ii,jj)<0)
```

```
      phi1(ii,jj)=((3*pi)/2);
end
   end
        end

index1 = find(rho>1);
for ii=1:temp2
  for jj=1:temp2
     phi=phi1(ii,jj);
     beta_rho=beta_n1*rho(ii,jj);

  temp7=-besselj(m+1,beta_rho);
  temp8=(m/beta_rho)*besselj(m,beta_rho);
  bessel_dat=temp7+temp8;

  e_rho=beta_rho*bessel_dat*cos(m*phi);
  e_phi=(m/rho(ii,jj))*besselj(m,beta_rho)*(-sin(m*phi));

 ex(ii,jj)=cos(phi)*e_rho-sin(phi)*e_phi;
 ey(ii,jj)=sin(phi)*e_rho+cos(phi)*e_phi;
end
    end

ex(index1) = 0;
ey(index1) = 0;
x(index1)=0;
y(index1)=0;
quiver(x,y,ex,ey)
hold on
axis([-1,1,-1,1])

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

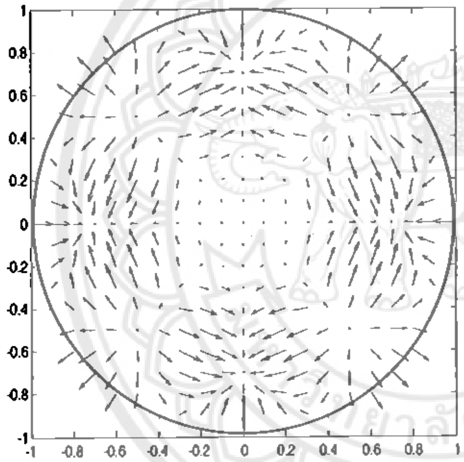
ผลการวิเคราะห์แบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวางในทิศทางของสนามไฟฟ้า ดังนี้



