การสร้างต้นแบบโพลิโนเมียลและเอ็กซ์โปเนนเชียล

Polynomial and Exponential Model

นายพงศกร สุระธรรม รหัส 46360079

นางสาวศิโรรัตน์ วรัญญูลักษนา รหัส 46360137

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2549

ใบรับรองโครงงานวิศวกรรม

หัวข้อโครงงาน การสร้างต้นแบบโพลิโนเมียลและเอ็กซ์โปเนนเชียล

ผู้ดำเนินโครงงาน นายพงศกร สุระธรรม รหัส 46360079

นางสาวศิโรรัตน์ วรัญญูลักษนา รหัส 46360137

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ แย้มเม่น

สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2549

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้โครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงานวิศวกรรม

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ แย้มเม่น)

....กรรมการ

(ดร. พนมขวัญ ริยะมงคล)

....กรรมการ

(ดร. สมยศ เกียรติวนิชวิไล)

หัวข้อโครงงาน	การสร้างต้นแบบโพลิโนเมียลและเอ็กซ์โปเนนเชียล
ผู้ดำเนินโครงงาน	นายพงศกร สุระธรรม รหัส 46360079
	นางสาวศิโรรัตน์ วรัญญูลักษนา รหัส 46360137
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ แย้มเม่น
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2549

บทคัดย่อ

โครงงานนี้นำเสนอวิธีการสร้างต้นแบบการพยากรณ์ข้อมูลด้วยเทคนิคการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลและเอ็กซ์โปเนนเชียลซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ตัวกรองสัญญาณเชิงเส้นแบบ non - recursive ดีกรี q มาลดความแปรปรวนของข้อมูลให้น้อยที่สุด การออกแบบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองดังกล่าวจะถูกเลือกเพื่อที่จะได้ค่าต่ำสุดของความแปรปรวนข้อมูลบนพื้นฐานข้อมูล โพลิโนเมียลและเอ็กซ์โปเนนเชียลตามลำดับ

จากผลการพยากรณ์ข้อมูลหุ้นราคาปิดตั้งแต่เดือนเมษายน ปี พ.ศ. 2545 ถึง เดือนตุลาคม ปี พ.ศ. 2549 ด้วยวิธีการทำให้เรียบแบบ โพลิโนเมียลและเอ็กซ์โปเนนเชียล ที่ q เท่ากับ 10, 25, 40, 55 และ 70 พบว่าวิธีการทำให้เรียบแบบ โพลิโนเมียลดีกรีสาม ที่ q เท่ากับ 10 เป็นวิธีการที่ดีที่สุด เพราะมีค่า MSE เท่ากับ 0.1911 และมีค่า MAE เท่ากับ 0.1395 เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลและวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่

Project title	Polynomial and Exponential Model
Name	Mr. Phongsakorn Suratham ID. 46360079
	Miss Sirorat Waranyulaksana ID. 46360137
Project advisor	Assistant Professor Suchart Yammen, Ph.D.
Major	Computer Engineering
Department	Electrical and Computer Engineering
Academic year	2006

Abstract

This project presents a model of forecasting data with polynomial and exponential trend smoothing filters using linear non-recursive filters of order q to reduce variance of data. Filter coefficients are chosen to give the minimum variance of the data in from of polynomial and exponential trend.

According to the forecasting results of closing price data (M-Link) from April, 2002 to October, 2006 with polynomial and exponential trend smoothing filters at five different parameters q: 10, 25, 40, 55 and 70. It has been found that cubic trend smoothing filter of order q = 10 is the best result since the two values of MSE and MAE are minimum; that is, MSE = 0.1911 and MAE = 0.1395 when compared with the exponential trend smoothing filter and the moving average filter.

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานวิศวกรรมคอมพิวเตอร์สำเร็จได้ด้วยดี ก็เนื่องจากความอนุเคราะห์จากท่านอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ แย้มเม่น ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำวิธีการในการทำงาน ตลอดถึงการตรวจสอบการทำงานพร้อมทั้งเสนอแนวทางการแก้ไขตลอดระยะเวลาการทำโครงงาน สุดท้ายต้องขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านและเพื่อนๆ ทุกคนที่ยังไม่ได้เอ่ยนามที่คอยสนับสนุนในการทำโครงงานครั้งนี้

นายพงศกร สุระธรรม
นางสาวศิโรรัตน์ วรัญญูลักษนา

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป(ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

ในการทำโครงงานนี้ต้องอาศัยหลักทางคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์ข้อมูล วิชาที่เกี่ยวข้องนั้นจึงเป็นวิชาที่ค่อนข้างยากและมีเนื้อหาซับซ้อนพอสมควร ทำให้เข้าใจยากและใช้เวลาในการศึกษานาน ในรูปแบบสมการที่ได้ศึกษามานั้นเป็นสมการที่สามารถนำมาใช้งานได้จริง ซึ่งผู้ใช้สามารถที่จะนำสมการไปประยุกต์ใช้ได้ ดังนั้นผู้จัดทำโครงงานจึงมีความสนใจที่จะนำสมการที่ได้ศึกษามานั้นมาวิเคราะห์ข้อมูล

ในปัจจุบันโครงงานเรื่องนี้เป็นเรื่องที่หลายฝ่ายกำลังให้ความสนใจกันอย่างมาก นั่นคือเรื่องการวิเคราะห์ข้อมูลให้มีความใกล้เคียงกับข้อมูลจริงที่มีอยู่ ซึ่งจะช่วยนำไปคาดการณ์แนวโน้มของข้อมูลในอนาคตได้ ทั้งทางด้านการเงิน การตลาด ผู้จัดทำโครงงานเล็งเห็นว่าถ้านำข้อมูลเหล่านี้มาขจัดความผิดพลาด โดยหาขนาดของความคลาดเคลื่อนให้น้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ โดยใช้แนวคิดพีชคณิตพร้อมทั้งออกแบบพัฒนาโปรแกรม เพื่อหารูปแบบสมการที่เหมาะสมสำหรับสร้างข้อมูลที่มีคุณภาพ จะทำให้เกิดประโยชน์อย่างยิ่งในการนำข้อมูลนี้มาวิเคราะห์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ การคาดคะเนข้อมูลโดยทั่วไปสามารถจำแนกได้หลายวิธี แต่ไม่มีวิธีใดที่ดีที่สุดที่สามารถใช้ในการพยากรณ์ได้ในทุกกรณีของข้อมูลในอดีตที่แตกต่างกันไป จึงเป็นการยากในการที่จะเลือกใช้วิธีในการพยากรณ์ให้เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลที่มีอยู่

1.2 วัตถุประสงค์โครงงาน

1.2.1 เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางด้านการวิเคราะห์ข้อมูลอย่างมีระบบ

1.2.2 เพื่อเป็นวิธีการศึกษาลักษณะของข้อมูลซึ่งมีจุดประสงค์ในการคาดการณ์แนวโน้มของข้อมูลในอนาคต

1.2.3 เพื่อเสนอวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียล (Polynomial trend smoothing filter) และวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential trend smoothing filter) ที่สามารถนำมาพยากรณ์ข้อมูลได้

1.2.4 เพื่อให้ผู้ที่สนใจสามารถนำไปใช้ได้อย่างถูกวิธี

1.3 ขอบข่ายการทำงาน

1.3.1 ศึกษาแนวคิดทางพีชคณิตในการหาคำตอบพารามิเตอร์โมเดล

1.3.2 ออกแบบและพัฒนาโปรแกรมหาคำตอบพารามิเตอร์โมเดล เพื่อที่จะนำโปรแกรมมาทดสอบการพยากรณ์กลุ่มของข้อมูลเชิงสังเคราะห์และข้อมูลจริง เช่น วิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter) วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียล (Polynomial trend smoothing filter)และวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential trend smoothing filter)

1.3.3 นำข้อมูลค่าการคาดคะเนทั้ง 5 วิธีมาเปรียบเทียบกับข้อมูลจริง เพื่อศึกษาและเลือกวิธีการพยากรณ์ให้เหมาะสมกับข้อมูล

1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ผลงานมีโอกาสได้ขยายผลต่อในทางเทคนิครูปแบบต่างๆ

1.4.2 สามารถทำให้ผู้ที่สนใจเข้าใจและนำไปใช้ได้อย่างถูกวิธี

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีและหลักการในสิ่งต่างๆ เหล่านี้

- วิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter)
- วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียล (Polynomial smoothing filter)
- วิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential smoothing filter)
- ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (Mean Square Error, MSE)
- ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนของค่าสัมบูรณ์ (Mean Absolute Error, MAE)
- การใช้งานโปรแกรม Matlab
- เก็บข้อมูลด้านการเงิน การตลาด นำมาใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1.5.2 สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์ข้อมูล

1.5.3 ออกแบบและพัฒนาโปรแกรม

1.5.4 ทดสอบการทำงาน

1.5.5 ทำการปรับปรุงและแก้ไขโปรแกรม

1.5.6 ประเมินผลและสรุปผล

1.5.7 จัดทำรายงานและเตรียมนำเสนองาน

1.6 แผนการดำเนินงาน

กิจกรรม	ปี 2549											ปี 2550		
	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
ศึกษาและค้นคว้า	←	—	→											
สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์ข้อมูล			←	—	—	—	—	→						
ออกแบบและพัฒนาโปรแกรม						←	—	—	→					
ทดสอบการทำงาน							←	—	—	→				
ปรับปรุงและแก้ไข									←	—	→			
การประเมินและสรุปผล											←	—	→	
จัดทำรายงานและเตรียมเสนองาน												←	—	→

1.7 งบประมาณ

1.7.1	ค่าวัสดุคอมพิวเตอร์	เป็นเงิน	500	บาท
1.7.2	ค่าถ่ายเอกสาร	เป็นเงิน	800	บาท
1.7.3	ค่าวัสดุอื่น ๆ	เป็นเงิน	700	บาท
		รวมเป็นเงินทั้งสิ้น	**2, 000**	**บาท (สองพันบาทถ้วน)**

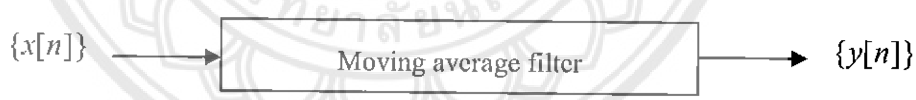
บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

เทคนิคการพยากรณ์ได้รับการพัฒนาอย่างรวดเร็วและก้าวหน้าไปไกลมาก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะความต้องการเกี่ยวกับการพยากรณ์ในวงการธุรกิจในปัจจุบันมีมาก ซึ่งเป็นผลสืบเนื่องมาจากการแข่งขันและความสลับซับซ้อนในวงการธุรกิจที่มีมากขึ้นก็เป็นได้ และผลของการพยากรณ์ได้มีบทบาทสำคัญในการตัดสินใจอีกด้วย พฤติกรรมของลำดับข้อมูลมีทั้งแนวโน้มขึ้น (up-trend) แนวโน้มลง (down-trend) และการเคลื่อนตัวไปข้างๆ (sideways) ดังนั้นจึงต้องมีการเรียนรู้หลักการที่สำคัญในวิธีการทำให้เรียบ (Smoothing filters) ซึ่งจะลดสัญญาณรบกวนสุ่มลง เพื่อให้เห็นถึงแนวความคิดของระเบียบวิธีการพยากรณ์เชิงปริมาณ และเป็นพื้นฐานที่จะศึกษาในรายละเอียดในบทต่อไป ในที่นี้จะขอกล่าวถึงระเบียบวิธีการพยากรณ์ที่นิยมใช้กันในปัจจุบัน นั่นคือ Moving average filter และ Linear non-recursive filters of order q ค่าคาดคะเนและความแปรปรวน (Expected value and variance) การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด (Maximum and minimum) รวมถึงวิธีการหาคำตอบพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับ Exponential model และการวัดประสิทธิภาพในการคาดคะเนอีกด้วย

2.1 วิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average Filter)

วิธีการทำให้เรียบ (Smoothing filters) ที่นิยมใช้กันมากคือวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter)



เมื่อ $x[n]$ คือข้อมูลลำดับที่ n และ $y[n]$ คือค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n สามารถเขียนเป็นสมการ Moving average filter ได้ดังนี้

$$y[n] = \frac{1}{q+1}(x[n] + x[n-1] + \ldots + x[n-q])$$
$$= \frac{1}{q+1}\sum_{k=0}^{q} x[n-k] \qquad (2.1)$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ จากสมการ (2.1) เห็นได้ว่าผลลัพธ์ $y[n]$ นั้นเป็นผลรวมของข้อมูลปัจจุบัน ย้อนหลังไปจนถึงข้อมูลตัวที่ q (q เป็นค่าที่กำหนดเอง) และหารจำนวนข้อมูลทั้งหมด ซึ่งก็คือค่ากลางนั่นเอง จะเห็นได้ว่าข้อมูลถูก Delay ไป $\frac{q}{2}$

2.2 Linear Non-Recursive Filters of Order q

จากวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่(Moving average filter) สมการ (2.1) ค่า $y[n]$ ที่ได้จะมีค่าคงที่ $\frac{1}{q+1}$ คูณกับข้อมูล $x[n-k]$ เมื่อ $k=0,1,2,...,q$ เห็นได้ว่าการที่มีค่าคงที่เป็นสัมประสิทธิ์นั้นไม่ได้ทำให้สมการมีความยืดหยุ่น ดังนั้นจึงได้มีการประยุกต์โดยการเปลี่ยนจากค่าคงที่ $\frac{1}{q+1}$ เป็นสัมประสิทธิ์ b_k เมื่อ $k=0,1,2,...,q$ เพื่อให้สมการมีความยืดหยุ่นขึ้น เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0x[n]+b_1x[n-1]+\cdots+b_qx[n-q] \\ &= \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k] \end{aligned} \tag{2.2}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อ $y[n]$ คือค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $x[n-k]$ คือข้อมูลลำดับที่ n โดย k มีจำนวน q เทอมตั้งแต่ $k=0,1,2,...,q$ และได้เรียกสมการ (2.2) ว่า Linear Non-Recursive Filters of Order q

2.3 ค่าคาดคะเนและความแปรปรวน (Expected Value and Variance)

2.3.1 ค่าคาดคะเน (Expected value)

เมื่อ $g(x)=x$ จะได้ว่า $g(X)=X$ นั่นเอง ดังนั้นในกรณีที่ $E[X]<\infty$ จะได้ว่า

$$E[X]=\begin{cases} \sum_{x\in ImX} xP(X=x) & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง} \end{cases}$$

<u>คุณสมบัติของค่าคาดคะเน</u>

1. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าคาดคะเนได้ จะได้ว่า สำหรับค่าคงตัว a และ b ใดๆ

$$E[aX+b] = aE[X]+b \tag{2.3}$$

2. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าคาดคะเนได้ จะได้ว่า

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y] \tag{2.4}$$

3. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่สามารถหาค่าคาดคะเนได้ ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน แล้วจะได้ว่า XY สามารถหาค่าคาดคะเนได้ โดยที่

$$E[XY] = E[X]E[Y] \tag{2.5}$$

4. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าคาดคะเนได้ จะได้ว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)E(h(Y)] \tag{2.6}$$

เมื่อทุกฟังก์ชัน $f,h:R \to R$ ที่ทำให้ $g(X)$ และ $h(X)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่หาค่าคาดคะเนได้

2.3.2 ความแปรปรวน (Variance)

- ความแปรปรวน (Variance) ของ X ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย σ_X^2 หรือ $Var(X)$ กล่าวคือ

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E[(X-E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2\end{aligned} \tag{2.7}$$

เนื่องจาก $Var(X) \geq 0$
ดังนั้นจากสมการ (2.7) สรุปได้ว่า $E[X^2] \geq (E[X])^2$

- ความแปรปรวนร่วม (Covariance) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y คือ $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ เขียนแทนด้วย σ_{xy} หรือ $Cov(X,Y)$

ข้อสังเกต

1) $\sigma_{xy} = E[XY] - E[X]E[Y]$

2) ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันจะได้ว่า $\sigma_{xy} = 0$ เนื่องจาก

$E[XY] = E[X]E[Y]$

คุณสมบัติของความแปรปรวน

1. สำหรับค่าคงตัว b ใดๆ

$$Var(b) = 0 \tag{2.8}$$

2. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่สามารถหาค่าความแปรปรวนได้ จะได้ว่า

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \tag{2.9}$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัวใดๆ

3. สำหรับตัวแปรสุ่ม X และ Y ใดๆ ที่สามารถหาค่าความแปรปรวนได้ จะได้ว่า

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab.Cov(X,Y) \tag{2.10}$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัวใดๆ

4. ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว สามารถหาค่าความแปรปรวนได้ว่า

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) \tag{2.11}$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. กำหนดให้ $X_1, X_2, ..., X_q (q \geq 2)$ เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$Var(X_1 + X_2 + ... + X_q) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_q) \tag{2.12}$$

