การจำลองภาพการเคลื่อนที่ของระบบวัตถุหลายชิ้น ด้วยโปรแกรม SimMechanics

THE DYNAMIC SIMULATION OF MULTIBODY SYSTEM WITH SIMMECHANICS

นายธีรศักดิ์ จงใจ รหัส 51363999

นายยุทธนานันท์ สลีอ่อน รหัส 51364071

นายวสันต์ ตัณฑ์เอกชน รหัส 51364088

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์
วันที่รับ 10 ก.ค. 2555
เลขทะเบียน 16498897
เลขเรียกหนังสือ ป.ร.
มหาวิทยาลัยนเรศวร ล.ศ. 2554

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2554

ใบรับรองปริญญานิพนธ์

ชื่อหัวข้อโครงงาน	การจำลองภาพการเคลื่อนที่ของระบบวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics		
ผู้ดำเนินโครงงาน	นายธีรศักดิ์	จงใจ	รหัส 51363999
	นายยุทธนานันท์	สลีอ่อน	รหัส 51364071
	นายวสันต์	ตัณฑ์เอกชน	รหัส 51364088
ที่ปรึกษาโครงงาน	อาจารย์ สุรัตน์ ปัญญาแก้ว		
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล		
ภาควิชา	วิศวกรรมเครื่องกล		
ปีการศึกษา	2554		

.....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต วิศวกรรมเครื่องกล

.....ที่ปรึกษาโครงงาน
(อาจารย์สุรัตน์ ปัญญาแก้ว)

.....กรรมการ
(ดร.นินนาท ราชประดิษฐ์)

.....กรรมการ
(ดร.อนันต์ชัย อยู่แก้ว)

ชื่อหัวข้อโครงงาน	การจำลองภาพการเคลื่อนที่ของระบบวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics		
ผู้ดำเนินโครงงาน	นายธีรศักดิ์	จงใจ	รหัส 51363999
	นายยุทธนานันท์	สลีอ่อน	รหัส 51364071
	นายวสันต์	ตัณฑ์เอกชน	รหัส 51364088
ที่ปรึกษาโครงงาน	อาจารย์ สุรัตน์ ปัญญาแก้ว		
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล		
ภาควิชา	วิศวกรรมเครื่องกล		
ปีการศึกษา	2554		

.....

บทคัดย่อ

ในโครงงานนี้ได้นำเสนอวิธีการใช้โปรแกรม SimMechanics จำลองภาพการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้นด้วย โดยยกตัวอย่างการจำลองภาพการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ของระบบ couple pendulum ซึ่งจากตัวอย่างจะเห็นว่า การเขียนโปรแกรมใน SimMechanics นั้นสะดวกและง่าย ทั้งนี้เนื่องจากว่าผู้เขียนโปรแกรมไม่จำเป็นต้องรู้สมการการเคลื่อนที่ และโปรแกรมนี้จะใช้ block แทนอุปกรณ์ทางกลทั้งหมด นอกจากนี้โปรแกรม SimMechanics ยังสามารถแสดงผลออกมาเป็นภาพเคลื่อนไหวได้อีกด้วยซึ่งทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์และเข้าใจ ดังนั้นโปรแกรม SimMechanics จึงเป็นโปรแกรมที่มีประโยชน์อย่างยิ่งต่อการนำมาใช้ออกแบบและวิเคราะห์พลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้น

Project title	THE DYNAMIC SIMULATION OF MULTIBODY SYSTEM WITH SIMMECHANICS
Name	Mr. Thirasak Chongchai ID. 51363999
	Mr. Yuttananan Salee-on ID. 51364071
	Mr. Wason Tanekkachon ID. 51364088

Project advisor	Mr. Surat Panyakaew
Major	Mechanical Engineering
Department	Mechanical Engineering
Academic year	2011

Abstract

This project presents how to model multibody system in SimMechanics, it basic functionalities were show on example of couple pendulum problem. From the result experiment can be seen that the program is very easy in SimMechanics because the programmer does not need to know the equations of motion and this program represents multibody system by a connected block diagram. Futhermore; the SimMechanics can generated animation , which makes it easy to analyze and understand. Therefore, SimMechanics is a useful application to adopt more design and analysis of multibody.

กิตติกรรมประกาศ
(Acknowledgement)

โครงงานฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล โดยมุ่งเน้นในเรื่องการสร้างแบบจำลองระบบของวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics ซึ่งจากการดำเนินงานพบว่า โครงงานเรื่องการศึกษาการสร้างแบบจำลองระบบของวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics นี้ สำเร็จได้ด้วยดี เพราะการดูแลเอาใจใส่และความช่วยเหลือเป็นอย่างดี จากท่านอาจารย์สุรัตน์ ปัญญาแก้ว ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา และคณะกรรมการทุกท่านที่ช่วยกรุณาให้คำแนะนำ ในเรื่องการเตรียมตัวตอบคำถามรวมทั้งให้ข้อคิดต่างๆ ตลอดจนให้ความเอาใจใส่ในการตรวจสอบแก้ไขและปรับปรุงข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยดีมาตลอด ผู้ดำเนินงานจึงขอขอบพระคุณ เป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณคณาจารย์และเจ้าหน้าที่ทุกภาควิชา รวมทั้งภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยนเรศวรทุกท่าน ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือแนะนำ ท้ายสุดนี้ผู้ดำเนินโครงงานขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา ที่สนับสนุนให้กำลังใจและความเป็นห่วงเป็นใยแก่ผู้ดำเนินโครงงานอย่างดีเยี่ยมจนสำเร็จการศึกษาไว้ ณ ที่นี้ด้วย

คณะผู้ดำเนินโครงงานวิศวกรรม
นายธีรศักดิ์ จงใจ
นายยุทธนานันท์ สลีอ่อน
นายวสันต์ ตัณฑ์เอกชน

สารบัญ

หน้า

ใบรับรองปริญญานิพนธ์ ก
บทคัดย่อภาษาไทย ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ค
กิตติกรรมประกาศ ง
สารบัญ จ
สารบัญตาราง ช
สารบัญรูป ซ
สารบัญสัญลักษณ์และอักษรย่อ ญ

บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของโครงงาน 1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน 1
1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2
1.4 ขอบเขตการทำโครงงาน 2
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน 2
1.6 แผนการดำเนินงาน 3
1.7 รายละเอียดงบประมาณตลอดโครงงาน 3

บทที่ 2 หลักการและทฤษฎี 4
2.1 ระบบวัตถุหลายชิ้น 4
2.2 นิยามต่างๆทางพลศาสตร์ที่เกี่ยวข้องมีดังนี้ 4
2.3 กฎของนิวตัน (Newton's law) 5
2.4 ลำดับขั้นความเป็นอิสระ (Degree of Freedom, DOF) 6
2.5 Generalized Coordinates 6
2.6 การเขียนพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ในรูปเมทริกซ์ 6
2.7 สมการลากรานจ์ (Lagrange's equation) 8
2.8 ระบบไม่อนุรักษ์ (Nonconservative System) 10

บทที่ 3 วิธีดำเนินโครงงาน 11
3.1 สร้างแบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์จากกลไกที่มี 11
3.2 สร้างภาพจำลองในโปรแกรม SimMechanics 14
3.3 ทำการทดลองจากภาพจำลองที่ได้ในโปรแกรม SimMechanics 24
3.4 สร้างกราฟการเคลื่อนที่ในแต่ละกรณี 27

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 4 ผลการทดลองและวิเคราะห์ 31
4.1 กรณีไม่มีแรงกระทำต่อระบบ 31
4.1 กรณีมีแรงกระทำต่อระบบ 33

บทที่ 5 บทสรุปและข้อเสนอแนะ 36
5.1 บทสรุป 36
5.2 ข้อเสนอแนะ 36

เอกสารอ้างอิง 37

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

1.1 ระยะเวลาและแผนปฏิบัติงานในการดำเนินโครงงาน..... 3

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ระบบทางกลและระบบโครงสร้าง	4
2.2 กลไก Slider Crank	5
2.3 ความเป็นอิสระของวัตถุ	6
3.1 ผังวัตถุอิสระของ Couple pendulum	11
3.2 แสดงการเลือก Block Machine Environment	15
3.3 แสดง Block Machine Environment	15
3.4 แสดงการตั้งค่า Block Machine Environment	16
3.5 แสดงการตั้งค่า Ground Block	16
3.6 แสดงการเชื่อมต่อ Block Machine Environment กับ Ground Block	17
3.7 แสดงการเลือก Block Prismatic	17
3.8 แสดงการเลือก Body	18
3.9 แสดงการตั้งค่า Block Prismatic	18
3.10 แสดงการตั้งค่า Block Prismatic	19
3.11 แสดงการเชื่อมต่อ Block	19
3.12 แสดงการติดตั้ง Block Joint Spring & Damper	20
3.13 แสดงการตั้งค่า Block Joint Spring & damper	20
3.14 แสดงการเลือก Block Revolute	21
3.15 แสดงการตั้งค่า Block Revolute	21
3.16 แสดงการตั้งค่า Body1	22
3.17 แสดงการเลือก Block Joint Initial Condition	22
3.18 แสดงการตั้งค่า Block Joint Initial Condition	23
3.19 แสดงการเชื่อมต่อ Block IC	23
3.20 ภาพแสดงกราฟฟิก ของระบบ couple pendulum	24
3.21 แสดงการเลือก Block Body Actuator	24
3.22 แสดงการตั้งค่า Block Body Actuator	25
3.23 แสดงการเลือก Block Step	25
3.24 แสดงการตั้งค่า Block Step	26
3.25 แสดงการเชื่อมต่อระหว่าง Body Actuator และ Block Step	26
3.26 แสดงการเชื่อมต่อ Block	27
3.27 แสดงการเลือก Block Joint Sensor	27
3.28 แสดงการตั้งค่า Joint sensor	28

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

3.29 แสดงการตั้งค่า Joint Sensor1 28

3.30 แสดงการเลือก Scope 29

3.31 แสดงการเชื่อมต่อ Sensor กับระบบ 29

3.32 แสดงภาพของ Block Diagram ทั้งหมดของระบบcouple pendulum 30

3.33 ตัวอย่างภาพกราฟฟิกของ Couple pendulum 30

4.1 **ภาพกราฟิก 2มิติ กรณีไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบ** 31

4.2 กราฟแสดงการกระจัดของตัวรถเมื่อไม่มีแรงกระทำต่อระบบ 32

4.3 กราฟการตอบสนองของ θ_1 32

4.4 กราฟการตอบสนองของ θ_2 33

4.5 **ภาพกราฟิก 2มิติ กรณีมีแรงมากระทำต่อระบบ** 33

4.6 แสดงการกระจัดของตัวรถเมื่อมีแรงกระทำต่อตัวรถ 34

4.7 กราฟการตอบสนองของ θ_1 34

4.8 กราฟการตอบสนองของ θ_2 35

สารบัญสัญลักษณ์และอักษรย่อ

C	Damping element	ตัวหน่วง
D	Power system lose	พลังงานที่ระบบสูญเสีย
DOF	Degree of freedom	จำนวนความเสรีในการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เป็นอิสระต่อกัน
F_i	Force	แรง (N)
I	Moment of inertia	โมเมนต์ความเฉื่อย
k	Spring rate	ค่าคงที่ของสปริง
l	Length	ความยาว (m)
M	Mass	มวล (kg)
$M_{1,2}$	Moment	ผลของแรงที่กระทำกับวัตถุเพื่อให้วัตถุหมุนไปรอบจุดหมุน
$\vec{q}$	Generalized coordinates	ความเร็วทั่วไป
T	Kinetic	พลังงานจลน์
V	Elastic potential energy	พลังงานศักย์ยืดหยุ่น
W	Work	งาน
X_i	Displacement	การกระจัด (m)
θ	Angle	มุม
δ	Spring or bar deformation	การเสียรูปของสปริงหรือแท่งวัตถุ
ω	Angular velocity	ความเร็วเชิงมุม
[ ]	Rectangular or a square matrix	เมทริกซ์สี่เหลี่ยม
{ }	Column matrix	เมทริกซ์แถว

บทที่ 1
บทนำ

การจำลองพลวัตของระบบวัตถุหลายชิ้น (Multibody) เป็นปัญหาร่วมกันในงานด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์เป็นปัญหาที่ยากต่อการหาคำตอบของสมการ จึงได้มีการใช้โปรแกรม SimMechanics สร้างแบบจำลองสองมิติอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่จากการสั่นสะเทือนทางกลของระบบวัตถุหลายชิ้น ทำให้การทำนายลักษณะการทำงานของระบบวัตถุหลายชิ้นและการหาคำตอบของสมการรวดเร็วและง่ายขึ้น วิธีนี้ยังเหมาะสำหรับการออกแบบระบบควบคุมทั่วไปและการออกแบบเครื่องจักรกลอีกด้วย

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของโครงงาน

ปัจจุบันในวงการวิศวกรรมได้มีการศึกษาและทำวิจัยในเรื่องระบบวัตถุหลายชิ้นกันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะทางด้านหุ่นยนต์และพลศาสตร์ของรถยนต์ ตามปกติแบบจำลองทางพลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้นนั้นจะเป็นกลุ่มสมการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน ซึ่งการแก้สมการเหล่านี้ด้วยวิธีธรรมดานั้นจะไม่สะดวกและใช้เวลามาก ดังนั้นจึงได้มีผู้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการศึกษาและวิเคราะห์พฤติกรรมทางพลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้นขึ้นมา โดยโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้ในการนี้นั้นมีอยู่ด้วยกันหลากหลาย ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งโปรแกรมที่ช่วยหาสมการและแก้สมการการเคลื่อนที่ หรือไม่ก็เป็นโปรแกรมจำลองภาพเคลื่อนที่ระบบวัตถุหลายชิ้น ในโครงงานนี้จะนำเสนอ การพัฒนาโปรแกรมการจำลองภาพการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics ซึ่งเป็นชุดโปรแกรมเสริมของ MATLAB โดยโปรแกรมนี้จะสร้างแบบจำลองของระบบทางกลด้วย block diagram ที่เชื่อมต่อกัน และเนื่องจาก MATLAB มีความสามารถในส่วนของการคำนวณสูงอยู่แล้วดังนั้นจึงสามารถนำมาใช้จำลองภาพการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ของระบบทางกลได้โดยแทบจะไม่ต้องใช้โปรแกรมอื่นช่วย

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1.2.1 เพื่อศึกษาการใช้โปรแกรม SimMechanics

1.2.2 เพื่อแสดงวิธีการสร้างแบบจำลองทางพลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.3.1 ได้เรียนรู้วิธีการใช้โปรแกรม SimMechanics สร้างภาพการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้น

1.4 ขอบเขตการทำโครงงาน

1.4.1 ระบบทางกลที่จะสร้างภาพจำลองการเคลื่อนที่นั้นเคลื่อนที่ในระนาบ

1.4.2 พื้นที่ผิวสัมผัสทั้งหมดในระบบถือว่าไม่มีแรงเสียดทาน

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

ในการดำเนินงานของโครงงานปริญญานิพนธ์การสร้างภาพจำลองระบบของวัตถุหลายชิ้นด้วยโปแกรม SimMechanics นี้เพื่อให้การดำเนินงานเป็นไปด้วยความเรียบร้อยจึงได้ กำหนดขั้นตอนการดำเนินงานเป็นดังนี้

1.5.1 ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

1.5.1.1 ศึกษาทฤษฎีการเคลื่อนที่ของระบบวัตถุหลายชิ้น

1.5.1.2 ศึกษาการใช้โปรแกรม SimMechanics

1.5.2 สร้างแบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์

1.5.3 สร้างภาพจำลองในโปรแกรม SimMechanics

1.5.4 ทำการทดลองจากภาพจำลองที่ได้ในโปรแกรม SimMechanics โดยแบ่งเป็น 2 กรณี คือ มีแรงกระทำและไม่มีแรงกระทำต่อระบบ

1.5.5 สร้างกราฟการเคลื่อนที่ในแต่ละกรณี

1.5.6 วิเคราะห์และสรุปผลการจำลองสภาพ

1.5.7 จัดทำเล่มปริญญานิพนธ์

1.6 แผนการดำเนินงาน

โครงงานปริญญานิพนธ์การสร้างภาพจำลองระบบวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics นี้จะใช้ระยะเวลาดำเนินการทั้งสิ้น 8 เดือนโดยสามารถแบ่งขั้นตอนการดำเนินงานเป็นดังแสดงในตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาและแผนปฏิบัติงานในการดำเนินโครงงาน

การดำเนินงาน	2554								
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1.ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้อง	←	—	—	—	→				
2.สร้างแบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์					←	—	→		
3.สร้างภาพจำลองในโปรแกรม SimMechanics						←	—	→	
4.ทำการทดลองจากภาพจำลองที่ได้							←	→	
5.สร้างกราฟการเคลื่อนที่ในแต่ละกรณี							←	→	
6.วิเคราะห์และสรุปผลการจำลองสภาพ								←	→
7.จัดทำเล่มปริญญานิพนธ์									← →

1.7 รายละเอียดงบประมาณตลอดโครงงาน

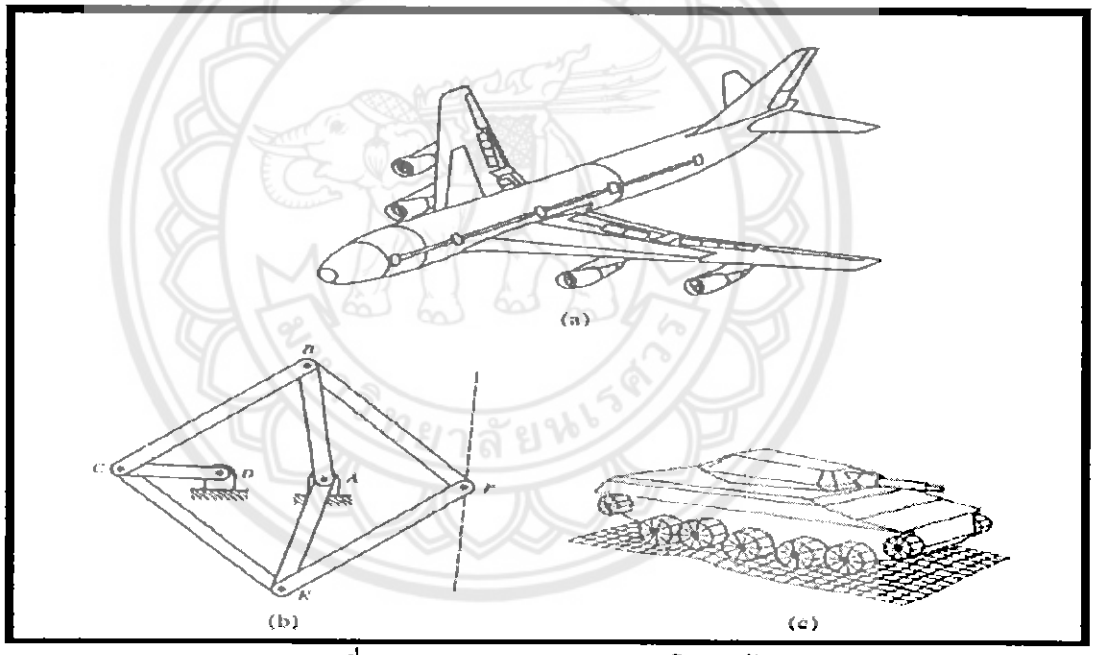
1. ค่าเอกสารข้อมูลที่เกี่ยวข้อง 1,000 บาท
2. ค่าใช้จ่ายจัดทำเล่มปริญญานิพนธ์ 2,000 บาท