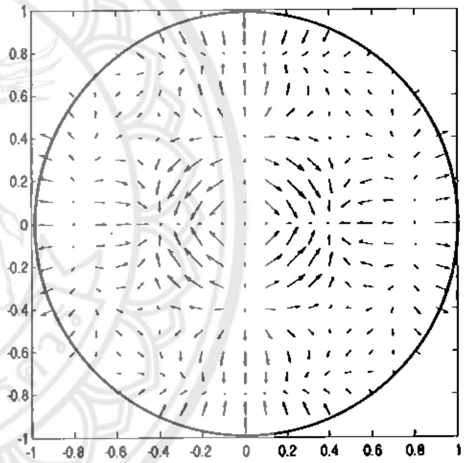
รูปที่ 13ข. TM_{11}



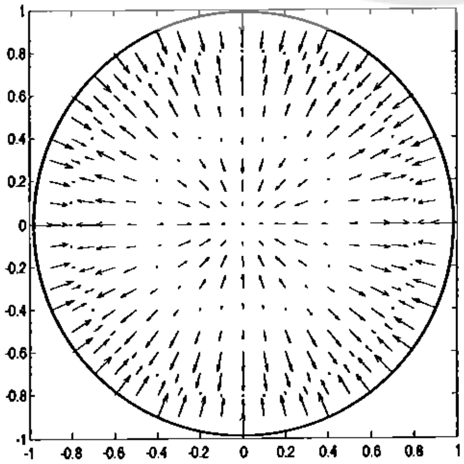
รูปที่14ข. TM_{12}



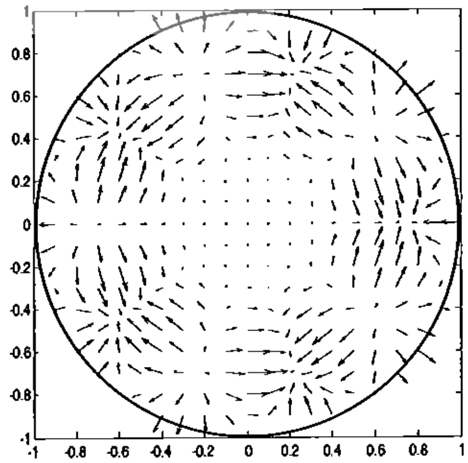
รูปที่ 15ข. TM_{41}



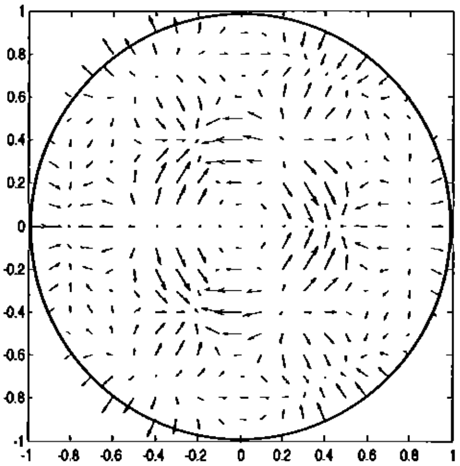
รูปที่ 16ข. TM_{22}



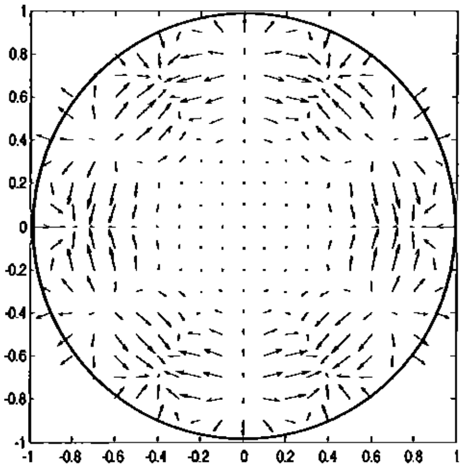
รูปที่ 17ข. TM_{03}



รูปที่ 18ข. TM_{51}



รูปที่ 19ข. TM_{32}



รูปที่ 20ข. TM_{61}

โปรแกรมหาค่าความถี่ตัด (Frequency cutoff) ในแบบแผนต่างๆของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริก

ในการหาค่าความถี่ตัด (Frequency cutoff) ในแบบแผนต่างๆของท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกนั้นหาได้จากการพิจารณาตาม (2.94) จะสามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
%--------file a1.m----------%
function y=f(x)
global  n1 n2 V

na=((n1.^2)-(n2.^2));
NA=sqrt(na);
k0= V./NA;

uu=(k0.^2)*((n1.^2)-(x.^2));
u=sqrt(uu);
ww=(k0.^2)*((x.^2)-(n2.^2));
w=sqrt(ww);

bj=besselj(1,u);%bj=besselj(v,u)
jv=besselj(0,u)-(1/u)*besselj(1,u);
```

```
bk=besselk(1,w);
kv=-besselk(0,w)-(1/w)*besselk(1,w);

Jv=jv./(u*bj);
Kv=kv./(w*bk);

temp1=(Jv+Kv).*((n1.*n1.*Jv)+(n2.*n2.*Kv));
temp2=((x).^2).*(((1./(uu))+(1./(ww)))^2);

y=temp1-temp2;

%-------file a2.m---------%
function y=f(x)
global  n1 n2 V

na=((n1.^2)-(n2.^2));
NA=sqrt(na);
k0= V./NA;

uu=(k0.^2)*((n1.^2)-(x.^2));
u=sqrt(uu);
ww=(k0.^2)*((x.^2)-(n2.^2));
w=sqrt(ww);

bj=besselj(0,u);
jv=-besselj(1,u);
bk=besselk(0,w);
kv=-besselk(1,w);

Jv=jv./(u*bj);
Kv=kv./(w*bk);
```

```
temp1=((n1.*n1.*Jv)+(n2.*n2.*Kv));
temp2=((x).^2).*(((1./(uu))+(1./(ww)))^2);

y=temp1-temp2;

%---------file a3.m------------%
function y=f(x)
global  n1 n2 V

na=((n1.^2)-(n2.^2));
NA=sqrt(na);
k0= V./NA;

uu=(k0.^2)*((n1.^2)-(x.^2));
u=sqrt(uu);
ww=(k0.^2)*((x.^2)-(n2.^2));
w=sqrt(ww);

bj=besselj(0,u);
jv=-besselj(1,u);
bk=besselk(0,w);
kv=-besselk(1,w);