6. ให้ $y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

$$\sigma_Y^2 = \rho \sigma_W^2 \tag{2.13}$$

$$\rho = \sum_{k=0}^{q} b_k^2 \tag{2.14}$$

เมื่อ b เป็นค่าคงที่ใดๆ

2.4 การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด (Maximize and Minimize)

การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด แบ่งออกเป็น 2 กรณีใหญ่ๆ คือ การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด กรณีไม่มีข้อจำกัด กับการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด กรณีมีข้อจำกัด

2.4.1 กรณีไม่มีข้อจำกัด

2.4.1.1 กรณีตัวแปรอิสระตัวเดียว จะต้องมีเงื่อนไข 2 ข้อ คือ

เงื่อนไขที่ 1: เรียกว่า เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) โดยการหา First derivative ของฟังก์ชัน และกำหนดให้เท่ากับศูนย์ เพื่อแก้สมการหาค่าวิกฤต (Critical value) ของตัวแปรอิสระที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

เงื่อนไขที่ 2: เรียกว่า เงื่อนไขที่เพียงพอ (Sufficient condition) โดยการหา Second derivative ของฟังก์ชันเพื่อตรวจสอบเครื่องหมาย

1. ถ้าได้เครื่องหมายบวก แสดงว่า เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน
2. ถ้าได้เครื่องหมายลบ แสดงว่า เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระตัวเดียว เช่น $y = f(x)$ จะได้

เงื่อนไขที่จำเป็น คือ $\frac{dy}{dx} = 0$

เงื่อนไขที่เพียงพอ คือ $\frac{d^2y}{d^2x} > 0$ ได้ เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

หรือ $\frac{d^2y}{d^2x} < 0$ ได้ เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

2.4.1.2 กรณีตัวแปรอิสระหลายตัว เช่น $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

จะได้ First order total differential คือ $dy = 0$

$$\frac{\partial f . dx_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f . dx_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f . dx_n}{\partial x_n} = 0$$

แต่ $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเงื่อนไขจำเป็นของตัวแปรอิสระหลายตัวคือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

เงื่อนไขที่เพียงพอ คือ $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$ ได้เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

หรือ $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$ ได้เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

2.4.2 กรณีมีข้อจำกัด

เป็นวิธีการคำนวณที่นิยมใช้เป็นอย่างมาก การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดกรณีนี้จะใช้วิธีการของ Lagrange เรียกว่า Lagrangian multiplier method มีขั้นตอนการหาดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u>: สร้างสมการเป้าหมายชิ้นใหม่ เรียกว่า Lagrange function (L) โดยการใช้ Lagrange multiplier (λ) คูณกับสมการข้อจำกัด แล้วนำไปบวกกับสมการเป้าหมายเดิม

<u>ขั้นที่ 2</u>: หาค่า Partial derivative ของ L มุ่งตรงต่อการเปลี่ยนแปลงของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ทีละตัวแล้วกำหนดให้ค่าเท่ากับศูนย์

<u>ขั้นที่ 3</u>: แก้สมการหาค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ λ แล้วแทนค่าที่หาได้ลงในสมการเป้าหมาย ก็จะได้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

2.5 วิธีการหาคำตอบพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับ Exponential model

กำหนดให้ $$y[n] = c_0 \cdot d_0^n \tag{2.15}$$

เมื่อ $y[n]$ เป็นค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ ต่อมาให้ทำการเทค Logarithm ฐานสิบทั้งสองข้างในสมการ (2.15) จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \log_{10} y[n] &= \log_{10} c_0 \cdot d_0^n \\ &= \log_{10} c_0 + \log_{10} d_0^n \\ &= \log_{10} c_0 + n \cdot \log_{10} d_0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$

สามารถหาค่า $\log_{10} y[n]$ ได้เมื่อค่าของ c_0 และ d_0 ถูกกำหนดโดยวิธีการหาผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (The sum of squared errors) นั่นคือหาค่า $y[n]$ (การคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n) ให้มีค่าใกล้เคียงกับค่า $x[n]$ (ค่าข้อมูลจริงลำดับที่ n) ให้มากที่สุด เมื่อต้องการ

เปรียบเทียบค่าข้อมูลจริง $x[n]$ กับค่าการคาดคะเนของข้อมูล $y[n]$ จึงต้องทำการเทค Logarithm ฐานสิบให้กับค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ด้วยเพื่อทำให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด เขียนได้ดังสมการ

$$e[n] = \log_{10} x[n] - \log_{10} y[n] \tag{2.17}$$

โดย $e[n]$ คือค่าความคลาดเคลื่อนลำดับที่ n เมื่อ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ จากสมการ (2.16) และ (2.17) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$e[n] = \log_{10} x[n] - \log_{10} y[n]$$
$$e[n] = \log_{10} x[n] - \left(\log_{10} c_0 + n \cdot \log_{10} d_0\right)$$

$$\begin{bmatrix} e[0] \\ e[1] \\ \vdots \\ e[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log_{10} x[0] \\ \log_{10} x[1] \\ \vdots \\ \log_{10} x[n-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \log_{10} c_0 + 0 \cdot \log_{10} d_0 \\ \log_{10} c_0 + 1 \cdot \log_{10} d_0 \\ \vdots \\ \log_{10} c_0 + (N-1) \cdot \log_{10} d_0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[0] \\ e[1] \\ \vdots \\ e[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \log_{10} x[0] \\ \log_{10} x[1] \\ \vdots \\ \log_{10} x[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \log_{10} c_0 \\ \log_{10} d_0 \end{bmatrix}}_{\underline{y}}$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ว่า $\underline{e} = \underline{x} - A\underline{y}$ (2.18)

โดยที่ $\underline{e}$ เป็นเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อน (Error vector) มีขนาด $N \times 1$ ซึ่งประกอบด้วยสมาชิก $e[n]$ สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ และ $\underline{x}$ คือเวกเตอร์ข้อมูล (Data vector) ขนาด $N \times 1$ ซึ่งประกอบด้วยสมาชิก $x[n]$ สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ แล้ว $\underline{y}$ คือเวกเตอร์ตัวแปรขนาด 2×1 และ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $N \times 2$

คำตอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์ตัวแปร $\underline{y}$ หาได้จากการหาค่าคำตอบของผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (The sum of squared errors) $f(\underline{y})$ ดังนี้

$$f(\underline{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} e[n]^2 = \underline{e}^T \underline{e}$$
$$f(\underline{y}) = \left[\underline{x} - A\underline{y}\right]^T \left[\underline{x} - A\underline{y}\right] \tag{2.19}$$

จากสมการ (2.19) เงื่อนไขจำเป็นของ $\underline{y} \in R^{2\times1}$ ที่จะทำให้ค่าของฟังก์ชัน $f(\underline{y})$ มีค่าน้อยที่สุดก็ต่อเมื่อเกรเดียนเวกเตอร์ (Gradient vector) ของฟังก์ชัน $f(\underline{y})$ สำหรับค่าตัวแปรที่เหมาะสมคงที่ $\underline{y}^{\circ} \in R^{2\times1}$ เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ โดยใช้พื้นฐานวิชาแคลคูลัส พบว่าเกรเดียนเวกเตอร์ (Gradient vector) ของฟังก์ชัน $f(\underline{y})$ ถูกกำหนดให้เป็น

$$\begin{aligned}
\nabla_{\underline{y}} f(\underline{y}) &= \nabla_{\underline{y}}\left[(\underline{x}-A\underline{y})^T(\underline{x}-A\underline{y})\right] \\
&= \nabla_{\underline{y}}\left[(\underline{x}^T-\underline{y}^T A^T)(\underline{x}-A\underline{y})\right] \\
&= \nabla_{\underline{y}}\left[\underline{x}^T\underline{x}-2(\underline{y}^T A^T\underline{x})+\underline{y}^T A^T A\underline{y}\right] \\
&= 0-2\nabla_{\underline{y}}\left[\underline{y}^T A^T\underline{x}\right]+\nabla_{\underline{y}}\left[\underline{y}^T A^T A\underline{y}\right] \\
&= -2(A^T\underline{x})+\left\{(A^T A)+(A^T A)^T\right\}\underline{y} \\
&= -2A^T\underline{x}+2A^T A\underline{y}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ณ ค่าตัวแปรคงที่ $\underline{y}^{\circ} \in R^{2\times1}$ ทำให้ค่าเกรเดียนเวกเตอร์ (Gradient vector) ของฟังก์ชัน $f(\underline{y})$ เท่ากับศูนย์ จากสมการ (2.20) เขียนเป็นสมการปกติ (Normal equations) ได้ว่า

$$(A^T A)\underline{y}^{\circ} = A^T\underline{x} \tag{2.21}$$

จากสมการ (2.21) สามารถหาค่า c_0 และ d_0 ดังนี้

$$(A^T A)\begin{bmatrix}\log_{10} c_0^{\circ} \\ \log_{10} d_0^{\circ}\end{bmatrix} = A^T\underline{x} \tag{2.22}$$

ถ้าเมตริกซ์ A เป็น Nonsingular matrix นั่นคือมีค่าดีเทอมิแนนท์ (Determinant) ไม่เป็นศูนย์แล้ว เมตริกซ์ $A^T A$ จะสามารถหาอินเวิร์สเมตริกซ์ได้ โดยการคูณ $(A^T A)^{-1}$ เข้าข้างหน้าทั้งสองข้างของสมการ (2.22) ได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\log_{10} c_0^{\circ} \\ \log_{10} d_0^{\circ}\end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T\underline{x} \tag{2.23}$$

แต่ถ้าเมตริกซ์ A เป็น Singular matrix แล้วจะได้คำตอบตัวแปรที่เหมาะสมอยู่ในรูปของสมการดังนี้

$$\underline{y}^{\circ} = pinv(A)\underline{x} \tag{2.24}$$

โดยที่ $pinv(A) = (A^T A)^{-1} A^T$ เรียกว่า อินเวิร์สเทียมของเมตริกซ์ A

2.6 การวัดประสิทธิภาพ

ในการตรวจสอบประสิทธิภาพการคาดคะเนของข้อมูลแต่ละวิธีนั้นสามารถวัดค่าความคลาดเคลื่อนด้วยวิธีต่างๆ ในที่นี้ได้ใช้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (Mean Square Error, MSE) สำหรับวัดประสิทธิภาพความคลาดเคลื่อนของรูปแบบวิธีการต่างๆ มีสมการดังนี้

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-y[n])^2 \tag{2.25}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อ N คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด โดยที่ $x[n]$ เป็นค่าของข้อมูลจริงลำดับที่ n และ $y[n]$ เป็นค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n

และหาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนของค่าสัมบูรณ์ (Mean Absolute Error, MAE) สำหรับตรวจสอบประสิทธิภาพความคลาดเคลื่อนข้อมูลแต่ละวิธีเช่นกัน

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)-y(n)| \tag{2.26}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อ N คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด โดยที่ $x[n]$ เป็นค่าของข้อมูลจริงลำดับที่ n และ $y[n]$ เป็นค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n

บทที่ 3
วิธีการหาคำตอบ

การพยากรณ์ข้อมูลอาจใช้วิธีทางสถิติ หรือจากการตัดสินใจของผู้เชี่ยวชาญเมื่อไม่สามารถนำวิธีการทางสถิติมาวิเคราะห์ได้ โดยทั่วไปวิธีทางสถิติที่ใช้ในการพยากรณ์ข้อมูลนั้นสามารถจำแนกได้หลายวิธี แต่ไม่มีวิธีใดที่ดีที่สุดที่จะสามารถใช้ในการพยากรณ์ได้ในทุกกรณีของข้อมูลในอดีตที่แตกต่างกันไป จึงเป็นการยากในการที่จะเลือกใช้วิธีในการพยากรณ์ให้เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลที่มีอยู่ เทคนิคการทำให้เรียบเป็นการพยากรณ์ภายใต้แนวความคิดที่ว่าพฤติกรรมในอดีตของตนเองมีความเพียงพอที่จะพยากรณ์พฤติกรรมในอนาคตของตนเองได้ ดังนั้นในบทนี้จะนำเสนอวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียล (Polynomial trend smoothing filter) และวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential trend smoothing filter) ซึ่งสามารถจำลองให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยกว่าจำนวนของสมการ

3.1 Polynomial Trend Smoothing Filter

การประมาณการแบบโพลิโนเมียล ที่ดีกรี p สามารถแสดงเป็นสมการได้ ดังนี้

$$x[n] = a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p$$
$$x[n] = \sum_{i=0}^{p} a_i n^i \tag{3.1}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\dots,N-1\}$ โดยที่ $x[n]$ คือข้อมูลลำดับที่ n และ N เป็นจำนวนข้อมูลของ $\{x[n]\}$ ในทุกกรณีของค่า p

3.1.1 Linear Trend Smoothing Filter (กรณี $p = 1$)

เมื่อกำหนดให้ $p = 1$ จากสมการ (3.1) จะได้ว่า

$$x[n] = a_0 + a_1 n \tag{3.2}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\dots,N-1\}$ โดยที่ $x[n]$ คือข้อมูลลำดับที่ n และ N เป็นจำนวนข้อมูลของ $\{x[n]\}$ ในที่นี้สมมติว่าไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่ม ดังนั้นจากสมการ (2.2) นั่นคือ

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

เมื่อไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่มทำให้ $$y[n] = x[n] = a_0 + a_1 n \tag{3.3}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{q} b_k [a_0 + a_1(n-k)] \\ &= \sum_{k=0}^{q} (b_k a_0 + b_k a_1 n - b_k a_1 k) \\ &= (a_0 + a_1) \sum_{k=0}^{q} b_k - a_1 \sum_{k=0}^{q} k b_k \end{aligned} \tag{3.4}$$

ต้องการให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ จากสมการ (3.4) เท่ากับค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ทำให้เกิดข้อจำกัดว่า

$$\sum_{k=0}^{q} b_k = 1 \text{ และ } \sum_{k=0}^{q} k b_k = 0 \tag{3.5}$$

ต่อมาทำการหาค่า ρ ในสมการที่ (2.14) ให้มีค่าต่ำสุด (เข้าใกล้ศูนย์) เพื่อให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ มีค่าใกล้เคียงกับค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ด้วยวิธี Minimize กรณีมีข้อจำกัด ตามสมการ (3.5)

$$\min_{\substack{\sum_{k=0}^{q} b_k = 1 \\ \sum_{k}^{q} k b_k = 0}} \sum_{k=0}^{q} b_k^2 \tag{3.6}$$

ดังนั้น จึงต้องเลือกค่าสัมประสิทธิ์ b_k ที่เหมาะสม โดยใช้วิธี Lagrangian multiplier method

$$f(\underline{b}, \underline{\lambda}) = \sum_{k=0}^{q} b_k^2 + \lambda_1 \left[1 - \sum_{k=0}^{q} b_k \right] + \lambda_2 \left[\sum_{k=0}^{q} k b_k \right] \tag{3.7}$$

เมื่อ $$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}_{(q+1)\times 1} \quad \text{และ} \quad \underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

ทำการ Differential $b_m, \lambda_1, \lambda_2$ ตามลำดับ เพื่อหาค่าต่ำสุดกรณีมีข้อจำกัด แล้วกำหนดให้แต่ละสมการมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยทำการเปลี่ยนสเกล k เป็น m จะได้ว่า

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial b_m} = 2b_m - \lambda_1 + \lambda_2 m = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_1} = 1 - \sum_{k=0}^{q} b_k = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_2} = \sum_{k=0}^{q} k b_k = 0 \tag{3.10}$$

จากสมการ (3.8) จะได้ว่า

$$2b_m^\circ - \lambda_1^\circ + \lambda_2^\circ m = 0$$

$$2b_m^\circ = \lambda_1^\circ - \lambda_2^\circ m$$

$$b_m^\circ = \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2} m \tag{3.11}$$

สำหรับ $m = 0,1,\ldots,q$

เมื่อแทนค่า m เป็นค่าต่างๆ จะได้ดังนี้

$$b_0^\circ = \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(0)$$

$$b_1^\circ = \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(1)$$

$$\vdots$$

$$b_q^\circ = \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(q)$$

ให้แทนสมการ (3.11) ในข้อจำกัดที่กำหนดในสมการ (3.5) ได้ว่า

ข้อจำกัด 1: $$\sum_{k=0}^{q} b_k^\circ = 1 = \sum_{k=0}^{q} \left\{ \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(k) \right\}$$

$$1 = (q+1)\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}\right) - \left(\frac{\lambda_2^\circ}{2}\right)\sum_{k=0}^{q} k \tag{3.12}$$

ข้อจำกัด 2: $$\sum_{k=0}^{q} k b_k^\circ = 0 = \sum_{k=0}^{q} \left\{ k\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(k)\right) \right\}$$

$$0 = \left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}\right)\sum_{k=0}^{q} k - \left(\frac{\lambda_2^\circ}{2}\right)\sum_{k=0}^{q} k^2 \tag{3.13}$$