รวมเป็นเงิน 3,000 บาท

บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

2.1 ระบบวัตถุหลายชิ้น

การศึกษาแบบจำลองทางพลศาสตร์ที่ประกอบไปด้วยระบบวัตถุหลายชิ้นนั้นเป็นสิ่งที่มีความสำคัญและมีประโยชน์มาก กล่าวคือ เมื่อเครื่องจักรกลหรือโครงสร้างที่ทำงานที่อัตราเร็วสูงและมีความเร่งด้วยนั้นหลักการและวิธีการจะต้องอาศัยความรู้เรื่องพลศาสตร์มากกว่าสถิตศาสตร์ แม้แต่ในการพัฒนางานช่างในปัจจุบันให้เจริญก้าวหน้าก็ต้องอาศัยแบบจำลองทางพลศาสตร์นี้ในการวิเคราะห์ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานของการออกแบบเครื่องจักรหรือโครงสร้างที่เคลื่อนที่ ระบบควบคุมอัตโนมัติ จรวด ขีปนาวุธ ยานอวกาศ ยวดยานพาหนะทั้งทางบกและทางอากาศ และเครื่องจักรกลทุกประเภท ไม่ว่าจะเป็น กังหัน ปั๊ม เครื่องยนต์สูบชัก เครื่องกว้าน หรือเครื่องมือทางเครื่องจักรกลต่างๆ เป็นต้น



รูปที่ 2.1 ระบบทางกลและระบบโครงสร้าง

2.2 นิยามต่างๆ ทางพลศาสตร์ที่เกี่ยวข้องมีดังนี้

ระบบวัตถุหลายชิ้น (Multiple body) คือ ระบบที่ประกอบไปด้วยวัตถุเกร็งหลายๆชิ้นรวมกันมากกว่าสองชิ้นขึ้นไป

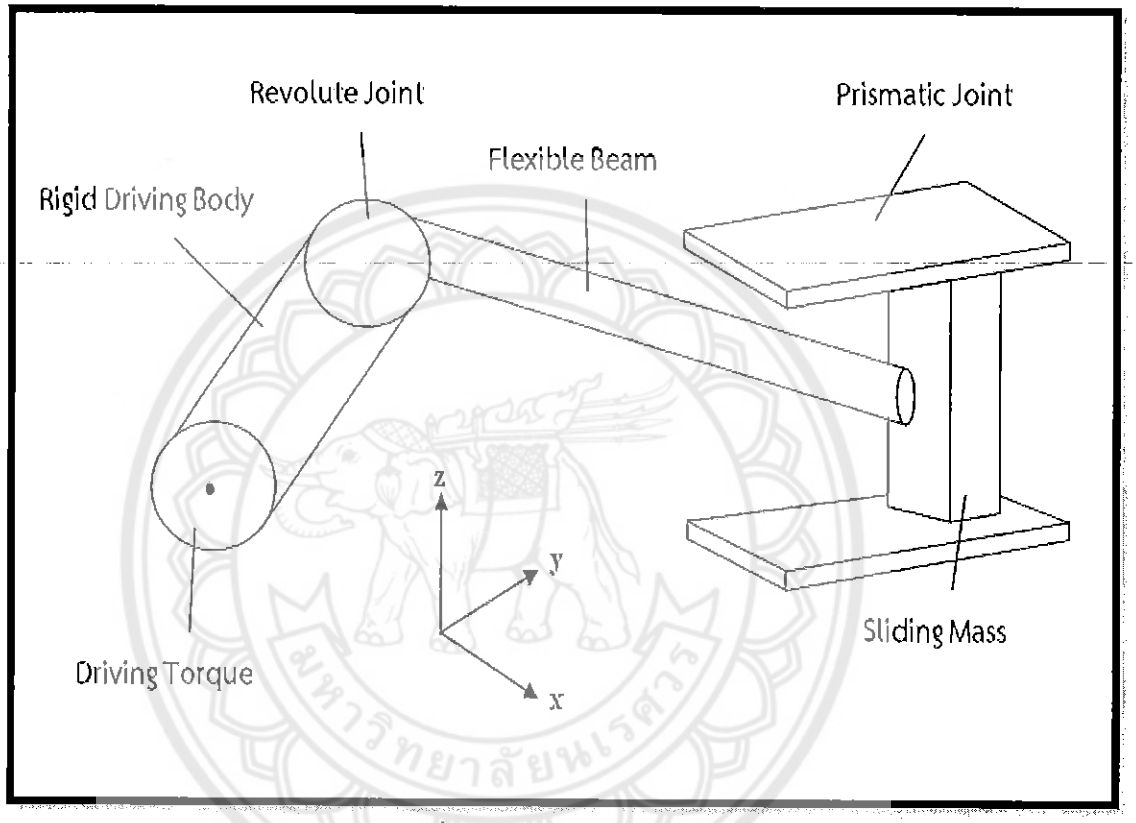
วัตถุเกร็ง (Rigid body) คือ วัตถุที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเมื่อมีแรงมากระทำ แต่ในความเป็นจริงวัตถุเมื่อมีแรงมากระทำจะต้องมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปจากเดิมเสมอแต่เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากเมื่อเทียบกับรูปร่างเดิมก่อนโดนแรงกระทำ ก็อาจจะถือว่าวัตถุนั้นเป็นวัตถุเกร็ง

มวล (Mass) คือ ปริมาณที่ใช้วัดความเฉื่อย และเป็นคุณสมบัติประจำตัวของทุกวัตถุซึ่งส่งผลถึงแรงดึงดูดกับวัตถุอื่น

ความเฉื่อย (Inertia) คือ คุณสมบัติของสสารที่พยายามต้ายทานการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่

เวลา (Time) คือ การวัดลำดับเหตุการณ์ ในทางกลศาสตร์แบบนิวโตเนียนถือว่าเวลาเป็นปริมานสมบูรณ์

การเคลื่อนที่ในแต่ละชิ้นส่วนนั้นอาจเป็นได้ทั้งแบบหมุน (Rotation) และแบบเลื่อนที่ (Translation) ยกตัวอย่างเช่น กลไก Slider Crank ในรูปด้านล่าง ซึ่งเป็นกลไกที่ถูกใช้เพื่อแปลงการเคลื่อนที่แบบหมุนให้เป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่



รูปที่ 2.2 กลไก Slider Crank

2.3 กฎของนิวตัน (Newton's law)

เซอร์ไอแสคนิวตัน (Sir Isaac Newton) เป็นคนแรกที่กล่าวถึงพื้นฐานของกฎการเคลื่อนที่ โดยกฎต่างๆ ได้แก่

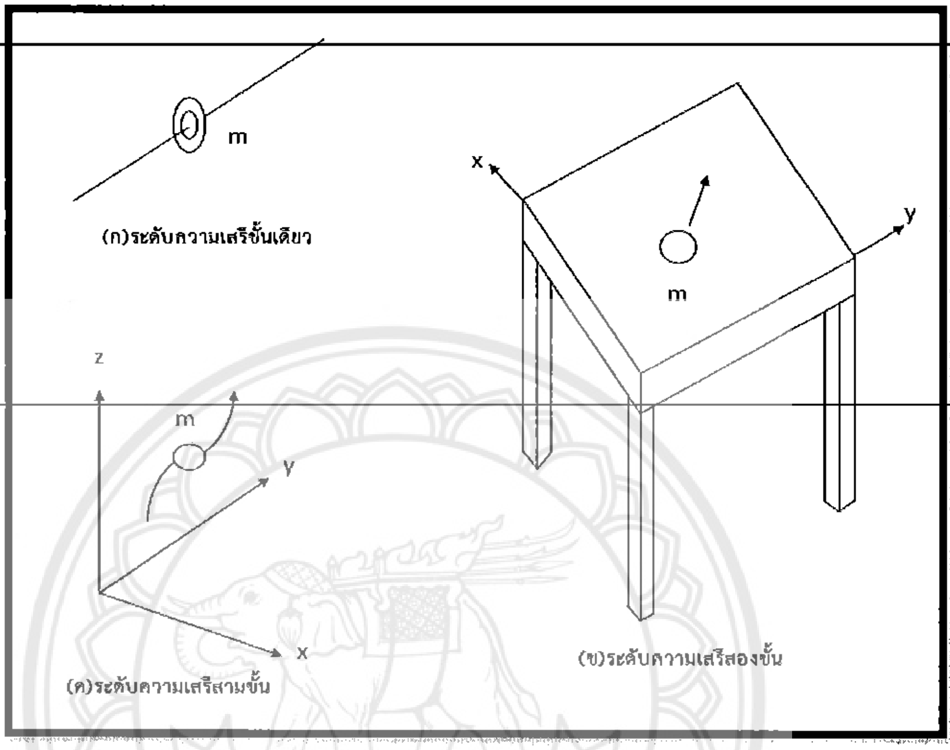
กฎข้อที่ 1 อนุภาคจะยังคงอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ต่อไปในแนวเส้นตรงหรือมีความเร็วสม่ำเสมอ ถ้าแรงที่มากระทำต่ออนุภาคนั้นอยู่ในภาวะที่สมดุล

กฎข้อที่ 2 ความเร่งของอนุภาคเป็นสัดส่วนกับแรงลัพธ์ที่มากระทำต่อมัน และมีทิศทางไปทางเดียวกันกับแรงลัพธ์นั้นด้วย

กฎข้อที่ 3 แรงกริยาและแรงปฏิกิริยาของวัตถุที่กระทำต่อกัน จะมีขนาดเท่ากัน อยู่ในแนวเดียวกัน แต่ทิศทางตรงกันข้ามกัน

2.4 ลำดับขั้นความเป็นอิสระ (Degree of Freedom, DOF)

ลำดับขั้นความเป็นอิสระ (Degree of Freedom, DOF) หมายถึง จำนวนความเสรีในการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เป็นอิสระต่อกันไม่ขึ้นแก่กัน ซึ่งในโครงงานนี้มีลำดับขั้นความเป็นอิสระ DOF = 3



รูปที่ 2.3 ความเป็นอิสระของวัตถุ

2.5 Generalized Coordinates

การระบุตำแหน่งของมวลของระบบการสั่นสะเทือนหนึ่งๆ สามารถที่จะเลือกใช้กลุ่มของแกนที่แตกต่างกันได้หลายกลุ่ม เมื่อมี n ดีกรีอิสระแล้วจะต้องใช้แกนอ้างอิงที่เป็นอิสระต่อกัน n แกนเพื่อมาระบุตำแหน่งของมวล และจะเรียกกลุ่มแกนดังกล่าวนั้นว่า Generalized Coordinates ซึ่งตามปกติจะเขียนแทนด้วย $q_1, q_2, \ldots q_n$ Generates Coordinates นี้อาจจะเป็นความยาว หรือ มุม หรือเป็นแกนผสม ระหว่างความยาวและมุม

2.6 การเขียนพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ในรูปเมทริกซ์

ถ้าให้ x_i แทนการจัดการกระจัดของมวล m_i และF_i แทนแรงที่กระทำต่อมวล m_i ที่อยู่ในระบบ n ดีกรีอิสระแล้วค่าพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงตัวที่ i ในระบบจะมีค่าเป็น

$$V = \frac{1}{2} F_i x_i$$

ดังนั้นจะได้พลังงานศักย์รวมทั้งหมดของระบบเป็น

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i x_i \quad \ldots\ldots\ldots (2.1)$$

เนื่องจาก

$$F_i = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} x_i$$

และเมื่อนำไปแทนลงในสมการ (2.1) จะได้เป็น

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j\right) x_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_i x_j \quad (2.2)$$

สมการ (2.2) นี้สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$V = \frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x} \quad (2.3)$$

สำหรับพลังงานจลน์ของมวล m_i จะมีค่าตามนิยามเป็น

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

ดังนั้นจะได้พลังงานจลน์รวมทั้งหมดของระบบเป็น

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^2 \quad (2.4)$$

สมการ (2.4) นี้สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}} \quad (2.5)$$

โดยที่ $\dot{\vec{x}}$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วจะมีค่าเป็น

$$\dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}$$

และเมทริกซ์มวล $[m]$ เป็น Diagonal Matrix ดังนี้

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

ถ้าใช้ Generalized Coordinates (q_i) แทนการกระจัด x_i แล้วสมการของพลังงานจลน์จะเขียนได้เป็น

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T[m]\dot{\vec{q}} \quad (2.6)$$

โดยที่ $\dot{\vec{q}}$ เป็นเวกเตอร์ของ Generalized Velocities และมีค่าเป็น

$$\dot{\vec{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}$$

ส่วน [m] นั้นจะถูกเรียกว่า Generalized Mass Matrix และมีค่าเป็น

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \cdots & m_{nm} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $m_{ij} = m_{ji}$ ดังนั้น Generalized Mass Matrix จึงเป็นเมทริกซ์สมมาตรจะเห็นว่าพลังงานศักย์จะเป็นฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) ของการกระจัด ส่วนพลังงานจลน์จะเป็นฟังก์ชันกำลังสองของความเร็ว

เนื่องจากค่าพลังงานจลน์ตามนิยามไม่สามารถติดลบได้และจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อความเร็วทั้งหมดเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงเรียกพลังงานจลน์ ตามสมการที่ (2.5) และ (2.6) "กำลังสองบวกอย่างแน่นอน" (Positive Definite Quadratic From) และเรียกเมทริกซ์มวล[m] ว่า "เมทริกซ์บวกอย่างแน่นอน" (Positive Definite Matrix) ในทางตรงกันข้ามพลังงานศักย์ในสมการ (3) จะเป็นสมการในรูปกำลังสองบวกอย่างแน่นอน แต่เมทริกซ์ [k] จะเป็นบวกอย่างแน่นอนก็ต่อเมื่อระบบนั้นเป็นระบบที่มีเสถียรภาพ (Stable) ดังนั้นเมทริกซ์ [k] จึงเป็นเพียงแค่เมทริกซ์บวก (Positive Matrix) ซึ่งเมื่อมาพิจารณาโดยรวมแล้วจะเห็นว่าเมทริกซ์มวล[m] เป็นเมทริกซ์บวกอย่างแน่นอนและเมทริกซ์[k] เป็นเมทริกซ์บวกเราจะเรียกระบบนี้ว่าระบบกึ่งจำกัด (Semi-Definite System)

2.7 สมการลากรานจ์ (Lagrange's equation)

สามการลากรานจ์สามารถนำไปใช้หาสมการการเคลื่อนที่ของระบบได้ทุกระบบ โดยจะเหมาะมากสำหรับระบบที่มีความซับซ้อน และมีหลายดีกรีอิสระ สมการลากรานจ์เป็นสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูป Differential Equation ของ Generalized Coordinates (q_i) สามารถแสดงที่มาของสมการนี้ในเทอมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ได้ดังนี้พิจารณาระบบอนุรักษ์ซึ่งผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์มีค่าคงที่ดังนั้น

$$d(T + V) = 0 \quad \ldots\ldots (2.7)$$

เนื่องจาก

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

$$V = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

ดังนั้น Differential ของ T และ V จะมีค่าเป็น

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

$$dV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$$

จากสมการของพลังงานจลในสมการ (2.6) จะได้ว่า

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{T}[m]\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$$

เมื่อทำการ Differential สมการ (2.10) เทียบกับ $\dot{q}_i$ แล้วจะได้ผลออกมาเป็น

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_j \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_j \quad \ldots\ldots\ldots (2.11)$$

แล้วคูณด้วยสามการ (2.6) ด้วย $\dot{q}_i$ จะได้

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_j\right)\dot{q}_i$$

ทำการบวกตลอดตั้งแต่ i=1 ถึง i=n จะได้ผลออกมาเป็น

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_j\dot{q}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.12)$$

เมื่อเทียบสมการ (2.12) กับสมการ (2.10) จะได้ว่า

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

และเมื่อนำสมการนี้มาหาอนุพันธ์โดยใช้ Product Rule ใน Calculus แล้วจะได้เป็น

$$2dT = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.13)$$

นำสมการ (2.13) ที่ได้ไปลบออกจากสมการ (2.8) จะได้ว่าเทอม

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

จะถูกหักล้างไปกลายเป็น 0 ส่วนเทอม

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i$$

นั้นสามารถแปลงใหม่ได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)dq_i$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$dT = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] dq_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

เมื่อแทนค่า dT และ dV ที่ได้นี้ลงในสมการ (2.7) แล้วจะได้

$$d(T+V) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i}\right] dq_i = 0 \ldots\ldots\ldots (2.15)$$

เนื่องจาก Generalized Coordinates (q_i)เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นเราจึงสามารถที่จะเลือก dq_i เป็นค่าใดก็ได้ เพราะฉะนั้นสมการ (2.14) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อเทอมในวงเล็บเป็น 0 เท่านั้นคือ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \; ; i = 1,2, \ldots, n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.16)$$

สมการ (2.15) นี้คือ สมการของลากรานจ์สำหรับระบบอนุรักษ์ หรือ ระบบที่ไม่มีแรงภายนอกอื่นๆที่เหนือไปจากแรงสปริงและแรงโน้มถ่วงของโลกมากระทำ และจากนิยามของค่าลากรานจ์ (Lagrangian, L)

$$L = T - V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.17)$$

และเนื่องจาก $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}$ ดังนั้นสมการ (2.15) จึงสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) - \frac{\partial y}{\partial x} = 0; i = 1,2, \ldots, n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.18)$$

2.8 ระบบไม่อนุรักษ์ (Nonconservative System)

เมื่อระบบถูกแรงภายนอกอื่นที่เหนือไปจากแรงสปริงและแรงโน้มถ่วงของโลกมากระทำแล้ว ระบบนั้นจะเป็นระบบไม่อนุรักษ์ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงพลังงานของระบบจะเท่ากับงานที่แรงนั้นกระทำต่อระบบ นั่นคือ

$$d(T+V) = \delta W_{np} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.19)$$

โดยที่เป็นงานของแรงอื่นที่นอกเหนือ ไปจากแรงสปริงและแรงโน้มถ่วงของโลก สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของ Generalized Coordinates และ Generalized Force ได้เป็น

$$\delta W_{np} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.20)$$

ซึ่งทำให้สามารถเขียนสมการลากรานจ์อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับระบบอนุรักษ์ได้เป็น

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \; ; i = 1,2, \ldots, n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

บทที่ 3
วิธีดำเนินโครงงาน

ในบทนี้จะแสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม SimMechanics จำลองภาพการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ของระบบ couple pendulum โดยเนื้อหาในบทนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการสร้างแบบจำลองทาง SimMechanics