 Jv=jv./(u*bj);
Kv=kv./(w*bk);

temp1=(Jv+Kv);
temp2=((x).^2).*(((1./(uu))+(1./(ww)))^2);

y=temp1-temp2;
```

```
%--------file a4.m-------------%
function y=f(x)
global  n1 n2 V

na=((n1.^2)-(n2.^2));
NA=sqrt(na);
k0= V./NA;

uu=(k0.^2)*((n1.^2)-(x.^2));
u=sqrt(uu);
ww=(k0.^2)*((x.^2)-(n2.^2));
w=sqrt(ww);

bj=besselj(1,u);
jv=besselj(2,u)-(1/u)*besselj(1,u);;
bk=besselk(1,w);
kv=-besselk(2,w)-(1/w)*besselk(1,w);

Jv=jv./(u*bj);
Kv=kv./(w*bk);

temp1=((n1.*n1.*Jv)+(n2.*n2.*Kv));
temp2=((x).^2).*(((1./(uu))+(1./(ww)))^2);

y=temp1-temp2;

%--------file mode.m----------%
clear all
clc
global  n1 n2 V
n1=1.66;
n2=1.52;
```

```
 m=[1.521:0.00214:1.659];
v=[0.0001:0.1:6.5];
for vv=1:65
        V=v(vv);
        for i=1:65
            y(vv,i)=fzero('a1',m(i));
        end
   end

%---------file mode2.m----------%
clear all
clc
global  n1 n2 V
n1=1.66;
n2=1.52;

m=[1.521:0.00215:1.659];
v=[0.0001:0.08:5.2];
for vv=1:65
        V=v(vv);
        for i=1:65
            y(vv,i)=fzero('a2',m(i));
        end
   end

%---------file mode3.m-------%
clear all
clc
global  n1 n2 V
n1=1.66;
n2=1.52;
```

```
m=[1.521:0.00215:1.659];
v=[0.0001:0.08:5.2];
for vv=1:65
        V=v(vv);
        for i=1:65
          y(vv,i)=fzero('a3',m(i));
        end
  end

%---------file mode4.m---------%
clear all
clc
global  n1 n2 V
n1=1.66;
n2=1.52;

m=[1.521:0.00214:1.659];
v=[0.0001:0.1:6.5];
for vv=1:65
        V=v(vv);
        for i=1:65
          y(vv,i)=fzero('a4',m(i));
        end
  end

%-------file hi.m--------%
mode
gg=max([y']);
dd=v(1:i);
plot(dd,gg,'k')
axis([0 5.1 1.52 1.66])
```

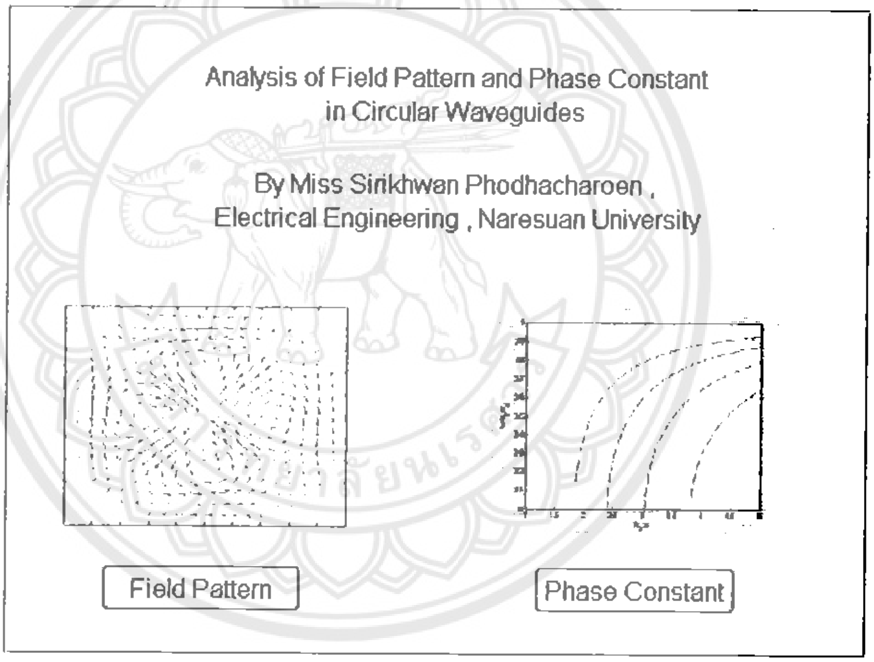
```
xlabel('Normalized frequency V')
ylabel('\betaa/k_0a')
hold on

