การสร้างเสถียรภาพให้กับระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน

(Stabilizing of Double Inverted Pendulum)

นายชาญวิทย์ อยู่เชื้อ

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2551

ใบรับรองโครงงาน

หัวข้อโครงงาน : การสร้างเสถียรภาพให้กับระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน (Stabilizing of Double Inverted Pendulum)

ผู้ดำเนินโครงงาน : นายชาญวิทย์ อยู่เชื้อ รหัส 46360723

อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์สุรัตน์ ปัญญาแก้ว

ภาควิชา : วิศวกรรมเครื่องกล

ปีการศึกษา : 2551

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะกรรมการตรวจสอบโครงงาน

....ประธานกรรมการ
(อาจารย์สุรัตน์ ปัญญาแก้ว)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปฐมศก วิไลพล)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยะนันท์ เจริญสวรรค์)

หัวข้อโครงงาน : การสร้างเสถียรภาพให้กับระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน

ผู้ดำเนินโครงงาน : นายชาญวิทย์ อยู่เชื้อ รหัส 46360723

อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์สุรัตน์ ปัญญาแก้ว

ภาควิชา : วิศวกรรมเครื่องกล

ปีการศึกษา : 2551

บทคัดย่อ

โครงการนี้ได้นำเสนอการศึกษาและออกแบบระบบควบคุมลูกตุ้มผกผันสองแกน ซึ่งระบบนี้เป็นระบบที่ใช้ในการทดสอบการควบคุมทางคลาสสิคคอนโทรลและมีบทประยุกต์ที่หลากหลายอาทิ เช่น หุ่นยนต์ จรวด เป็นต้น โดยจุดประสงค์ของโครงงานนี้ คือ ต้องการควบคุมตำแหน่งของตัวรถและรักษาเสถียรภาพให้กับลูกตุ้มผกผันทั้งสองแกนโดยในที่นี้เราจะเลือกใช้ระบบควบคุมทาง State Space แบบที่มีตัวควบคุมแบบปริพันธ์ร่วมด้วย

จากการทดลองในโปรแกรม MATLAB พบว่าการตอบสนองของตัวรถและลูกตุ้มผกผันทั้งสองนั้นมี Percent Overshoot เป็น 10 % และ Setting Time เป็น 1 วินาที ซึ่งจากกราฟการตอบสนองนี้แสดงว่าระบบควบคุมที่เราได้ออกแบบนั้นสามารถควบคุมตำแหน่งของตัวรถ พร้อมทั้งรักษาเสถียรภาพของแกนลูกตุ้มทั้งสองให้ตั้งตรงได้

Project title : Stabilizing of Double Inverted Pendulum

Name : Mr.Chanwit Yoochua Code 46360723

Project Advisor : Mr.Surat Punyakeaw

Department : Mechanical Engineering

Academic Year : 2008

Abstract

This project present to design and research control system of Double Inverted Pendulum which this system use in classic control and can be applied to another system such as Robot, Rocket system. The purpose of this project is control position of the cart and stabilizing of Double Inverted Pendulum by State Space Control with Integrator. From MATLAB Program will get response curve of the cart and Double Inverted Pendulum which have Percent Overshoot approximately 10 % and Setting Time 1 second. This result means control system can be control position of a cart and control the Double Inverted Pendulum to stability and upright always.

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลโดยมุ่งเน้นในเรื่องการสร้างเสถียรภาพให้กับระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกนซึ่งจากการดำเนินงานพบว่าได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และผลการตอบสนองตามต้องการ

โครงงานเรื่องการสร้างเสถียรภาพให้กับระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกนนี้ สำเร็จได้ด้วยดีด้วยความช่วยเหลือจากท่านอาจารย์สุรัตน์ ปัญญาแก้ว ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา และคณะกรรมการทุกท่านที่กรุณาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆตลอดจนให้ความเอาใจใส่ในการตรวจสอบแก้ไขและปรับปรุง ข้อบกพร่องต่างๆด้วยดีตลอดมาจึงขอขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณคณาจารย์และเจ้าหน้าที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยนเรศวรทุกท่านที่กรุณาให้กำลังใจและความช่วยเหลืออย่างดีตลอดมา ท้ายสุดนี้ผู้ดำเนินโครงงานขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่สนับสนุนให้กำลังใจและความห่วงใยแก่ผู้ดำเนินโครงงานอย่างดีจนสำเร็จการศึกษาไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ผู้ดำเนินโครงงาน

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญรูปภาพ

สารบัญกราฟ

ลำดับสัญลักษณ์

A	เมตริกซ์ A	-
B	เมตริกซ์ B	-
C	เมตริกซ์ C	-
D	Disturbance	-
g	แรงโน้มถ่วงของโลก	m/s^2
I	โมเมนต์ความเฉื่อย	$kg.m^2$
K	ค่าคงที่	-
k_I	ค่าคงที่ของ Integral control	-
L	ความยาวของแท่ง Pendulum	m
l	ระยะจากปลายแท่งถึงจุด C.G.	m
M	มวลของตัวรถ	kg
m	มวลของแท่ง Pendulum	kg
r	Reference input	-
u	สัญญาณควบคุม(Input)	-
x	ระยะทางของรถ	m
$\dot{x}$	ความเร็วเชิงเส้นของรถ	m/s
$\ddot{x}$	ความเร่งเชิงเส้นของรถ	m/s^2
y	สัญญาณ Output	-
θ	มุมของ Pendulum	*Radian*
$\dot{\theta}$	ความเร็วเชิงมุมของ Pendulum	Rad/s
$\ddot{\theta}$	ความเร่งเชิงมุมของ Pendulum	Rad/s^2
ω_n	ความถี่ธรรมชาติ	*Hertz*
ξ	สัญญาณ Out put ที่ออกจากตัว Integrator	-

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ระบบลูกตุ้มผกผันสองแกนเป็นเครื่องมือที่ใช้ทดสอบการควบคุมทางคลาสสิคคอนโทรล เพื่อพิสูจน์และทดลองวิธีการควบคุมแบบต่างๆซึ่งบทประยุกต์ใช้ของวิธีการควบคุมเหล่านี้มีตั้งแต่ใช้กับหุ่นยนต์ ไปจนถึงระบบนำร่องของกระสวยอวกาศ ในโครงงานนี้จะทำการออกแบบระบบควบคุมให้กับลูกตุ้มผกผันสองแกนเพื่อทำให้ลูกตุ้มผกผันสองแกนมีเสถียรภาพโดยจะเลือกใช้วิธีการควบคุมแบบตัวแปรสถานะ

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อออกแบบระบบควบคุมให้กับระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน โดยที่นี้จะเลือกใช้ระบบควบคุมแบบตัวแปรสถานะ ซึ่งระบบควบคุมที่จะออกแบบนั้นมีเป้าหมาย 2 ประการคือ

1. เพื่อรักษาเสถียรภาพของชิ้นต่อโยงทั้งสองให้ตั้งตรงอยู่ได้ตลอดเวลา
2. เพื่อให้ตัวรถไปยังตำแหน่งที่ต้องการ

1.3 ขอบเขต

1. ไม่คำนึงถึงความยืดหยุ่นของชิ้นต่อโยงทั้งสอง
2. ไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานที่จุดยึดต่อ
3. ในการทดลองนี้เราจะไม่ทดลองกับระบบจริงแต่จะนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มผกผันสองแกนที่ได้ไปสร้างแบบจำลองในโปรแกรม MATLAB แล้ใช้โปรแกรม MATLAB ทำการทดสอบและวิเคราะห์ผลออกมา

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ข้อมูลค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมที่ให้สมรรถนะการตอบสนองเป็นไปตามต้องการ
2. ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลูกตุ้มผกผันสองแกน

1.5 ระยะเวลาและแผนการปฏิบัติงาน

ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาและแผนการปฏิบัติงาน

	ช่วงเวลาปฏิบัติงาน 2551				
	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.
1. ศึกษาค้นคว้าเอกสารเกี่ยวกับทฤษฎีต่างๆที่เกี่ยวข้อง	←———	———→			
2. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ Double Inverted Pendulum		←———	———→		
3. สร้างแบบจำลองการทดลองใน MATLAB			←———	———→	
4. วิเคราะห์และสรุปผลของแบบจำลองที่ได้รวมถึงแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น					←———→

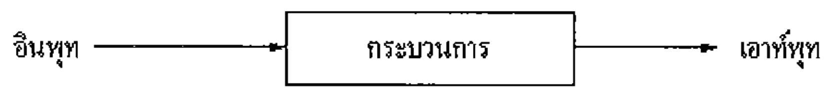
1.6 อุปกรณ์ที่ใช้

1. คอมพิวเตอร์
2. โปรแกรม MATLAB
3. เครื่องคิดเลข

บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

2.1 ระบบควบคุม

ระบบควบคุม คือ ส่วนประกอบหลายๆส่วนต่อเชื่อมกันขึ้นเป็นระบบที่จะให้การตอบสนองตามที่เราต้องการ พื้นฐานของการวิเคราะห์ระบบจะมีพื้นฐานมาจากทฤษฎีระบบเชิงเส้น ซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ของอินพุทและเอาท์พุทหรือการตอบสนองดังนั้นส่วนประกอบหรือกระบวนการ (process) ที่เราต้องการที่จะควบคุมสามารถแทนด้วยบล็อก (block) ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยสัญญาณอินพุทจะเป็นส่วนสำคัญของผลลัพธ์หรือเอาท์พุทนั่นเอง



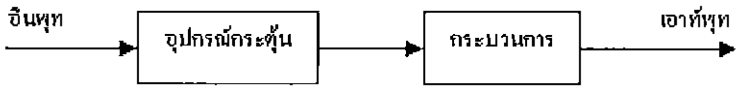
รูปที่ 2.1 การควบคุมระบบ

ระบบควบคุมสามารถแบ่งออกเป็นประเภทใหญ่ๆ ตามลักษณะการทำงานได้เป็น 2 แบบคือ

1. ระบบควบคุมแบบเปิด (Open Loop Control System)
2. ระบบควบคุมแบบปิด หรือ ระบบควบคุมแบบป้อนกลับ (Closed Loop or Feedback Control System)

2.1.1 ระบบควบคุมแบบเปิด(Open Loop Control System)

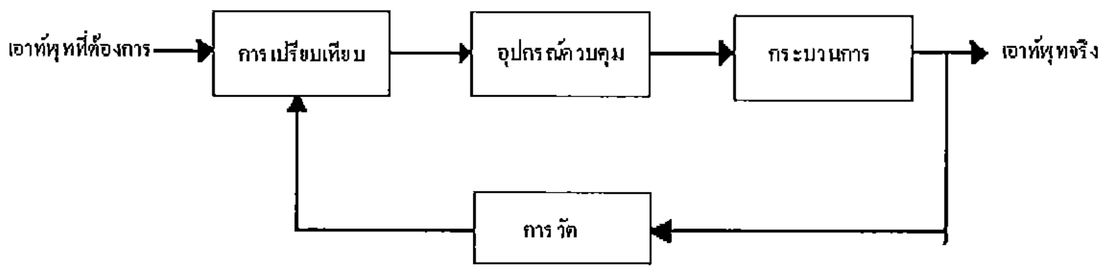
ระบบควบคุมแบบเปิดเป็นการใช้อุปกรณ์ควบคุม (Controller) หรืออุปกรณ์ส่งกำลัง เพื่อให้ได้การตอบสนองตามที่เราต้องการ โดยไม่ต้องนำผลการตอบสนองของระบบกลับเข้ามาสู่การพิจารณาอีก ลักษณะของระบบควบคุมแบบเปิดแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ระบบควบคุมแบบเปิด

2.1.2 ระบบควบคุมแบบปิด(Closed loop or Feedback control system)