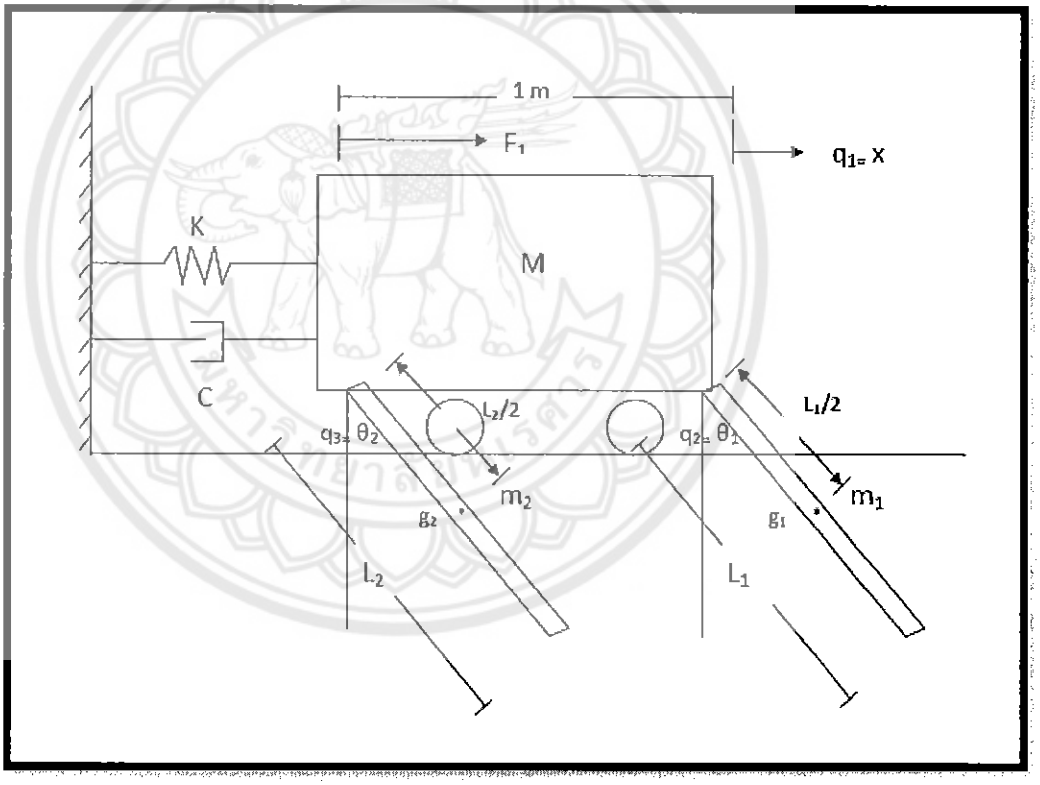
3.1 สร้างแบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์

ระบบ Couple pendulum ที่ใช้ศึกษาในโครงงานนี้สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.1 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าระบบมีการเคลื่อนที่แบบ 3 ดีกรีอิสระ โดยเราจะกำหนดให้

X แทนตำแหน่งการกระจัดของตัวรถ

θ_1 แทนตำแหน่งการกระจัดเชิงมุมของ pendulum ที่ 1

θ_2 แทนตำแหน่งการกระจัดเชิงมุมของ pendulum ที่ 2



รูปที่ 3.1 ผังวัตถุอิสระของ Couple pendulum

จากรูป 3.1 สามารถทำการวิเคราะห์ความเร็ว ณ จุดศูนย์กลางมวลของแต่ละก้านได้ดังนี้

ที่ก้าน m_1

$$\bar{v}_{g_1} = \left(\dot{x} + \frac{2\dot{\theta}_1}{l_1}\right)$$

และ $\omega_1 = \dot{\theta}_1$

ที่ก้าน m_2

$$\bar{v}_{g_2} = \left(\dot{x} + \frac{2\dot{\theta}_2}{l_2}\right)$$

และ $\omega_2 = \dot{\theta}_2$

วิเคราะห์พลังงานจลน์

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m_1\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_2\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x} + \frac{2\dot{\theta}_1}{l_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_1l_1^2\right)\dot{\theta}_1^2$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x} + \frac{2\dot{\theta}_2}{l_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_2l_2^2\right)\dot{\theta}_2^2$$

จะได้ว่า

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}^2 + \frac{4\dot{\theta}_1\dot{x}}{l_1} + \frac{4\dot{\theta}_1^2}{l_1^2}\right) + \frac{1}{24}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + \frac{4\dot{\theta}_2\dot{x}}{l_2} + \frac{4\dot{\theta}_2^2}{l_2^2}\right) + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

วิเคราะห์พลังงานศักย์

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 - m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m_1\dot{x} + \frac{2m_1\dot{\theta}_1}{l_1} + m_2\dot{x} + \frac{2m_2\dot{\theta}_2}{l_2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{2\dot{x}m_1}{l_1} + \frac{4\dot{\theta}_1m_1}{l_1^2} + \frac{1}{12}m_1m_1^2\dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{2\dot{x}m_2}{l_2} + \frac{4\dot{\theta}_2 m_2}{l_2^2} + \frac{1}{12}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial x} = kx$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} = 0 \, , \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \, , \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = m_1 g \frac{l_1}{2} \sin\theta_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_3} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = m_2 g \frac{l_2}{2} \sin\theta_2$$

พลังงานที่ระบบต้องสูญเสีย กรณีมีตัวหน่วง

$$D = \frac{1}{2} c \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$$

ดังนั้น จากสมการลากรานจ์

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} = Q_i$$

โดยที่ $i = 1,2,3, \ldots\ldots\ldots\ldots n$

Q เป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบ

ที่ $i = 1$

$$\frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + m_1\dot{x} + \frac{2m_1\dot{\theta}_1}{l_1} + m_2\dot{x} + \frac{2m_2\dot{\theta}_2}{l_2}\right) + kx + \frac{1}{2}c\dot{x} = F_1$$

$$M\ddot{x} + m_1\ddot{x} + \frac{2m_1\ddot{\theta}_1}{l_1} + m_2\ddot{x} + \frac{2m_2\ddot{\theta}_2}{l_2} + kx + \frac{1}{2}c\dot{x} = F_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

ที่ $i = 2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{x}m_1}{l_1} + \frac{4\dot{\theta}_1 m_1}{l_1^2} + \frac{1}{12}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1\right) + m_1 g \frac{l_1}{2}\sin\theta_1 = 0$$

$$\frac{2\ddot{x}m_1}{l_1} + \frac{4\ddot{\theta}_1 m_1}{l_1^2} + \frac{1}{12}m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g \frac{l_1}{2}\sin\theta_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

ที่ $i = 3$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{x}m_2}{l_1} + \frac{4\dot{\theta}_2 m_2}{l_2^2} + \frac{1}{12}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2\right) + m_2 g \frac{l_2}{2}\sin\theta_2 = 0$$

$$\frac{2\ddot{x}m_2}{l_2} + \frac{4\ddot{\theta}_2 m_2}{l_2^2} + \frac{1}{12}m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g \frac{l_2}{2}\sin\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

3.2 สร้างภาพจำลองในโปรแกรม SimMechanics

การสร้างภาพจำลองในโปรแกรม SimMechanics จะอาศัย Block Diagram เพื่อใช้ในการสร้าง Model แบบจำลองระบบวัตถุหลายชิ้น ซึ่งในที่นี้จะทำการสร้างแบบจำลองจากกลไกที่มีอยู่แล้วในหัวข้อ 3.1 โดยมีขั้นตอนการทำดังนี้

กำหนดพิกัดจุดของมวล M ใน World ดังนี้

CG = (5, 4.5, 6)

CS1 = (4, 5, 6)

CS2 = (4, 4, 6)

CS3 = (6, 5, 6)

CS4 = (6, 4, 6)

โดยที่มวล M มีค่า 10 kg

โมเมนต์ความเฉื่อย $I_{xx} = I_{yy}$ มีค่า 4.1667 $kg.m^2$

I_{zz} มีค่า 1.6667 $kg.m^2$

มวล M มีความกว้าง 2 m ยาว 1 m สูง 1 m

กำหนดพิกัดจุดของ pendulum ที่ 1 ใน world ดังนี้

CG = (6, 3.5, 6)

CS1 = (6, 4, 6)

CS2 = (6, 3, 6)

CS3 = (5.95, 4, 6)

CS4 = (5.95, 3, 6)

CS5 = (6.05, 4, 6)

CS6 = (6.05, 3, 6)

โดยก้านที่ 1 มวล 2 kg

โมเมนต์ความเฉื่อย I_{xx} มีค่า 10^{-4} $kg.m^2$

$I_{yy} = I_{zz}$ มีค่า 0.1667 $kg.m^2$

ก้านที่ความยาว 1 m กว้าง 1 cm

กำหนดพิกัดจุดของ pendulum ที่ 2 ใน world ดังนี้

CG = (4, 3.5, 6)

CS1 = (4, 4, 6)

CS2 = (4, 3, 6)

CS3 = (3.95, 4, 6)

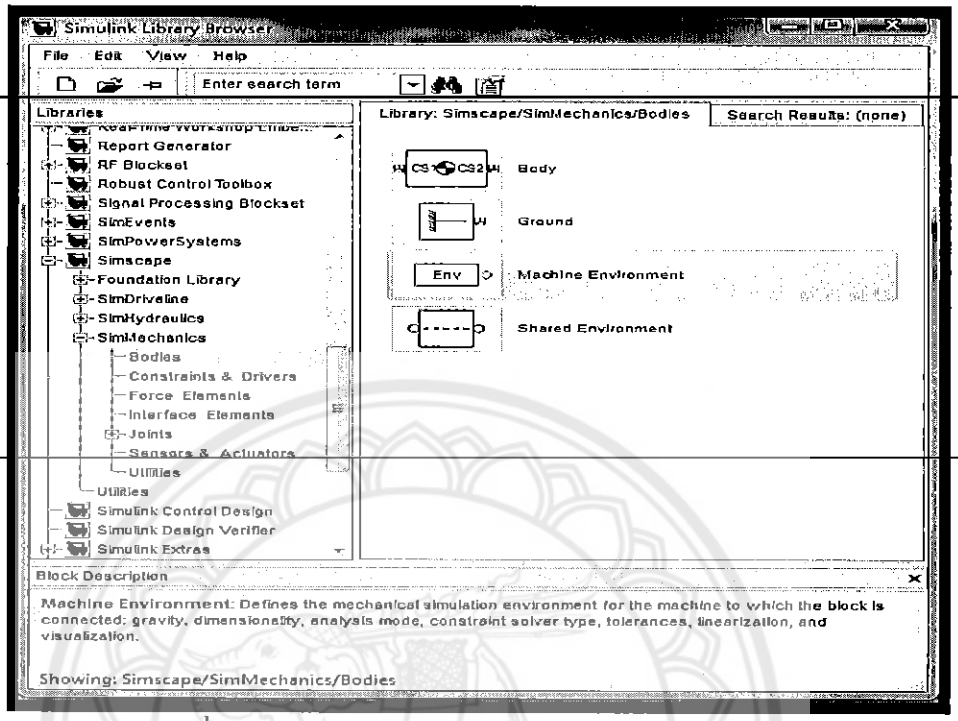
CS4 = (3.95, 3, 6)

CS5 = (4.05, 4, 6)

CS6 = (4.05, 3, 6)

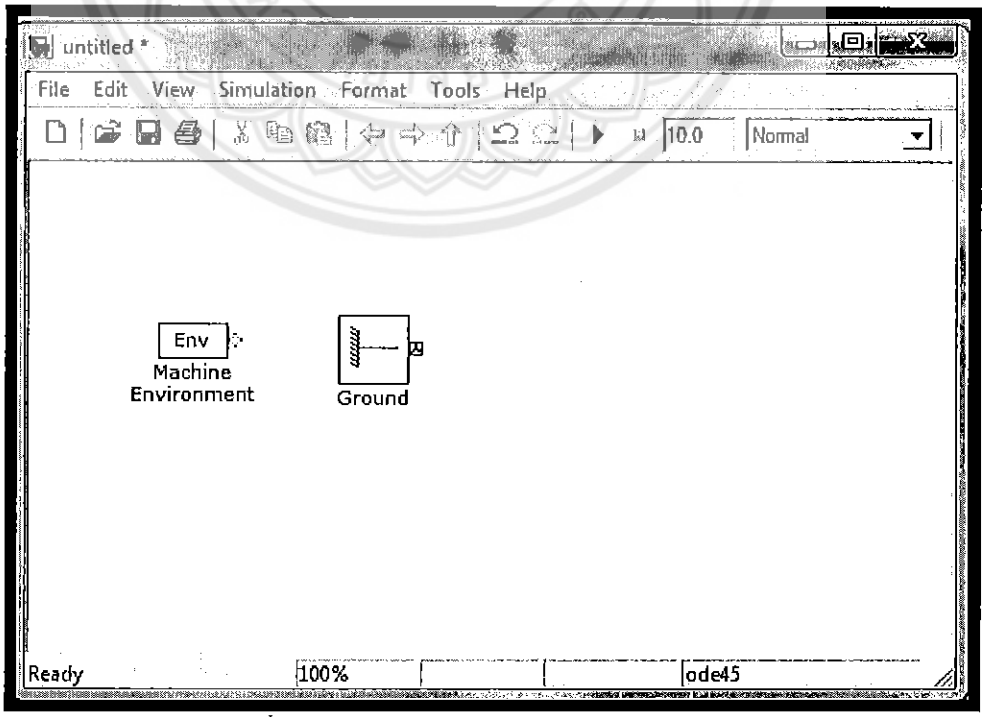
โดยที่คุณสมบัติของก้านที่ 2 เหมือนกับก้านที่ 1

1. อุปกรณ์ Simulink Libraly Browser >>Simmechanics>>Bodies



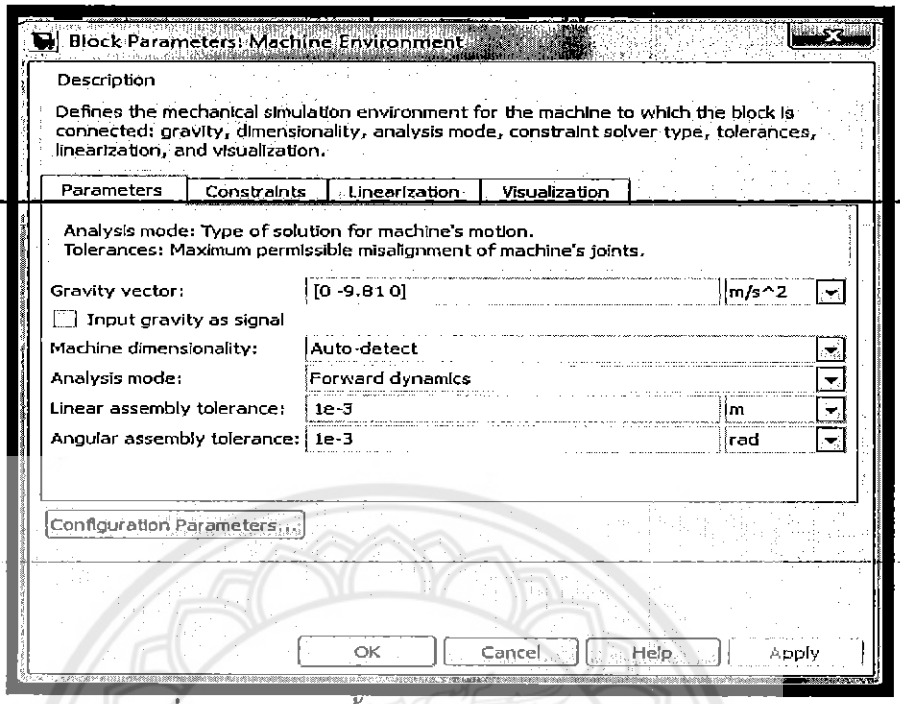
รูปที่ 3.2 แสดงการเลือก Block Machine Environment

2. เลือก Block >>Machine Environment>>Ground



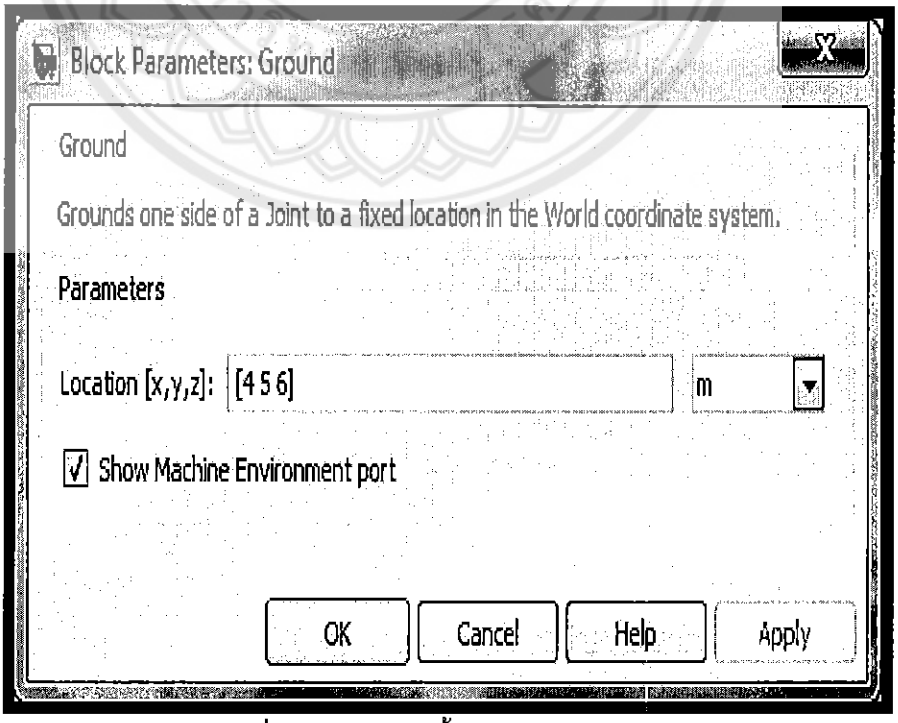
รูปที่ 3.3 แสดง Block Machine Environment

3. ทำการตั้งค่าสภาพแวดล้อมใน Block Machine Environment

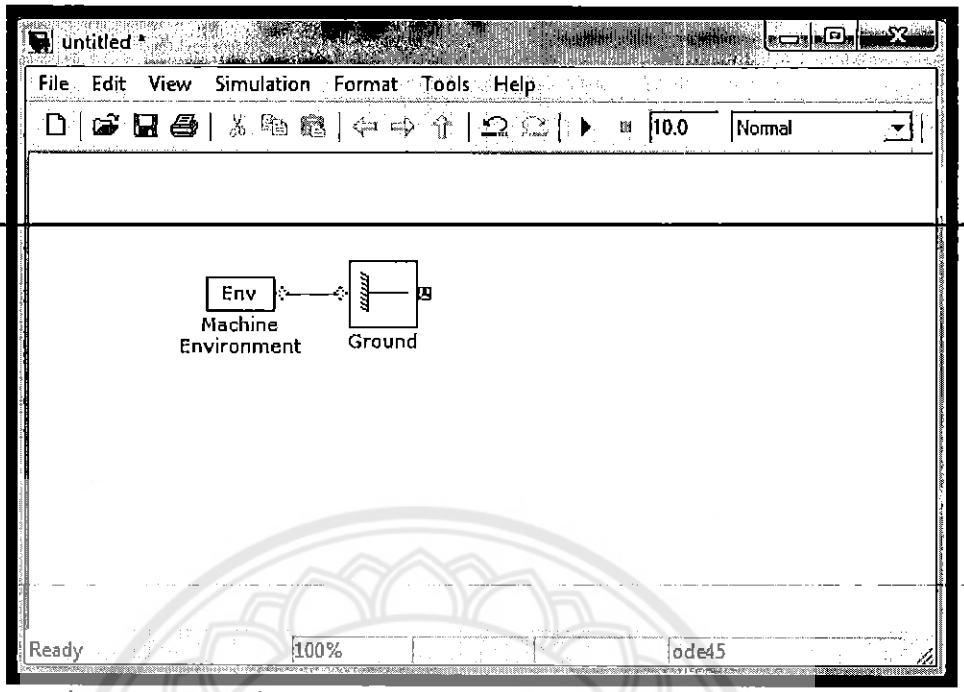


รูปที่ 3.4 แสดงการตั้งค่า Block Machine Environment

4. ทำการตั้งค่า Ground โดยใช้พิกัด [4 5 6] เป็น Ground ของ Model และเลือก Show Machine Environment Port เพื่อให้ Block แสดงจุดเชื่อมต่อระหว่าง Machine Environment กับ Ground Block