mode2
gg=max([y']);
dd=v(1:i);
plot(dd,gg,'k')
hold on

mode3
gg=max([y']);
dd=v(1:i);
plot(dd,gg,'k.')
hold on

mode4
gg=max([y']);
dd=v(1:i);
plot(dd,gg,'k*')
hold on

text(2.1,1.6,'HE_1_1')
text(2.3,1.56,'TE_0_1(-)')
text(3.4,1.58,'TM_0_1(.)')
text(4.25,1.53,'TE_1_1(*)')
text(4.25,1.55,'TM_1_1(-)')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

ภาคผนวก (ค)

การเชื่อมต่อกับผู้ใช้งานทางกราฟิก

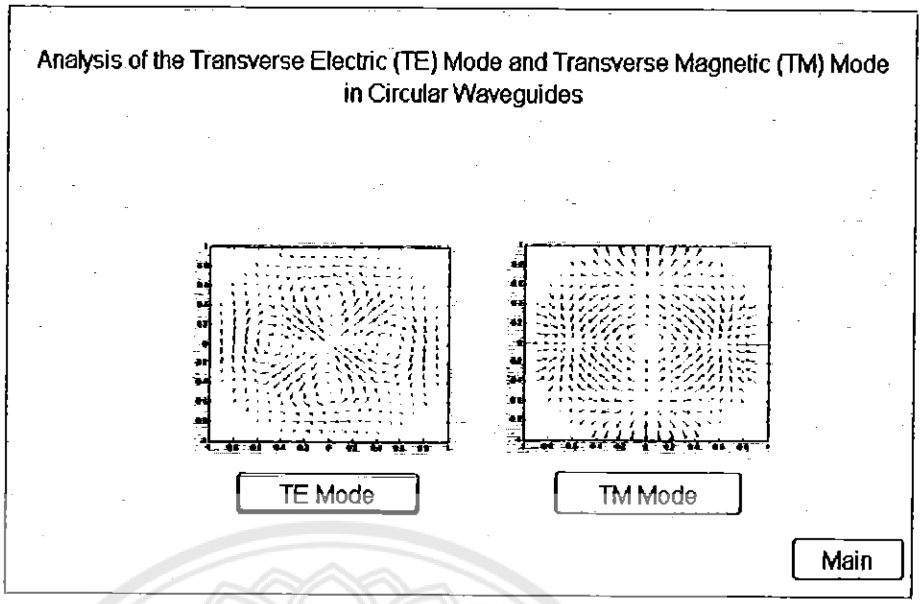
(Graphic User Interfaces (GUI))

การเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิก (GUI) เป็นการเชื่อมต่อกันระหว่างผู้ใช้และคอมพิวเตอร์ โดยคอมพิวเตอร์ได้รับการใช้งานเมื่อผู้ใช้ป้อนข้อมูลผ่านทางคีบอร์ด เมาส์ อย่างใดอย่างหนึ่งให้กับคอมพิวเตอร์ แล้วคอมพิวเตอร์จะแสดงตัวอักษรและกราฟิกต่างๆบนจอภาพ รูปที่ 1ค. แสดงหน้าต่างหลักของโปรแกรมวิเคราะห์แบบแผนคลื่นและค่าคงตัวเฟส ในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ โดยใช้ Graphic User Interfaces (GUI)