จากสมการ (3.12) และ (3.13) ทำการหาค่า $\frac{\lambda_1^\circ}{2}$ และ $\frac{\lambda_2^\circ}{2}$ ในที่นี้ทำโดยการแก้สมการ 2 ตัวแปรในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} (q+1) & -\sum_{k=0}^{q} k \\ \sum_{k=0}^{q} k & -\sum_{k=0}^{q} k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^\circ}{2} \\ \frac{\lambda_2^\circ}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^\circ}{2} \\ \frac{\lambda_2^\circ}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q+1) & -\sum_{k=0}^{q} k \\ \sum_{k=0}^{q} k & -\sum_{k=0}^{q} k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

ได้ว่า

$$\frac{\lambda_1^\circ}{2} = \frac{2(2q+1)}{q^2+3q+2} \tag{3.15}$$

$$\frac{\lambda_2^\circ}{2} = \frac{6}{q^2+3q+2} \tag{3.16}$$

ให้นำค่า $\frac{\lambda_1^\circ}{2}$, $\frac{\lambda_2^\circ}{2}$ จากสมการ (3.15) และ (3.16) ไปแทนในสมการ (3.10) เพื่อหาค่า b_m° ได้ว่า

$$b_m^\circ = \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2} m$$

$$= \frac{2(2q+1)}{q^2+3q+2} - \frac{6m}{q^2+3q+2}$$

$$= \frac{4q+2-6m}{q^2+3q+2} \tag{3.17}$$

สำหรับ $m = 0,1,2,\ldots,q$

สุดท้ายค่าการคาดคะเน $y[n]$ ได้จากการนำค่า b_m° สมการ (3.17) แทนในสมการ (2.2) ดังนี้

$$y[n] = \sum_{m=0}^{q} b_m \cdot x[n-m]$$
$$= \frac{2}{q^2+3q+2}\sum_{m=0}^{q}\left(2q+1-3m\right)\cdot x[n-m] \quad (3.18)$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อ $y[n]$ คือค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $x[n-m]$ คือข้อมูลลำดับที่ n โดย m มีจำนวน q เทอมตั้งแต่ $m = 0,1,2,...,q$

3.1.2 Quadratic Trend Smoothing Filter (กรณีที่ p = 2)

เมื่อกำหนดให้ p = 2 จากสมการ (3.1) จะได้ว่า

$$x[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 \quad (3.19)$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ โดยที่ $x[n]$ คือข้อมูลลำดับที่ n และ N เป็นจำนวนข้อมูลของ $\{x[n]\}$ ในที่นี้สมมติว่าไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่ม ดังนั้นจากสมการ (2.2) นั่นคือ

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

เมื่อไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่มทำให้

$$y[n] = x[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 \quad (3.20)$$

จะได้ว่า
$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$
$$= \sum_{k=0}^{q} b_k [a_0 + a_1(n-k) + a_2(n-k)^2]$$
$$= \sum_{k=0}^{q} b_k [a_0 + a_1(n-k) + a_2(n^2 - 2nk + k^2)]$$
$$= \sum_{k=0}^{q} (a_0 b_k + a_1 n b_k - a_1 k b_k + a_2 n^2 b_k - 2a_2 nk b_k + a_2 k^2 b_k)$$
$$= (a_0 + a_1 n + a_2 n^2)\sum_{k=0}^{q} b_k - (a_1 + 2a_2 n)\sum_{k=0}^{q} k b_k + a_2 \sum_{k=0}^{q} k^2 b_k \quad (3.21)$$

ต้องการให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ จากสมการ (3.21) เท่ากับค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ทำให้เกิดข้อจำกัดว่า

$$\sum_{k=0}^{q} b_k = 1,\ \sum_{k=0}^{q} k b_k = 0 \text{ และ } \sum_{k=0}^{q} k^2 b_k = 0 \quad (3.22)$$

ต่อมาทำการหาค่า ρ ในสมการที่ (2.14) ให้มีค่าต่ำสุด (เข้าใกล้ศูนย์) เพื่อให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ ใกล้เคียงค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ด้วยวิธี Minimize กรณีมีข้อจำกัด ตามสมการ (3.22)

$$\min_{\substack{\sum_{k=0}^{q} b_k = 1 \\ \sum_{k=0}^{q} k b_k = 0 \\ \sum_{k=0}^{q} k^2 b_k = 0}} \sum_{k=0}^{q} b_k^2 \tag{3.23}$$

ดังนั้นจึงต้องเลือกค่าสัมประสิทธิ์ b_k ที่เหมาะสม โดยใช้วิธี Lagrangian multiplier method

$$f(\underline{b},\underline{\lambda}) = \sum_{k=0}^{q} b_k^2 + \lambda_1\left[1-\sum_{k=0}^{q} b_k\right] + \lambda_2\left[\sum_{k=0}^{q} k b_k\right] + \lambda_3\left[\sum_{k=0}^{q} k^2 b_k\right] \tag{3.24}$$

เมื่อ $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}_{(q+1)\times 1}$ และ $\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

ทำการ Differential $b_m, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ตามลำดับ เพื่อหาค่าต่ำสุดกรณีมีข้อจำกัด แล้วกำหนดให้แต่ละสมการมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยทำการเปลี่ยนสเกล k เป็น m จะได้ว่า

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial b_m} = 2b_m - \lambda_1 + \lambda_2 m + \lambda_m m^2 = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_1} = 1-\sum_{k=0}^{q} b_k = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_2} = \sum_{k=0}^{q} k b_k = 0 \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_3} = \sum_{k=0}^{q} k^2 b_k = 0 \tag{3.28}$$

จากสมการ (3.25) จะได้ว่า

$$2b_m^{\circ} - \lambda_1^{\circ} + \lambda_2^{\circ} m + \lambda_3^{\circ} m^2 = 0$$

$$2b_m^{\circ} = \lambda_1^{\circ} - \lambda_2^{\circ} m - \lambda_3^{\circ} m^2$$

$$b_m^{\circ} = \frac{\lambda_1^{\circ}}{2} - \frac{\lambda_2^{\circ}}{2} m - \frac{\lambda_3^{\circ}}{2} m^2 \tag{3.29}$$

สำหรับ $m = 0,1,\ldots,q$

เมื่อแทนค่า m เป็นค่าต่างๆ จะได้ดังนี้

$$b_0^{\circ} = \frac{\lambda_1^{\circ}}{2} - \frac{\lambda_2^{\circ}}{2}(0) - \frac{\lambda_3^{\circ}}{2}(0^2)$$

$$b_1^{\circ} = \frac{\lambda_1^{\circ}}{2} - \frac{\lambda_2^{\circ}}{2}(1) - \frac{\lambda_3^{\circ}}{2}(1^2)$$

$$\vdots$$

$$b_q^{\circ} = \frac{\lambda_1^{\circ}}{2} - \frac{\lambda_2^{\circ}}{2}(q) - \frac{\lambda_3^{\circ}}{2}(q^2)$$

จากนั้นแทนสมการ (3.29) ในข้อจำกัดที่กำหนดในสมการ (3.22) ได้ว่า

ข้อจำกัด 1: $\sum_{k=0}^{q} b_k^{\circ} = 1 = \sum_{k=0}^{q} \left\{ \frac{\lambda_1^{\circ}}{2} - \frac{\lambda_2^{\circ}}{2}(k) - \frac{\lambda_3^{\circ}}{2}(k^2) \right\}$

$$1 = (q+1)\left(\frac{\lambda_1^{\circ}}{2}\right) - \left(\sum_{k=0}^{q} k\right)\left(\frac{\lambda_2^{\circ}}{2}\right) - \left(\sum_{k=0}^{q} k^2\right)\left(\frac{\lambda_3^{\circ}}{2}\right) \tag{3.30}$$

ข้อจำกัด 2: $\sum_{k=0}^{q} k b_k^{\circ} = 0 = \sum_{k=0}^{q} \left\{ k\left(\frac{\lambda_1^{\circ}}{2} - \frac{\lambda_2^{\circ}}{2}(k) - \frac{\lambda_3^{\circ}}{2}(k^2) \right) \right\}$

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{q} k\right)\left(\frac{\lambda_1^{\circ}}{2}\right) - \left(\sum_{k=0}^{q} k^2\right)\left(\frac{\lambda_2^{\circ}}{2}\right) - \left(\sum_{k=0}^{q} k^3\right)\left(\frac{\lambda_3^{\circ}}{2}\right) \tag{3.31}$$

ข้อจำกัด 3: $\sum_{k=0}^{q} k^2 b_k^{\circ} = 0 = \sum_{k=0}^{q} \left\{ k^2\left(\frac{\lambda_1^{\circ}}{2} - \frac{\lambda_2^{\circ}}{2}(k) - \frac{\lambda_3^{\circ}}{2}(k^2) \right) \right\}$

$$0=\left(\sum_{k=0}^{q}k^{2}\right)\left(\frac{\lambda_1^{\circ}}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^{3}\right)\left(\frac{\lambda_2^{\circ}}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^{4}\right)\left(\frac{\lambda_3^{\circ}}{2}\right) \tag{3.32}$$

จากสมการ (3.30), (3.31) และ (3.32) หาค่า $\frac{\lambda_1^{\circ}}{2}$, $\frac{\lambda_2^{\circ}}{2}$ และ $\frac{\lambda_3^{\circ}}{2}$ ในที่นี้ทำการแก้สมการ 3 ตัวแปรในรูปแบบเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} (q+1) & -\sum_{k=0}^{q}k & -\sum_{k=0}^{q}k^{2} \\ \sum_{k=0}^{q}k & -\sum_{k=0}^{q}k^{2} & -\sum_{k=0}^{q}k^{3} \\ \sum_{k=0}^{q}k^{2} & -\sum_{k=0}^{q}k^{3} & -\sum_{k=0}^{q}k^{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^{\circ}}{2} \\ \frac{\lambda_2^{\circ}}{2} \\ \frac{\lambda_3^{\circ}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^{\circ}}{2} \\ \frac{\lambda_2^{\circ}}{2} \\ \frac{\lambda_3^{\circ}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (q+1) & -\sum_{k=0}^{q}k & -\sum_{k=0}^{q}k^{2} \\ \sum_{k=0}^{q}k & -\sum_{k=0}^{q}k^{2} & -\sum_{k=0}^{q}k^{3} \\ \sum_{k=0}^{q}k^{2} & -\sum_{k=0}^{q}k^{3} & -\sum_{k=0}^{q}k^{4} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

จากสมการที่ (3.33) จะได้ว่า
$$\frac{\lambda_1^{\circ}}{2}=\frac{3(3q^{2}+3q+2)}{q^{3}+6q^{2}+11q+6} \tag{3.34}$$
$$\frac{\lambda_2^{\circ}}{2}=\frac{18(2q+1)}{q^{3}+6q^{2}+11q+6} \tag{3.35}$$
$$\frac{\lambda_3^{\circ}}{2}=\frac{-30}{q^{3}+6q^{2}+11q+6} \tag{3.36}$$

ให้นำค่า $\frac{\lambda_1^{\circ}}{2}$, $\frac{\lambda_2^{\circ}}{2}$ และ $\frac{\lambda_3^{\circ}}{2}$ จากสมการ (3.34), (3.35) และ (3.36) ไปแทนในสมการ (3.10) เพื่อหาค่า b_m° ได้ว่า

$$b_m^{\circ}=\frac{\lambda_1^{\circ}}{2}-\frac{\lambda_2^{\circ}}{2}m-\frac{\lambda_3^{\circ}}{2}m^{2}$$
$$b_m^{\circ}=\frac{3(3q^{2}+3q+2)-18(2q+1)m+30m^{2}}{q^{3}+6q^{2}+11q+6}$$

$$b_m^{\circ}=\frac{3(3q^{2}+3q+2-6(2q+1)m+10m^{2})}{q^{3}+6q^{2}+11q+6} \tag{3.37}$$

เมื่อ $m = 0,1,2,\ldots,q$

สุดท้ายค่าการคาดคะเน $y[n]$ ได้จากการนำค่า b_m° สมการ (3.37) แทนในสมการ (2.2) ดังนี้

$$y[n] = \sum_{m=0}^{q} b_m \cdot x[n-m]$$

$$= \sum_{m=0}^{q} \left\{ \frac{3(3q^2+3q+2-6(2q+1)m+10m^2)}{q^3+6q^2+11q+6} \right\} \cdot x[n-m]$$

$$= \frac{3}{q^3+6q^2+11q+6} \sum_{m=0}^{q} \left(3q^2+3q+2-(12q+6)m+10m^2\right) \cdot x[n-m] \qquad (3.38)$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อ $y[n]$ คือค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $x[n-m]$ คือข้อมูลลำดับที่ n โดย m มีจำนวน q เทอมตั้งแต่ $m = 0,1,2,\ldots,q$

3.2.3 Cubic Trend Smoothing Filter (กรณีที่ $p = 3$)

เมื่อกำหนดให้ $p = 3$ จากสมการที่ (3.1) จะได้ว่า

$$x[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \qquad (3.39)$$

ในที่นี้สมมติว่าไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่ม ดังนั้นจากสมการ (2.2) นั่นคือ

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

เมื่อไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่มทำให้

$$y[n] = x[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \qquad (3.40)$$

จะได้ว่า

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{q} b_k [a_0 + a_1(n-k) + a_2(n-k)^2 + a_3(n-k)^3)]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k [a_0 + a_1(n-k) + a_2(n^2-2nk+k^2) + a_3(n^3-3n^2k+3nk^2-k^3)]$$

$$= (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3) \sum_{k=0}^{q} b_k - (a_1 + 2a_2 n + 3a_3 n^2) \sum_{k=0}^{q} k b_k$$

$$+\ (a_2+3a_3n)\sum_{k=0}^{q}k^2b_k - a_3\sum_{k=0}^{q}k^3b_k \tag{3.41}$$

ต้องการให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ จากสมการ (3.41) เท่ากับค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ทำให้เกิดข้อจำกัดว่า

$$\sum_{k=0}^{q}b_k=1,\ \sum_{k=0}^{q}kb_k=0,\ \sum_{k=0}^{q}k^2b_k=0 \text{ และ } \sum_{k=0}^{q}k^3b_k=0 \tag{3.42}$$

ต่อมาทำการหาค่า ρ ในสมการที่ (2.14) ให้มีค่าต่ำสุด (เข้าใกล้ศูนย์) เพื่อให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ ใกล้เคียงค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ด้วยวิธี Minimize กรณีมีข้อจำกัด จากสมการ (3.41)

$$\min_{\substack{\sum_{k=0}^{q}b_k=1\\ \sum_{k=0}^{q}kb_k=0\\ \sum_{k=0}^{q}k^2b_k=0\\ \sum_{k=0}^{q}k^3b_k=0}} \sum_{k=0}^{q}b_k^2 \tag{3.43}$$

ดังนั้นจึงต้องเลือกค่าสัมประสิทธิ์ b_k ที่เหมาะสม โดยใช้วิธี Lagrangian multiplier method

$$f(\underline{b},\underline{\lambda})=\sum_{k=0}^{q}b_k^2+\lambda_1\left[1-\sum_{k=0}^{q}b_k\right]+\lambda_2\left[\sum_{k=0}^{q}kb_k\right]+\lambda_3\left[\sum_{k=0}^{q}k^2b_k\right]+\lambda_4\left[\sum_{k=0}^{q}k^3b_k\right] \tag{3.44}$$

เมื่อ
$$\underline{b}=\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_q\end{bmatrix}_{(q+1)\times1} \quad \text{และ} \quad \underline{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}_{4\times1}$$

ทำการ Differential $b_m,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ ตามลำดับ เพื่อหาค่าต่ำสุดกรณีมีข้อจำกัด แล้วกำหนดให้แต่ละสมการมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยทำการเปลี่ยนสเกล k เป็น m จะได้ว่า

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial b_m} = 2b_m - \lambda_1 + \lambda_2 m + \lambda_3 m^2 + \lambda_4 m^3 = 0 \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_1} = 1 - \sum_{k=0}^{q} b_k = 0 \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_2} = \sum_{k=0}^{q} k b_k = 0 \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_3} = \sum_{k=0}^{q} k^2 b_k = 0 \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_4} = \sum_{k=0}^{q} k^3 b_k = 0 \tag{3.49}$$

จากสมการที่ (3.45) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2b_m^\circ - \lambda_1^\circ + \lambda_2^\circ m + \lambda_3^\circ m^2 + \lambda_4^\circ m^3 &= 0 \\ 2b_m^\circ &= \lambda_1^\circ - \lambda_2^\circ m - \lambda_3^\circ m^2 - \lambda_4^\circ m^3 \\ b_m^\circ &= \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2} m - \frac{\lambda_3^\circ}{2} m^2 - \frac{\lambda_4^\circ}{2} m^3 \end{aligned} \tag{3.50}$$

สำหรับ $m = 0,1,\ldots,q$

เมื่อแทนค่า m เป็นค่าต่างๆ จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} b_0^\circ &= \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(0) - \frac{\lambda_3^\circ}{2}(0^2) - \frac{\lambda_4^\circ}{2}(0^3) \\ b_1^\circ &= \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(1) - \frac{\lambda_3^\circ}{2}(1^2) - \frac{\lambda_4^\circ}{2}(1^3) \\ &\vdots \\ b_q^\circ &= \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(q) - \frac{\lambda_3^\circ}{2}(q^2) - \frac{\lambda_4^\circ}{2}(q^3) \end{aligned}$$