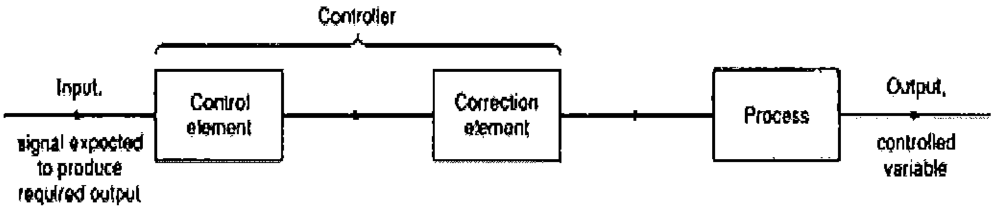
ระบบควบคุมแบบปิด หรือระบบควบคุมป้อนกลับจะแตกต่างจากระบบควบคุมแบบเปิด ก็คือมีการนำเอาผลที่ได้จากกระบวนการกลับเข้ามาเป็นส่วนหนึ่งของข้อมูลที่จะส่งเข้าไปเป็นอินพุทให้กับระบบอีกครั้ง การที่จะทราบค่าเอาท์พุทได้จะต้องมีการวัดข้อมูลของเอาท์พุท เมื่อทราบค่าเอาท์พุทแล้วเรามักจะนำค่าเอาท์พุทที่ได้ไปเปรียบเทียบกับเอาท์พุทที่เราต้องการจากระบบ จากนั้นความแตกต่างระหว่างเอาท์พุทที่ต้องการและเอาท์พุทที่แท้จริงจะได้รับการส่งต่อไปอุปกรณ์ควบคุมแล้วส่งต่อเป็นอินพุทเข้าสู่ระบบ เพื่อให้ความแตกต่างของเอาท์พุทที่ต้องการและเอาท์พุทที่แท้จริงลดลงเรื่อยๆจนกระทั่งไม่มีความแตกต่างระหว่างค่าทั้งสอง ดังนั้นเราก็จะได้ว่า ค่าเอาท์พุทของระบบเป็นไปตามต้องการ ระบบควบคุมแบบป้อนกลับจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 2.3 สำหรับหลักการของการป้อนกลับที่ได้อธิบายไปแล้วนี้ถือว่าเป็นพื้นฐานของการวิเคราะห์ และออกแบบระบบควบคุมอัตโนมัติที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน



รูปที่ 2.3 ระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

2.1.3 ส่วนประกอบพื้นฐานของระบบควบคุมแบบเปิด

ในระบบควบคุมแบบเปิด เราสามารถพิจารณาได้ว่าระบบประกอบด้วยระบบย่อย ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ 2.2 ในความเป็นจริงอุปกรณ์ที่ทำงานเป็นระบบย่อยเหล่านี้ เราอาจจะไม่สามารถแยกออกมาเป็นส่วนๆได้ หรือแยกอย่างชัดเจนได้ว่าอุปกรณ์ใดทำหน้าที่อย่างใดโดยเฉพาะ แต่ว่าอุปกรณ์ในความเป็นจริงเหล่านั้น สามารถแยกหน้าที่การทำงานออกเป็นส่วนๆ ได้ตามที่แสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ระบบควบคุมแบบเปิด

ซึ่งส่วนประกอบย่อยจะประกอบด้วย

1. Control element ส่วนนี้จะพิจารณาว่าควรจะให้ระบบทำงานต่อไปอย่างไรเมื่อได้รับค่าอินพุทของระบบควบคุม

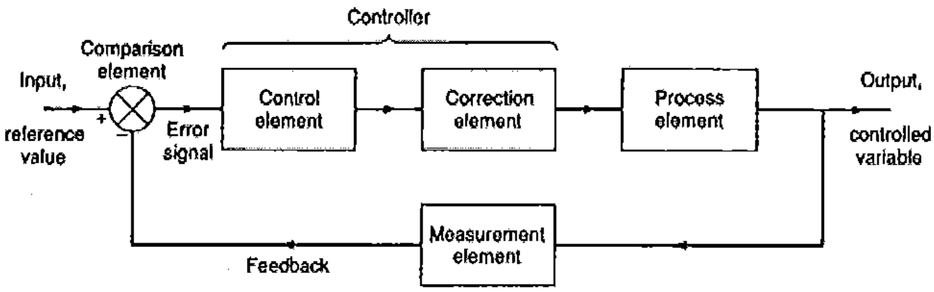
2. Correction element ส่วนนี้จะตอบสนองต่ออินพุทที่ได้รับจากส่วนของ Control element และนำไปปรับเปลี่ยนตัวแปรที่จะถูกควบคุมเพื่อให้ได้ค่าตามต้องการ

3. Process หรืออาจเรียกว่า Plant ระบบจะเป็นส่วนปฏิบัติการเพื่อให้ได้ค่าเอาท์พุทที่เราต้องการออกมา

ส่วนประกอบสองส่วนแรกคือ Control element และ Correction element เมื่อรวมกันแล้วเราอาจเรียกรวมกันว่า Controller

2.1.4 ส่วนประกอบพื้นฐานของระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

ระบบควบคุมแบบปิดสามารถพิจารณาได้ว่า ประกอบด้วยระบบย่อยที่ต่อวางกันตามที่แสดงในรูปที่ 2.3 ซึ่งในความเป็นจริงระบบย่อยเหล่านี้ไม่สามารถที่จะแยกแต่ละชิ้นส่วนออกมาเป็นส่วนๆได้ หรือไม่สามารถแยกอุปกรณ์ใดอุปกรณ์หนึ่งได้ว่าอุปกรณ์นั้นทำหน้าที่โดยเฉพาะอย่างหนึ่งอย่างใด แต่ในความเป็นจริงอุปกรณ์เหล่านี้ สามารถแยกการทำงานออกเป็นส่วนต่างๆได้ตามที่แสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

โดยส่วนต่างๆในระบบควบคุมแบบปิดนี้จะประกอบด้วย

1. Comparison element ส่วนนี้จะทำหน้าที่เปรียบเทียบค่าตัวแปรที่เราต้องการออกมา หรืออาจเรียกว่าค่ามาตรฐานของตัวแปรที่เราต้องการ เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่เราวัดค่าตัวแปรนั้นได้ในสภาพความเป็นจริง ซึ่งเป็นค่าเอาท์พุทของระบบ ส่วนนี้จะให้สัญญาณหรือค่าความผิดพลาดออกมา ซึ่งความผิดพลาดนี้จะบอกให้ทราบว่าขณะนี้ค่าตัวแปรที่ต้องการควบคุมนั้นมีค่าแตกต่างจากค่าที่เราต้องการให้มันเป็นเท่าใด นั่นก็คือ ค่าความผิดพลาด = ค่าสัญญาณอ้างอิง – ค่าสัญญาณที่วัดได้

2. Control element เป็นส่วนที่ทำหน้าที่ตัดสินใจว่าจะต้องทำอย่างไร เมื่อได้รับสัญญาณความผิดพลาด เรามักจะใช้คำว่า Controller เมื่อเราเรียกส่วนนี้รวมกับส่วน Correction element

3. Correction element ส่วนนี้มีหน้าที่กำหนดการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร เพื่อที่จะลดค่าความผิดพลาดให้น้อยลง เรามักเรียกอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่ในส่วนนี้ว่า Actuator

4. Process element กระบวนการ หรือ Plant จะเป็นระบบซึ่งเราต้องการควบคุมค่าตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัว

5. Measure element ส่วนนี้จะเป็นส่วนของเครื่องมือวัด ซึ่งเครื่องมือวัดนี้จะให้สัญญาณที่แสดงถึงขนาดของตัวแปรที่เราต้องการที่จะควบคุม และเมื่อได้ค่าที่วัดแล้วก็จะมีการป้อนสัญญาณนั้นกลับเข้าสู่ส่วนเปรียบเทียบ(Comparison lement)เพื่อให้ระบบพิจารณาว่ามีความผิดพลาดเกิดขึ้นหรือไม่

การทำงานของระบบป้อนกลับนี้จะทำไปเรื่อยๆ จนกว่าค่ามาตรฐาน และค่าที่วัดได้มีค่าเท่ากัน นั่นคือระบบควบคุมของเราสามารถควบคุมให้ค่าตัวแปรที่เราต้องการมีค่าตามที่เรากำหนดได้เรียบร้อยแล้วนั่นเอง ส่วนสำคัญและจำเป็นของระบบควบคุมแบบปิดก็คือส่วนป้อนกลับ ซึ่งหมายถึงสัญญาณที่ได้มาจากค่าตัวแปรที่ต้องการจริงๆ เปลี่ยนเป็นสัญญาณแล้วป้อนกลับ เพื่อเปรียบเทียบกับค่าของตัวแปรที่ต้องการ การป้อนกลับนี้จะถือว่าเป็นการป้อนกลับแบบลบ ซึ่งเมื่อนำสัญญาณป้อนกลับนี้นำไปลบออกจากค่าที่ต้องการหรือค่ามาตรฐานแล้วค่าทีได้ คือ ค่าความผิดพลาด

การป้อนกลับแบบลบนี้มีความจำเป็นในการที่เราต้องการให้ค่าตัวแปรที่เราต้องการควบคุมมีค่าตรงกับความต้องการของเราคือค่าของสัญญาณมาตรฐานส่วนการป้อนกลับแบบบวกนั้นจะเกิดขึ้นเมื่อสัญญาณป้อนกลับจะนำมารวมกับค่ามาตรฐานแล้วค่าที่ได้ คือ ค่าความผิดพลาด

2.1.5 คำจำกัดความของระบบควบคุมพื้นฐานมีดังนี้

1. สัญญาณด้านเข้า (Input) สัญญาณด้านเข้านั้นบางครั้งเราอาจเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า อินพุทอ้างอิง(Reference input) หรือค่าที่ตั้งไว้ (Set point) ซึ่งหมายถึงค่าหรือผลตอบสนองที่ต้องการของระบบที่ต้องการควบคุมที่กำหนดไว้ เช่น ต้องการควบคุมระยะห่างของรถไฟฟ้าให้มีระยะห่างคงที่เท่ากับ 15 เมตร

2. ตัวควบคุม (Controller) หมายถึงเครื่องมือหรืออุปกรณ์ที่ใช้ในการสร้างสัญญาณควบคุมเพื่อทำหน้าที่ควบคุมให้ระบบหรือกระบวนการที่ต้องการควบคุมให้มีสัญญาณด้านออก (Output) หรือผลตอบสนองตามที่ต้องการ โดยตัวควบคุมจะมีหลายแบบเช่น ตัวควบคุมชนิดพี, ตัวควบคุมชนิดไอ, ตัวควบคุมชนิดดี

3. กระบวนการ(Plant or Process) หมายถึงระบบหรือกระบวนการที่ถูกควบคุม หรืออาจจะเป็นวัตถุทางกายภาพที่ถูกควบคุมก็ได้เช่นกระบวนการในการควบคุมอุณหภูมิเตาเผากระบวนการควบคุมระบบแขนกลในโรงงาน เป็นต้น

4. สัญญาณด้านออก(Output)หมายถึงผลตอบสนองของระบบหรือกระบวนการที่ถูกควบคุม ซึ่งโดยทั่วไปแล้วต้องการจะควบคุมให้สัญญาณด้านออกมีค่าตามสัญญาณด้านเข้า(Input) ที่กำหนด (หรือตามค่าของสัญญาณด้านเข้าที่เปลี่ยนแปลงไป) หรือมีค่าคงเดิมได้เมื่อมีการรบกวนทั้งภายในและภายนอกที่มากระทำต่อระบบควบคุม

5. การรบกวน(Disturbance) หมายถึงสัญญาณรบกวนที่อาจจะเกิดขึ้นในระบบที่ถูกควบคุม สัญญาณรบกวนนี้อาจเกิดขึ้นที่จุดใดๆในระบบก็ได้ เช่นเกิดขึ้นที่กระบวนการ เกิดขึ้นที่อุปกรณ์วัด เป็นต้น การเกิดขึ้นของสัญญาณรบกวนอาจเกิดขึ้นในเวลาใดๆทั้งที่คาดเดาได้และคาดเดาไม่ได้การรบกวนนี้แบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ

- การรบกวนภายใน(Internal disturbance) ซึ่งอาจเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ต่างๆ ของอุปกรณ์ที่ใช้ในระบบ