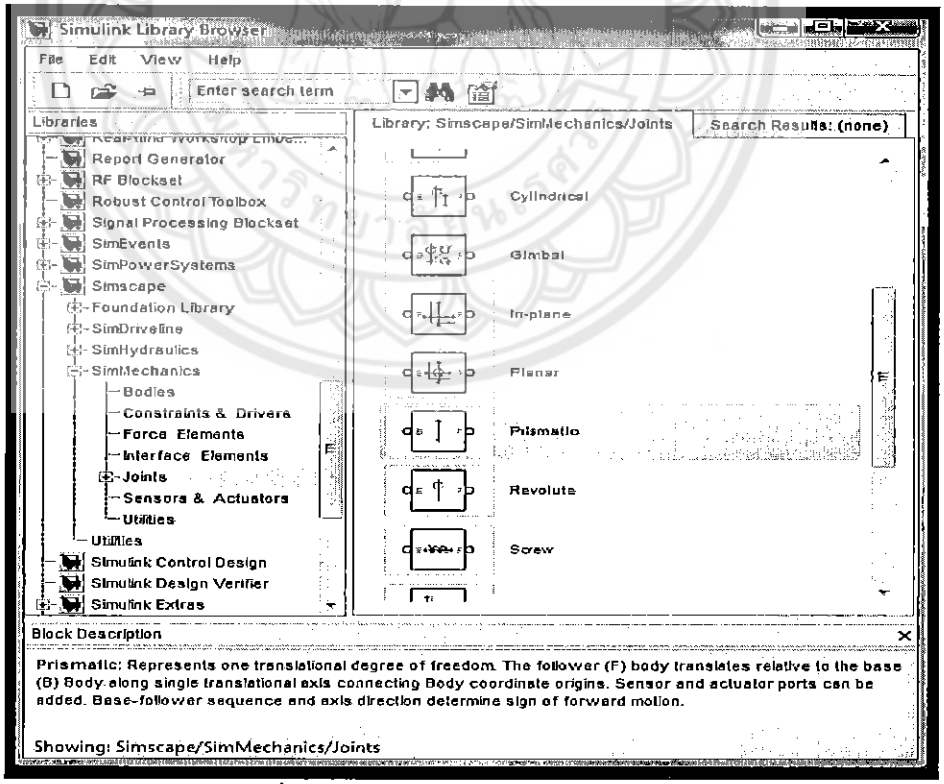


รูปที่ 3.5 แสดงการตั้งค่า Ground Block

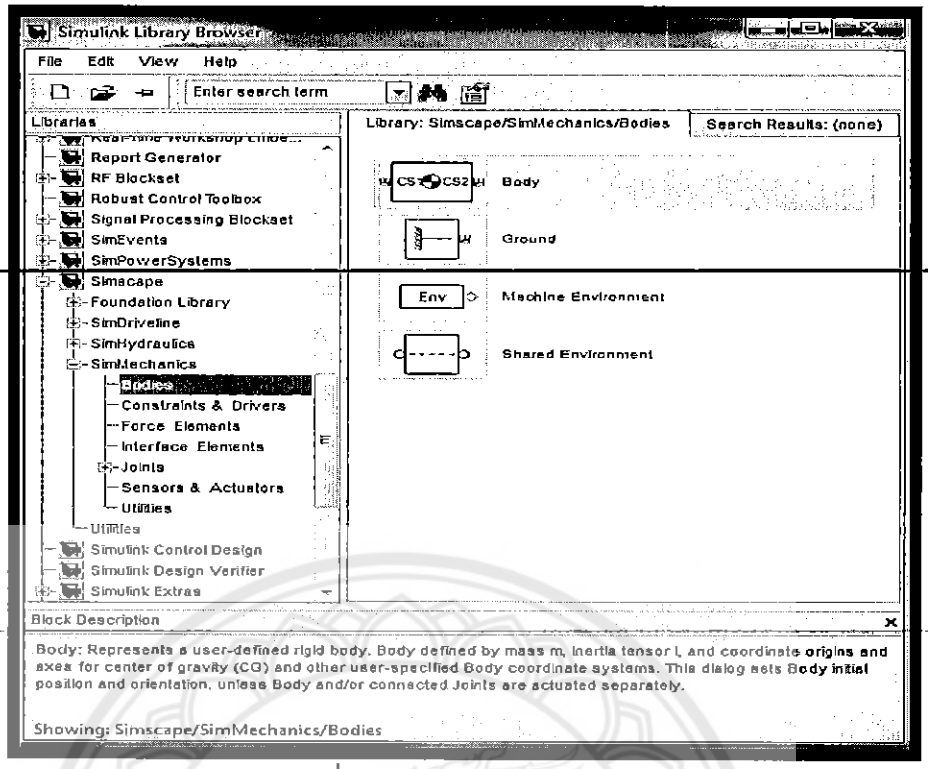


รูปที่ 3.6 แสดงการเชื่อมต่อ Block Machine Environment กับ Ground Block

5. ไปที่ Joints ใน Simmechanics เลือก Joints>>Prismatic>>Bodies>>Body

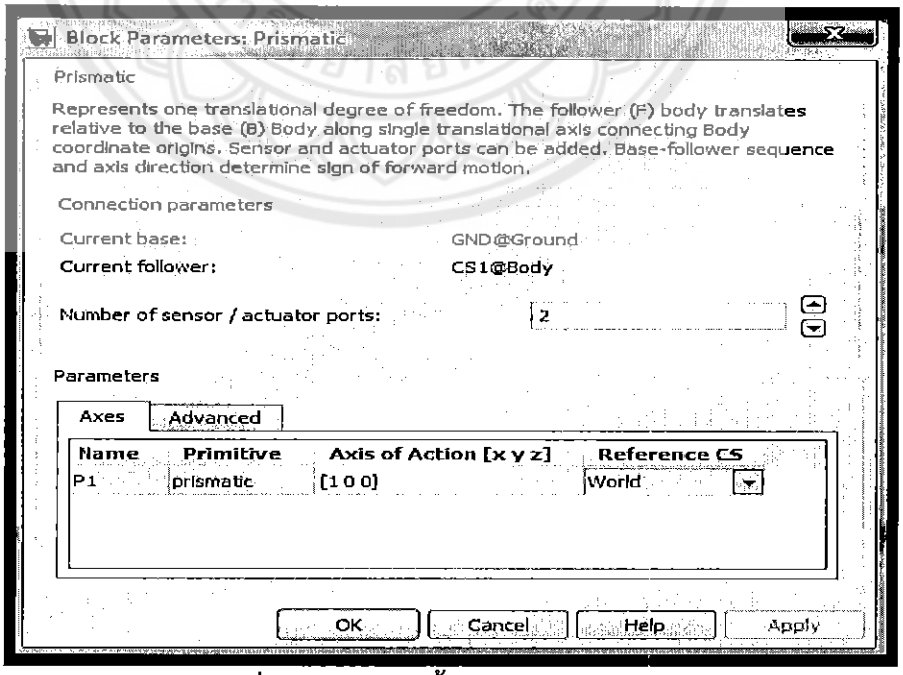


รูปที่ 3.7 แสดงการเลือก Block Prismatic



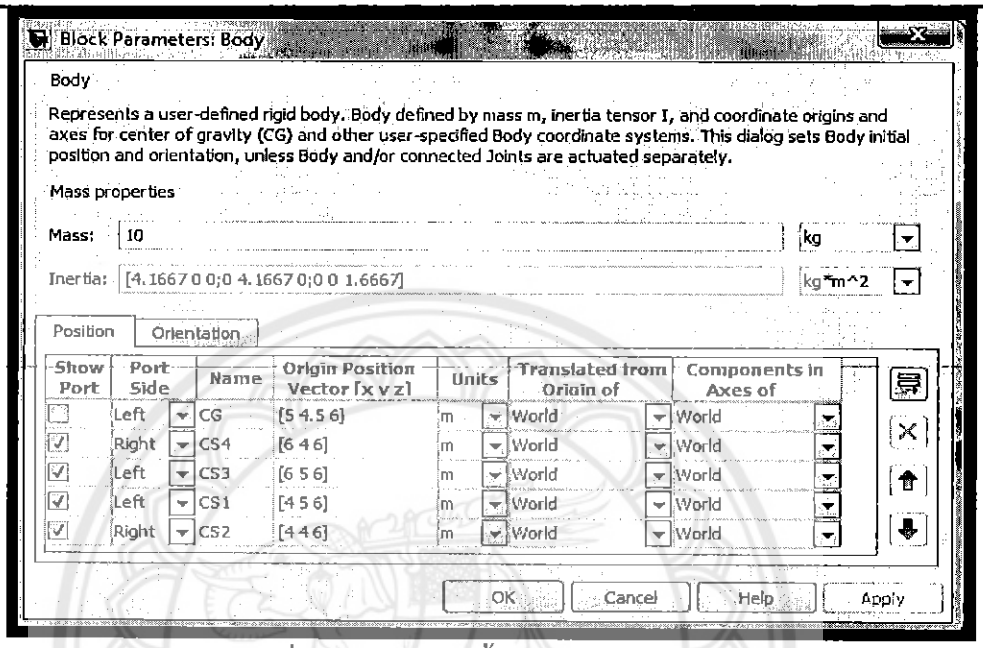
รูปที่ 3.8 แสดงการเลือก Body

6. ตั้งค่าใน Prismatic โดยกำหนด Ports ขึ้นมา 2 Port ใน Number of Sensor/Actuator Ports และทำการตั้งค่า Axis of Action[x y z] ซึ่งเป็นการกำหนดลักษณะการเคลื่อนที่ของ ตัวรถ ให้อยู่ในแนวแกน x โดยกำหนด เป็น [1 0 0] และใช้กรอบอ้างอิงเทียบกับ World

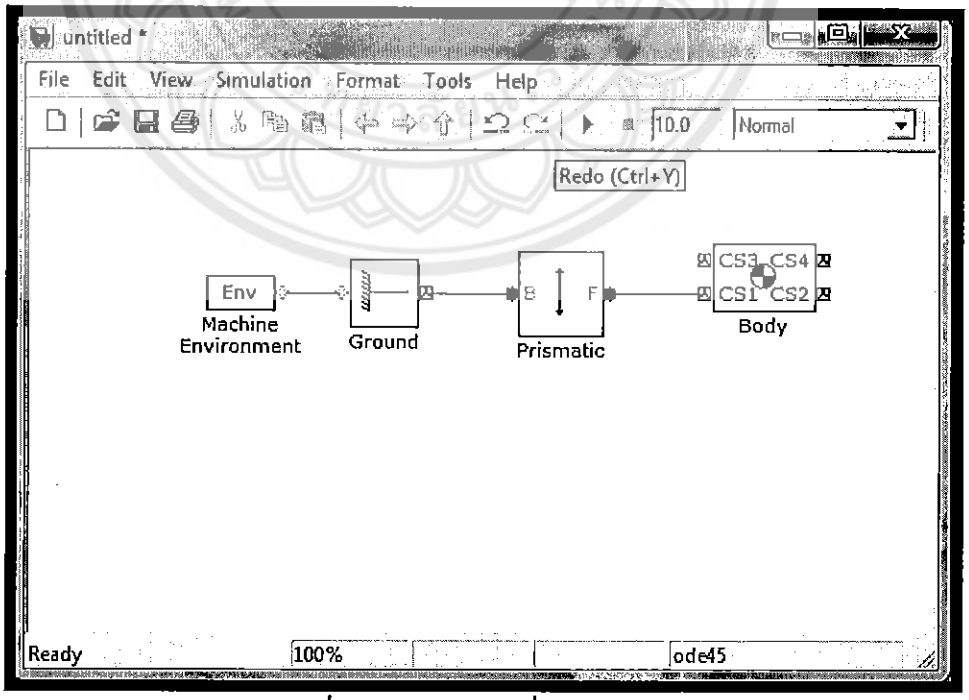


รูปที่ 3.9 แสดงการตั้งค่า Block Prismatic

7. ทำการตั้งค่าของ Body เพื่อกำหนดลักษณะของ Block Prismatic เพื่อให้ได้ลักษณะของตัวรถที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยม 2 มิติ โดยต้องกำหนดคุณสมบัติของตัวรถที่จำเป็นคือ มวล และโมเมนต์ความเฉื่อย และพิกัดจุด CS1-CS4 รวมจุดCG ของตัวรถ จากหัวข้อ 3.1 นำค่ามาใส่ใน Block ของ Body ทำการเลือก Show Port เพื่อให้ Block แสดง Port ออกมา ทำการเชื่อมต่อระหว่าง Current Base (B) กับ Ground (GND) และPort CS1 กับ Current Follower (F)

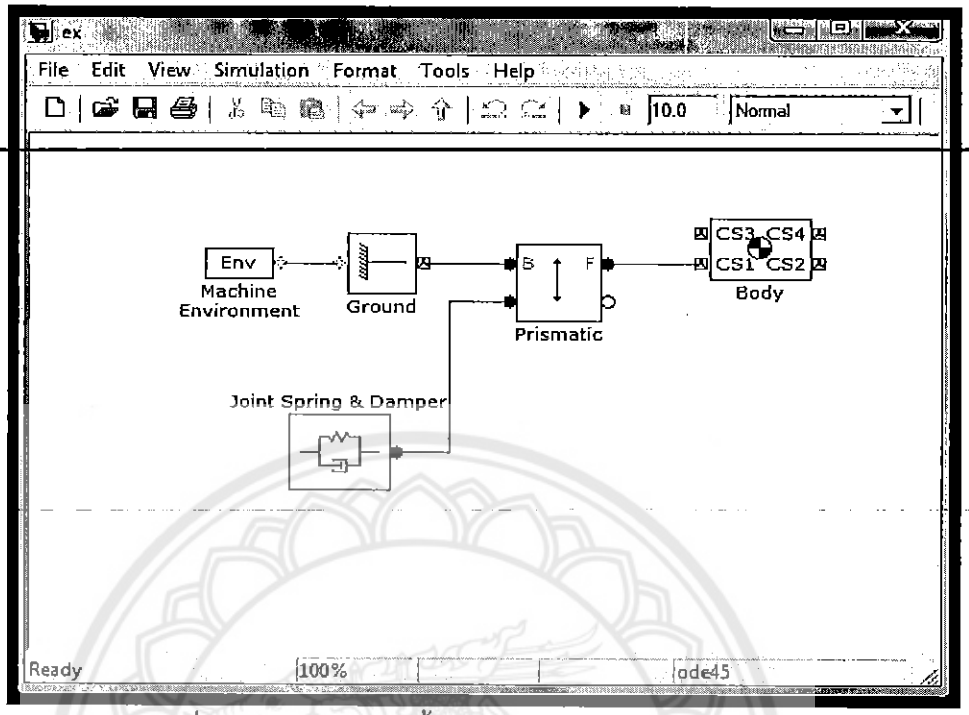


รูปที่ 3.10 แสดงการตั้งค่า Block Prismatic



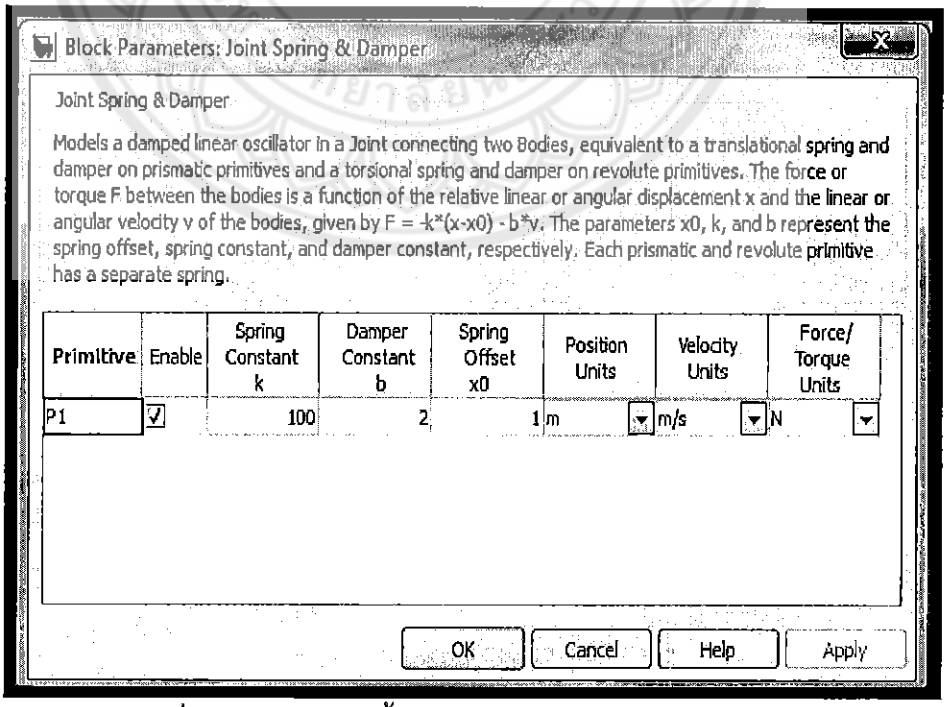
รูปที่ 3.11 แสดงการเชื่อมต่อ Block

8. ทำการติดตั้งสปริงและตัวหน่วงที่ Block Prismatic โดยเลือก Force Elements>>Joint Spring & Damper



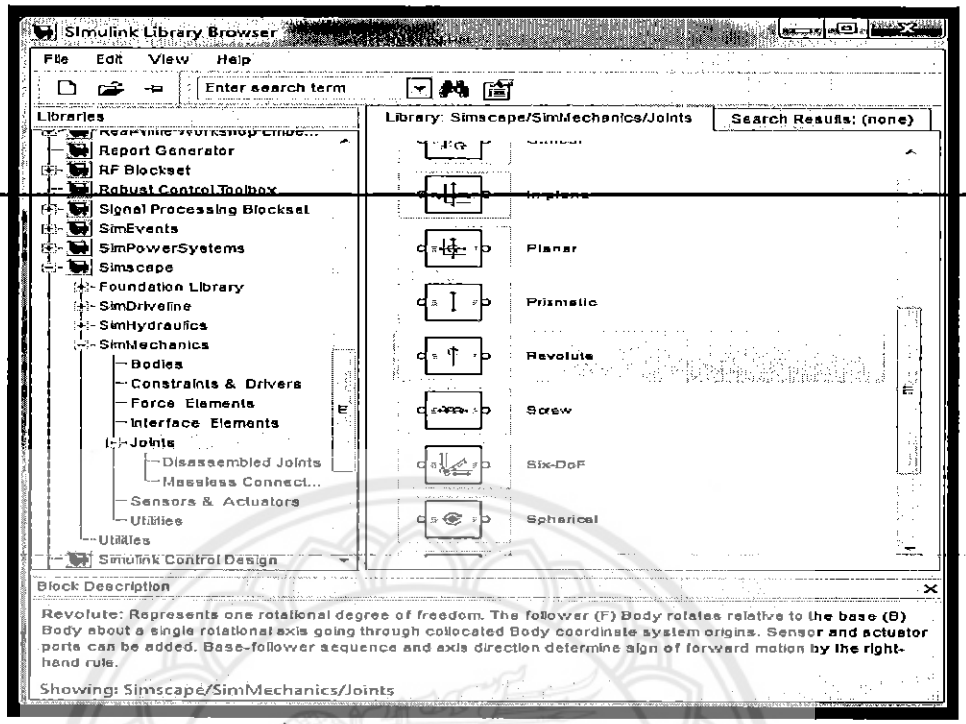
รูปที่ 3.12 แสดงการติดตั้ง Block Joint Spring & Damper