จากนั้นแทนสมการ (3.50) ในข้อจำกัดที่กำหนดในสมการ (3.42) ได้ว่า

ข้อจำกัด 1: $\sum_{k=0}^{q} b_k^\circ = 1 = \sum_{k=0}^{q} \left\{ \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}(k) - \frac{\lambda_3^\circ}{2}(k^2) - \frac{\lambda_4^\circ}{2}(k^3) \right\}$

$$1=(q+1)\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}\right)-\left(\frac{\lambda_2^\circ}{2}\right)\sum_{k=0}^{q}k-\left(\frac{\lambda_3^\circ}{2}\right)\sum_{k=0}^{q}k^2-\left(\frac{\lambda_4^\circ}{2}\right)\sum_{k=0}^{q}k^3 \tag{3.51}$$

ข้อจำกัด 2: $\sum_{k=0}^{q}kb_k^\circ=0=\sum_{k=0}^{q}\left\{k\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}-\frac{\lambda_2^\circ}{2}(k)-\frac{\lambda_3^\circ}{2}(k^2)-\frac{\lambda_4^\circ}{2}(k^3)\right)\right\}$

$$0=\left(\sum_{k=0}^{q}k\right)\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^2\right)\left(\frac{\lambda_2^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^3\right)\left(\frac{\lambda_3^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^4\right)\left(\frac{\lambda_4^\circ}{2}\right) \tag{3.52}$$

ข้อจำกัด 3: $\sum_{k=0}^{q}k^2b_k^\circ=0=\sum_{k=0}^{q}\left\{k^2\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}-\frac{\lambda_2^\circ}{2}(k)-\frac{\lambda_3^\circ}{2}(k^2)-\frac{\lambda_4^\circ}{2}(k^3)\right)\right\}$

$$0=\left(\sum_{k=0}^{q}k^2\right)\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^3\right)\left(\frac{\lambda_2^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^4\right)\left(\frac{\lambda_3^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^5\right)\left(\frac{\lambda_4^\circ}{2}\right) \tag{3.53}$$

ข้อจำกัด 4: $\sum_{k=0}^{q}k^3b_k^\circ=0=\sum_{k=0}^{q}\left\{k^3\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}-\frac{\lambda_2^\circ}{2}(k)-\frac{\lambda_3^\circ}{2}(k^2)-\frac{\lambda_4^\circ}{2}(k^3)\right)\right\}$

$$0=\left(\sum_{k=0}^{q}k^3\right)\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^4\right)\left(\frac{\lambda_2^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^5\right)\left(\frac{\lambda_3^\circ}{2}\right)-\left(\sum_{k=0}^{q}k^6\right)\left(\frac{\lambda_4^\circ}{2}\right) \tag{3.54}$$

จากสมการ (3.51), (3.52), (3.53) และ (3.54) หาค่า $\frac{\lambda_1^\circ}{2},\frac{\lambda_2^\circ}{2},\frac{\lambda_3^\circ}{2}$ และ $\frac{\lambda_4^\circ}{2}$ **ในที่นี้ได้ทำการแก้สม**การ 4 ตัวแปรในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix}(q+1) & -\sum_{k=0}^{q}k & -\sum_{k=0}^{q}k^2 & -\sum_{k=0}^{q}k^3\\ \sum_{k=0}^{q}k & -\sum_{k=0}^{q}k^2 & -\sum_{k=0}^{q}k^3 & -\sum_{k=0}^{q}k^4\\ \sum_{k=0}^{q}k^2 & -\sum_{k=0}^{q}k^3 & -\sum_{k=0}^{q}k^4 & -\sum_{k=0}^{q}k^5\\ \sum_{k=0}^{q}k^3 & -\sum_{k=0}^{q}k^4 & -\sum_{k=0}^{q}k^5 & -\sum_{k=0}^{q}k^6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\lambda_1^\circ}{2}\\ \frac{\lambda_2^\circ}{2}\\ \frac{\lambda_3^\circ}{2}\\ \frac{\lambda_4^\circ}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^\circ}{2} \\ \frac{\lambda_2^\circ}{2} \\ \frac{\lambda_3^\circ}{2} \\ \frac{\lambda_4^\circ}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q+1) & -\sum_{k=0}^{q} k & -\sum_{k=0}^{q} k^2 & -\sum_{k=0}^{q} k^3 \\ \sum_{k=0}^{q} k & -\sum_{k=0}^{q} k^2 & -\sum_{k=0}^{q} k^3 & -\sum_{k=0}^{q} k^4 \\ \sum_{k=0}^{q} k^2 & -\sum_{k=0}^{q} k^3 & -\sum_{k=0}^{q} k^4 & -\sum_{k=0}^{q} k^5 \\ \sum_{k=0}^{q} k^3 & -\sum_{k=0}^{q} k^4 & -\sum_{k=0}^{q} k^5 & -\sum_{k=0}^{q} k^6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

จากสมการที่ (3.55) จะได้ว่า

$$\frac{\lambda_1^\circ}{2} = \frac{8(2q^3+3q^2+7q+3)}{q^4+10q^3+35q^2+50q+24} \quad (3.56)$$

$$\frac{\lambda_2^\circ}{2} = \frac{20(6q^2+6q+5)}{q^4+10q^3+35q^2+50q+24} \quad (3.57)$$

$$\frac{\lambda_3^\circ}{2} = \frac{-120(2q+1)}{q^4+10q^3+35q^2+50q+24} \quad (3.58)$$

$$\frac{\lambda_4^\circ}{2} = \frac{140}{q^4+10q^3+35q^2+50q+24} \quad (3.59)$$

ให้นำค่า $\frac{\lambda_1^\circ}{2}$, $\frac{\lambda_2^\circ}{2}$, $\frac{\lambda_3^\circ}{2}$ และ $\frac{\lambda_4^\circ}{2}$ จากสมการ (3.56), (3.57), (3.58) และ (3.59) ไปแทนในสมการ (3.50) เพื่อหาค่า b_m° ได้ว่า

$$b_m^\circ = \frac{\lambda_1^\circ}{2} - \frac{\lambda_2^\circ}{2}m - \frac{\lambda_3^\circ}{2}m^2 - \frac{\lambda_4^\circ}{2}m^3$$

$$= \frac{8(2q^3+3q^2+7q+3) - 20(6q^2+6q+5)m + 120(2q+1)m^2 - 140m^3}{q^4+10q^3+35q^2+50q+24} \quad (3.60)$$

เมื่อ $m = 0,1,2,\ldots,q$

สุดท้ายค่าการคาดคะเน $y[n]$ ได้จากการนำค่า b_m° สมการ (3.60) แทนในสมการ (2.2) ได้ว่า

$$y[n] = \sum_{m=0}^{q} b_m \cdot x[n-m]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{q} \left\{ \frac{8(2q^3+3q^2+7q+3) - 20(6q^2+6q+5)m + 120(2q+1)m^2 - 140m^3}{q^4+10q^3+35q^2+50q+24} \right\} \cdot x[n-m] \quad (3.61)$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อ $y[n]$ คือค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $x[n-m]$ คือข้อมูลลำดับที่ n โดย m มีจำนวน q เทอมตั้งแต่ $m = 0,1,2,\ldots,q$

3.2 Exponential Trend Smoothing Filter

การประมาณการแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล สามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$x[n] = c_0 d_0^n \tag{3.62}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ โดยที่ $x[n]$ คือข้อมูลลำดับที่ n และ N เป็นจำนวนข้อมูลของ $\{x[n]\}$ ในที่นี้สมมติว่าไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่ม ดังนั้นจากสมการ (2.2) นั่นคือ

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

เมื่อไม่มีสัญญาณรบกวนสุ่มทำให้

$$y[n] = x[n] = c_0 d_0^n \tag{3.63}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{q} b_k [c_0 d_0^{(n-k)}] \\ &= (c_0 d_0^n) \sum_{k=0}^{q} b_k d_0^{-k} \end{aligned} \tag{3.64}$$

ต้องการให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ จากสมการ (3.64) เท่ากับค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ทำให้เกิดข้อจำกัดว่า

$$\sum_{k=0}^{q} b_k d_0^{-k} = 1 \tag{3.65}$$

ต่อมาทำการหาค่า ρ ในสมการที่ (2.14) ให้มีค่าต่ำสุด (เข้าใกล้ศูนย์) เพื่อให้ค่าการคาดคะเน $y[n]$ ใกล้เคียงค่าข้อมูลจริง $x[n]$ ด้วยวิธี Minimize กรณีมีข้อจำกัด จากสมการ (3.65)

$$\min_{\sum_{k=0}^{q} b_k d_0^{-k} = 1} \sum_{k=0}^{q} b_k^2 \tag{3.66}$$

ดังนั้นจึงต้องเลือกค่าสัมประสิทธิ์ b_k ที่เหมาะสม โดยใช้วิธี Lagrangian multiplier method

$$f(\underline{b},\underline{\lambda}) = \sum_{k=0}^{q} b_k^2 + \lambda\left[1 - \sum_{k=0}^{q} b_k d_0^{-k}\right] \tag{3.67}$$

เมื่อ $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}_{(q+1)\times 1}$ และ $\underline{\lambda} = [\lambda]_{1\times 1}$

ทำการ Differential b_m, λ ตามลำดับ เพื่อหาค่าต่ำสุดกรณีมีข้อจำกัด แล้วกำหนดให้แต่ละสมการมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยทำการเปลี่ยนสเกล k เป็น m จะได้ว่า

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial b_m} = 2b_m - \lambda d_0^{-m} = 0 \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial f(\underline{b},\underline{\lambda})}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{k=0}^{q} b_k d_0^{-k} = 0 \tag{3.69}$$

จากสมการที่ (3.68) จะได้ว่า

$$2b_m^{\circ} - \lambda^{\circ} d_0^{-m} = 0$$

$$2b_m^{\circ} = \lambda^{\circ} d_0^{-m}$$

$$b_m^{\circ} = \frac{\lambda^{\circ}}{2} d_0^{-m} \tag{3.70}$$

สำหรับ $m = 0,1,\ldots,q$

เมื่อแทนค่า m เป็นค่าต่างๆ จะได้ดังนี้

$$b_0^{\circ} = \frac{\lambda^{\circ} d_0^{-0}}{2}$$

$$b_1^{\circ} = \frac{\lambda^{\circ} d_0^{-1}}{2}$$

$$\vdots$$

$$b_q^{\circ} = \frac{\lambda^{\circ} d_0^{-q}}{2}$$

จากนั้นแทนสมการ (3.70) ในข้อจำกัดที่กำหนดในสมการ (3.65) ได้ว่า

ข้อจำกัด : $$\sum_{k=0}^{q} b_k^{\circ} d_0^{-k} = 1 = \sum_{k=0}^{q}\left\{\frac{\lambda^{\circ}}{2}(d_0)^{-k}\right\}(d_0)^{-k}$$

$$1 = \left(\frac{\lambda^{\circ}}{2}\right)\sum_{k=0}^{q}(d_0)^{-2k}$$

ดังนั้น $$\frac{\lambda^{\circ}}{2} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{q}(d_0)^{-2k}} \qquad \text{เมื่อค่า } d_0 \neq 0 \tag{3.71}$$

นำค่า $\frac{\lambda^{\circ}}{2}$ จากสมการ (3.71) ไปแทนในสมการ (3.70) เพื่อหาค่า b_m° ได้ว่า

$$b_m^{\circ} = \frac{\lambda^{\circ}}{2} d_0^{-m} = \frac{d_0^{-m}}{\sum_{k=0}^{q}(d_0)^{-2k}} \tag{3.72}$$

เมื่อ $m = 0,1,2,\ldots,q$

สุดท้ายค่าการคาดคะเน $y[n]$ ได้จากการนำค่า b_m° สมการ (3.72) แทนในสมการ (2.2) ดังนั้น

$$y[n] = \sum_{m=0}^{q} b_m \cdot x[n-m]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{q}\left\{\frac{d_0^{-m}}{\sum_{k=0}^{q}(d_0)^{-2k}}\right\}\cdot x[n-m] \tag{3.73}$$

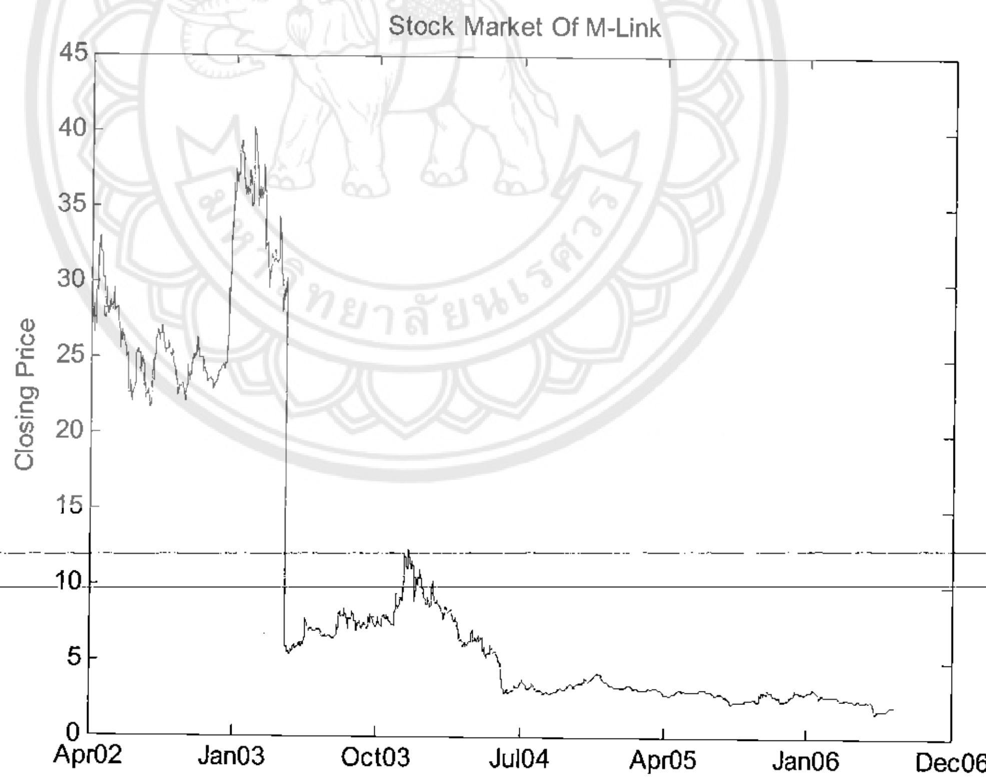
สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อ $y[n]$ คือค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $x[n-m]$ คือข้อมูลลำดับที่ n โดย m มีจำนวน q เทอมตั้งแต่ $m = 0,1,2,\ldots,q$

จากสมการ (3.73) เห็นได้ว่าค่าการคาดคะเน $y[n]$ แบบเอ็กซ์โปเนนเชียลนั้นขึ้นอยู่กับค่าคงที่ d_0 ดังนั้นการเลือก d_0 ที่เหมาะสมสามารถหาได้จากการหาค่าคำตอบของผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (The sum of squared errors) สำหรับขั้นตอนการหาคำตอบที่เหมาะสมของ d_0° ได้กล่าวมาแล้วในบทที่สอง [2.5 วิธีการหาคำตอบพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับ Exponential model]

บทที่ 4

ผลการทดลอง

ในบทนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ข้อมูลทั้ง 5 กรณี กล่าวคือกรณีที่ 1 เป็นการใช้รูปแบบวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter) กรณีที่ 2 ใช้เทคนิควิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง (Linear trend smoothing filter) กรณีที่ 3 ใช้เทคนิควิธีการทำให้เรียบรูปแบบโพลิโนเมียลดีกรีสอง (Quadratic trend smoothing filter) กรณีที่ 4 ใช้เทคนิควิธีการทำให้เรียบรูปแบบโพลิโนเมียลดีกรีสาม (Cubic trend smoothing filter) และกรณีที่ 5 ใช้เทคนิควิธีการทำให้เรียบรูปแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential trend smoothing filter) โดยใช้ข้อมูลหุ้นราคาปิดของบริษัท M-Link ตั้งแต่เดือนเมษายนปี พ.ศ. 2545 ถึงเดือนตุลาคม ปี พ.ศ. 2549 ดังรูปที่ 4.1 โดยที่ทุกวิธีใช้ q เท่ากับ 10, 25, 40, 55 และ 70 ในการตรวจสอบประสิทธิภาพการคาดคะเนแต่ละกรณีนั้นดูได้จากค่า MSE (Mean Square Error) และค่า MAE (Mean Absolute Error) ซึ่งจะทำการแสดงค่าเปรียบเทียบกันไว้ในตารางของแต่ละวิธี