- การรบกวนจากภายนอก(External disturbance) เป็นการรบกวนที่เกิดขึ้นจากภายนอกระบบ แต่มีผลต่อระบบที่กำลังควบคุมอยู่ โดยทั่วไปจะถือว่าการรบกวนจากภายนอกเป็นสัญญาณด้านเข้าหนึ่งที่ไม่พึงประสงค์ของระบบควบคุม

6. อุปกรณ์วัด (Measuring instruments) หมายถึงอุปกรณ์ที่ใช้วัดหรือแปลงสัญญาณ เช่น เซนเซอร์(Sensor) ทรานสดิวเซอร์(Transducer) หรืออุปกรณ์แปลงสัญญาณ หรือวัดสัญญาณอื่นๆที่ทำหน้าที่วัดค่าของสัญญาณด้านออกของระบบที่ถูกควบคุม

7. ระบบ(System) หมายถึงการนำเอาอุปกรณ์ต่างๆที่สามารถทำงานร่วมกันได้ มารวบรวมเข้าด้วยกันเพื่อให้ทำงานอย่างใดอย่างหนึ่งที่ต้องการเช่น ระบบเชิงกล ระบบของวงจรไฟฟ้าเป็นต้น

2.2 การเลือกและปรับแต่งอุปกรณ์ควบคุม

หลักเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจเลือกและปรับแต่งอุปกรณ์ควบคุมมีหลายวิธี โดยทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ในการควบคุมและการออกแบบ ตัวอย่างเช่น ต้องการลดค่าการตอบสนองสูงสุดของระบบควบคุมให้มีค่าน้อยที่สุด ต้องการลดค่าช่วงเวลาเข้าสู่สมดุล หรือเสถียรภาพให้สั้นที่สุด หรือต้องการลดค่าความคลาดเคลื่อนรวมในการควบคุมให้มีค่าน้อยที่สุด เป็นต้น ซึ่งแน่นอนว่าการใช้หลักเกณฑ์ในการเลือกและการตัดสินใจที่แตกต่างกันย่อมจะทำให้ระบบได้รับผลของการควบคุมที่แตกต่างกันออกไป

การเลือกอุปกรณ์ควบคุมเพื่อลดความยุ่งยากในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และเหมาะกับการออกแบบระบบควบคุมทำได้ โดยการพิจารณาการตอบสนองของกระบวนการจากผลการควบคุมซึ่งสามารถแบ่งลักษณะการควบคุมได้เป็น 3 ชนิดตามที่แสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงการเปรียบเทียบการควบคุมแบบต่างๆ

การควบคุมแบบ P	การควบคุมแบบ I	การควบคุมแบบ D
-ทำให้ระบบการตอบสนองของตัวแปรเข้าสู่ระบบเร็วขึ้น -ทำให้ระบบการควบคุมมีความคลาดเคลื่อนในการควบคุมเกิดขึ้นเสมอภายหลังการเปลี่ยนแปลงเป้าหมายของการควบคุมหรือภาระการควบคุม	-ทำให้ระบบการควบคุมรวมไม่มีความคลาดเคลื่อนในการควบคุม แต่มีค่าการตอบสนองสูงสุดเกิดขึ้นทำให้ความคลาดเคลื่อนในการควบคุมของกระบวนการในช่วงแรกมากกว่ากระบวนการเดิม -ทำให้กระบวนการตอบสนองจากตัวแปรเข้าภายนอกช้าลง เมื่อเปรียบเทียบกับกระบวนการเดิม และผลการตอบสนองมีการแกว่งเกิดขึ้นเสมอ -การปรับค่า K_I เพิ่มขึ้นในการควบคุมจะทำให้กระบวนการตอบสนองเร็วขึ้นแต่มีการแกว่งเพิ่มขึ้น ทำให้เสถียรภาพลดลง	-การควบคุมแบบนี้จะส่งสัญญาณควบคุมเพื่อปรับสภาพการก่อนการคลาดเคลื่อนจริง จะเกิดขึ้นกับกระบวนการทำให้ระบบควบคุมมีผลดีกว่าการควบคุมแบบอื่น -การควบคุมแบบนี้จะช่วยเพิ่ม เสถียรภาพของกระบวนการให้ดีขึ้น

2.2.1 การเลือกชนิดการควบคุม

1. การเลือกใช้การควบคุมแบบ P การควบคุมชนิดนี้จะเลือกใช้เมื่อระบบควบคุมนั้นไม่จำเป็นต้องได้ผลการควบคุมที่แม่นยำมากนัก โดยสามารถปรับค่า Kp ของอุปกรณ์ควบคุมเพื่อให้มีค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ในช่วงที่ยอม
รับได้

2. การเลือกใช้อุปกรณ์ควบคุมแบบPDการควบคุมชนิดนี้จะเลือกใช้เพราะการควบคุมแบบ P นั้นจะมีปัญหาในเรื่องของการเกิด Overshoot ดังนั้นจึงเพิ่มการควบคุมแบบ D เพื่อเข้ามาช่วยในการลดค่าOvershootและทำให้ระบบมีการตอบสนองของตัวแปรเข้าสู่ระบบเร็วขึ้นและค่า
Overshoot มีค่าลดลง ทำให้เสถียรภาพของระบบดีขึ้น

3. การเลือกใช้อุปกรณ์ควบคุมแบบ PI การควบคุมชนิดนี้จะเลือกใช้เมื่อไม่ต้องการให้มีความคลาดเคลื่อนในการควบคุมเกิดขึ้นเลย

4. การเลือกใช้อุปกรณ์ควบคุมแบบ PID แม้ว่าอุปกรณ์ควบคุมแบบ PI นั้นจะไม่ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการควบคุม แต่การตอบสนองของกระบวนการจะช้าลง ซึ่งการเพิ่มความเร็วของการตอบสนองโดยการปรับค่า Kp เพิ่มขึ้นจะทำให้ผลการตอบสนองของระบบรวมมีการแกว่งเพิ่มขึ้นและเสถียรภาพลดลง ดังนั้นการใช้อุปกรณ์ควบคุมแบบ PID จะทำให้ผลของการควบคุมไม่มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นและสามารถปรับค่าKpเพื่อให้กระบวนการตอบสนองเร็วขึ้นโดย
เสถียรภาพของระบบยังคงเดิม

สิ่งที่สำคัญที่สุดในการออกแบบระบบควบคุมก็คือระบบควบคุมนั้นจะต้องมีความเสถียร (Stable) ซึ่งหมายความว่า เมื่อมีอินพุทที่มีค่าแน่นอนค่าหนึ่งป้อนเข้าไปในระบบแล้วค่าเอาท์พุทของระบบจะต้องมีค่าอยู่ในช่วงที่แน่นอนด้วยเหมือนกันกล่าวคือเอาท์พุทที่ได้จะต้องไม่มีค่าเข้าสู่อนันต์ หรือไม่มีขีดจำกัดนั่นเอง ยกตัวอย่างเช่น เมื่อได้รับอินพุทแบบขั้นบันไดแล้วการตอบสนองหรือเอาท์พุทของระบบจะต้องมีค่าจำกัดค่าหนึ่งอย่างไรก็ตามหากมีระบบหนึ่งที่ได้รับฟังก์ชัน
ขั้นบันไดค่าหนึ่งแล้วปรากฏว่าเอาท์พุทที่ได้มีค่าแน่นอนค่าหนึ่ง แต่ไม่ได้หมายความว่าระบบนี้จะเป็นระบบที่เสถียรเพราะระบบที่เสถียรจะต้องให้เอาท์พุทมีค่าจำกัดเทียบต่ออินพุทแบบขั้นบันได
หลายๆแบบ

2.3 ปริภูมิสเตต (State space)

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้สำหรับระบบควบคุมหลายตัวแปร(Multivariable control system) และระบบที่มีอินพุทและเอาท์พุทเพียงหนึ่ง (Single input single output) เรียกว่า แบบจำลองปริภูมิสเตต (State space model) สมมุติว่าระบบควบคุมหลายตัวแปร มี n Integrators และสมมุติว่ามี r อินพุท $u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$ ซึ่งเราได้สมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, ... x_n, u_1, u_2, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, ... x_n, u_1, u_2, u_r; t) \\ \dot{x}_3(t) &= f_3(x_1, x_2, ... x_n, u_1, u_2, u_r; t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

และมี m เอาท์พุท $y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t)$ ของระบบจะเขียนได้ดังนี้

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad , \quad g(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

จากสมการที่ (2.1) และสมการที่ (2.2) จะได้

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) \tag{2.3}$$

$$y(t) = g(x,u,t) \tag{2.4}$$

โดยที่สมการที่ (2.3) คือสมการสเตต (State equation) และสมการที่ (2.4) คือสมการเอาท์พุท (Output equation) ถ้าฟังก์ชั่นเวคเตอร์ f และหรือ g มีอิทธิพลต่อเวลา t ที่แสดงออกมาอย่างชัดเจน ดังนั้นจะเรียกระบบนี้คือระบบที่เปลี่ยนตามเวลา (Time-varying system) ถ้าสมการที่ (2.3) และสมการที่ (2.4) เป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการสเตต และสมการเอาท์พุทได้ดังนี้

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{2.5}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{2.6}$$

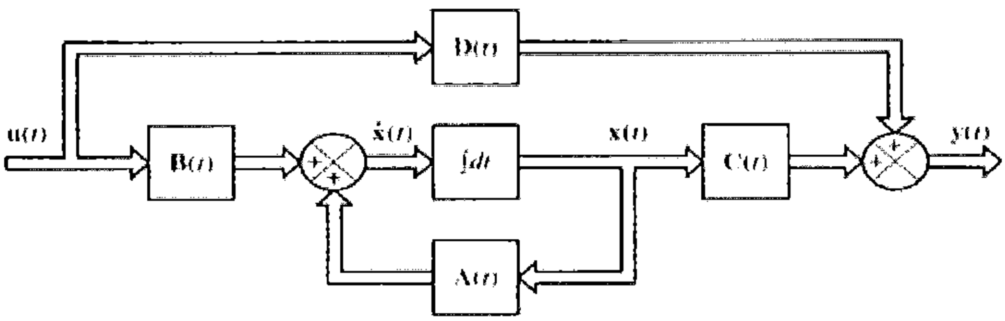
การออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธี State space นั้นมีข้อดีดังนี้

1.ใช้งานได้กับระบบหลายอินพุทและหลายเอาท์พุท

2. สามารถใช้กับระบบที่ใช้การออกแบบในโดเมนของความถี่ได้

3. สามารถใช้กับระบบที่ใช้แสดง Non linear system ที่มี Backlash ,Saturation และ Deadzone

โดยที่ $A(t)$ คือเมตริกสเตต (State matrix) $B(t)$ คือเมตริกอินพุท(input matrix) $C(t)$ คือเมตริกเอาท์พุท (Output matrix) และ $D(t)$ คือเมตริกส่งถ่าย (Transmission matrix) จากสมการที่ (2.5) และสมการที่ (2.6) เราสามารถเขียนแผนภาพบล็อกการทำงานของแบบจำลองปริภูมิสเตตดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แผนภาพบล็อกของระบบควบคุมที่แสดงอยู่ในรูปปริภูมิสเตต

2.3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นถ่ายโอน กับสมการปริภูมิสเตต (Correlation between Transfer function and State space equation)

ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาการหาฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบ จากสมการปริภูมิสเตต เราพิจารณาระบบซึ่งมีฟังก์ชั่นถ่ายโอน ดังนี้

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

และระบบอาจเขียนแสดงในรูปแบบของปริภูมิสเตต ได้ดังนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.7}$$

$$y = Cx + Du \tag{2.8}$$

โดยที่ x คือ เวคเตอร์สเตท u คืออินพุท และ y คือเอาท์พุท เมื่อเราทำ Laplace transform สมการที่ (2.7) และสมการที่ (2.8) จะได้

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \tag{2.9}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{2.10}$$

และเมื่อให้เงื่อนไขเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ เราได้

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \tag{2.11}$$

หรือ $$(sI - A)X(s) = BU(s) \tag{2.12}$$

โดยนำ $(sI - A)^{-1}$ คูณเข้าไปทั้งสองข้าง ซึ่งเราจะได้

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{2.13}$$

แทนค่า $X(s)$ ลงสมการ(2.10)