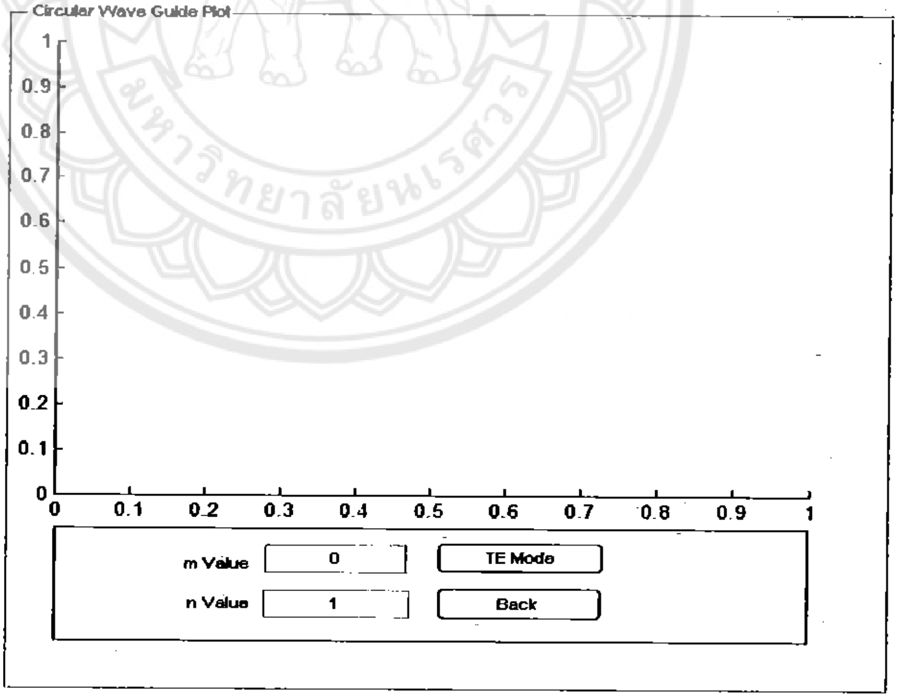
รูปที่ 1ค. หน้าต่างหลักของโปรแกรมวิเคราะห์แบบแผนคลื่นและค่าคงตัวเฟสในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ โดยใช้ GUI

ในกรณีแรกจะทำการวิเคราะห์แบบแผนคลื่น (Field Pattern) โดยนำเมาส์ไปคลิกเลือกที่ปุ่ม Field Pattern จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 2ค.



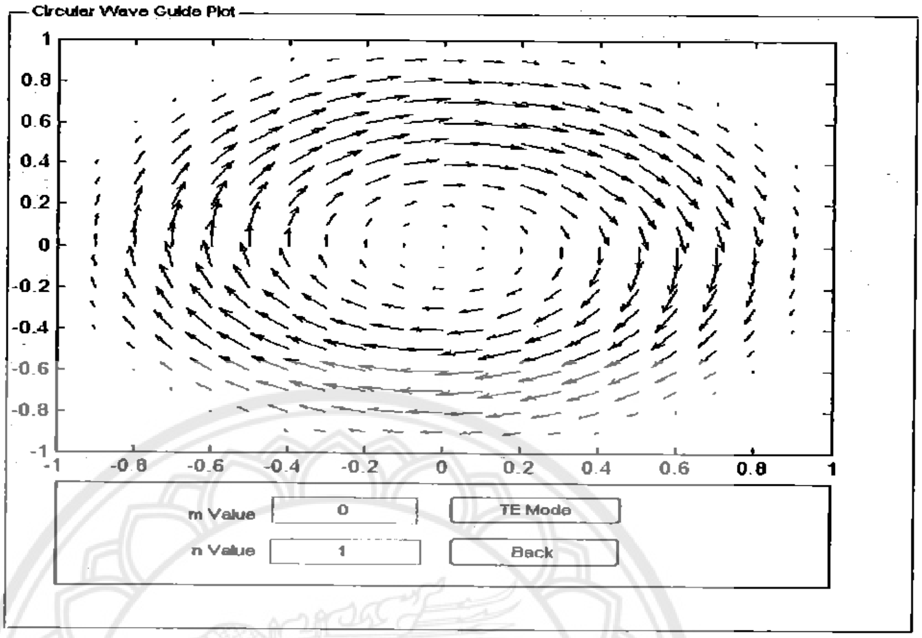
รูปที่ 2ค. หน้าต่างโปรแกรมวิเคราะห์แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE) และแบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวาง (TM) ในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ โดยใช้ GUI

เมื่อนำเมาส์คลิกเลือกที่ปุ่ม TE Mode จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 3ค.