รูปที่ 4.1 ข้อมูลหุ้นของบริษัท M-Link

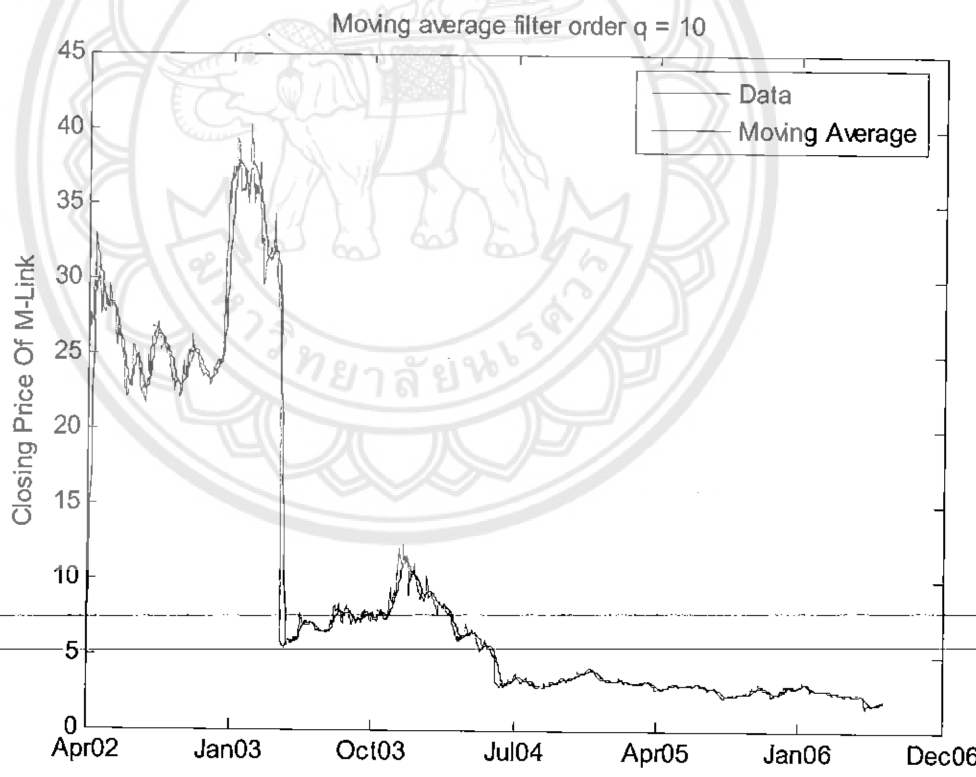
4.1 ผลการพยากรณ์ข้อมูลแบบ Moving Average Filter

ในที่นี้เป็นการพยากรณ์ข้อมูล โดยใช้รูปแบบ Moving average filter ดังสมการ

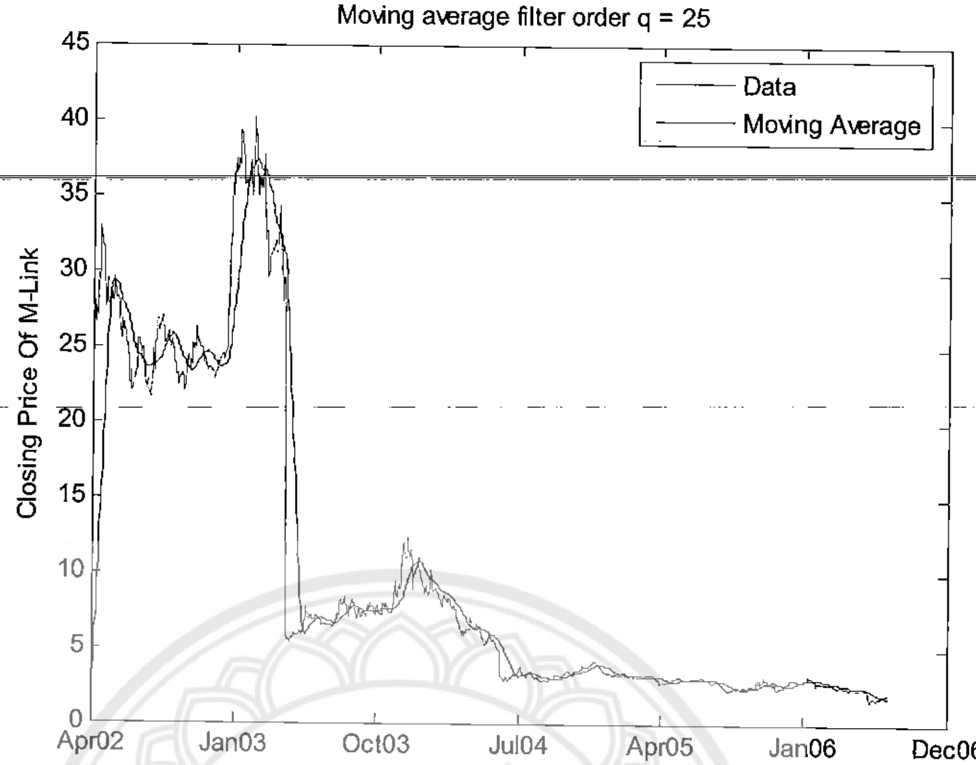
$$y[n] = \frac{1}{q+1}\sum_{k=0}^{q} x[n-k] \tag{4.1}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อข้อมูล $\{y[n]\}$ เป็นค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $\{x[n]\}$ เป็นข้อมูลจริงลำดับที่ n ในการทดลองนี้ได้กำหนดให้ใช้ค่า q เท่ากับ 10, 25, 40, 55, 70 ตามลำดับ เพื่อที่จะวัดประสิทธิภาพของต้นแบบและดูลักษณะของตัวคาดคะเนจากสายตาตามลำดับของ q

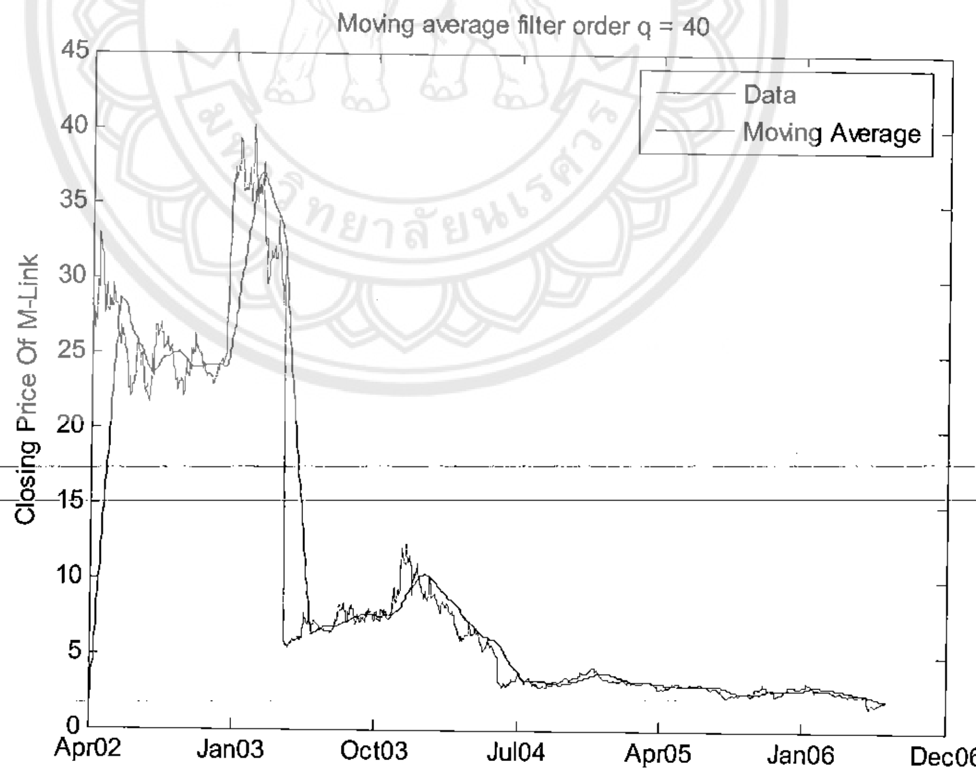
ผลการทดลองของวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่จะแสดงดังรูปที่ 4.2 – 4.6 จากรูปเส้นสีน้ำเงิน คือ ข้อมูลจริง และ เส้นสีแดง คือ วิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่และแสดงค่า MSE และ ค่า MAE ของกรณีต่างๆรวมอยู่ในตารางที่ 4.1



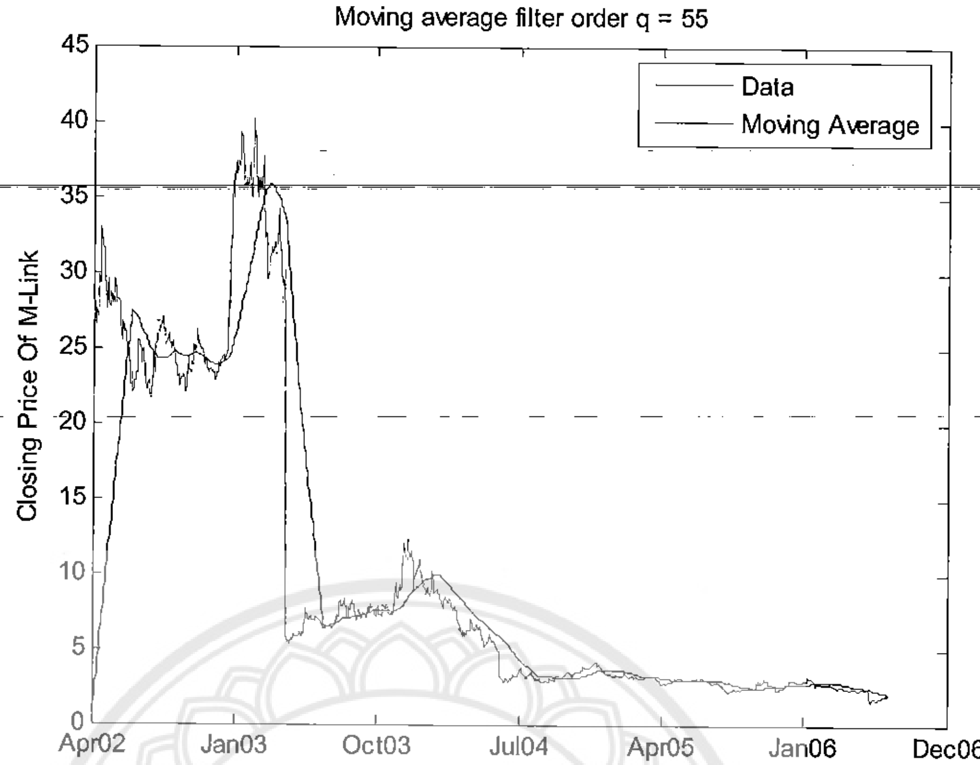
รูปที่ 4.2 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Moving average filter เมื่อ $q = 10$



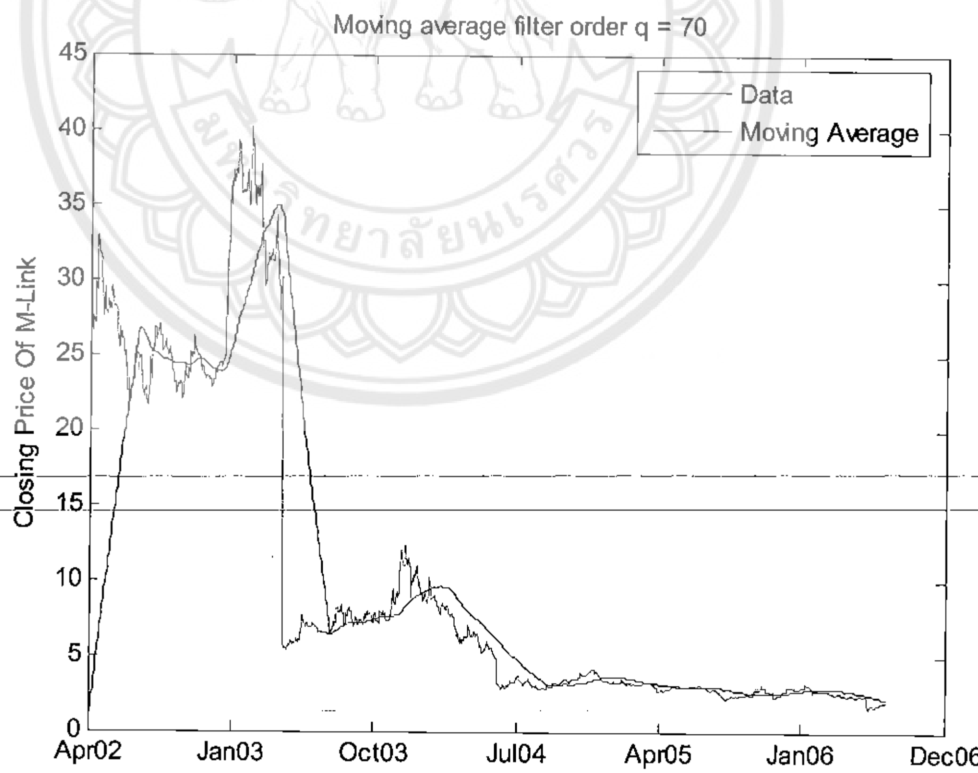
รูปที่ 4.3 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Moving average filter เมื่อ $q = 25$



รูปที่ 4.4 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Moving average filter เมื่อ $q = 40$



รูปที่ 4.5 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Moving average filter เมื่อ $q = 55$



รูปที่ 4.6 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Moving average filter เมื่อ $q = 70$

ตารางที่ 4.1 สรุปค่าความคลาดเคลื่อนของ Moving average filter ที่ q ต่างๆ

Moving average filter		
q	MSE	MAE
10	4.5414	0.6644
25	12.7313	1.2864
40	20.6971	1.8031
55	28.5816	2.2547
70	35.9452	2.6257

จากรูปที่ 4.2 เมื่อกำหนดค่า q เท่ากับ 10 เส้นกราฟของวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter) มีความใกล้เคียงกับเส้นกราฟข้อมูลจริงมากที่สุด เมื่อทำการเพิ่ม q มากขึ้นในรูปที่ 4.3 – 4.6 เส้นกราฟก็เกิด Delay มากขึ้น และเมื่อดูค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE จากตารางที่ 4.1 ที่ q เท่ากับ 10 มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด และเมื่อเปรียบเทียบทั้ง 2 ค่า จะเห็นว่า ค่า MAE มีค่าน้อยกว่าค่า MSE

4.2 ผลการพยากรณ์ข้อมูลแบบ Polynomial Trend Smoothing Filter

แบ่งออกเป็น 3 กรณี คือ

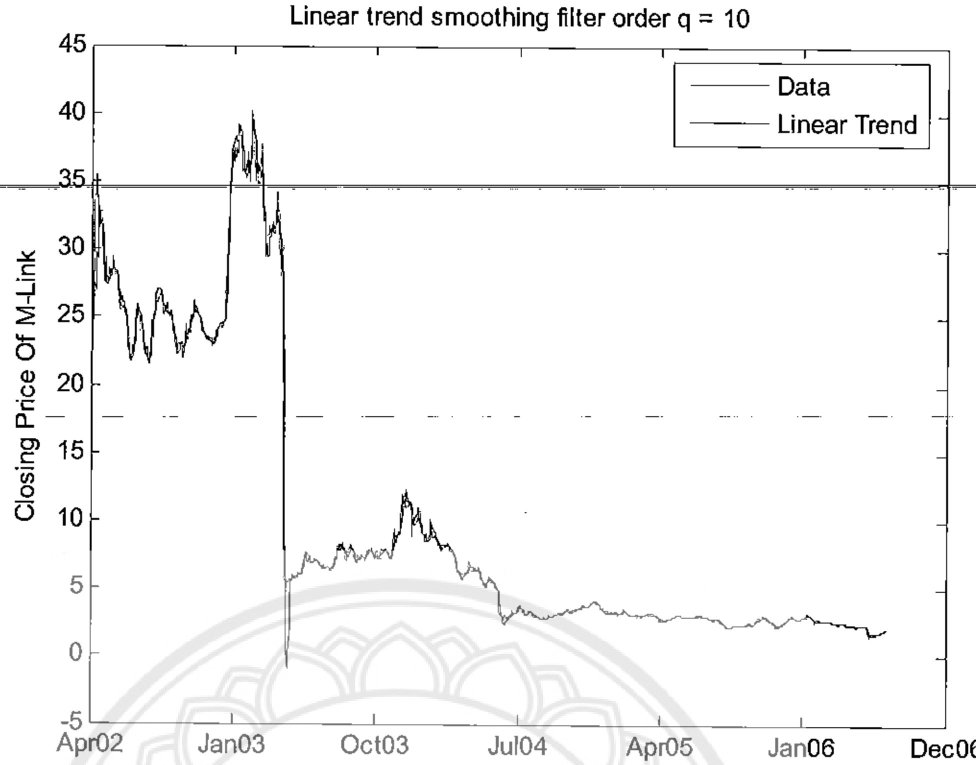
4.2.1 ผลการพยากรณ์ข้อมูลแบบ Linear Trend Smoothing Filter