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \tag{2.14}$$

จัดรูปสมการใหม่ ได้ดังนี้

$$Y(s) = \lfloor C(sI - A)^{-1}B + D \rfloor U(s) \tag{2.15}$$

เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นถ่ายโอน ที่แสดงอยู่ในรูปของปริภูมิสเตต ได้ดังนี้

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s) \tag{2.16}$$

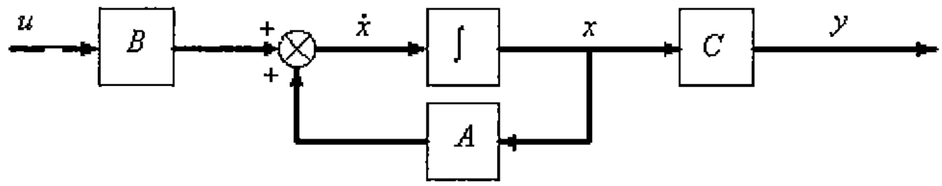
2.3.2 การออกแบบระบบควบคุมทาง State space

การออกแบบระบบควบคุมที่มีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เขียนอยู่ในรูป state space ซึ่งการออกแบบระบบควบคุมทาง state space นั้นมีหลายวิธีแต่จะกล่าวถึงเฉพาะวิธี pole placement เริ่มต้นพิจารณาระบบที่มีสมการในรูปแบบ state space ดังนี้

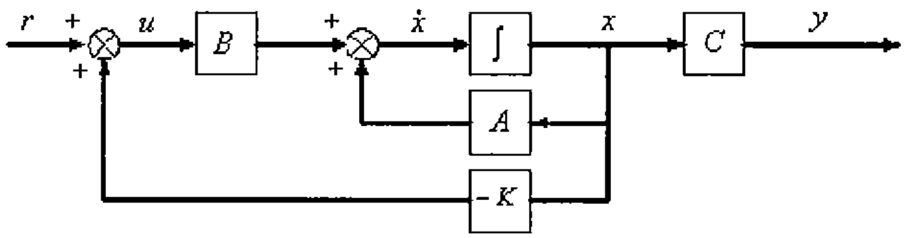
$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu \tag{2.17}$$

$$y = C\bar{x} \tag{2.18}$$

โดย block diagram ของระบบนี้สามารถแสดงได้ในรูป (ก) ส่วนรูป (ข) เป็นรูปที่แสดง block diagram ของระบบควบคุมทาง state space ที่มีตัวประมาณค่า (state observer)



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.7 รูป(ก) แสดงแผนภาพบล็อกของระบบควบคุมที่แสดงอยู่ในรูปปริภูมิสเตต รูป (ข) แสดงแผนภาพบล็อกของระบบควบคุมที่แสดงอยู่ในรูปปริภูมิสเตตที่มีตัวประมาณค่า

จากรูปจะเห็นว่าตัวสเตตทุกตัวจะถูกดึงป้อนกลับผ่าน gain K ไปยัง input ของ ระบบ u ดังนั้นจะได้ว่า

$$u = -K\vec{x} \tag{2.19}$$

โดยที่

$$K = [k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n] \tag{2.20}$$

และจาก block diagram ในรูป (b) จะได้ state equation ของระบบควบคุมนี้เป็น

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu = A\vec{x} + B(-K\vec{x} + r) = (A - BK)\vec{x} + Br \tag{2.21}$$

$$y = C\vec{x} \tag{2.22}$$

และจะได้สมการ characteristic equation ระบบปิดนี้เป็น

$$|sI - (A - BK)| = 0 \tag{2.23}$$

2.3.2 ขั้นตอนการออกแบบระบบควบคุมโดยวิธี pole placement ที่ plant ระบบแสดงอยู่ในรูป phase-variable

1. หาแบบจำลอง plant ของระบบในรูปแบบ state space ที่แสดงอยู่ในรูป phase-variable
2. สมมติชั่วคราวก่อนว่าคำสั่งอินพุตอ้างอิง r เป็น 0
3. ดึงตัวสเตตทุกตัวป้อนกลับผ่าน gain K ไปที่ input u ซึ่งจะได้กฎการควบคุมของระบบเป็น $u = -K\vec{x}$
4. หาสมการ characteristic equation ของระบบที่ได้ในข้อ 3.
5. หาตำแหน่ง pole ทั้งหมดของระบบจากข้อมูลการตอบสนองต่อเวลาที่ต้องการ แล้วนำ pole ทั้งหมดที่ได้มาหาสมการ characteristic equation
6. นำสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ของสมการ characteristic equation ที่ได้ในข้อ 4 และ 5 มาเทียบกันเพื่อหาค่า gain k_i จากขั้นตอนที่กล่าวมานี้ สามารถแสดงการหาค่า gain k_i ที่ plant ของระบบแสดงอยู่ในรูป phase-variable ได้ดังนี้

Plant ของระบบอยู่ในรูป phase-variable โดยทั่วไปสามารถแสดงได้ดังนี้

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & . & . & . & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & . & . & . & c_n \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้สมการ characteristic equation เป็น

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0 \tag{2.24}$$

ต่อมาเมื่อทำการดึงตัวสเตตทุกตัวป้อนกลับผ่าน gain K ไปที่ input u จะได้กฎการควบคุมของระบบเป็น

$$u=-K\vec{x}$$

โดยที่

$$K=\left[k_1, k_2, ..., k_n\right]$$

และเรียกค่า k_i ว่า phase variable feedback gain

จากสมการที่ (4) จะได้เมตริกซ์ ระบบ (A-BK) ของระบบปิดเป็น

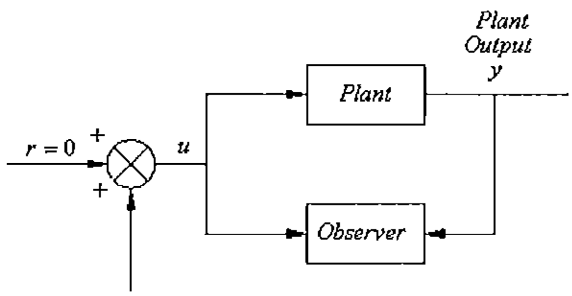
$$A-BK=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & & . & & . \\ -(a_0+k_1) & -(a_1+k_2) & -(a_2+k_3) & . & . & . & -(a_{n-1}+k_n) \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้สมการ characteristic equation ของระบบปิดเป็น

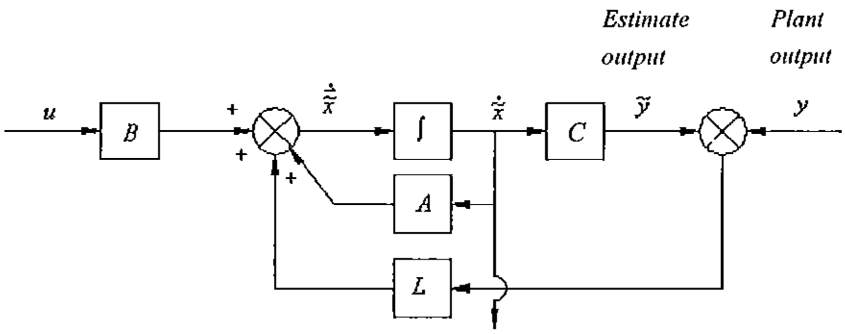
$$|sI-(A-BK)|=s^n+(a_{n-1}+k_n)s^{n-1}+....+(a_1+k_2)s+(a_0+k_1)=0 \qquad (2.25)$$

2.3.4 การออกแบบตัวประมาณค่าตัวแปรสเตต (Observer design)

ในการออกแบบตัว controller นั้นจะต้องดึงตัวสเตตทุกตัวป้อนกลับผ่าน gain K ไปที่ input u แต่ในความจริงแล้วการที่จะวัดตัวแปรสเตตทุกตัวเพื่อป้อนกลับมานั้นเป็นไปได้ยาก โดยเฉพาะระบบที่มี order สูงๆ หรือในบางระบบถึงแม้จะวัดได้ก็ตามแต่ก็ต้องเสียค่าใช้จ่ายสูง ดังนั้นเราจึงต้องมาศึกษาการออกแบบตัวประมาณค่าสเตต (Observer design) เพื่อใช้ร่วมกับระบบควบคุมแบบปิดทาง state space ซึ่งระบบควบคุมแบบปิดทาง state space พร้อมกับตัวประมาณค่า สามารถแสดงเป็น block diagram ได้ในรูป (ก) ด้านล่าง ส่วนรูป (ข) เป็นรูปโดยละเอียดของตัวประมาณค่า



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.8 รูป(ก) แสดงแผนภาพบล็อกของระบบควบคุมแบบปิดทางปริภูมิสเตต รูป (ข) แสดงรายละเอียดของตัวประมาณค่า

จากรูป (c) จะได้ state space ของตัวประมาณค่าเป็น

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) \tag{2.26}$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} \tag{2.27}$$

แต่ state space ของ plant เป็น

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu \tag{2.28}$$

$$y = C\vec{x} \tag{2.29}$$

ดังนั้นเมื่อนำ state space ของตัวประมาณค่าลบออกจาก state space ของ plant แล้วจะได้เป็น

$$\left(\dot{\vec{x}} - \dot{\tilde{\vec{x}}}\right) = A\left(\vec{x} - \tilde{\vec{x}}\right) + L(y - \tilde{y}) \tag{2.30}$$

$$(y - \tilde{y}) = C\left(\vec{x} - \tilde{\vec{x}}\right) \tag{2.31}$$

โดยที่ $\vec{x} - \tilde{\vec{x}}$ เป็นค่า error ระหว่างค่า state vector จริงกับค่า state vector ที่ได้จากการประมาณ ส่วน $y - \tilde{y}$ เป็นค่า error ระหว่างค่า output จริงกับค่า output ที่ได้จากการประมาณ และเมื่อแทนที่สมการที่ (8.29) ลงในสมการที่(8.28) แล้วจะได้เป็น

$$\left(\dot{\vec{x}} - \dot{\tilde{\vec{x}}}\right) = A\left(\vec{x} - \tilde{\vec{x}}\right) + L\left(\vec{x} - \tilde{\vec{x}}\right) \tag{2.32}$$

$$(y - \tilde{y}) = C\left(\vec{x} - \tilde{\vec{x}}\right) \tag{2.33}$$

โดยที่ $L = [l_1, l_2, ..., l_n]^T$

ถ้าให้ $\vec{e}_x = \vec{x} - \tilde{\vec{x}}$ แล้วจะได้เป็น

$$\dot{\vec{e}}_x = (A - LC)\vec{e}_x \tag{2.35}$$

$$(y - \tilde{y}) = C\vec{e}_x \tag{2.36}$$

จะเห็นว่าสมการที่(8.32) ไม่มี input u ดังนั้นค่า eigenvalue ของสมการที่ (8.32) เป็นลบทั้งหมดแล้วค่า $\vec{e}_x$ จะลู่เข้า 0 โดยค่า eigenvalue ของสมการที่ (8.32) นั้นจะหาได้จากสมการที่ characteristic equation ซึ่งมีสมการเป็นดังนี้

$$|\lambda I - (A - LC)| = 0 \tag{2.37}$$

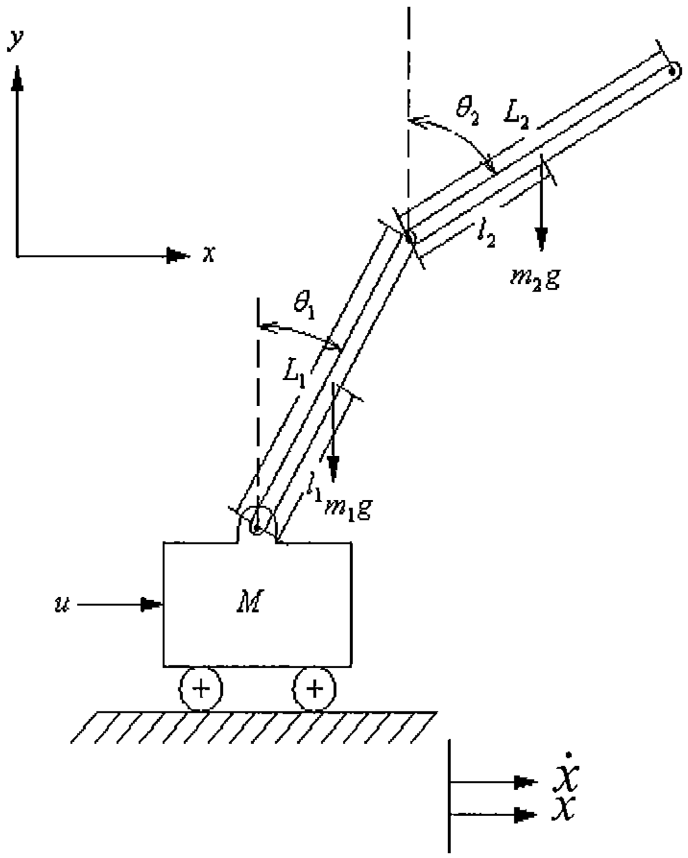
จากสมการที่ (8.34) การที่จะให้ eigenvalue เป็นลบทั้งหมด(observer เสถียร)และมีการตอบสนองเป็นไปตามต้องการนั้นจะขึ้นอยู่กับการออกแบบค่าเมตริกซ์ L ซึ่งตามปกติแล้วจะต้องออกแบบการตอบสนองของตัวobserverนั้นเร็วกว่าตอบสนองของระบบควบคุมแบบปิด