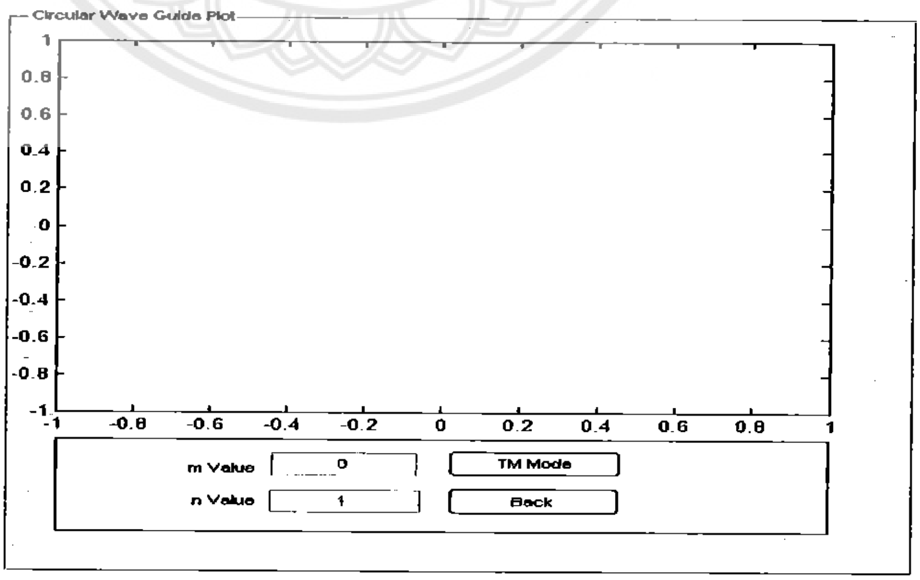
รูปที่ 3ค. หน้าต่างโปรแกรมวิเคราะห์แบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวางในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ โดยใช้ GUI

เมื่อทำการป้อนค่า m Value และค่า n Value ลงไป จากนั้นนำเมาส์ไปคลิกเลือกที่ปุ่ม TE Mode โปรแกรมจะทำการวิเคราะห์ผลให้โดยอัตโนมัติ จะปรากฏผลการวิเคราะห์ขึ้นมา ดังรูปที่ 4ค.



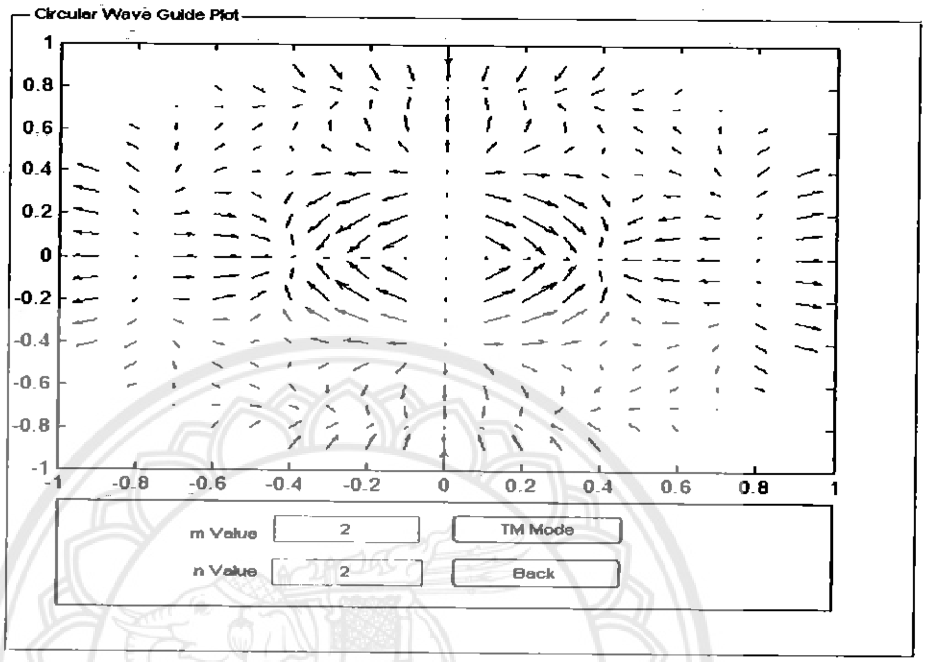
รูปที่ 4ค. หน้าต่างผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบในแบบแผนคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE Mode)