การพยากรณ์ข้อมูล ใช้รูปแบบของ Linear trend smoothing filter ดังสมการ

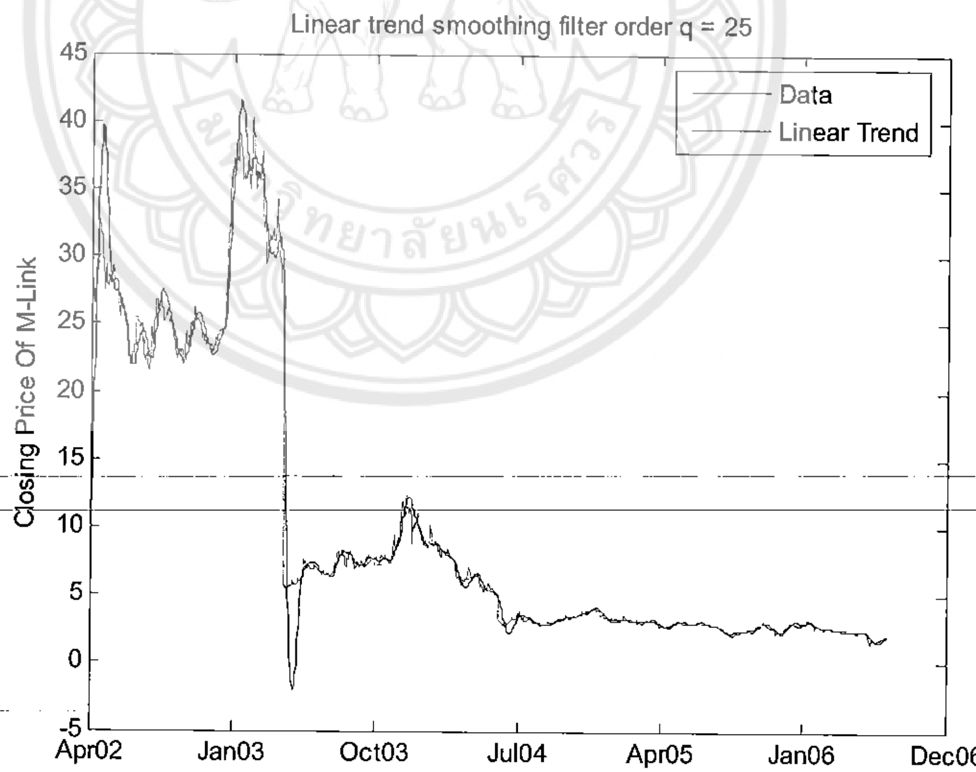
$$y[n] = \frac{1}{q^2+3q+2}\sum_{m=0}^{q}(4q+2-6m)\cdot x[n-m] \tag{4.2}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อข้อมูล $\{y[n]\}$ เป็นค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $\{x[n]\}$ เป็นข้อมูลจริงลำดับที่ n ในการทดลองนี้ได้กำหนดให้ใช้ค่า q เท่ากับ 10, 25, 40, 55, 70 ตามลำดับ เพื่อที่จะวัดประสิทธิภาพของตัวต้นแบบและดูลักษณะของตัวคาดคะเนจากสายตาตามลำดับของ q

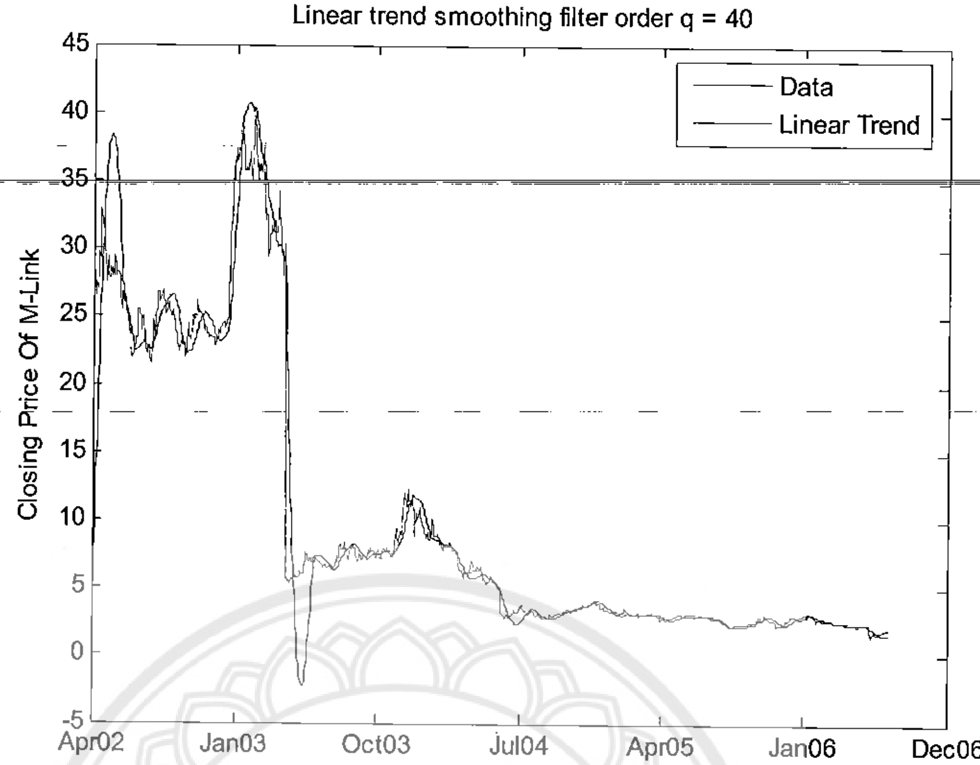
ผลการทดลองของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่งจะแสดงดังรูปที่ 4.7 – 4.11 ในรูปเส้นสีน้ำเงิน คือ ข้อมูลจริง และ เส้นสีแดง คือ วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง และแสดงค่า MSE และ ค่า MAE ของกรณีต่างๆรวมอยู่ในตารางที่ 4.2 เพื่อวัดประสิทธิภาพของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง



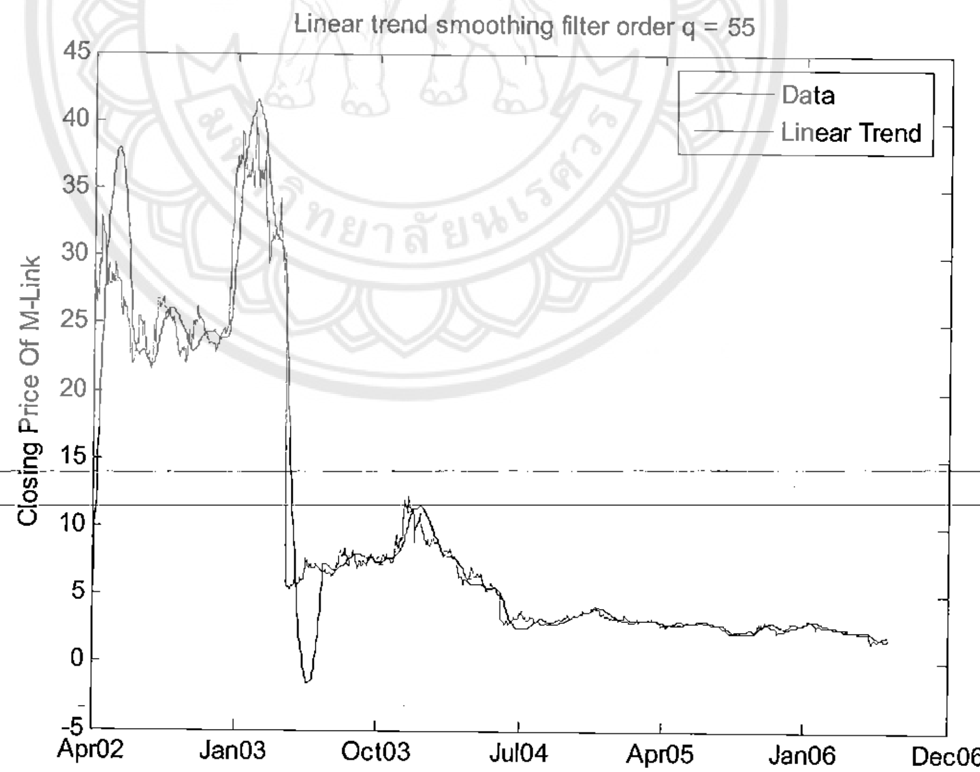
รูปที่ 4.7 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Linear trend smoothing filter เมื่อ $q = 10$



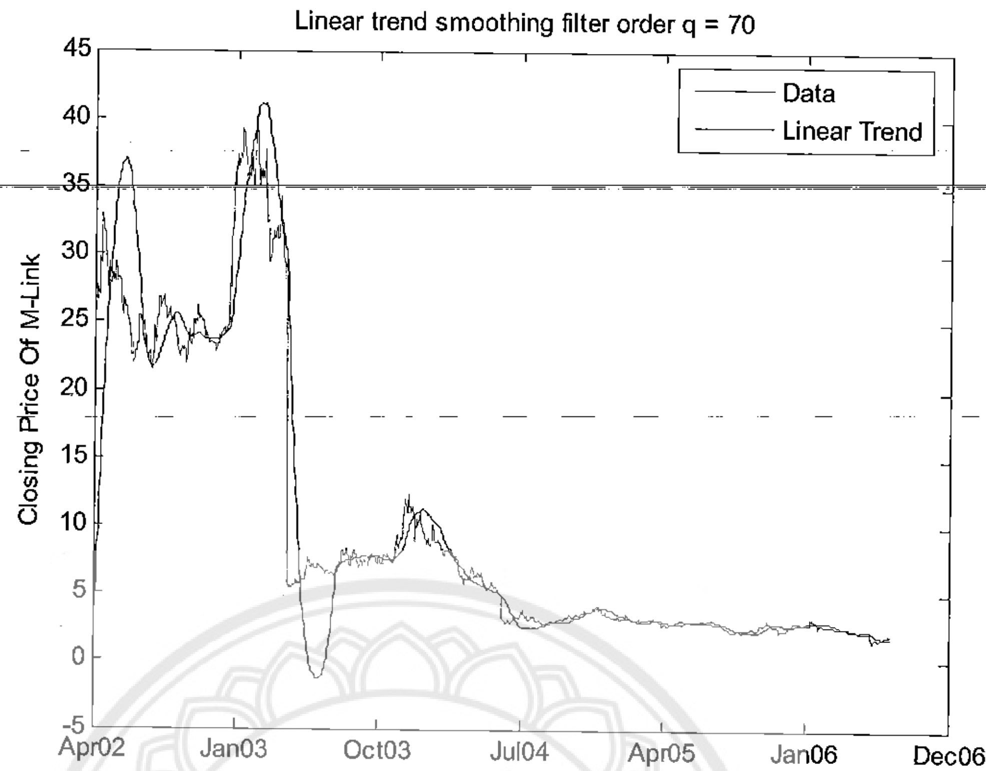
รูปที่ 4.8 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Linear trend smoothing filter เมื่อ $q = 25$



รูปที่ 4.9 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Linear trend smoothing filter เมื่อ $q = 40$



รูปที่ 4.10 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Linear trend smoothing filter เมื่อ $q = 55$



รูปที่ 4.11 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Linear trend smoothing filter เมื่อ $q = 70$

ตารางที่ 4.2 สรุปค่าความคลาดเคลื่อนของ Linear trend smoothing filter ที่ q ต่างๆ

Linear trend smoothing filter		
q	MSE	MAE
10	1.2035	0.3431
25	4.2964	0.7427
40	7.4231	1.1062
55	10.8216	1.4299
70	14.43	1.6846

วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง (Linear trend smoothing filter) ที่ q เท่ากับ 10 ในรูปที่ 4.7 เส้นกราฟค่าคาดคะเนมีความใกล้เคียงกับเส้นกราฟข้อมูลจริงมากที่สุด และเมื่อดูค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE จากตารางที่ 4.2 ในกรณีที่ q เท่ากัน มีค่าน้อยกว่าวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter) เมื่อทำการเพิ่ม q ในรูปที่ 4.8 – 4.11 จะเห็นว่าเส้นกราฟของค่าคาดคะเนเริ่มมี delay มากขึ้น

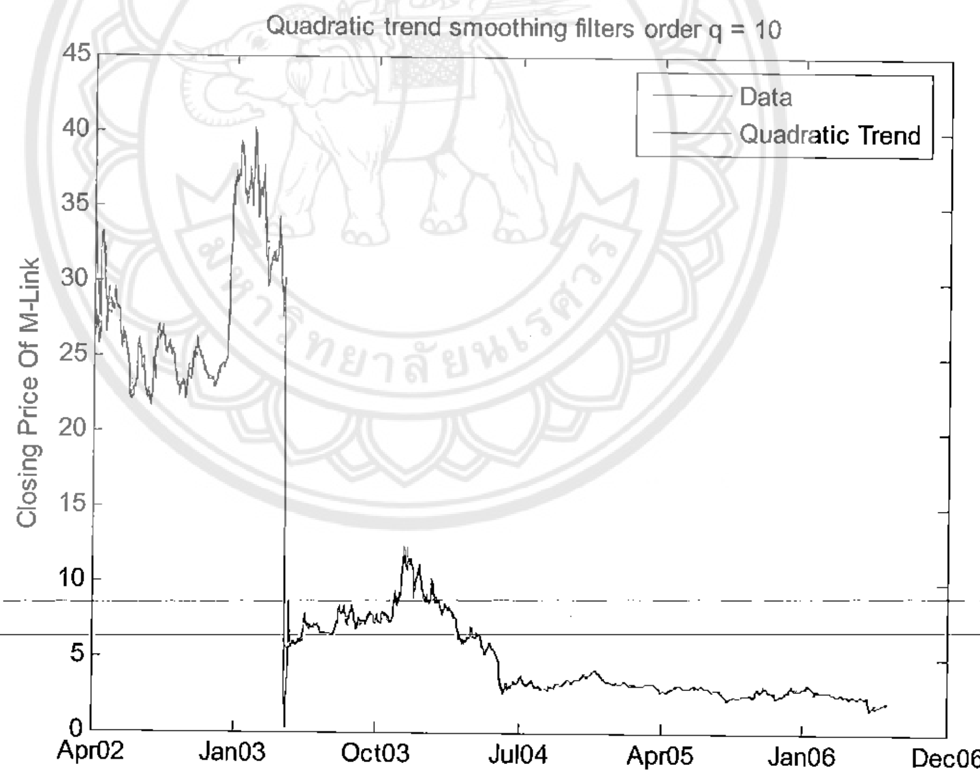
4.2.2 ผลการพยากรณ์ข้อมูลแบบ Quadratic Trend Smoothing Filter

การพยากรณ์ข้อมูล ใช้รูปแบบ Quadratic trend smoothing filter ดังสมการ

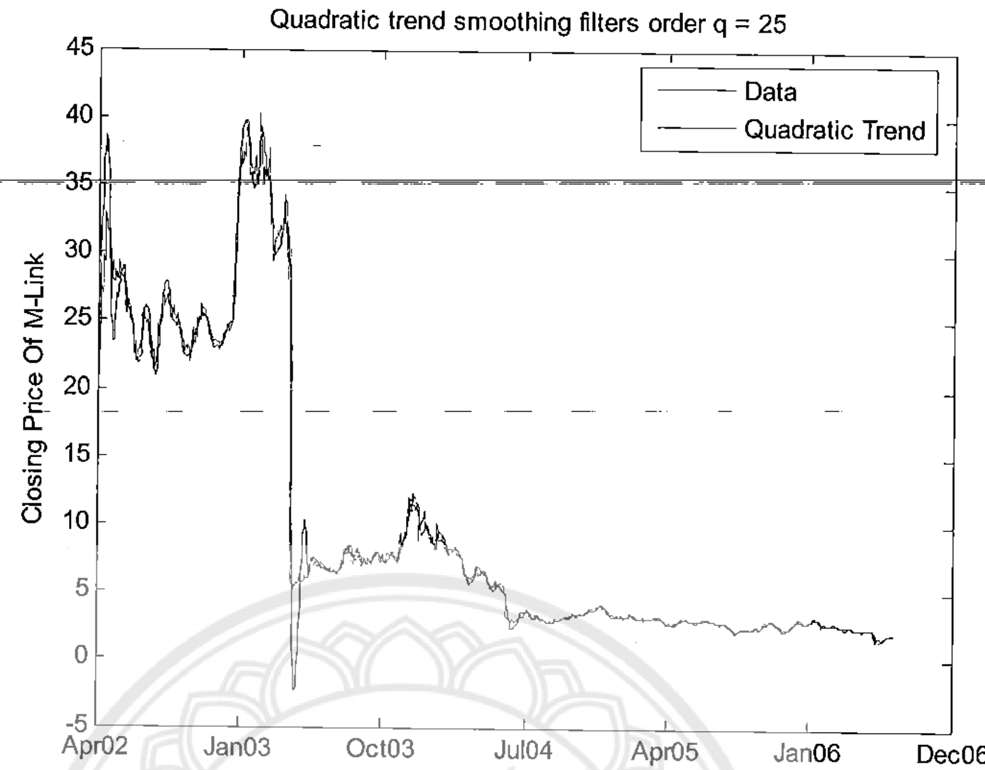
$$y[n]=\frac{3}{q^3+6q^2+11q+6}\sum_{m=0}^{q}\left(3q^2+3q+2-12qm-6m+10m^2\right)\cdot x[n-m] \quad (4.3)$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อข้อมูล $\{y[n]\}$ เป็นค่าการคาดคะเนข้อมูลลำดับที่ n และ $\{x[n]\}$ เป็นข้อมูลจริงลำดับที่ n ในการทดลองนี้ได้กำหนดให้ใช้ค่า q เท่ากับ 10, 25, 40, 55, 70 ตามลำดับ เพื่อที่จะวัดประสิทธิภาพของต้นแบบและดูลักษณะของตัวคาดคะเนจากสายตา ตามลำดับของ q