บทที่ 3

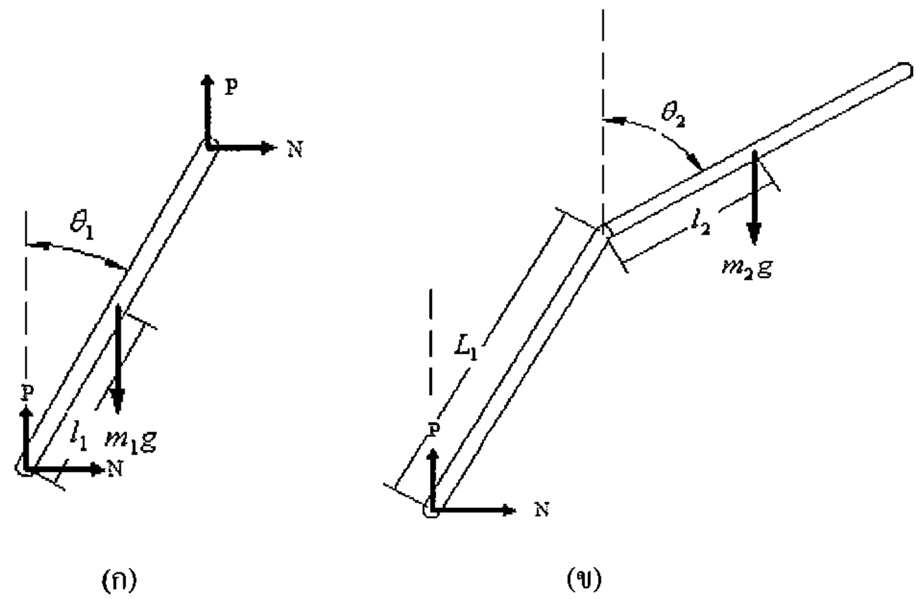
การวิเคราะห์ระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน

3.1 การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกนสามารถแสดงได้ตามรูปที่ 3.1 และสามารถแยกระบบออกมาเขียนเป็นFree body diagram ได้ตามรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน



รูปที่ 3.2 Free body diagram ของลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน

จาก Free body diagram สามารถวิเคราะห์ความเร็วเทียบกับ แกน x และ y ได้ดังนี้

จาก Free body diagram (3.2 ก)

จะได้ ความเร็ว แกน x : $(\dot{x}+l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)$ (3.1)

และแกน y : $(-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)$ (3.2)

$$\therefore \text{ ได้ } \quad \dot{x}_1^2 = \left[\left(\dot{x}+l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right)^2+\left(-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\right)^2\right] \qquad (3.3)$$

จาก Free body diagram (3.2 ข)

จะได้ ความเร็ว แกน x : $\left(\dot{x}+L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)$ (3.4)

และแกน y : $\left(-L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1+\left(-l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)\right)$ (3.5)

$$\therefore \text{ได้} \quad \dot{x}_2^2 = \left[\left(\dot{x}+L_1\dot{\theta}_1\cos\theta 1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)^2+\left(-L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1+\left(-l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)\right)^2\right] \qquad (3.6)$$

ดังนั้นจะวิเคราะห์พลังงานศักย์และพลังงานจลน์ของระบบได้ดังนี้

ที่ ตัวรถ $\quad K_0 = \frac{1}{2}M\dot{x}$ (3.7)

$P_0 = 0$ (3.8)

Pendulum 1
$$K_1 = \frac{1}{2}m_1\left[\left(\dot{x}+l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right)^2+\left(-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\right)^2\right]+\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2$$
$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(m_1l_1^2+I_1\right)\dot{\theta}_1^2+m_1l_1\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \qquad (3.9)$$
$$P_1 = m_1gl_1\cos\theta_1 \qquad (3.10)$$

Pendulum 2
$$K_2 = \frac{1}{2}m_2\left[\left(\dot{x}+L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)^2+\left(L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$$
$$= \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\left(m_2l_2^2+I_2\right)\dot{\theta}_2^2$$
$$+m_2L_1\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1+m_2l_2\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2+m_2L_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$
$$+m_2L_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \qquad (3.11)$$
$$P_2 = m_2g\left(L_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2\right) \qquad (3.12)$$

ดังนั้น จะได้ สมการ Lagrangian ดังนี้
$$L = K - P$$

$$L = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}(m_1l_1^2+I_1)\dot{\theta}_1^2+m_1l_1\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right.$$
$$+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\left(m_2l_2^2+I_2\right)\dot{\theta}_2^2$$
$$+m_2L_1\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1+m_2l_2\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$
$$\left.+m_2L_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ \right]-\left[0+m_1gl_1\cos\theta_1\right.$$
$$\left.+m_2g\left(L_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2\right)\ \right] \qquad (3.13)$$

จาก สมการที่ (3.15) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น
$$L = \frac{1}{2}(M+m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+I_1\right)\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\left(m_2l_1^2+I_2\right)\dot{\theta}_2^2$$
$$+\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{x}\dot{\theta}_1+m_2l_2\cos(\theta_2)\dot{x}\dot{\theta}_2$$
$$+m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-\left(m_1l_1+m_2L_1\right)g\cos\theta_1-m_2l_2g\cos\theta_2 \qquad (3.14)$$

จาก Lagrange's Equations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(L)}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial(L)}{\partial\dot{q}_i}=Q_i \quad ; \quad i=1,2,3$$

สามารถกระจายออกมาได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=u \tag{3.15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=0 \tag{3.16}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_2}=0 \tag{3.17}$$

และเมื่อแทนค่าจะได้ผลออกมาเป็น

$$\begin{aligned} u \quad = \quad & \left(\sum m_i\right)\ddot{x}+(m_1l_1+m_2L_1)\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1+m_2l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 \\ & -(m_1l_1+m_2L_1)\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2-m_2l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (m_1l_1+m_2L_1)\cos(\theta_1)\ddot{x}+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+I_1\right)\ddot{\theta}_1 \\ & +m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2+m_2L_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \\ & -(m_1l_1+m_2L_1)g\sin\theta_1 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & m_2l_2\cos(\theta_2)\ddot{x}+m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 \\ & +\left(m_2l_2^2+I_2\right)\ddot{\theta}_2-m_2L_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 \\ & -m_2l_2g\sin\theta_2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

จากสมการที่ (3.18) ,(3.19) ,(3.20) เป็น Nonlinear differential equation เพื่อง่ายต่อการคำนวณและเหตุผลที่ว่าเราต้องการควบคุมแท่ง Pendulum ให้ตั้งตรง(มุม θ มีค่าน้อยมาก) จึงทำการ Linearization เพื่อให้ระบบเป็น Linear differential equation โดยให้ θ เป็นการเปลี่ยนแปลงมุมเล็กๆจะได้

$\sin\theta\approx\theta, \cos\theta\approx 1,\ \dot{\theta}_i^2\approx 0, \ddot{\theta}\theta\approx 0, \cos(\theta_1-\theta_2)=1+\theta_1\theta_2, \sin(\theta_1-\theta_2)=(\theta_1-\theta_2)$

ดังนั้นสมการที่ (3.18) ,(3.19) และสมการที่ (3.20) ทำการ Linearization จะได้

$$\left(\sum m_i\right)\ddot{x} + \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \quad = \quad u \tag{3.21}$$

$$\left(m_1 l_2 + m_2 L_1\right)\ddot{x} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta} = \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\theta_1 \tag{3.22}$$

$$m_2 l_2 \ddot{x} + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + I_2\right)\ddot{\theta}_2 \quad = \quad m_2 l_2 g\theta_2 \tag{3.23}$$

เขียนสมการพลศาสตร์ ในรูปแบบ Matrix ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \sum m_i & \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) & m_2 l_2 \\ \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) & \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1\right) & m_2 L_1 l_2 \\ m_2 l_2 & m_2 L_1 l_2 & \left(m_2 l_2^2 + I_2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\theta_1 \\ m_2 l_2 g\theta_2 \end{bmatrix}$$

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณเราสามารถ แทนค่า พารามิเตอร์ที่ได้จากระบบที่นำมาศึกษาดังแสดงได้ตามตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าพารามิเตอร์ของลูกตุ้มผกผันสองแกน

พารามิเตอร์	คำอธิบาย	ค่าคงที่
M	มวลของตัวรถ	0.25 kg.
m_1, m_2	มวลของแท่ง Pendulum	0.08 kg.
L_1, L_2	ความยาวของ Pendulum	0.5 m.
l_1, l_2	ระยะจากปลายไม้ถึงจุดC.G	0.25 m.
g	แรงโน้มถ่วง	9.81 m/s ^{2}
I	โมเมนต์ความเฉื่อย	0.0067 kg.m ^{2}

เมื่อแทนค่าแล้วสามารถแก้สมการได้ดังนี้

$$\ddot{x} = 3.3749u - 3.3681\theta_1 - 0.0831\theta_2 \tag{3.24}$$

$$\ddot{\theta}_1 = -6.2543u + 32.2441\theta_1 - 7.0887\theta_2 \tag{3.25}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -0.4236u - 21.2663\theta_1 + 22.97\theta_2 \tag{3.26}$$

จากสมการ(3.24), (3.25) และ(3.26) ถ้าเลือกกำหนดตัวแปร state เป็น

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= \theta_1 \\
x_3 &= \theta_2 \\
x_4 &= \dot{x} \\
x_5 &= \dot{\theta}_1 \\
x_6 &= \dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

และจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_4 \\
\dot{x}_2 &= x_5 \\
\dot{x}_3 &= x_6 \\
\dot{x}_4 &= \ddot{x} = 3.3749u - 3.681x_1 - 0.0831x_2 \\
\dot{x}_5 &= \ddot{\theta}_1 = -6.2543u + 32..2441x_1 - 7.0887x_2 \\
\dot{x}_6 &= \ddot{\theta}_2 = -0.4236u - 21.2663x_1 + 22.97x_2
\end{aligned}
$$