ถ้าต้องการวิเคราะห์ในส่วนของแบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวางให้ใช้เมาส์คลิกเลือกที่ปุ่ม Back ก็จะกลับมาเป็นหน้าต่างดังรูปที่ 2ค. จากนั้นก็ทำการเลือกไปยัง TM Mode ก็จะปรากฏดังรูปที่ 5ค.



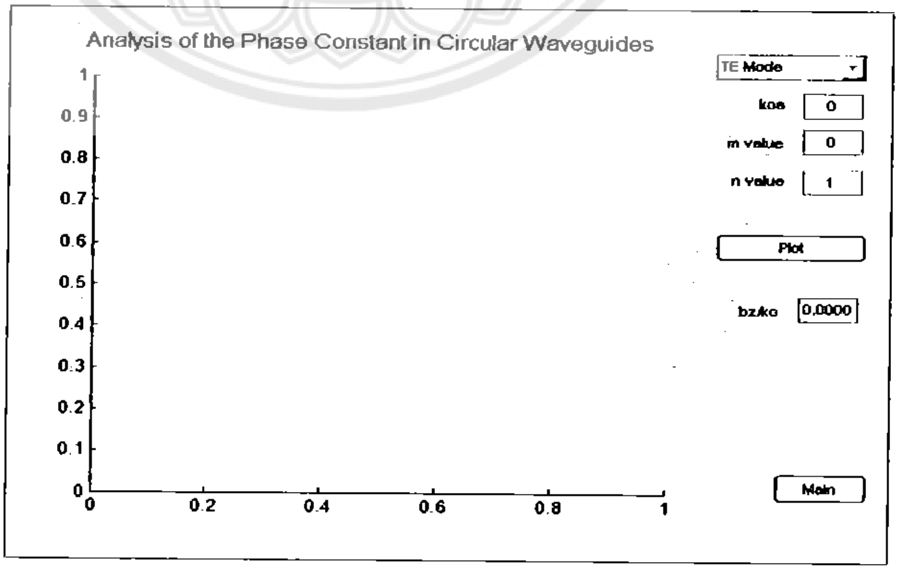
รูปที่ 5ค. หน้าต่างโปรแกรมวิเคราะห์แบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวางในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ โดยใช้ GUI

เมื่อทำการป้อนค่า m Value และค่า n Value ลงไป จากนั้นนำเมาส์ไปคลิกเลือกที่ปุ่ม TM Mode โปรแกรมจะทำการวิเคราะห์ผลให้โดยอัตโนมัติ จะปรากฏผลการวิเคราะห์ขึ้นมาดังรูปที่ 6ค.