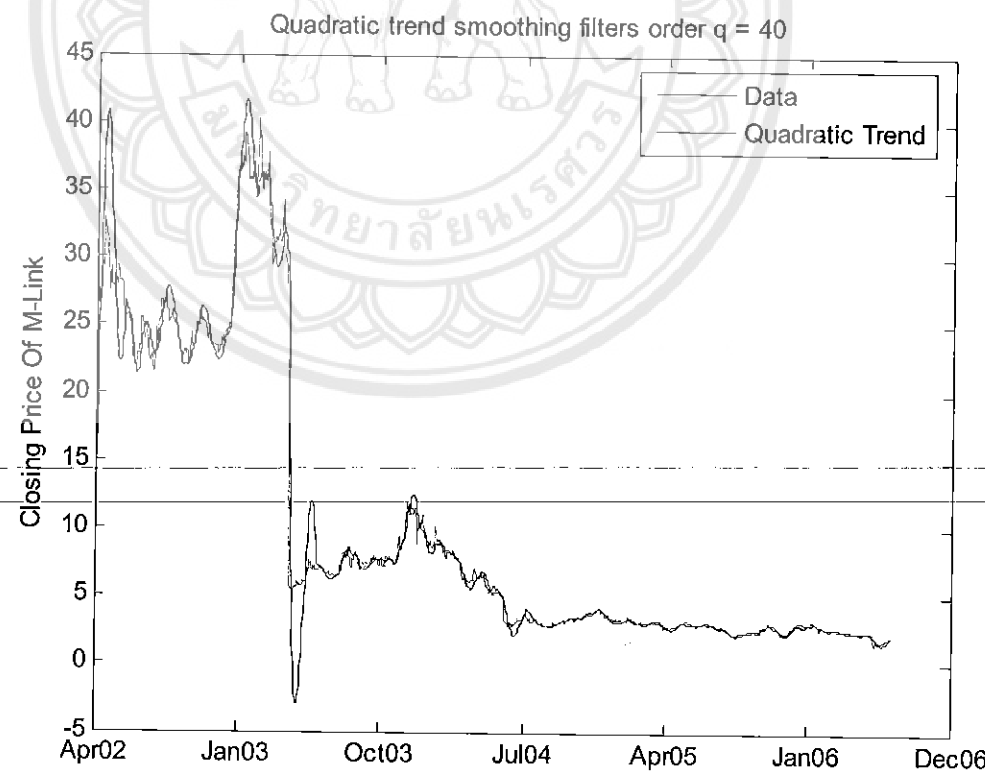
ผลการทดลองของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสองจะแสดงดังรูปที่ 4.12 – 4.16 จากรูปเส้นสีน้ำเงิน คือ ข้อมูลจริง และ เส้นสีแดง คือ วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสอง และแสดงค่า MSE และ ค่า MAE ของกรณีต่างๆรวมอยู่ในตารางที่ 4.3 เพื่อวัดประสิทธิภาพของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสอง



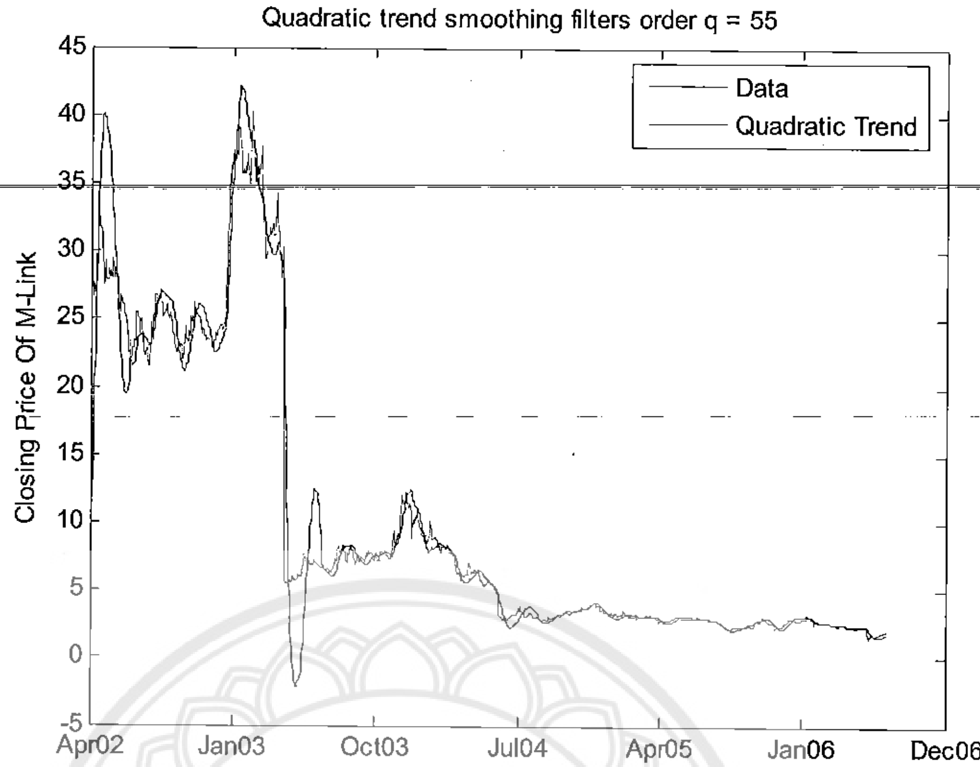
รูปที่ 4.12 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Quadratic trend smoothing filter เมื่อ $q = 10$



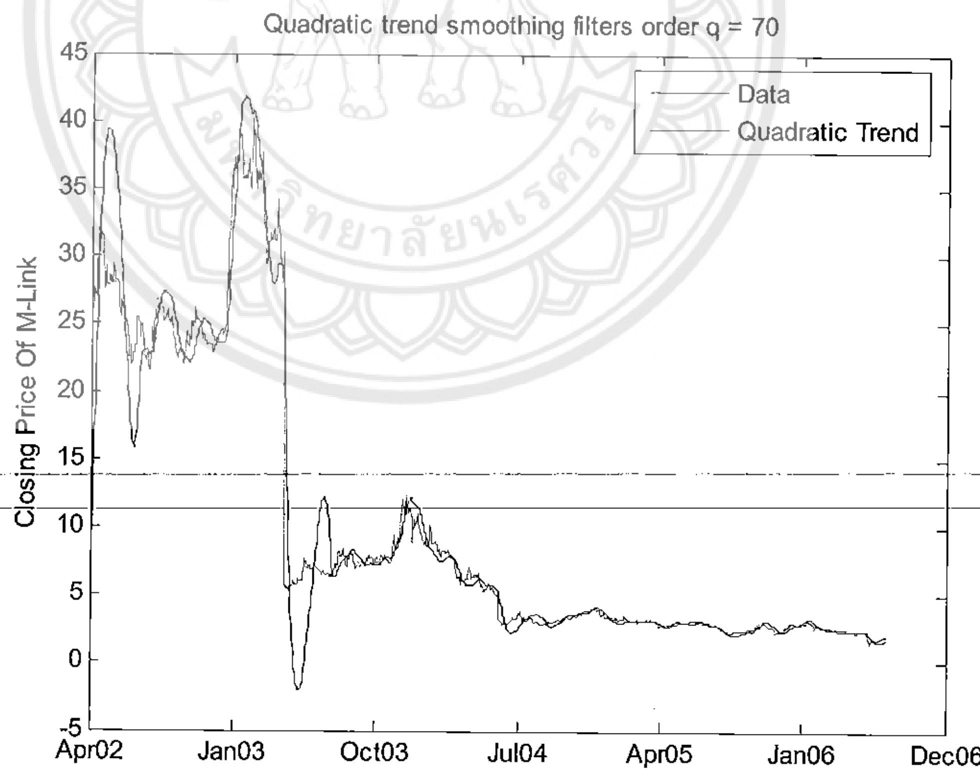
รูปที่ 4.13 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Quadratic trend smoothing filter เมื่อ $q = 25$



รูปที่ 4.14 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Quadratic trend smoothing filter เมื่อ $q = 40$



รูปที่ 4.15 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Quadratic trend smoothing filter เมื่อ $q = 55$



รูปที่ 4.16 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Quadratic trend smoothing filter เมื่อ $q = 70$

ตารางที่ 4.3 สรุปค่าความคลาดเคลื่อนของ Quadratic trend smoothing filter ที่ q ต่างๆ

Quadratic trend smoothing filter		
q	MSE	MAE
10	0.5006	0.2188
25	1.9641	0.7427
40	4.1995	0.8131
55	5.9478	1.0412
70	8.2149	1.3245

จากรูปที่ 4.12 เส้นกราฟของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสอง (Quadratic trend smoothing filter) ทับกับเส้นกราฟของข้อมูลจริงแทบทุกช่วง แต่ก็มีแกว่งเกิดขึ้นในช่วงที่ข้อมูลจริงเกิดการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างเร็ว จะเห็นได้ชัดขึ้นเมื่อทำการเพิ่มค่า q มากขึ้น ในรูปที่ 4.13 – 4.16 ที่ q เท่ากับ 70 นั้น เส้นกราฟของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสอง (Quadratic trend smoothing filter) นั้น มีทั้ง delay และ เส้นกราฟแกว่งมาขึ้น และจากตารางที่ 4.3 ค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE มีค่าน้อยกว่าวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter) กับวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง (Linear trend smoothing filter) อีกด้วย

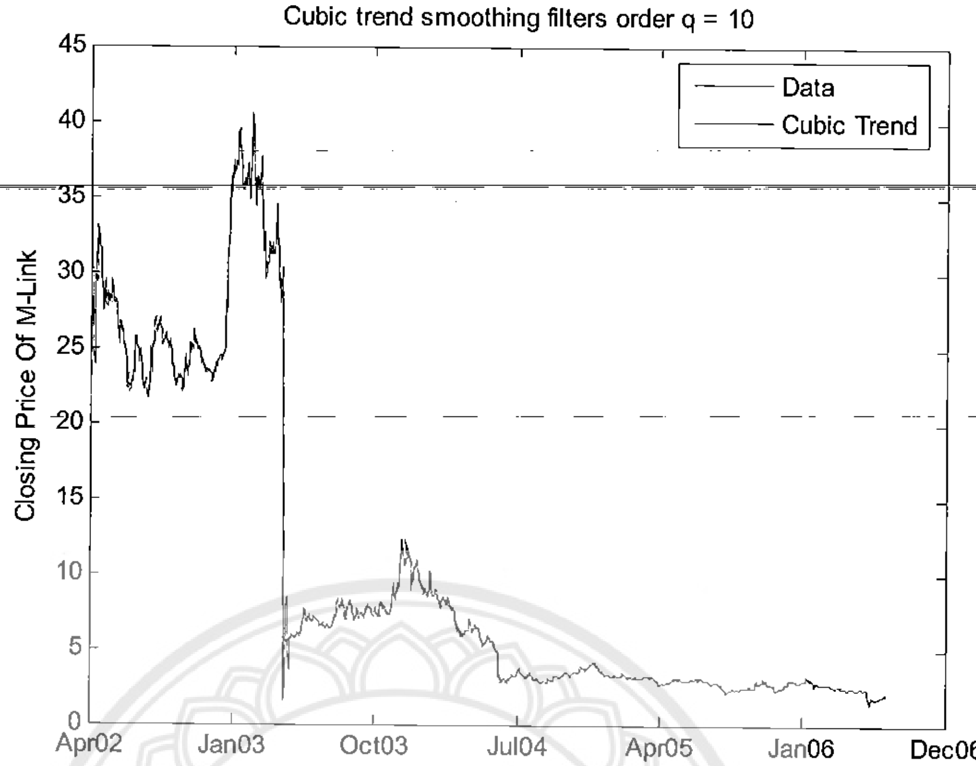
4.2.3 ผลการพยากรณ์ข้อมูลแบบ Cubic Trend Smoothing Filter

การพยากรณ์ข้อมูลที่ใช้รูปแบบ Cubic trend smoothing filter ดังสมการ

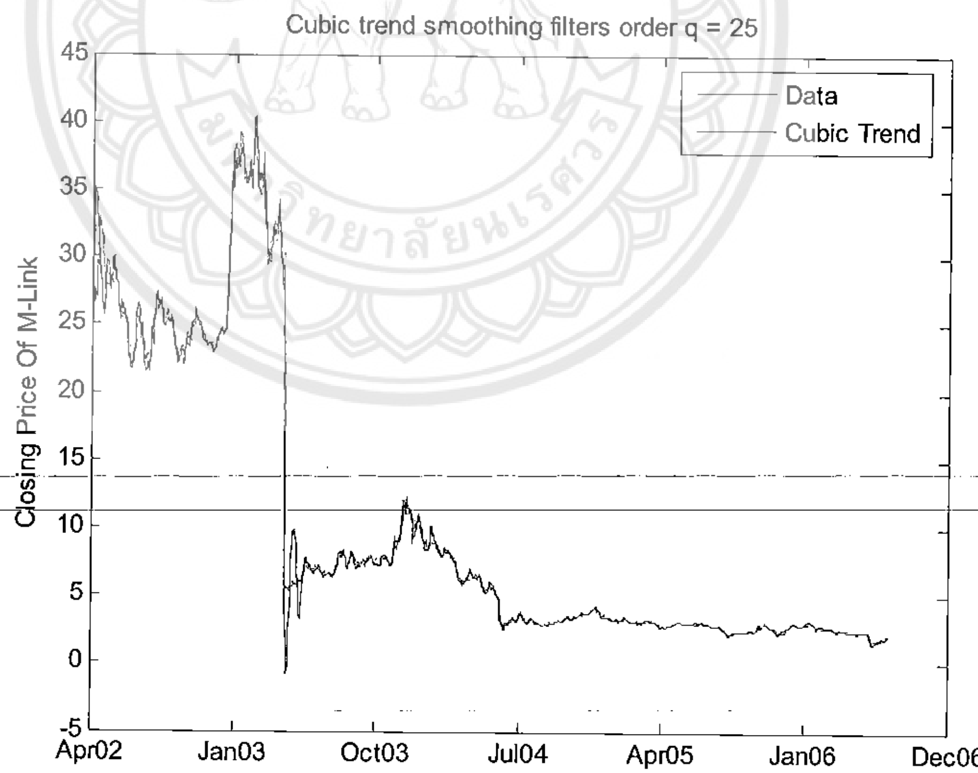
$$y[n]=\sum_{m=0}^{q}\left\{\frac{16q^3+24q^2+56q+24-120q^2m-120qm-100m+240qm^2+120m^2-140m^3}{q^4+10q^3+35q^2+50q+24}\right\}\cdot x[n-m] \quad (4.4)$$

สำหรับ $n\in\{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อข้อมูล $\{y[n]\}$ เป็นค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $\{x[n]\}$ เป็นข้อมูลจริงลำดับที่ n ในการทดลองนี้ได้กำหนดให้ค่า q เท่ากับ 10, 25, 40, 55, 70 ตามลำดับ เพื่อที่จะวัดประสิทธิภาพของต้นแบบและดูลักษณะของตัวคาดคะเนจากสายตาตามลำดับของ q