9. ตั้งค่าคงที่ Spring $k = 100\,\frac{N}{m}$ ค่าคงที่ Damper $C = 2\,\frac{N.s}{m}$ และกำหนดระยะเริ่มต้น $x_0 = 1\ m$



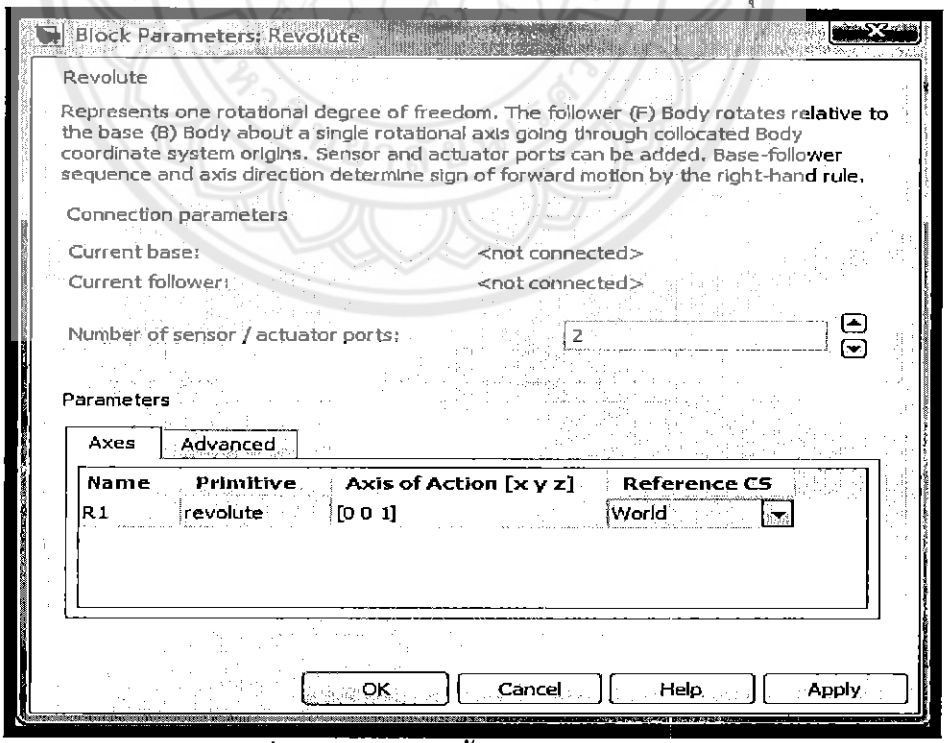
รูปที่ 3.13 แสดงการตั้งค่า Block Joint Spring & damper

10. การใส่ก้าน Revolute 2 ก้าน เลือก Joints>>Revolute โดยเลือก Block 2 block



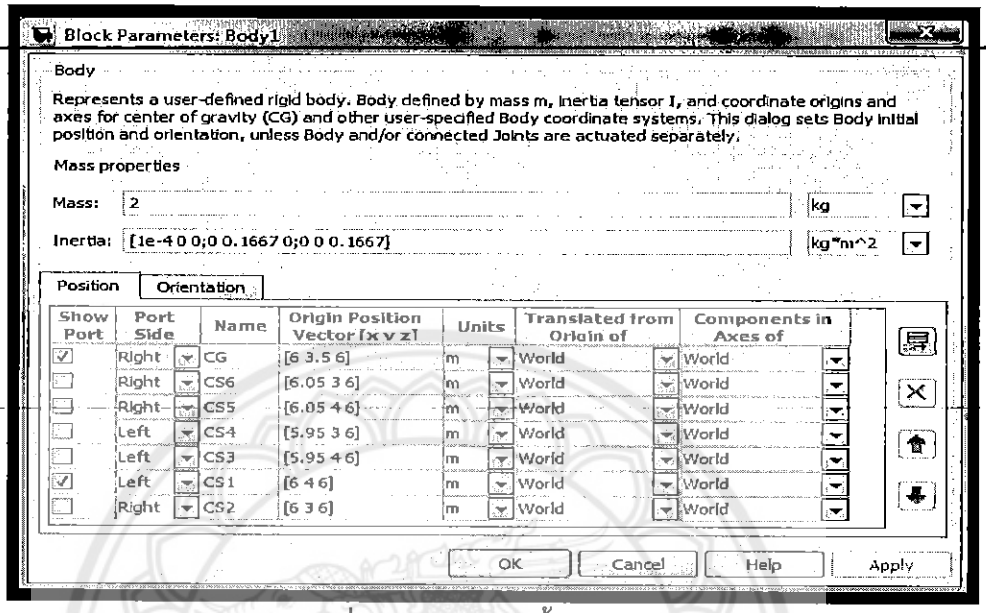
รูปที่ 3.14 แสดงการเลือก Block Revolute

11. ตั้งค่า Revolute ด้วยให้ Actuator Ports 2 Ports และกำหนดให้ Axis of Action [x y z] เป็น [0 0 1] เพื่อให้ก้าน Revolute ทั้ง 2 ก้านมีการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกน Z



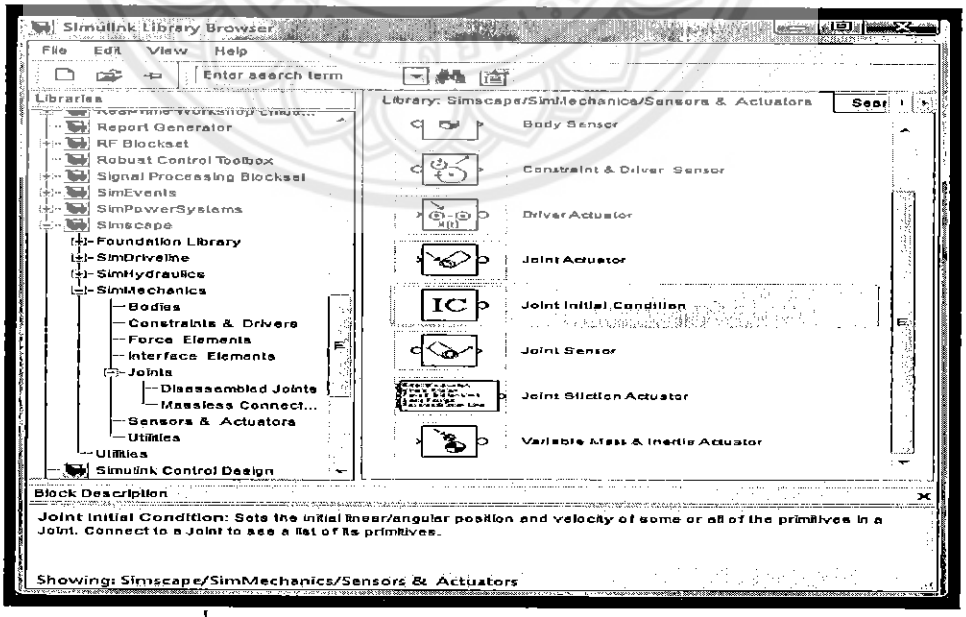
รูปที่ 3.15 แสดงการตั้งค่า Block Revolute

12. ตั้งค่า Body1 และ Body2 โดยกำหนดคุณสมบัติมวล โมเมนต์ความเฉื่อยและพิกัดจุดของ Body ทั้งสองเท่ากัน ตามหัวข้อ 3.1 ที่ Body1 แสดง Port CG ทางขวาของ Block แสดง CS1 ทางซ้ายของ Block โดยใช้แกนอ้างอิงเทียบกับ World ทั้งหมด เช่นเดียวกับ Body2 แต่พิกัดจุดต่างกันไปตามหัวข้อ 3.1



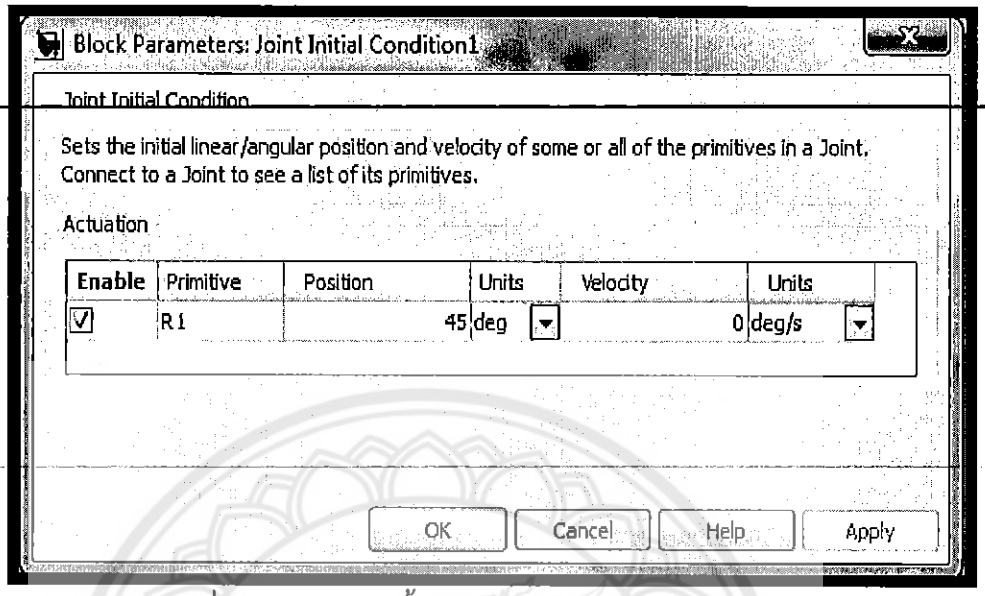
รูปที่ 3.16 แสดงการตั้งค่า Body1

13. ทำการเชื่อมต่อ Revolute กับตัว Body ของ Block Prismatic โดยต่อ Current Base (B) กับ จุด CS4 ซึ่งมีพิกัดจุดเดียวกัน และต่อ Body1 ของ Revolute1 กับ Block ของ Revolute1 โดยต่อ Current Follower (F) กับจุด CS1 ของ Body1



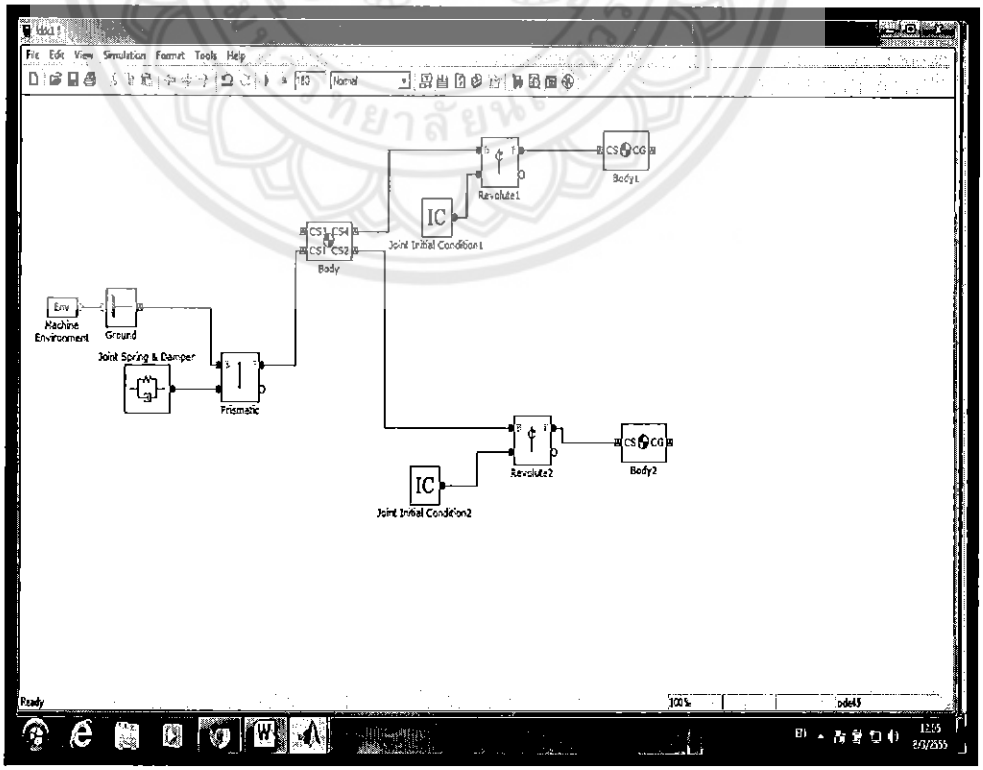
รูปที่ 3.17 แสดงการเลือก Block Joint Initial Condition

14. ทำการเชื่อมต่อ Revolute2 กับตัว Body ของ Block Prismatic โดยต่อ Current Base (B) กับ จุด CS2 ซึ่งมีพิกัดจุดเดียวกัน และต่อ Body2 ของ Revolute2 กับ Block ของ Revolute2 โดยต่อ Current Follower (F) กับจุด CS1 ของ Body2



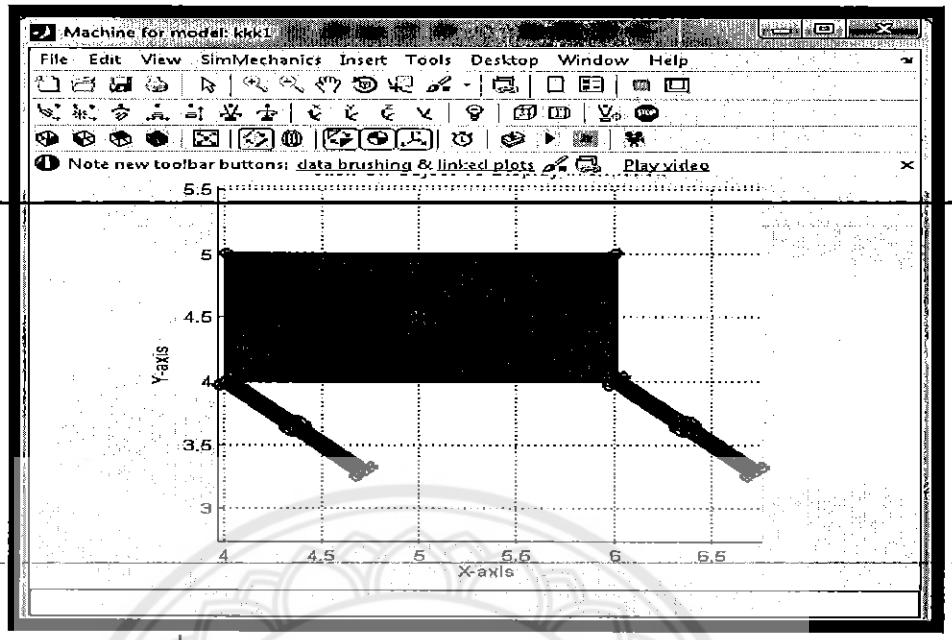
รูปที่ 3.18 แสดงการตั้งค่า Block Joint Initial Condition

15. ทำการติดตั้ง Block IC ที่ Revolute ทั้งสองตัว เลือก Joints>>Sensor& Actuators>>Joint Initial Condition แล้วกำหนดค่ามุมเริ่มต้นของก้าน Revolute ทั้งสอง ที่ 45 องศา จากนั้นทำการเชื่อมต่อกับ Block Revolute ทั้งสอง



รูปที่ 3.19 แสดงการเชื่อมต่อ Block IC

16. จะได้กราฟฟิกออกมาดังรูปที่ 3.22



รูปที่ 3.20 ภาพแสดงกราฟฟิกของระบบ couple pendulum

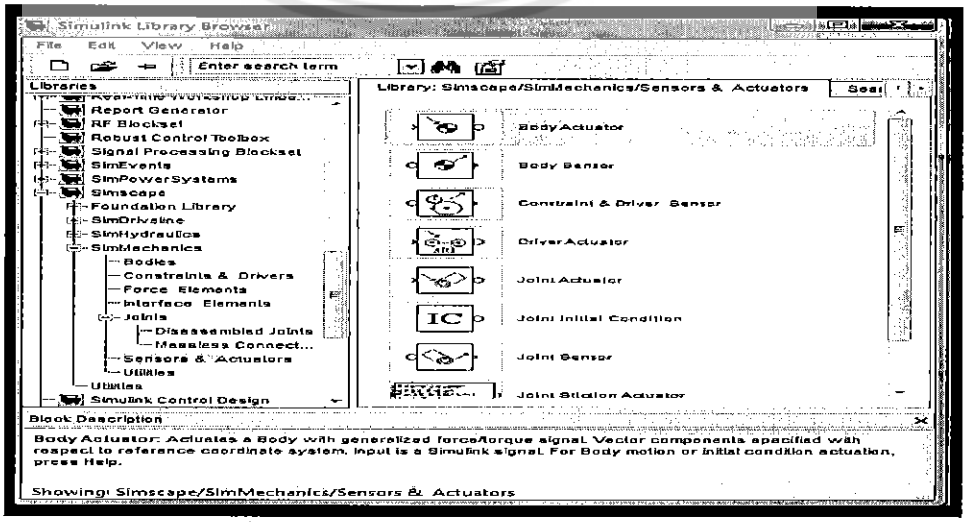
3.3 ทำการทดลองจากภาพจำลองที่ได้ในโปรแกรม SimMechanics

หลังจากที่ได้แบบจำลองตามที่ต้องการแล้ว จะทำการทดลอง 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ทำการทดลองโดยไม่มีแรงกระทำต่อระบบ เมื่อกำหนดระยะยืดของสปริง $x_0 = 1\ \mathrm{m}$ แล้วปล่อยให้มีการเคลื่อนที่อย่างอิสระ

<u>กรณีที่ 2</u> ทำการทดลองโดยใส่แรงกระทำที่ตัวรถ โดยใส่แรงกระทำที่ Body Prismatic ตรง จุด CS3 เป็นแรงขนาด $F = 20\ \mathrm{N}$