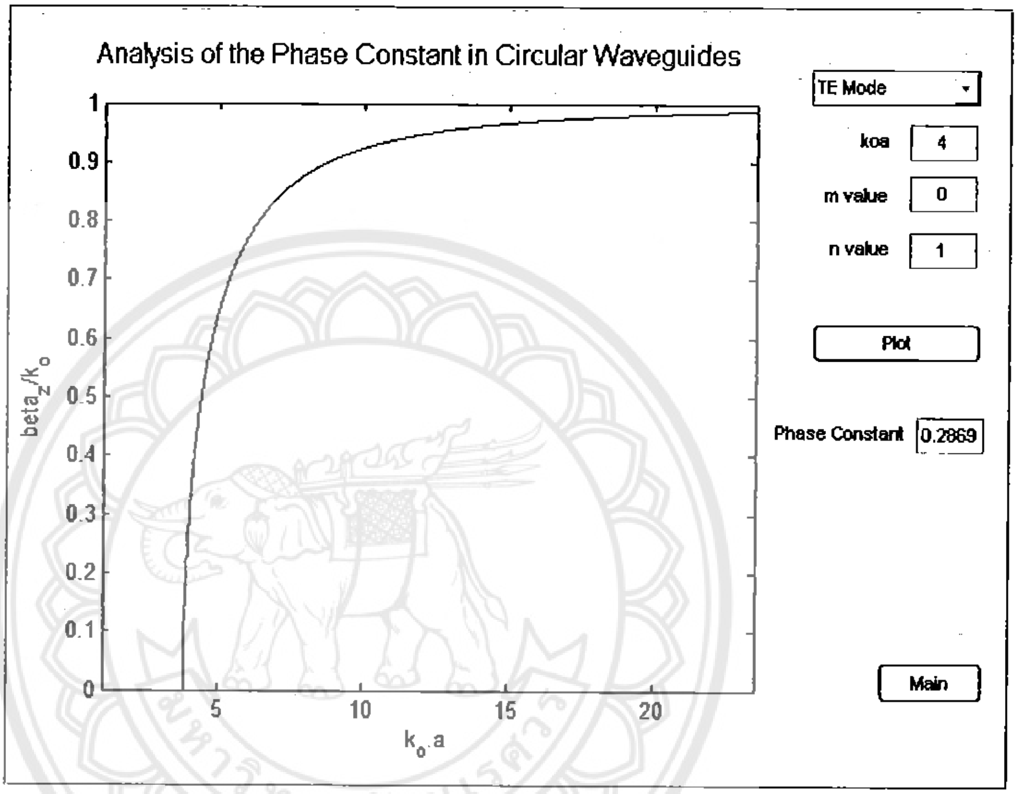
รูปที่ 6ค. หน้าต่างผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบในแบบแผนคลื่นแม่เหล็กตามขวาง (TM Mode)

ในกรณีที่จะวิเคราะห์ค่าคงตัวเฟส ในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ จะทำการนำเมาส์ไปคลิกเลือกที่ปุ่ม Phase Constant ในรูปที่ 1ค. จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 7ค.



รูปที่ 7ค. หน้าต่างโปรแกรมวิเคราะห์ค่าคงตัวเฟสในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ โดยใช้ GUI

เมื่อทำการป้อนค่า k_0a , m Value และค่า n Value ลงไปพร้อมด้วยการนำเมาส์ไปคลิกเลือกแบบแผนที่เราต้องการจะทำการวิเคราะห์แล้ว จากนั้นนำเมาส์ไปคลิกเลือกที่ปุ่ม Plot โปรแกรมจะทำการวิเคราะห์ผลให้โดยอัตโนมัติ โดยจะมีกราฟแสดงค่าความถี่ตัดและค่าคงตัวเฟสของแบบแผนที่ต้องการทราบ ผลจะปรากฏขึ้นมาดังรูปที่ 8ค.



รูปที่ 8ค. หน้าต่างผลการวิเคราะห์ค่าคงตัวเฟสในท่อนำคลื่นที่มีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

ถ้าจะกลับไปยังหน้าต่างหลักในรูปที่ 1ค. ให้นำเมาส์ไปคลิกเลือกที่ Main โปรแกรมก็จะกลับไปยังหน้าต่างหลักให้โดยอัตโนมัติ

จากรูปที่ 1ค. ถึง รูปที่ 8ค. แสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นโดยการสร้างการเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกขึ้นมานั้น การเปลี่ยนแปลงตัวแปรต่างๆเพียงแค่ทำการเปลี่ยนแปลงค่าในหน้าต่าง GUI โดยไม่จำเป็นที่จะต้องเข้าไปแก้ไขในตัวโปรแกรมหลักเลย ทำให้การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีความสะดวก รวดเร็วและเกิดข้อผิดพลาดน้อยลง

ประวัติผู้เขียนโครงงาน

ชื่อ นางสาว ศิริขวัญ โพธาเจริญ

ภูมิลำเนา 270/1 ม.1 ต.อุโมงค์ อ.เมือง จ.ลำพูน 51150

ประวัติการศึกษา

- จบระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนอุโมงค์วิทยาคม จังหวัดลำพูน
- ปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาตรี
  สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์
  มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail: khwan_engi_nu@hotmail.com