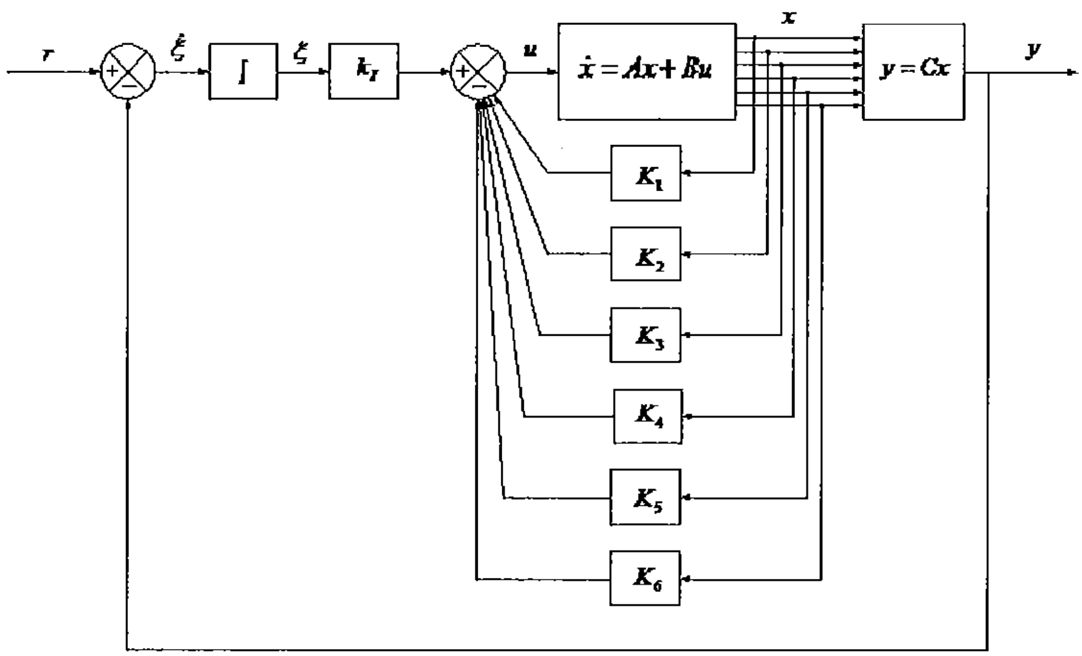
จะได้ State space ของระบบลูกตุ้มผกผันออกมาเป็น

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.681 & -0.0831 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.2441 & -7.0887 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21.2663 & 22.97 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3749 \\ -6.2543 \\ -0.4236 \end{bmatrix} u
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ} \quad \begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= \theta_1 \\ y_3 &= \theta_2 \end{aligned}
$$

3.2 การออกแบบระบบควบคุมของลูกตุ้มผกผันทาง State space

เพื่อให้การตอบสนองของระบบมีความแม่นยำดังนั้นในโครงงานนี้จึงเลือกใช้ระบบควบคุมทาง State space แบบที่มีตัวควบคุมแบบปริพันธ์ร่วมด้วย ซึ่งมีแผนภาพการควบคุมตามที่แสดงในรูป 3.3



รูปที่ 3.3 ระบบความคุมทาง State space ของลูกตุ้มผกผันแบบสองแกน

โดยที่

u = สัญญาณควบคุม(Input)

y = สัญญาณ Output

ξ = สัญญาณ Out put ที่ออกจากตัว Integrator

r = Reference input

กำหนด

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -3.681 & -0.0831 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 32.2441 & -7.0887 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -21.2663 & 22.97 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\3.3749\\-6.2543\\-0.4236\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

จาก Block diagram จะได้ว่า

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{3.28}$$

$$y=Cx \tag{3.29}$$

$$u=-kx+k_I\xi \tag{3.30}$$

$$\dot{\xi}=r-y=r-Cx \tag{3.31}$$

จากสมการที่ (3.28) ถึง (3.31) สามารถนำมาแสดงเป็น State space ได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}(t)\\ \dot{\xi}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}r(t) \tag{3.32}$$

และจะได้การตอบสนองของระบบในสภาวะคงตัวเป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}(\infty)\\ \dot{\xi}(\infty)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}(\infty)\\ \xi(\infty)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}u(\infty)+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}r(\infty) \tag{3.33}$$

ถ้าให้ r(t) เป็นแบบ Unit step input แล้วจะได้ว่า $r(\infty)=r(t)=1$ ดังนั้นเมื่อนำสมการที่ (3.32) ไปลบออกจากสมการที่ (3.33) แล้วจะได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}(t)-\bar{x}(\infty)\\ \dot{\xi}(t)-\dot{\xi}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}(t)-\bar{x}(\infty)\\ \xi(t)-\xi(\infty)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{x}(t)-\bar{x}(\infty)\\ \xi(t)-\xi(\infty)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}r(t)-r(\infty) \tag{3.34}$$

ถ้ากำหนดให้

$$x(t)-x(\infty)=x_e(t)$$
$$\xi(t)-\xi(\infty)=\xi_e(t)$$
$$u(t)-u(\infty)=u_e(t)$$

ดังนั้นเมื่อนำไปแทนลงในสมการที่ (3.32) แล้วจะได้

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_e(t)\\ \dot{\xi}_e(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ \xi_e(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ 0\end{bmatrix}u_e(t) \qquad (3.35)$$

โดยที่

$$u_e(t)=-k\bar{x}_e(t)+k_I\xi_e(t)$$

และถ้าให้ $\bar{e}\ (t)$ แทนเวกเตอร์ของ Error ซึ่งมีค่าเป็น

$$\bar{e}\ (t)=\begin{bmatrix}x_e(t)\\ \xi_e(t)\end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการที่ (3.35) จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\dot{\bar{e}}=(\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\bar{e} \qquad (3.36)$$

โดยที่

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix} \qquad \hat{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ 0\end{bmatrix} \qquad \hat{K}=\begin{bmatrix}K & -k_I\end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

ซึ่งค่า K และค่า k_I นั้นสามารถหาได้จากค่า Eigenvalues ที่ต้องการของเมตริก $\hat{A}-\hat{B}\hat{K}$ (หรือค่า Pole ของระบบปิดที่ต้องการ)

ในที่นี้เราจะเลือกกำหนดสมรรถนะการตอบสนองของระบบเป็น

1. Percent overshoot 10 %
2. Setting time 1 วินาที

จากสมรรถนะที่กำหนดนี้สามารถคำนวณค่า Dominant pole ได้เป็น

จากสมการ Percent overshoot (PO) $= 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

แทนค่า $10 = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

จะได้ $\xi = 0.5911$

จากสมการ Setting time (t_s) $= \dfrac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n}$

แทนค่า $1 = \dfrac{-\ln(0.02\sqrt{1-(0.62)^2}}{(0.62)\omega_n}$

จะได้ $\omega_n = 6.9818$

จากระบบขั้น 2 ซึ่งมีรูปแบบสมการโดยทั่วไปเป็น

$$S^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2 = 0 \tag{3.38}$$

เมื่อแทนค่า $\xi = 0.5911$ และ $\omega_n = 6.9818$ ลงในสมการที่ (3.38) จะได้

$$S^2 + 8.2539S + 48.745 = 0 \tag{3.39}$$

ดังนั้นเมื่อแก้สมการได้ Dominant pole เป็น

$$\mu_1 = -4.1269 + 5.6315i$$

$$\mu_2 = -4.1269 - 5.6315i$$

แต่เนื่องจากระบบนี้มีขั้นเท่ากับ 7 ดังนั้นตำแหน่ง Pole ที่ต้องการจะต้องมี 7 อันซึ่ง Pole ที่เหลืออีก 5 Pole จะเลือกให้เป็นจำนวนจริงลบที่ซ้ำกันและอยู่ห่างจาก Dominant pole ประมาณ 5 เท่า ดังนั้นเมื่อคำนวณออกมาแล้วจะได้ค่า Pole ทั้ง 5 เป็น

$$\mu_3 = -20, \mu_4 = -20, \mu_5 = -20, \mu_6 = -20, \mu_7 = -20$$

จากสมการที่ (3.37) นำค่าจากสมการที่ (3.27) มาแทนค่าจะได้

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3.681 & -0.0831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.2441 & -7.0887 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21.2663 & 22.97 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3749 \\ -6.2543 \\ -0.4236 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{K}=\begin{bmatrix} K & -k_I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & -k_I \end{bmatrix}$$

โดยอาศัยโปรแกรม MATLAB ช่วย เราสามารถหาค่า K และ K_I ได้ดังนี้

จะได้ค่า $K=\begin{bmatrix} 45460 & 20970 & 40920 & 21830 & 10970 & 11640 \end{bmatrix}$ และ $k_I = 108410$

เมื่อได้ค่า K และ k_I มาแล้วต่อมาก็สามารถ หา State Space ของระบบปิดได้โดยการนำสมการ (3.32) ไปแทนในสมการ (3.34) ซึ่งจะได้ผลออกมาเป็น

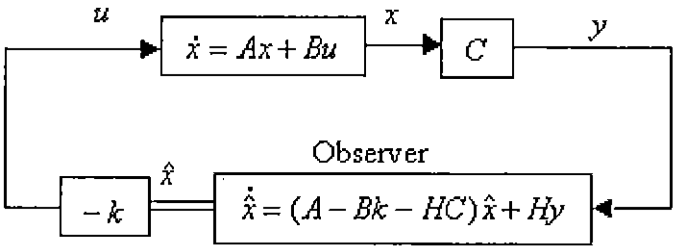
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B}K & \mathbf{B}k_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \xi \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\-153420&-70780&-13810&-73670&-37020&-39280&365870\\284320&131180&255920&136530&68610&72800&-678030\\19260&8860&17360&9250&4650&4930&-45920\\-1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{\xi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}r(t) \tag{3.40}$$

3.3 ออกแบบตัว Observer (ตัวประมาณค่า)

เนื่องจากในการออกแบบจริงในการสร้างแบบจำลองลูกตุ้มผกผันจำเป็นที่จะต้องมีตัวจับสัญญาณหลายตัวแต่เราไม่มีตัวจับสัญญาณเป็นจำนวนมาก แต่เราสามารถที่จะประมาณค่าของตัวจับสัญญาณนั้นๆได้โดยการติดตั้ง Observer ลงใน State space ซึ่งมีวิธีการคำนวณหาค่าดังนี้



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.681 & -0.0831 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.2441 & -7.0887 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21.2663 & 22.97 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3749 \\ -6.2543 \\ -0.4236 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จาก State space ของระบบนี้ดังนั้นเราจะได้สมการ Characteristic Equation เป็น

$$S^6 - 55.21S^4 + 572.9S^2 = 0 \qquad (3.41)$$

จากสมการที่ (3.41)

สามารถหารากคำตอบของสมการได้เป็น 0, 0, 6.4310, 3.7219,-6.4310, -3.7219

เมื่อนำมาแทนในรูปแบบทั่วไปของ Observer canonical form ก็จะได้รูปแบบเมตริกใหม่เป็น

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 572.9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -55.21 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad ,C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

หาสมการ Characteristic Equation ของตัวObserver จากสมการ $\dot{\bar{e}}_x=(A-LC)\bar{e}_x$

$$\dot{\hat{\bar{e}}}_x=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 572.9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -55.21 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\hat{\bar{e}}}_x$$

$$\dot{\hat{\bar{e}}}_x=\begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 572.9-l_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -55.21-l_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -l_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\hat{\bar{e}}}_x$$

ดังนั้นจะได้สมการ Characteristic Equation เป็น

$$|S-(A-LC)|=S^6+l_1S^5+(l_2-572.9)S^4+l_3S^3+(l_4+55.21)S^2+l_5S+l_6=0 \quad (3.42)$$

ต้องหาตำแหน่งของ Pole ของตัว Observer ที่เราต้องการจะวางซึ่งโดยปกติจะออกแบบให้การตอบสนองของตัว Observer ไวกว่า 10 เท่า ของการตอบสนองของระบบปิด ดังนั้นเราจะเลือกตำแหน่งของโพลของตัว Observer ห่างจากโพลของระบบปิดเป็น 10 เท่า เราจะได้

$S_1 = -4.1269 + 5.6315i$
$S_2 = -4.1269 - 5.6315i$
$S_3 = -40$
$S_4 = -40$
$S_5 = -40$
$S_6 = -40$

เมื่อได้ค่า Pole ที่ต้องการแล้วต่อมานำค่า Pole นั้นมาหาค่าสมการ Characteristic equation ที่ต้องการดังนี้

$$(S+40)^4(S-(-4.1269+5.6315i))(S-(-4.1269-5.6315i))=0$$

$$S^6 + 168.2539S^5 + 10969.369S^4 + 343036.64S^3 + 5140950S^2 + 14598704S + 124787200 = 0 \quad (3.43)$$