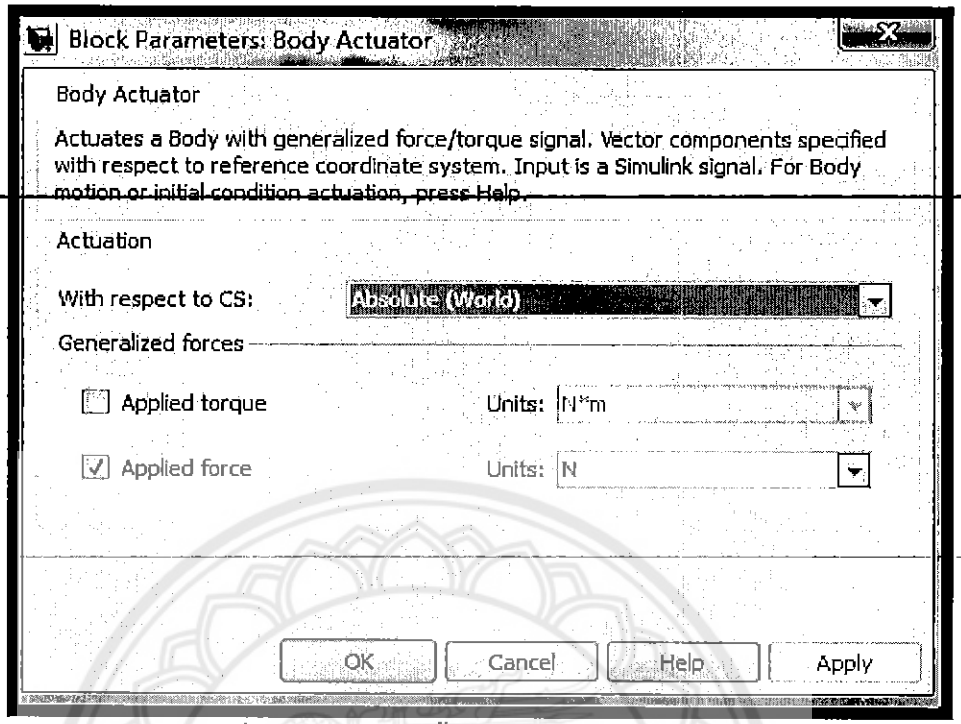
1. เลือก Body Actuator จาก Joints>>Sensors & Actuator>>Body Actuatorซึ่ง Body Actuator เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการระบุชนิดของแรงที่จะกระทำต่อ Body



รูปที่ 3.21 แสดงการเลือก Block Body Actuator

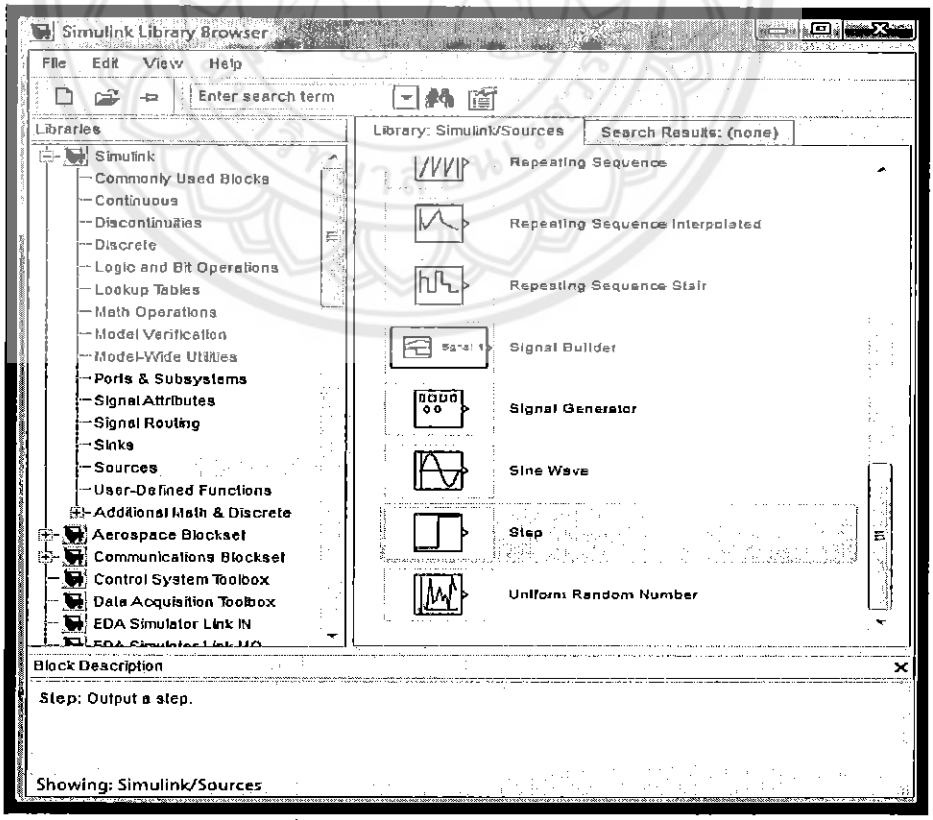
ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

2. ทำการตั้งค่า Generalized Forces ในส่วนของแรง



รูปที่ 3.22 แสดงการตั้งค่า Block Body Actuator

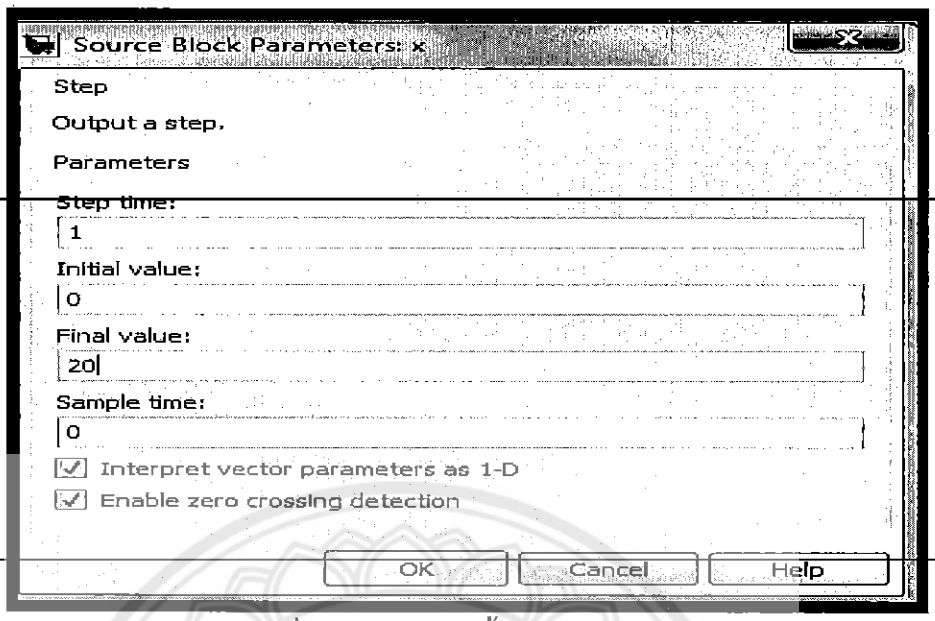
3. เลือก สัญญาณ Step Input จาก Simulink>>Sources>>Step



รูปที่ 3.23 แสดงการเลือก Block Step

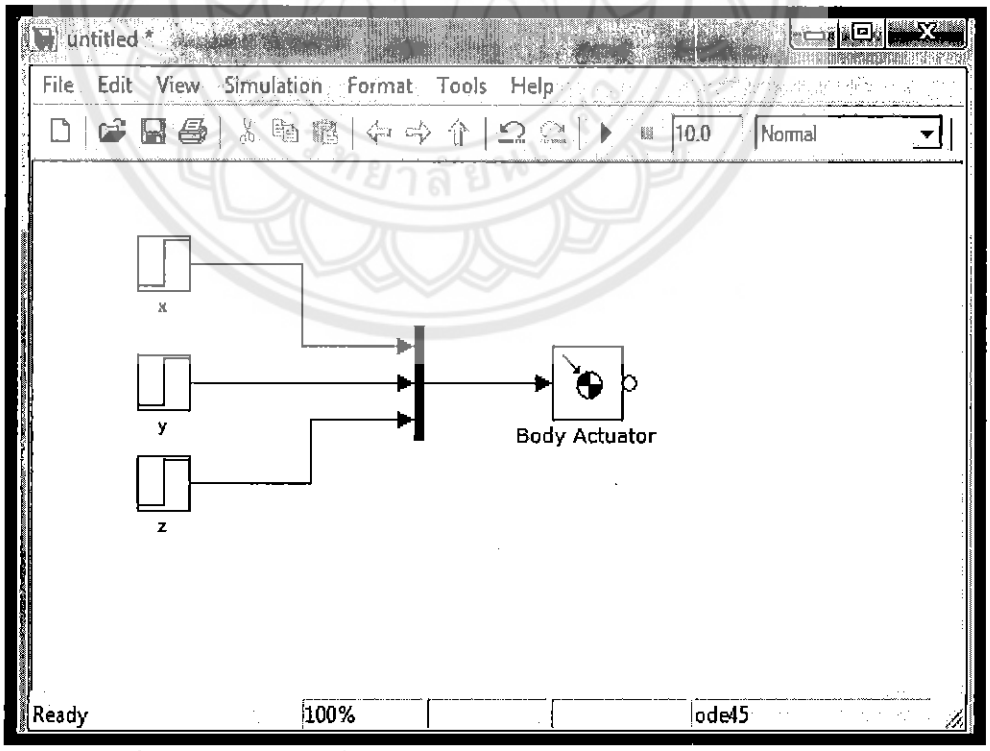
เ59986qx
ฟร.
ธ.664.9
2554

4. ตั้งค่าสัญญาณ Step โดยกำหนด ที่ Final Value จะได้ขนาดแรงที่ต้องการ



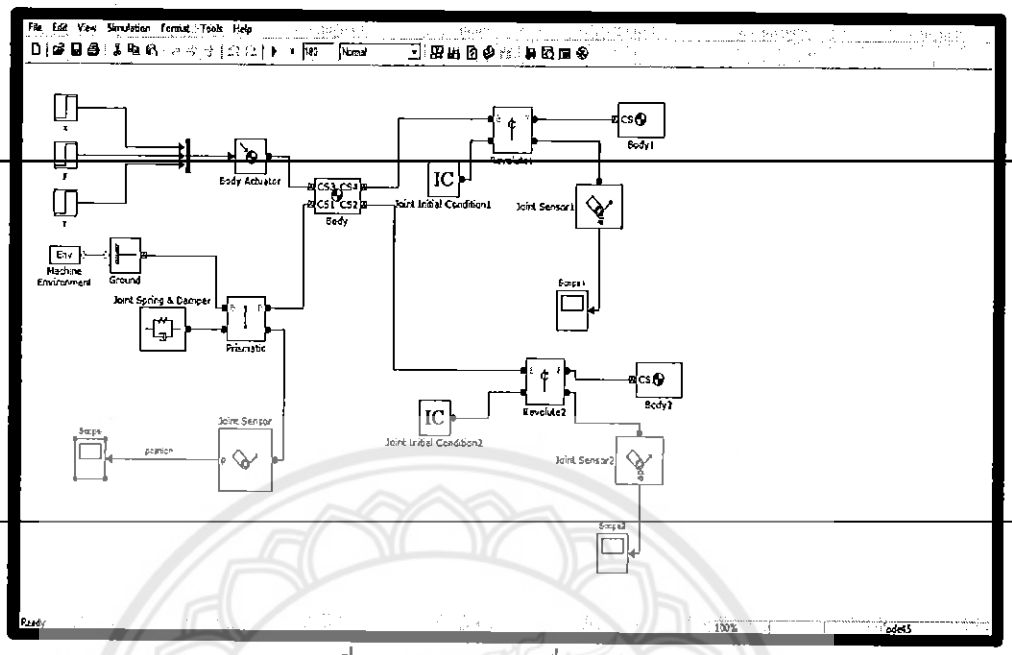
รูปที่ 3.24 แสดงการตั้งค่า Block Step

5. นำ Block Body Actuator , Step เชื่อมต่อกัน โดยที่มีสัญญาณ Step มีอยู่ 3 แกน คือ แกน x ,แกน y , แกน z โดยแรงในแนวแกน y และ z เป็น 0 เนื่องจากไม่มีแรงกระทำในแนวแกนดังกล่าว



รูปที่ 3.25 แสดงการเชื่อมต่อระหว่าง Body Actuator และ Block Step

6. จากนั้นนำสัญญาณของแรงที่ได้มาเชื่อมต่อกับระบบ โดยเชื่อมต่อกับ Body ของ Prismatic ที่จุด CS3



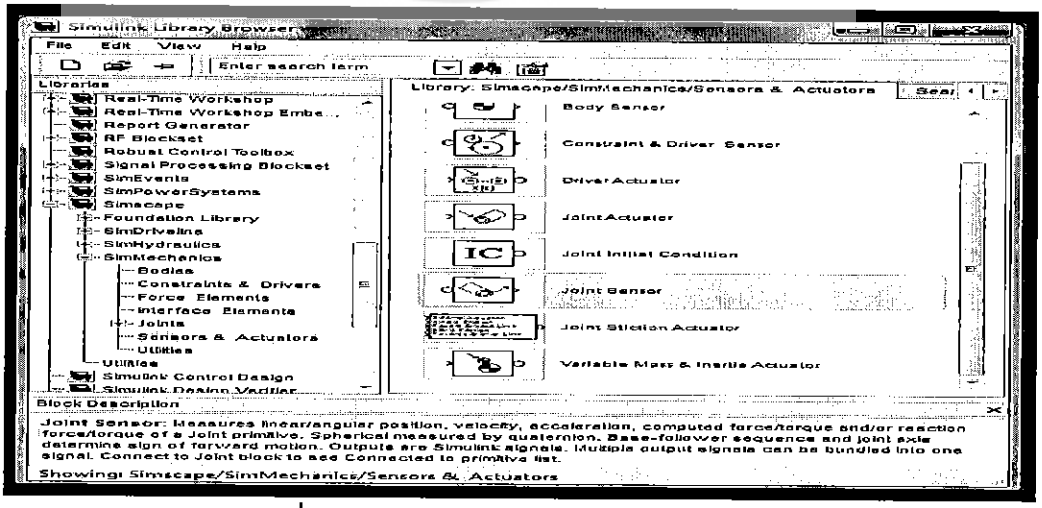
รูปที่ 3.26 แสดงการเชื่อมต่อ Block

3.4 สร้างกราฟการเคลื่อนที่ในแต่ละกรณี

จากหัวข้อที่ 3.3 กรณีที่ 1 ไม่มีแรงกระทำต่อระบบ เมื่อกำหนดระยะยืดของสปริง $x_0 = 1$ m แล้วปล่อยให้มีการเคลื่อนที่อย่างอิสระเมื่อได้ Model จากหัวข้อ 3.2 แล้ว ขั้นตอนของการสร้างกราฟการเคลื่อนที่

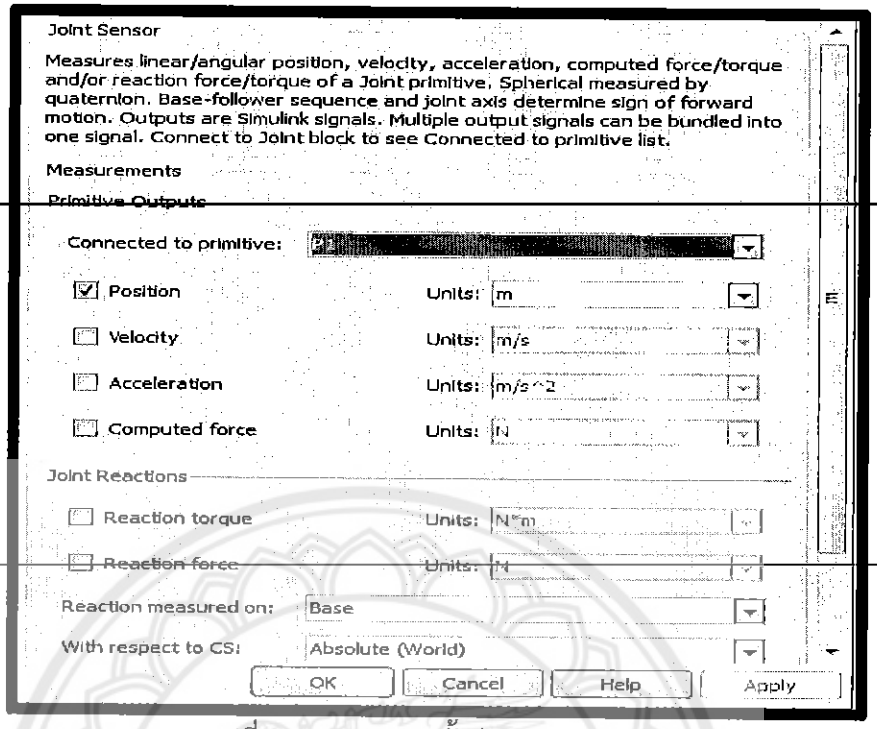
<u>ในกรณีที่ 1</u> จะทำการติดตั้ง Sensorโดยเลือก 3 จุด คือ ที่ Block Prismatic เพื่อวัดตำแหน่งการกระจัด (Position) ของการเคลื่อนที่ที่ Block Revolute1 และ Revolute2 เพื่อวัดตำแหน่งการกระจัดเชิงมุม (Angle) ของการเคลื่อนที่

1. เลือก Joint Sensor จาก Joints>>Sensor & Actuator>>Joint Sensor



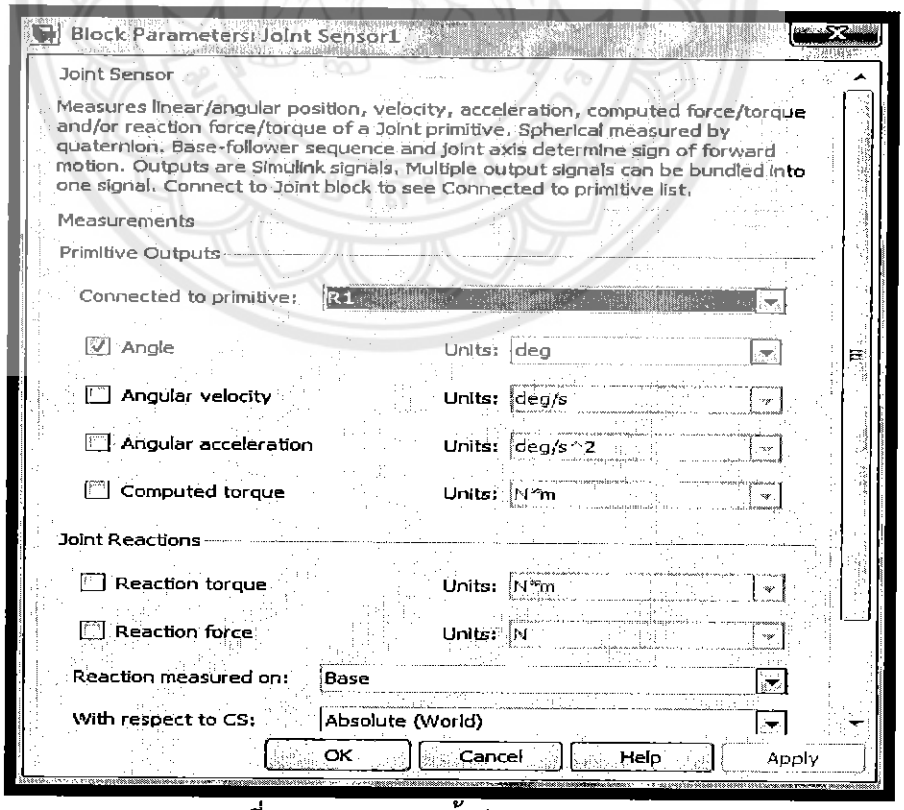
รูปที่ 3.27 แสดงการเลือก Block Joint Sensor