นำค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ Characteristic equation ของสมการที่ (3.42) และ สมการที่ (3.43) มาเทียบกันจะได้

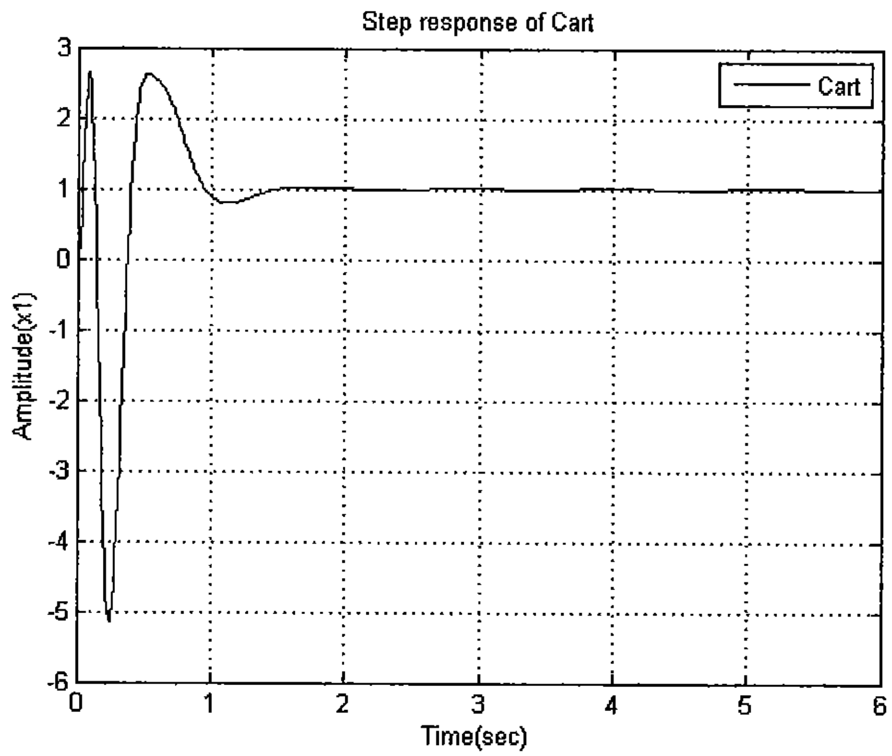
$l_1 = 168.2539$
$l_2 = 11542.269$
$l_3 = 343036.64$
$l_4 = 514039.79$
$l_5 = 14598704$
$l_6 = 124787200$

บทที่ 4

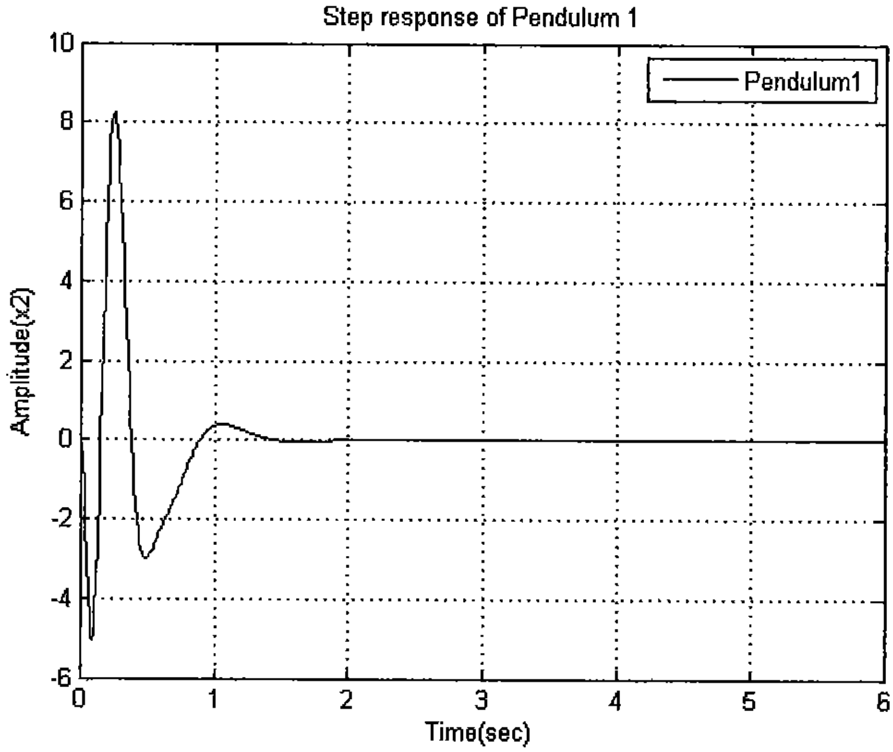
ผลการวิเคราะห์

ในบทนี้จะนำระบบควบคุมของลูกตุ้มผกผันที่ออกแบบมาได้ในบทที่3 มาทำการทดสอบสมรรถนะในโปรแกรม MATLAB

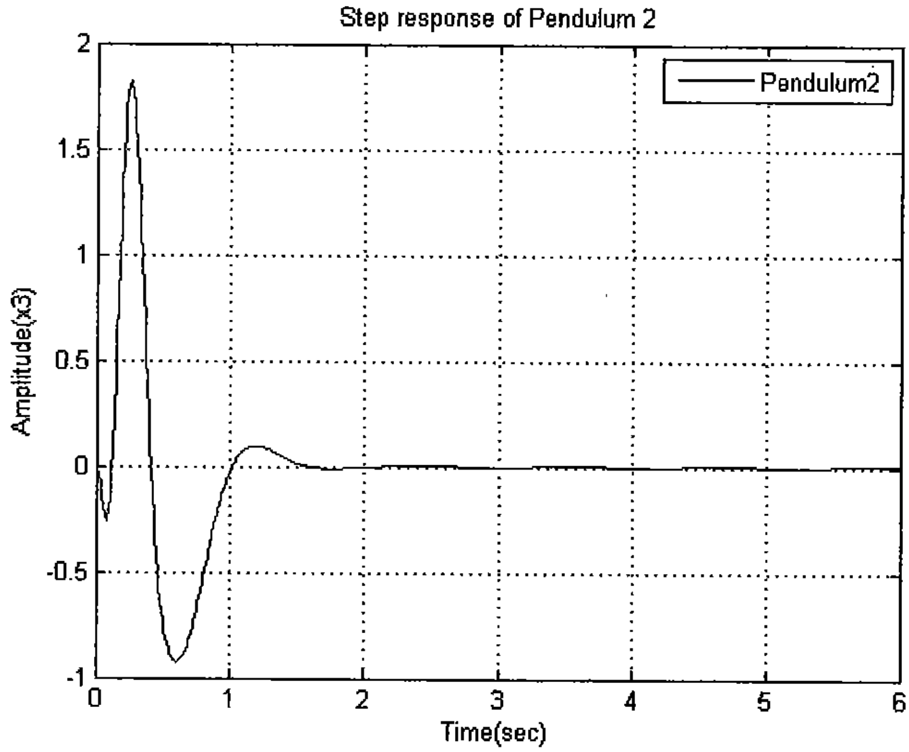
4.1 เมื่อป้อนสัญญาณ Input ที่เป็นแบบ Unit step เข้าไปในระบบ ซึ่งจะได้กราฟการตอบสนองของตัวรถและPendulum 1 และ2 ตามกราฟที่ 4.1 ,4.2 และกราฟที่ 4.3



กราฟที่ 4.1 Step response ของระยะทางของตัวรถ



กราฟที่ 4.2 Step response ของมุมของแท่ง Pendulum 1



กราฟที่ 4.3 Step response ของมุมของแท่ง Pendulum 2

จากกราฟที่ 4.1 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนองของระบบจะมีการกวัดแกว่งในช่วงเริ่มต้น และลู่เข้าค่าคงที่ตามที่ตั้งไว้(ในที่นี้คือ 1) ซึ่งเมื่อวิเคราะห์จากกราฟจะเห็นว่า กราฟการตอบสนองนี้มีค่า Percent overshoot เท่ากับ 10 % และ Setting Time 1 วินาที

จากกราฟที่ 4.2 และ 4.3 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนองของระบบจะมีการกวัดแกว่งในช่วงเริ่มต้น และลู่เข้าศูนย์ ซึ่งหมายความว่าสุดท้ายแล้วระบบควบคุมสามารถรักษาลูกตุ้มให้ตั้งตรงได้ และเมื่อวิเคราะห์จากกราฟจะเห็นว่า กราฟการตอบสนองนี้จะมีค่า มีค่า Percent overshoot เท่ากับ 10 % และ Setting Time 1 วินาที

บทที่ 5
สรุปผลการทดลอง

5.1 สรุปผลการวิเคราะห์

โครงงานนี้มีจุดประสงค์เพื่อออกแบบระบบควบคุมให้กับลูกตุ้มผกผันแบบสองแกนเพื่อรักษาเสถียรภาพตำแหน่ง x ของตัวรถ มุม θ_1 และ θ_2 ของแกนลูกตุ้มทั้งสอง โดยในที่นี้จะเลือกใช้การควบคุมแบบ State space control โดยวิธี Pole placement จากการทดลองในบทที่ 4 พบว่า เมื่อนำสัญญาณแบบ Unit step function ใส่ในระบบ ระบบสามารถควบคุมตำแหน่งของตัวรถ และรักษาเสถียรภาพให้กับแกนลูกตุ้มทั้งสองสามารถตั้งตรงอยู่ได้

5.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากโครงงานนี้ทำการจำลองระบบควบคุมของลูกตุ้มผกผันแบบสองแกนและทำการรบกวนระบบด้วยสัญญาณแบบ Unit step function เพียงสัญญาณเดียว ดังนั้นในการนำไปใช้งานจริงจึงควรที่จะต้องคำนึงถึงองค์ประกอบในหลายๆด้านไม่ว่าจะเป็นสัญญาณรบกวนรูปแบบอื่น สิ่งรบกวนจากสภาพแวดล้อม เป็นต้น

บรรณานุกรม

รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์ และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณ์ . พิมพ์ครั้งที่ 1.กรุงเทพฯ :2543

วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ การควบคุมระบบพลศาสตร์ พิมพ์ครั้งที่ 2.จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย :2548

Katsuhiko Ogata Modern control engineering Prentice-Hall International

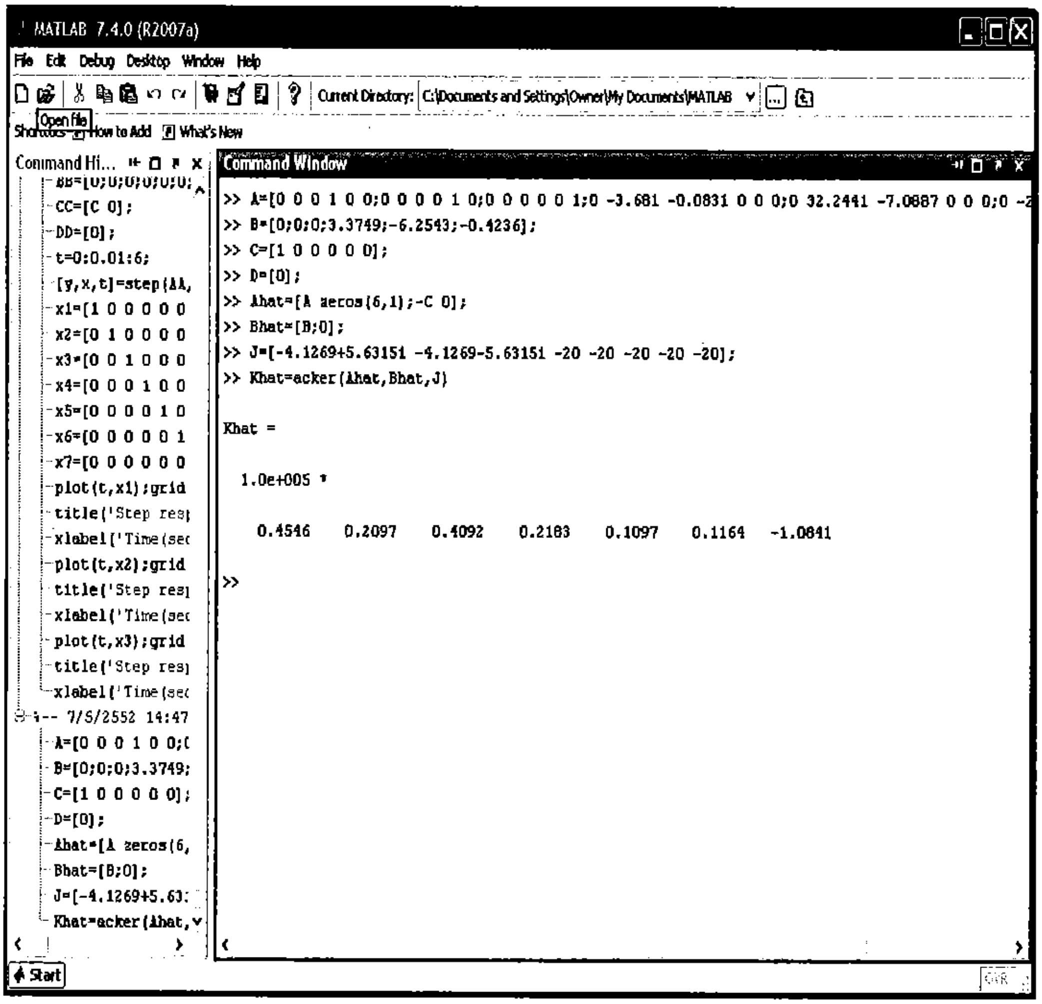
http://www.yangsky.com/ijcc242.pdf

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/pend/invSS.html

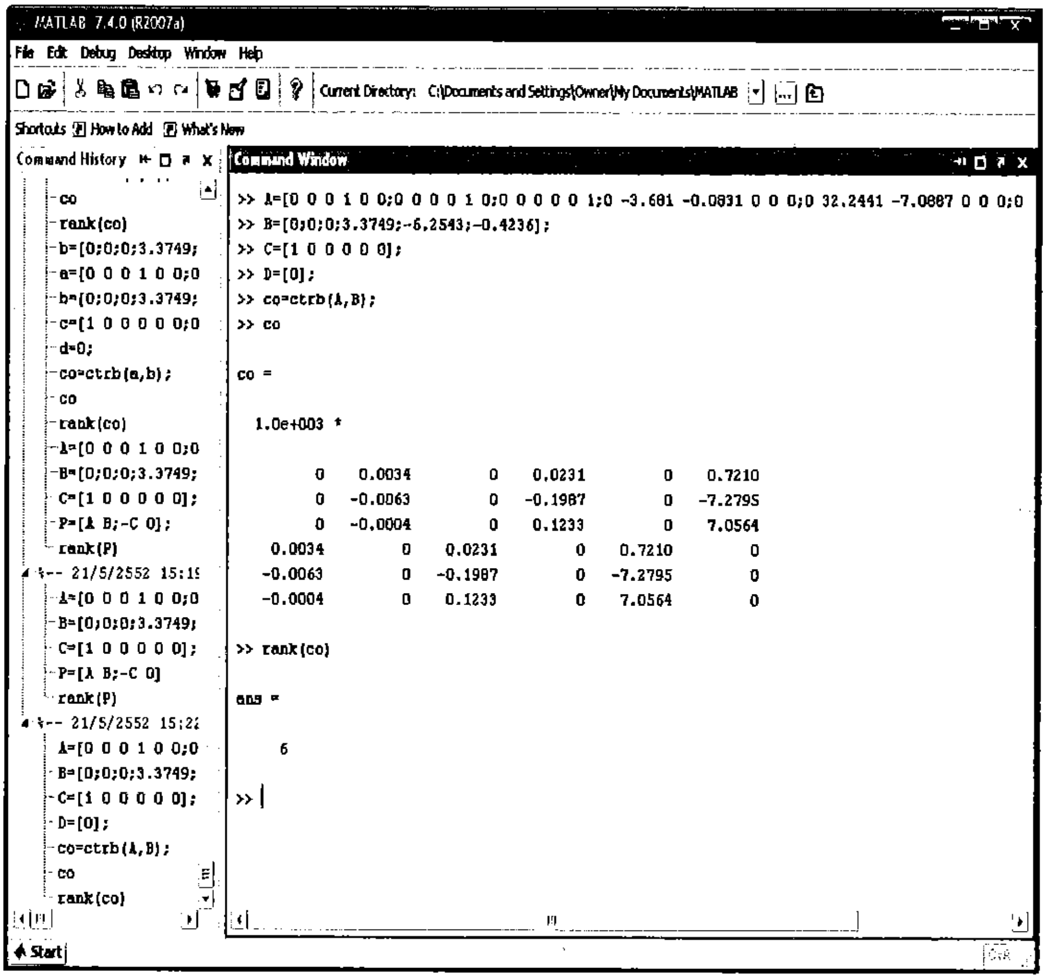
ภาคผนวก

รูปแสดงการใช้คำสั่งในโปรแกรม MATLAB

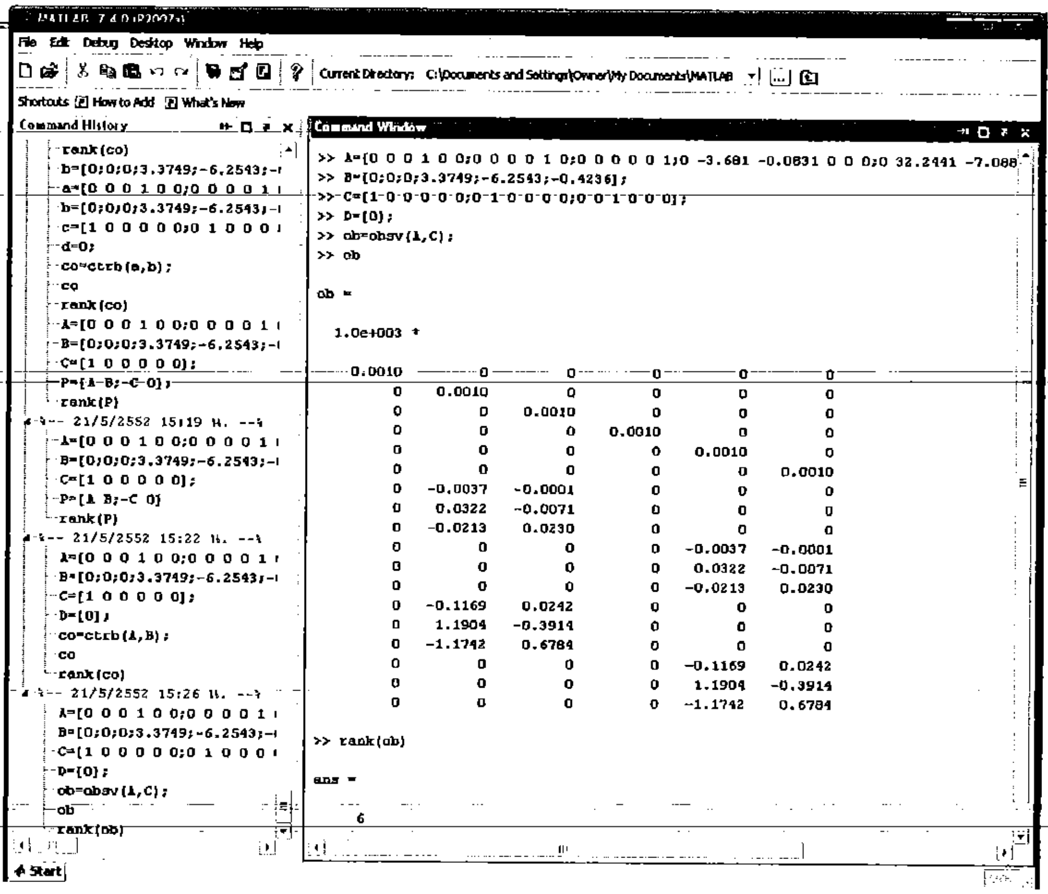
รูปแสดงคำสั่งที่ใช้ในการหา ค่าอัตราขยาย K



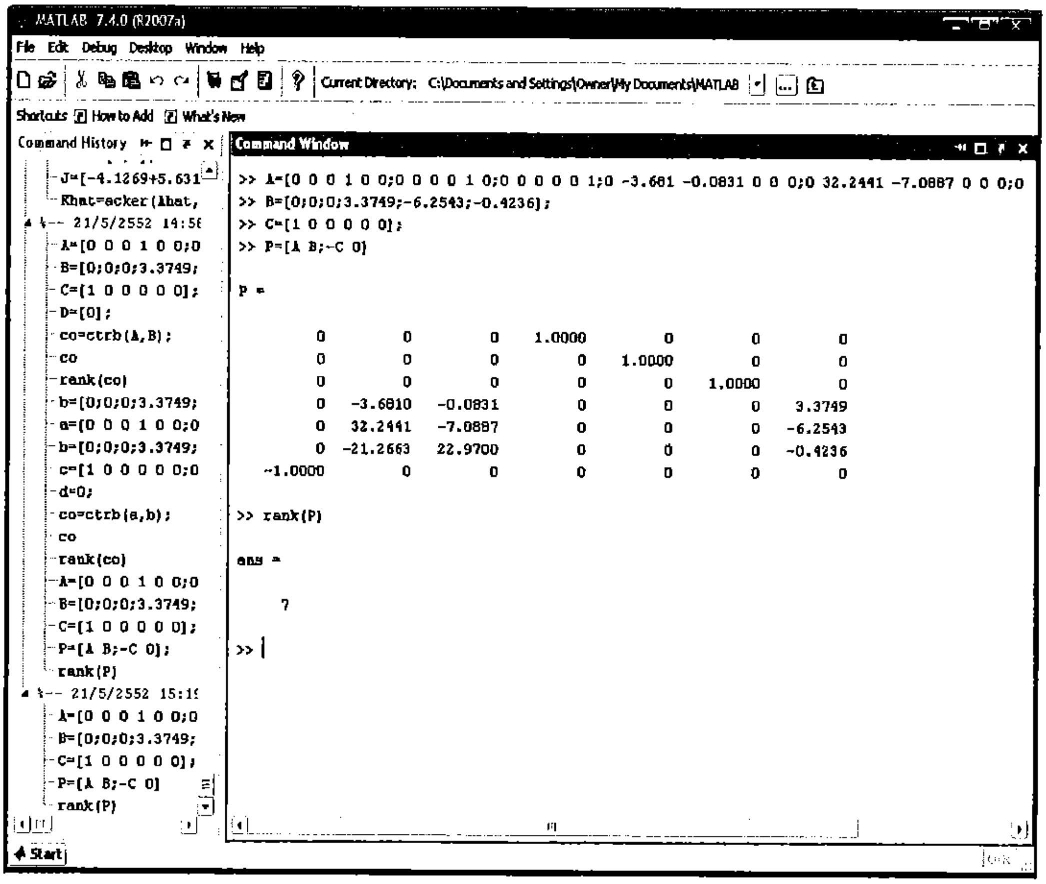
รูปแสดงคำสั่งที่ใช้ในการตรวจสอบความควบคุมได้ (Controllability)



รูปแสดงคำสั่งที่ใช้ในการตรวจสอบ การสังเกตได้ (Observability)



รูปแสดงคำสั่งที่ใช้ในการหาขั้นของระบบ



ประวัติผู้เขียนโครงงาน

ชื่อ นายชาญวิทย์ อยู่เชื้อ

ภูมิลำเนา 432/2 หมู่ 3 ต. ศรีนคร อ.ศรีนคร จ.สุโขทัย

ประวัติการศึกษา

-จบชั้นประถมศึกษาจากโรงเรียนเทศบาลเมือง
สวรรคโลก จ.สุโขทัย

-จบชั้นมัธยมศึกษาจากโรงเรียนอุตรดิตถ์ จ.อุตรดิตถ์

- ปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาตรี
สาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร จ. พิษณุโลก