2. ทำการตั้งค่า Sensor ของ Block Prismatic โดยเลือก Position



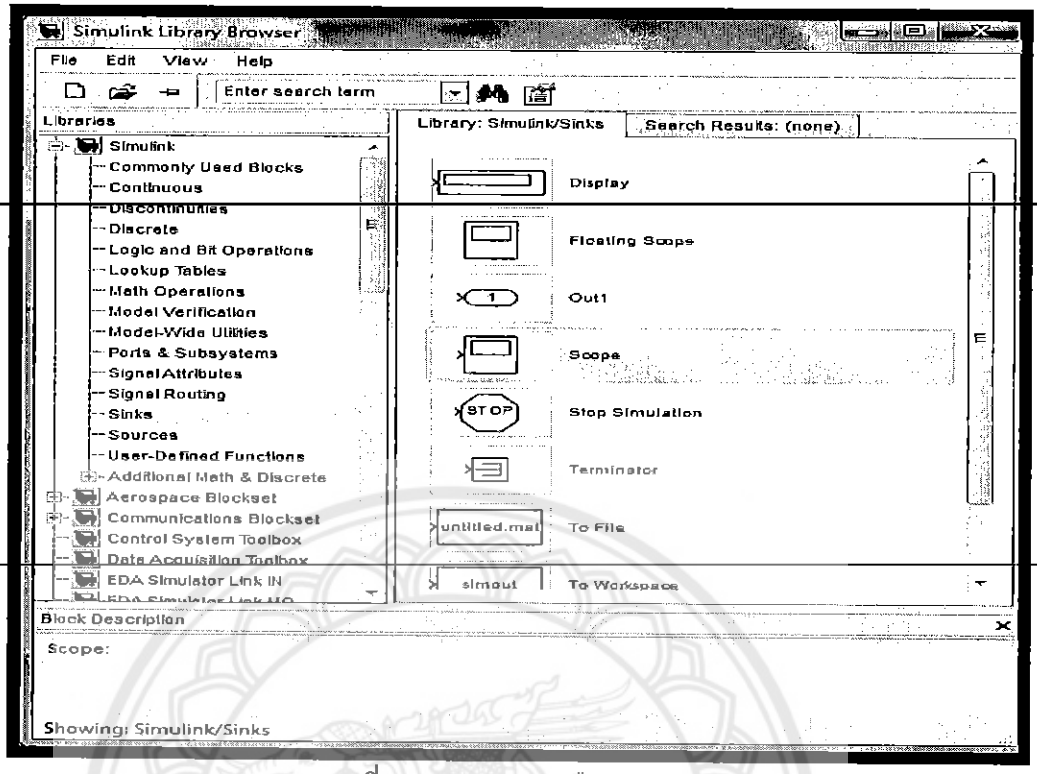
รูปที่ 3.28 แสดงการตั้งค่า Joint sensor

3. ตั้งค่า Sensor ของ Block Revolute ทั้งสอง โดยเลือก Angle



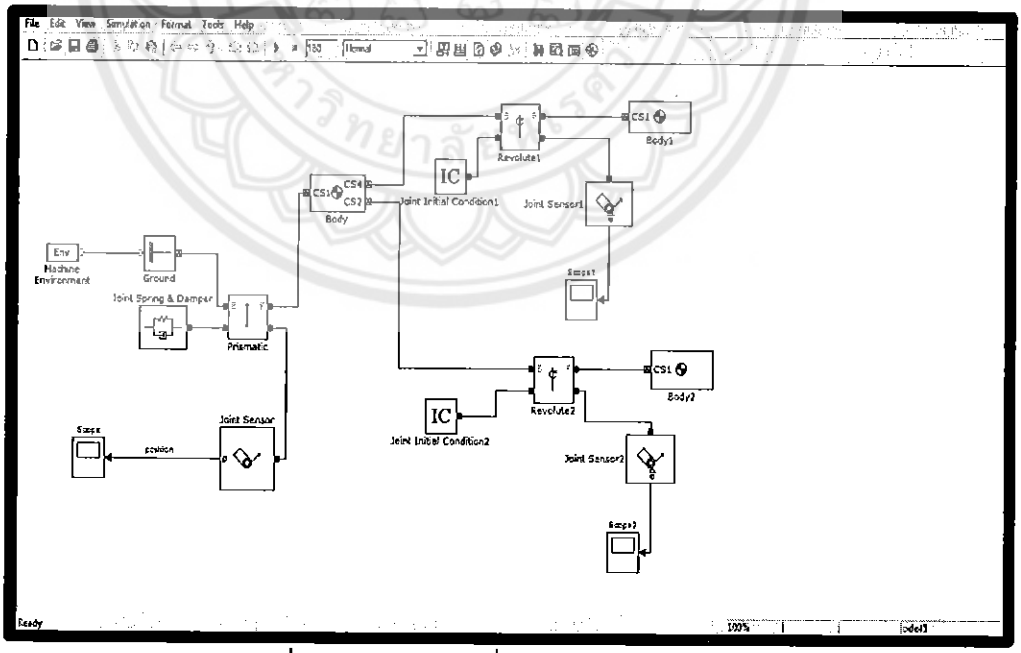
รูปที่ 3.29 แสดงการตั้งค่า Joint Sensor1

4. เลือก Scope จาก Simulink>>Sinks>>Scope



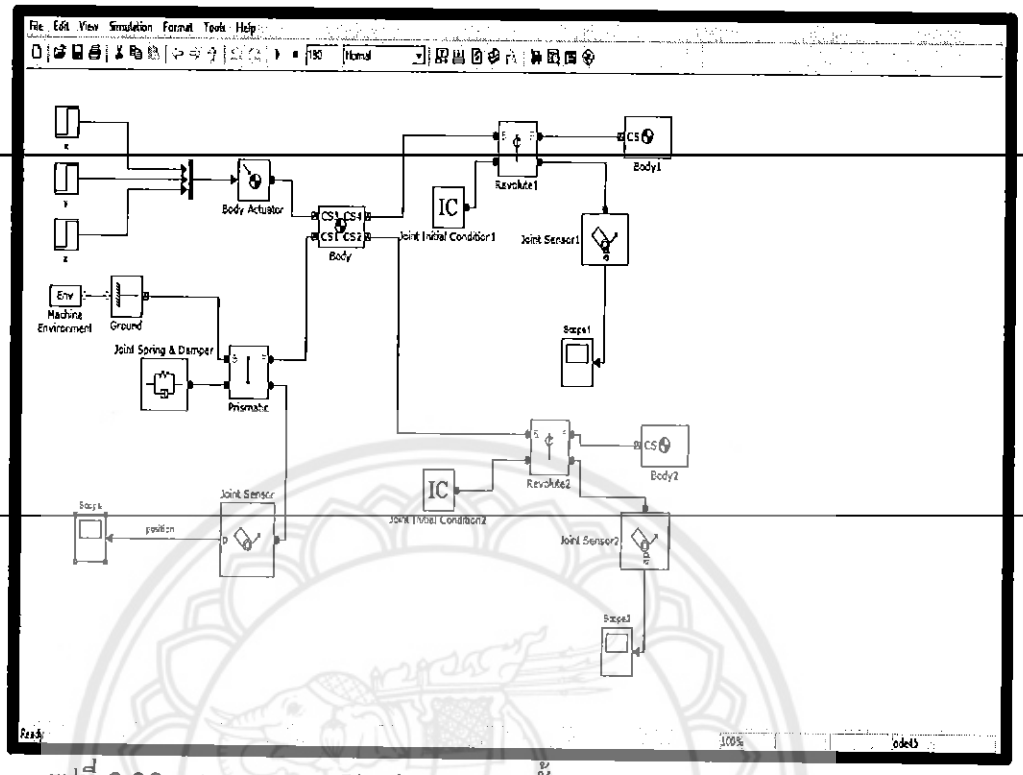
รูปที่ 3.30 แสดงการเลือก Scope

5. นำ Joint Sensor ,Scope มาเชื่อมต่อกันดังรูป

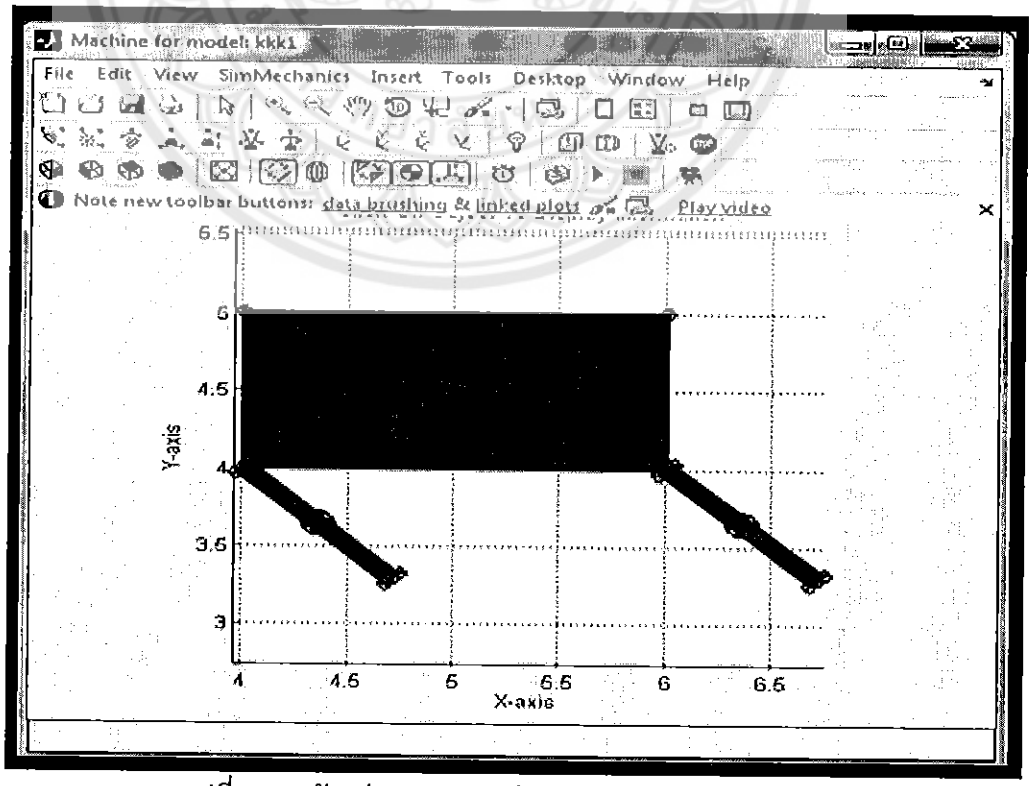


รูปที่ 3.31 แสดงการเชื่อมต่อ Sensor กับระบบ

<u>ในกรณีที่ 2</u> ทำการทดลองโดยใส่แรงกระทำต่อระบบในแต่ละจุดของแบบจำลองโดยใช้ Sensor เดิมจาก กรณีที่ 1 และทำการเพิ่ม Block ของสัญญาณแรงจากข้อ 3.3 จะได้



รูปที่ 3.32 แสดงภาพของ Block Diagram ทั้งหมดของระบบ Couple pendulum

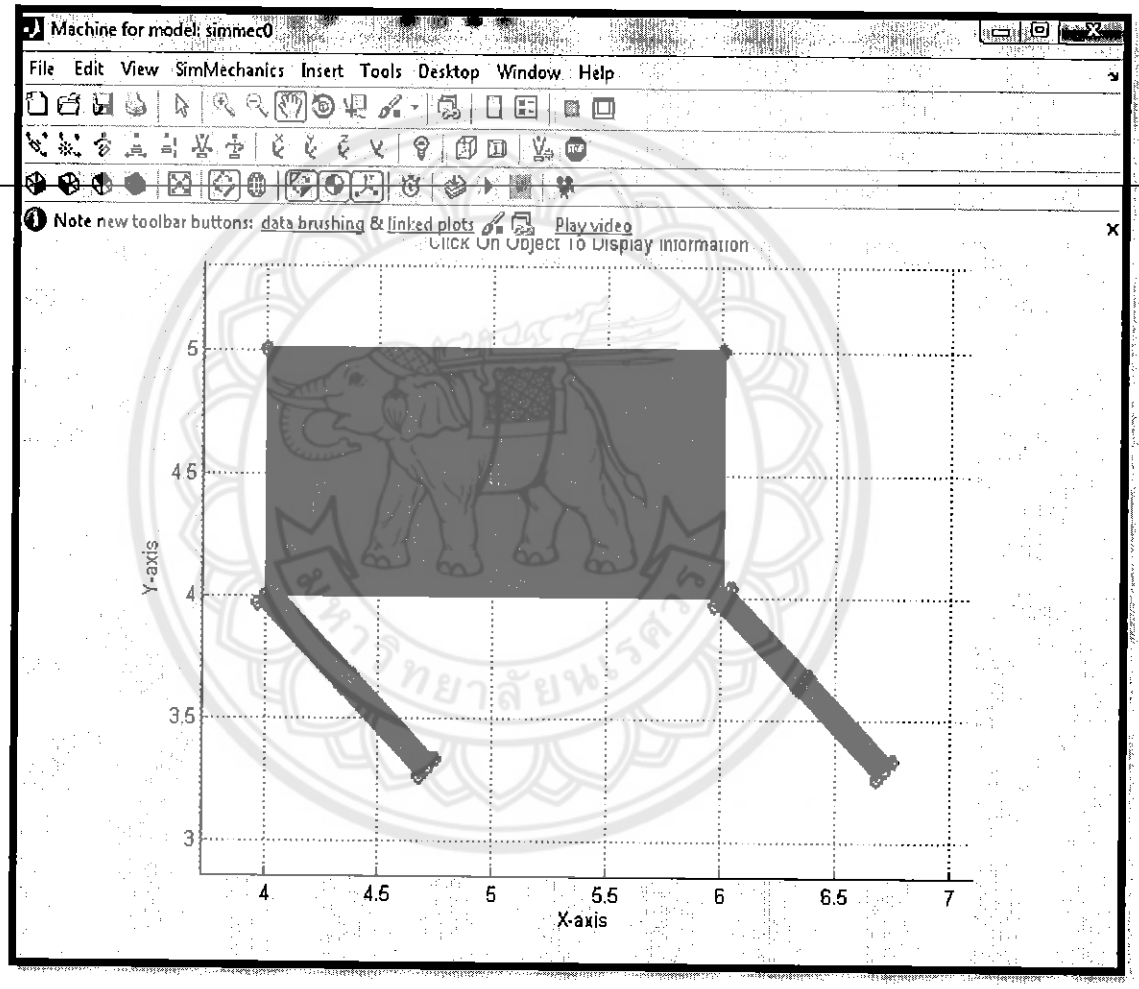


รูปที่ 3.33 ตัวอย่างภาพกราฟฟิกของ Couple pendulum

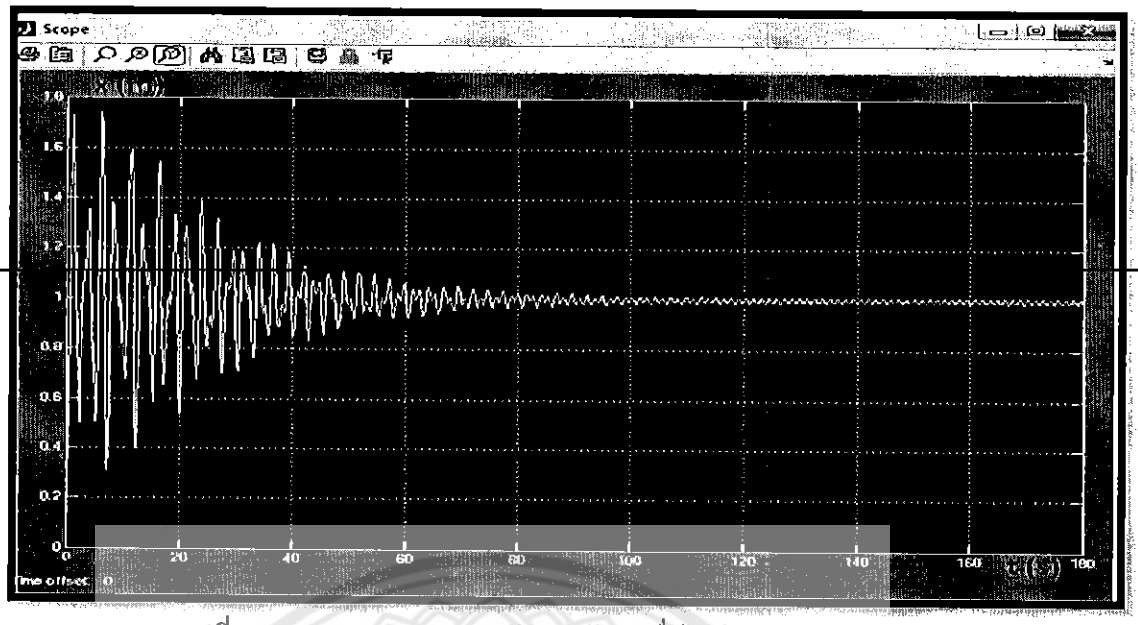
บทที่ 4
ผลการทดลองและวิเคราะห์

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการตอบสนองของระบบ Couple pendulum ขณะมีแรงกระทำต่อระบบและไม่มีแรงมากระทำต่อระบบ ซึ่งจะสามารถวิเคราะห์และอธิบายผลการทดลอง ดังนี้

4.1 กรณีไม่มีแรงภายนอกกระทำกับระบบแสดงผลการทดลองออกมาเป็นภาพเคลื่อนไหวและกราฟการตอบสนองได้ดังนี้

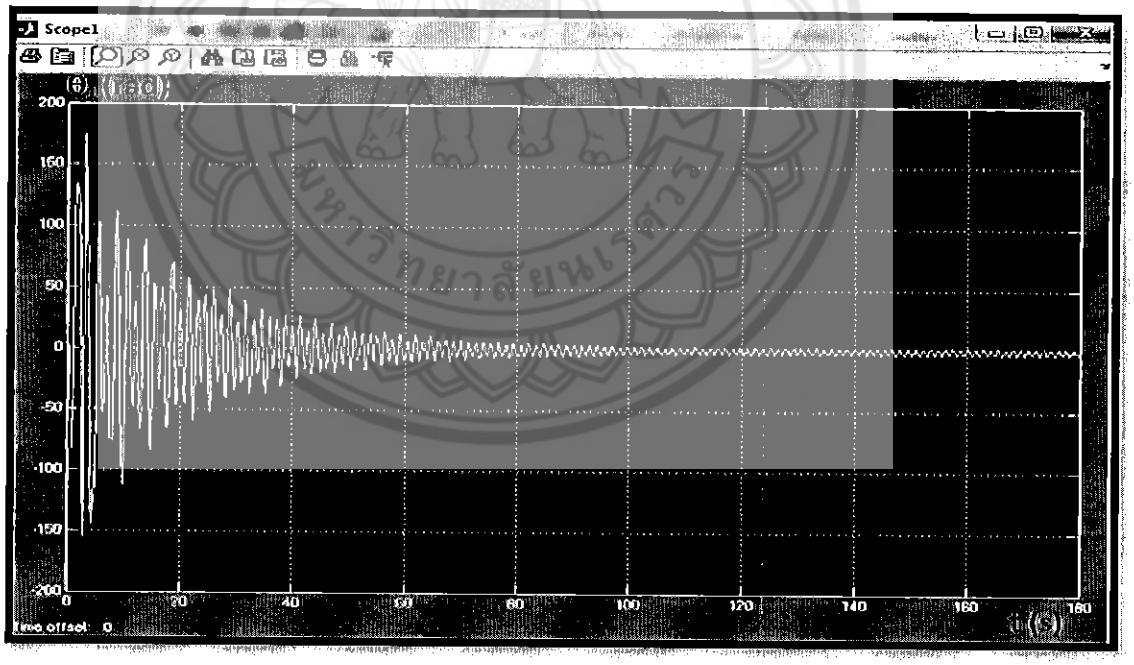


รูป 4.1 ภาพกราฟิก 2 มิติ กรณีไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบ



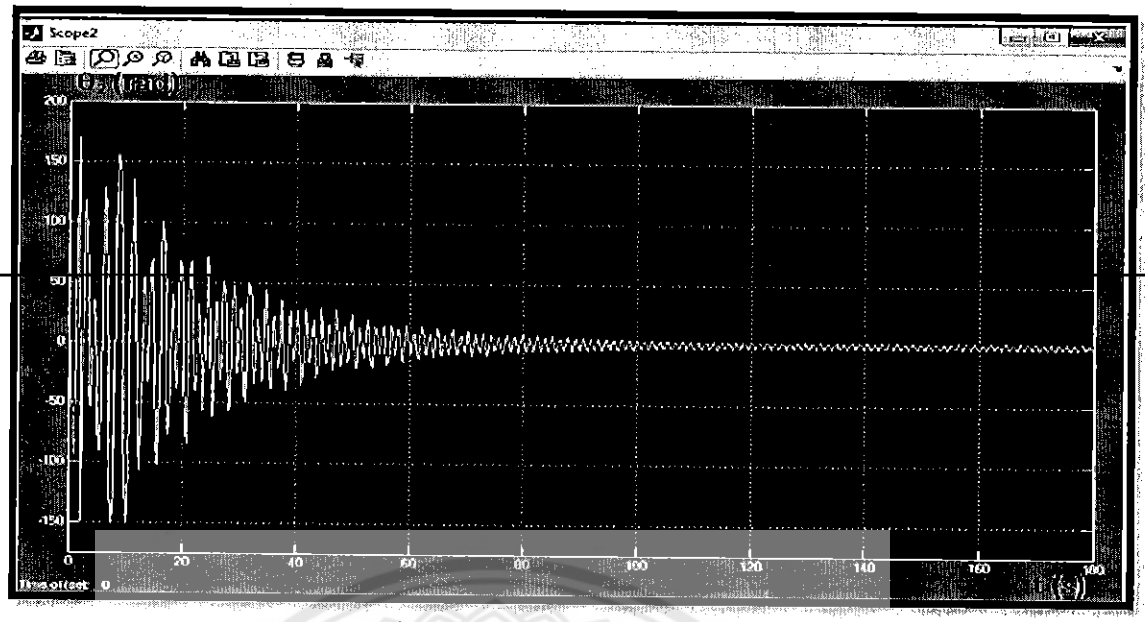
รูปที่ 4.2 กราฟแสดงการกระจัดของตัวรถเมื่อไม่มีแรงกระทำต่อระบบ

ผลลัพธ์ของกราฟที่ 1 รูปที่ 4.2 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนอง มีลักษณะกวัดแกว่งด้วยความถี่และขนาด amplitude ที่ลดลงเรื่อยๆ จนลู่เข้าสู่ 1 ซึ่งเป็นการกระจัดเริ่มต้นของตัวรถ ที่เวลา 100 วินาที



รูปที่ 4.3 กราฟการตอบสนองของ θ_1

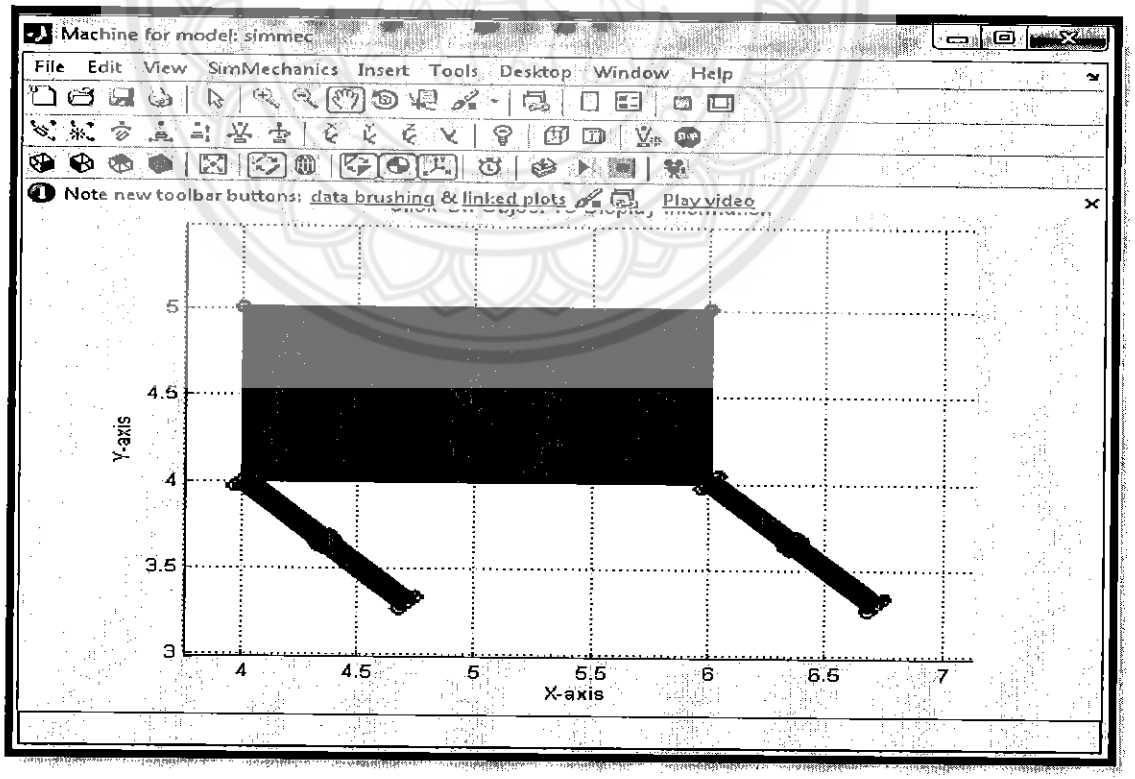
ผลลัพธ์ของกราฟที่ 2 รูปที่ 4.3 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนอง มีลักษณะกวัดแกว่งด้วยความถี่และขนาด amplitude ที่ลดลงเรื่อยๆ จนลู่เข้าสู่ 0 ที่เวลา 100 วินาที



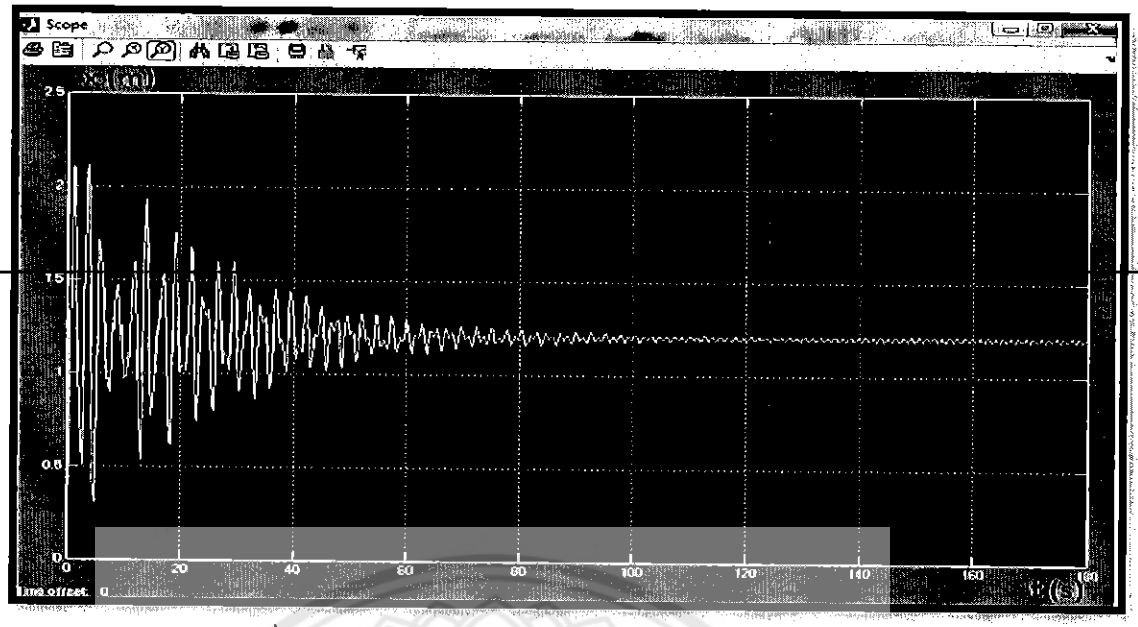
รูปที่ 4.4 กราฟการตอบสนองของ θ_2

ผลลัพธ์ของกราฟที่ 3 รูปที่ 4.4 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนอง มีลักษณะกวัดแกว่งด้วยความถี่และขนาด amplitude ที่ลดลงเรื่อยๆ จนลู่เข้าสู่ 0 ที่เวลา 100 วินาที

4.2 กรณีมีแรงคงที่ขนาด 20N กระทำต่อตัวรถ สามารถแสดงผลการทดลองออกมาเป็นภาพเคลื่อนไหวและกราฟการตอบสนองได้ดังนี้

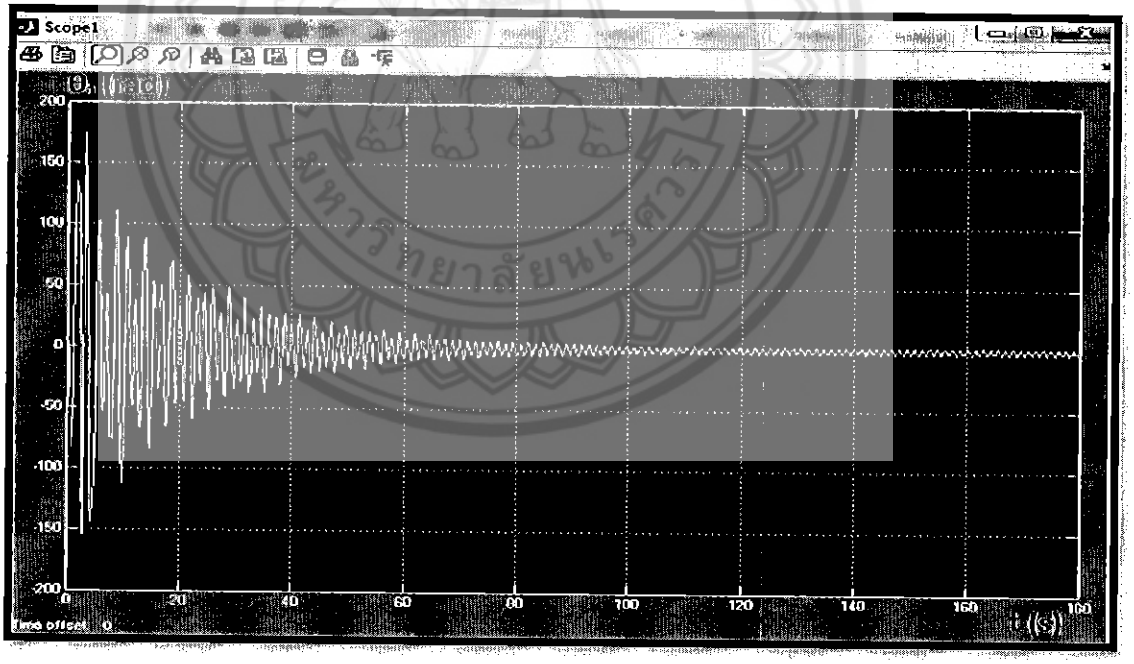


รูป 4.5 ภาพกราฟิก 2 มิติ กรณีมีแรงมากระทำต่อระบบ



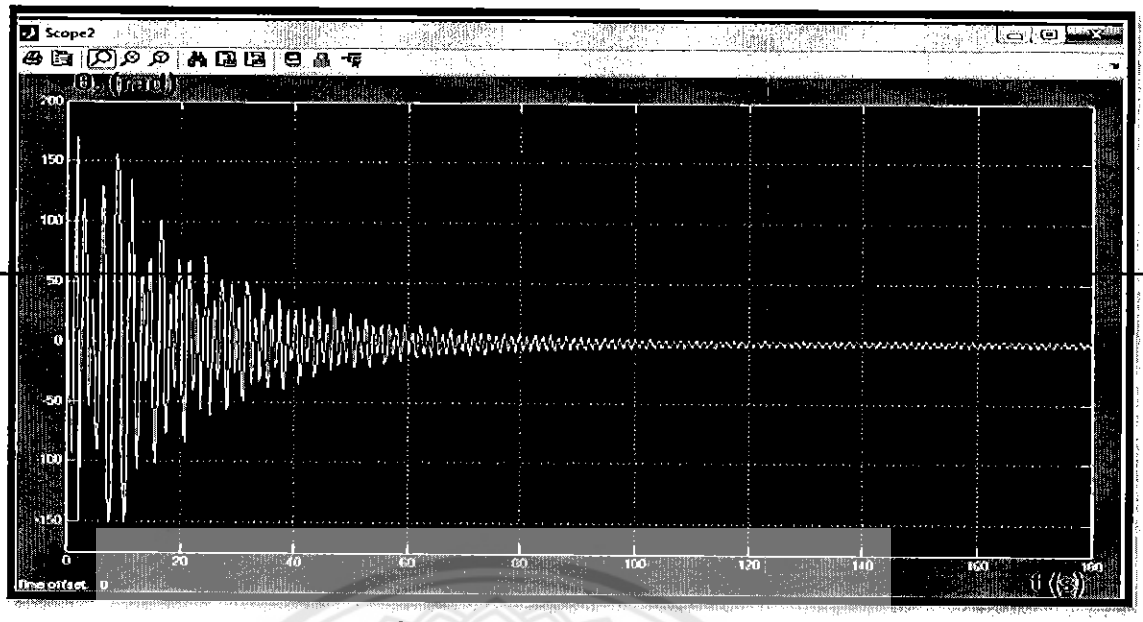
รูปที่ 4.6 แสดงการกระจัดของตัวรถเมื่อมีแรงกระทำต่อตัวรถ

ผลลัพธ์ของกราฟที่ 4 รูป 4.6 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนอง มีลักษณะกวัดแกว่งด้วยความถี่และขนาด amplitude ที่ลดลงเรื่อยๆ จนลู่เข้าสู่ 1.2 ที่เวลา 120 วินาที ซึ่งมีค่ามากกว่าการกระจัดเริ่มต้นของตัวรถ



รูปที่ 4.7 กราฟการตอบสนองของ θ_1

ผลลัพธ์ของกราฟที่ 5 รูปที่ 4.7 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนอง มีลักษณะกวัดแกว่งด้วยความถี่และขนาด amplitude ที่ลดลงเรื่อยๆ จนลู่เข้าสู่ 0 ที่เวลา 120 วินาที



รูปที่ 4.8 กราฟการตอบสนองของ θ_2

ผลลัพธ์ของกราฟที่ 6 รูปที่ 4.8 จะเห็นว่ากราฟการตอบสนอง มีลักษณะกวัดแกว่งด้วยความถี่และขนาด amplitude ที่ลดลงเรื่อยๆ จนลู่เข้าสู่ 0 ที่เวลา 120 วินาที

บทที่ 5
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

จากบทที่ 4 จะเห็นว่าการจำลองพลศาสตร์ของระบบวัตถุหลายชิ้นด้วยโปรแกรม SimMechanics นั้นทำได้โดยง่าย ทั้งนี้เนื่องจากว่าผู้เขียนโปรแกรมไม่จำเป็นต้องรู้สมการการเคลื่อนที่และโปรแกรมนี้จะใช้ block แทนอุปกรณ์ทางกลทั้งหมด อีกทั้งการปรับเปลี่ยนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของระบบก็สามารถทำได้โดยง่ายเช่นกัน ทั้งนี้เนื่องจากโปรแกรม SimMechanics นั้นจะติดต่อกับผู้ใช้แบบกราฟิก นอกจากนี้โปรแกรม SimMechanics ยังสามารถแสดงผลออกมาเป็นภาพเคลื่อนไหวได้อีกด้วย ซึ่งทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์และเข้าใจ

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ควรมีการศึกษาเพิ่มเติมสำหรับการใช้งานโปรแกรม MATLAB ที่เกี่ยวข้องในงานด้านวิศวกรรมเครื่องกล

2. ควรมีการศึกษาเพิ่มเติมโดยนำความรู้ใน MATLAB โดยเฉพาะในส่วนของโปรแกรม SimMechanics ไปประยุกต์ใช้จริงกับชิ้นงานเพื่อให้เกิดประโยชน์และองค์ความรู้ใหม่ๆ

3. ควรมีการศึกษาโดยนำเอาความรู้ทาง MATLAB ไปประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์วัตถุหลายชิ้น เช่น ยานพาหนะในรูปแบบต่างๆ โครงสร้างอาคารพาณิชย์ และที่อยู่อาศัยอื่นๆ เพื่อศึกษาและวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของระบบดังกล่าว

4. ควรมีการศึกษานำเอาความรู้ทาง MATLAB โดยเฉพาะโปรแกรม SimMechanics ไปประยุกต์ใช้กับการออกแบบชิ้นส่วนทางกลเพื่อใช้เกิดแนวคิดใหม่ๆ ประสิทธิภาพของงานออกแบบ

เอกสารอ้างอิง

วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร, ธีระยุทธ สุวรรณประทีป และสมาน เจริญกิจพูลผล. (2539). **กลศาสตร์วิศวกรรม ฉบับเสริมประสบการณ์ ภาคพลศาสตร์** (DYNAMICS). กรุงเทพ ฯ : บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน).

Meriam J.L. and Kraige L.G. (2007). **Engineering Mechanics Dynamics Sixth Edition.** Virginia: Polytechnic Institute and State University.

William J. Palm III. (2010). **System Dynamics.** (2nd ED). New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

ประวัติผู้จัดทำโครงงาน

ชื่อ : นายธีรศักดิ์ จงใจ
วันเดือนปีเกิด : 6 พฤษภาคม 2532
ภูมิลำเนา : 105/1 ม.2 ต.ศาลา อ. เกาะคา
จ.ลำปาง 52130
ประวัติการศึกษา: จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
จากโรงเรียนบุญวาทย์วิทยาลัย
จังหวัดลำปาง ปีการศึกษา 2547
จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
จากโรงเรียนบุญวาทย์วิทยาลัย
จังหวัดลำปาง ปีการศึกษา 2550
E-mail : The_banana_house@hotmail.com

ชื่อ : นายยุทธนานันท์ สลีอ่อน
วันเดือนปีเกิด : 8 มกราคม 2531
ภูมิลำเนา : 84 ม.2 ต.พระพุทธบาท อ.เชียงกลาง
จ.น่าน 55160
ประวัติการศึกษา: จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
จากโรงเรียนเชียงกลาง " ประชาพัฒนา "
จังหวัดน่าน ปีการศึกษา 2546
จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
จากโรงเรียนเชียงกลาง " ประชาพัฒนา "
จังหวัดน่าน ปีการศึกษา 2549
E-mail : unpot_o@hotmail.com

ชื่อ : นายวสันต์ ตัณฑ์เอกชน
วันเดือนปีเกิด : 8 มิถุนายน 2531
ภูมิลำเนา : 49/1 ม.3 ต.หงาว อ.เทิง จ.เชียงราย 57160
ประวัติการศึกษา: จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
จากโรงเรียนเทิงวิทยาคม
จังหวัดเชียงราย ปีการศึกษา 2546
จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
จากโรงเรียนเทิงวิทยาคม
จังหวัดเชียงราย ปีการศึกษา 2549
E-mail : kingkaew_mecha@hotmail.com