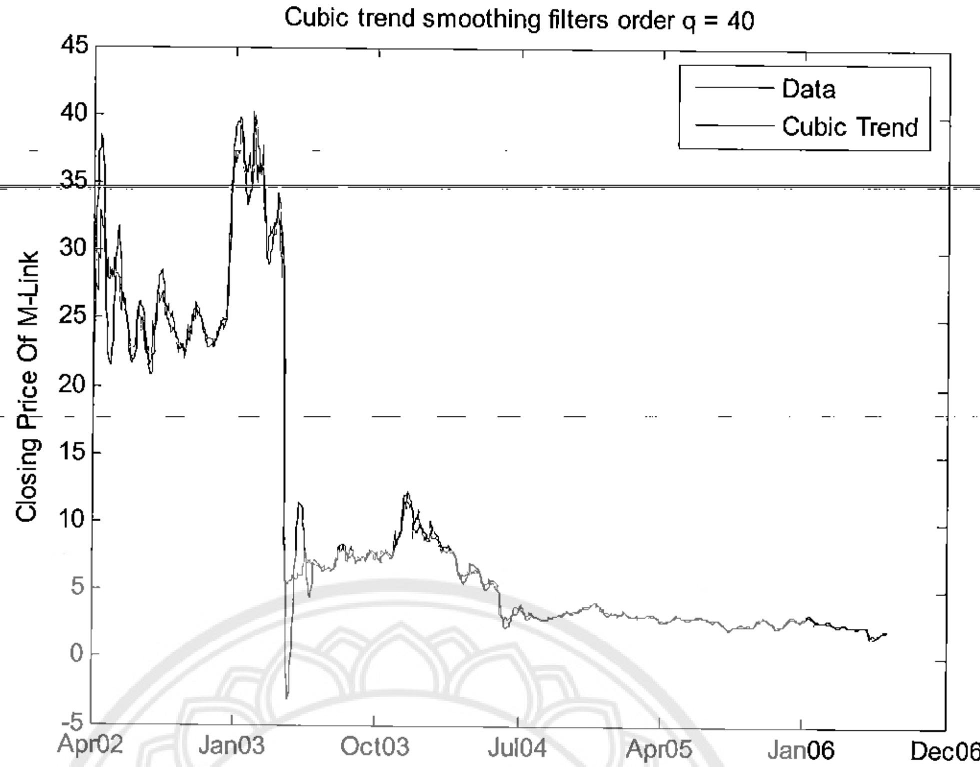
ผลการทดลองของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสามจะแสดงดังรูปที่ 4.17 – 4.21 จากรูปเส้นสีน้ำเงิน คือ ข้อมูลจริง และ เส้นสีแดง คือ วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสาม และแสดงค่า MSE และ ค่า MAE ของกรณีต่างๆรวมอยู่ในตารางที่ 4.4 เพื่อวัดประสิทธิภาพของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสาม



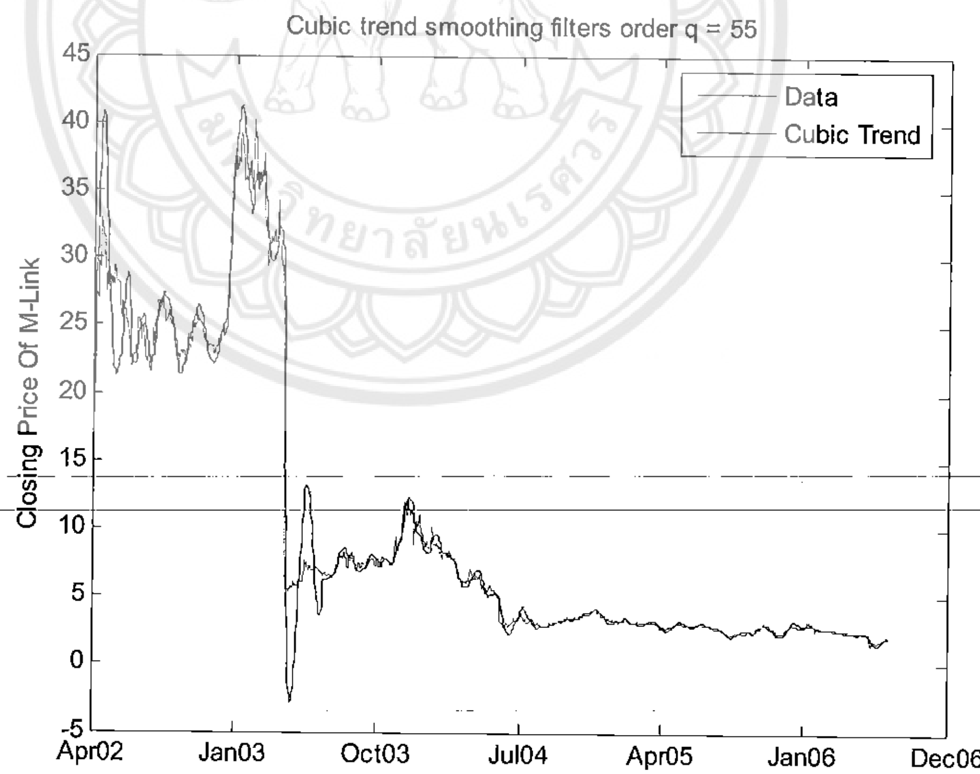
รูปที่ 4.17 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Cubic trend smoothing filter เมื่อ $q = 10$



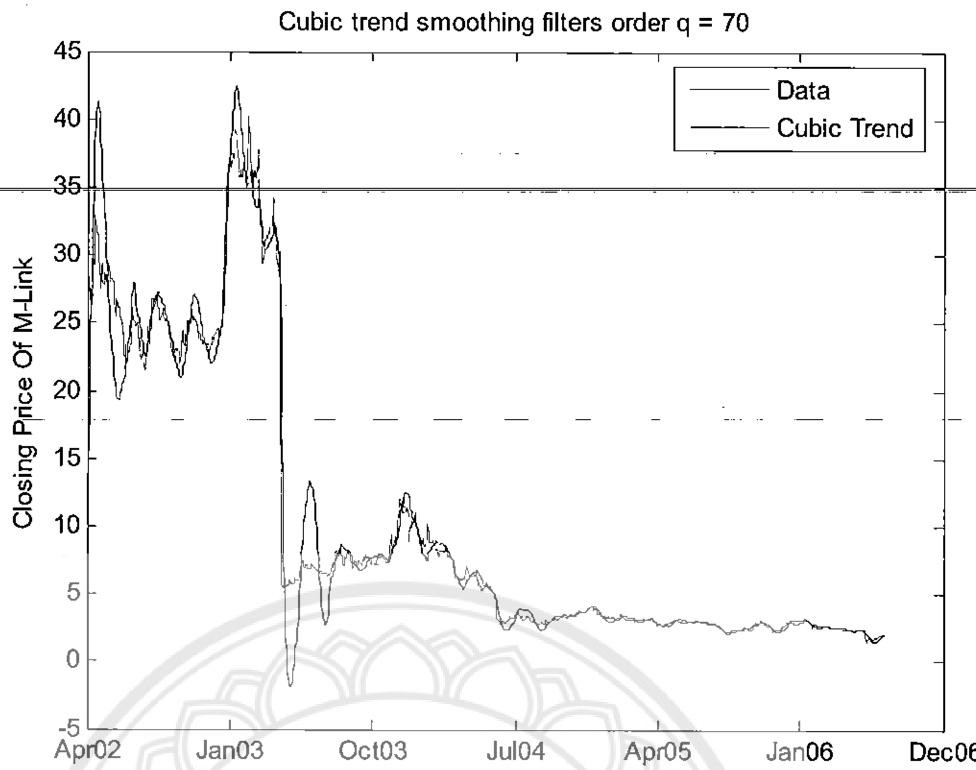
รูปที่ 4.18 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Cubic trend smoothing filter เมื่อ $q = 25$



รูปที่ 4.19 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Cubic trend smoothing filter เมื่อ $q = 40$



รูปที่ 4.20 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Cubic trend smoothing filter เมื่อ $q = 55$



รูปที่ 4.21 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Cubic trend smoothing filter **เมื่อ** $q = 70$

ตารางที่ 4.4 สรุปค่าความคลาดเคลื่อนของ Cubic trend smoothing filter **ที่** q ต่างๆ

Cubic trend smoothing filter		
q	MSE	MAE
10	0.1911	0.1395
25	1.0043	0.3641
40	2.4555	0.6197
55	4.009	0.8646
70	5.0909	1.0071

วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสาม (Cubic trend smoothing filter) จากรูปที่ 4.17 เส้นกราฟค่าคาดคะเนทับกับเส้นกราฟของข้อมูลทุกช่วง เมื่อทำการเพิ่ม q มากขึ้นในรูปที่ 4.18-4.21 เส้นกราฟจะแกว่งมากขึ้นตามจำนวน q นั่นคือ ถ้าจำนวน q มาก เส้นกราฟของค่าคาดคะเนก็จะแกว่งมากขึ้น จากตารางที่ 4.4 จะเห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE ที่ q เท่ากับ 10 มีค่าน้อยกว่า q อื่นๆ ในวิธีเดียวกันและมีค่าน้อยกว่าวิธีต่างๆ ในหัวข้อก่อนหน้านี้ จึงกล่าวได้ว่าที่จำนวน q เท่ากัน วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลที่ดีกรีมากขึ้นจะมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยลง

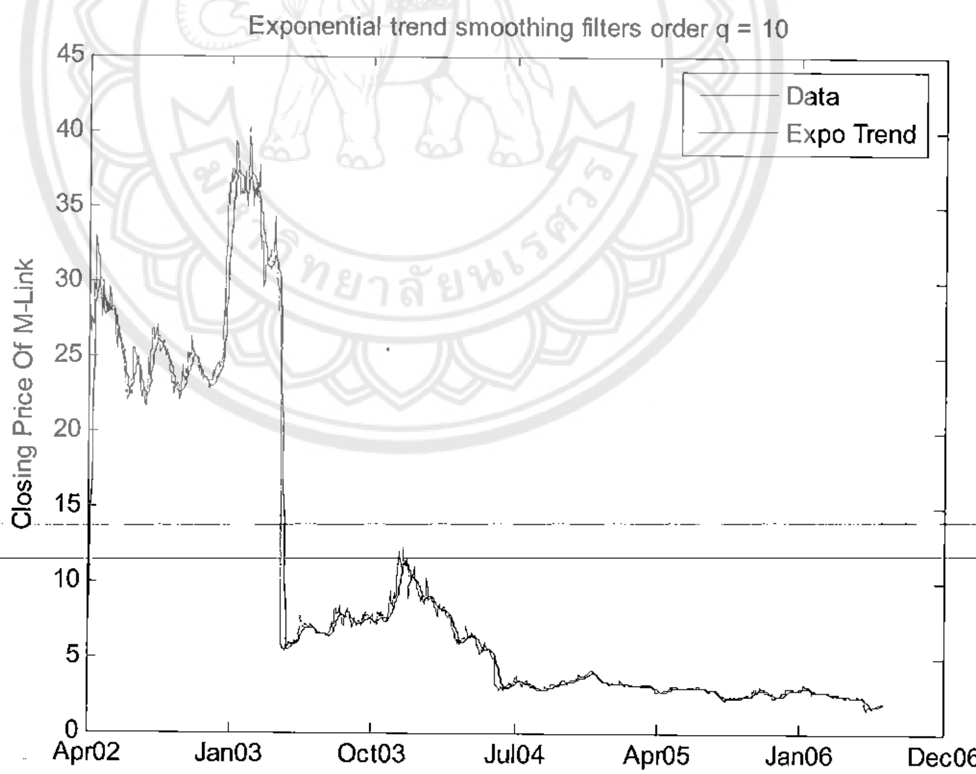
4.3 ผลการพยากรณ์ข้อมูลแบบ Exponential Trend Smoothing Filter

การพยากรณ์ข้อมูลที่ใช้รูปแบบ Exponential trend smoothing filter ดังสมการ

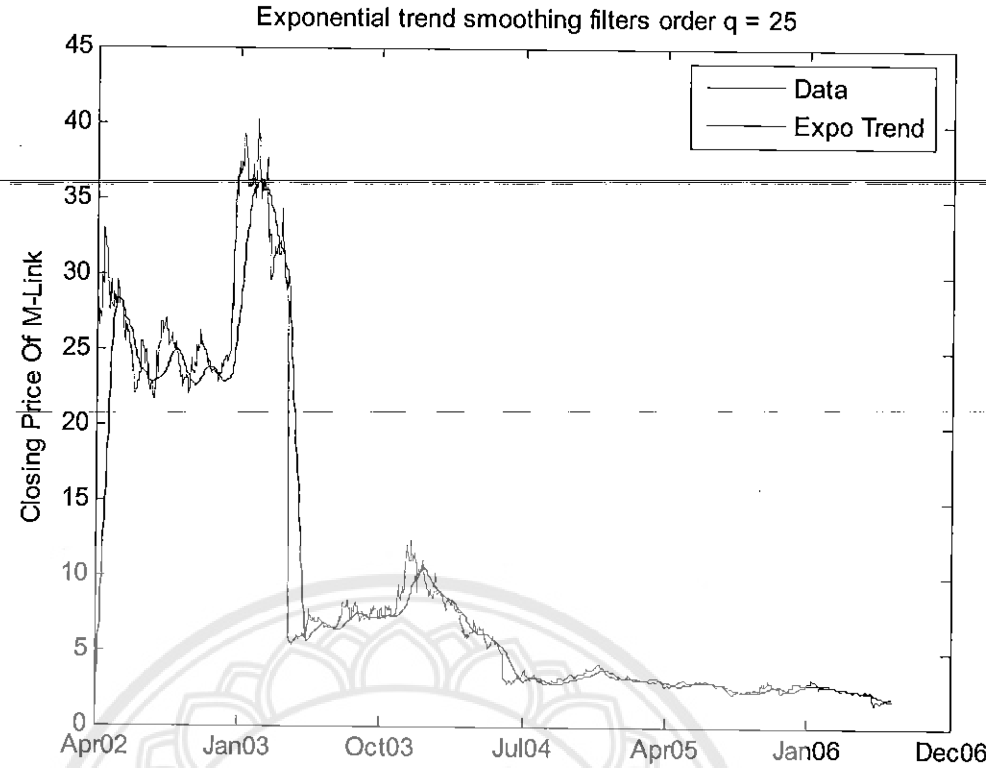
$$y[n] = \frac{1}{\sum_{k=0}^{q} (d_0)^{-2k}} \sum_{m=0}^{q} d_0^{-m} \cdot x[n-m] \tag{4.4}$$

สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ เมื่อข้อมูล $\{y[n]\}$ เป็นค่าการคาดคะเนของข้อมูลลำดับที่ n และ $\{x[n]\}$ เป็นข้อมูลจริงลำดับที่ n ในการทดลองนี้ได้กำหนดให้ค่า q เท่ากับ 10, 25, 40, 55 และ70 ตามลำดับ เพื่อที่จะวัดประสิทธิภาพของต้นแบบและดูลักษณะของตัวคาดคะเนจากสายตาตามลำดับของ q

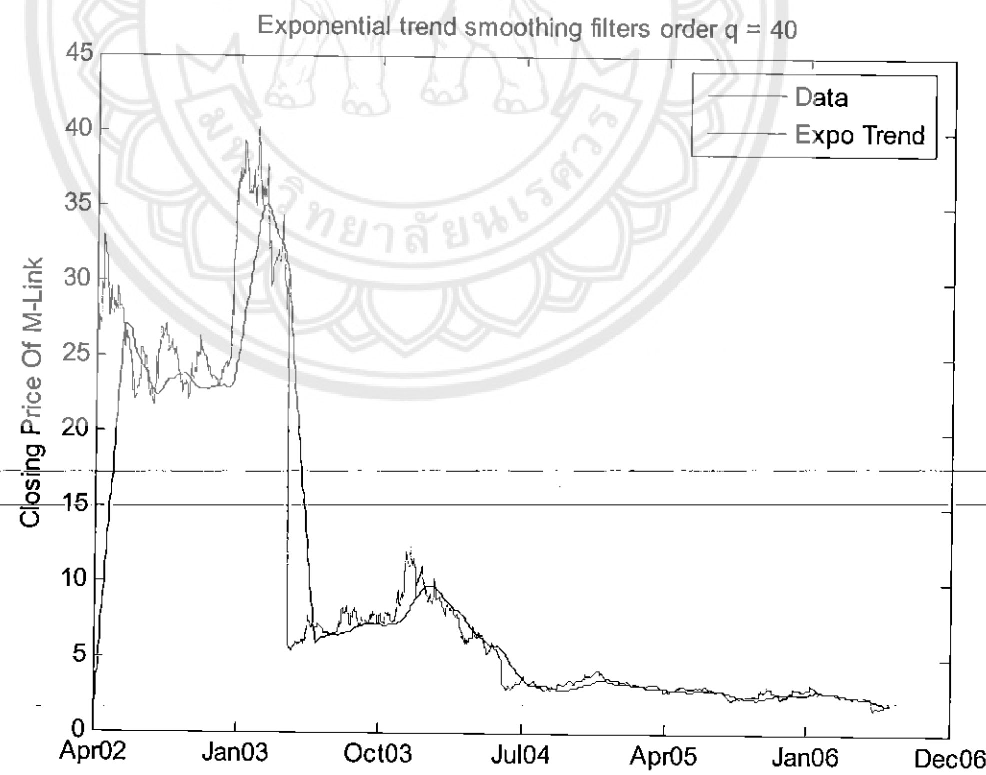
ผลการทดลองของวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลจะแสดงดังรูปที่ 4.22 – 4.26 จากรูปเส้นสีน้ำเงิน คือ ข้อมูลจริง และ เส้นสีแดง คือ วิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลและแสดงค่า MSE และ ค่า MAE ของกรณีต่างๆรวมอยู่ในตารางที่ 4.5 เพื่อวัดประสิทธิภาพของวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล



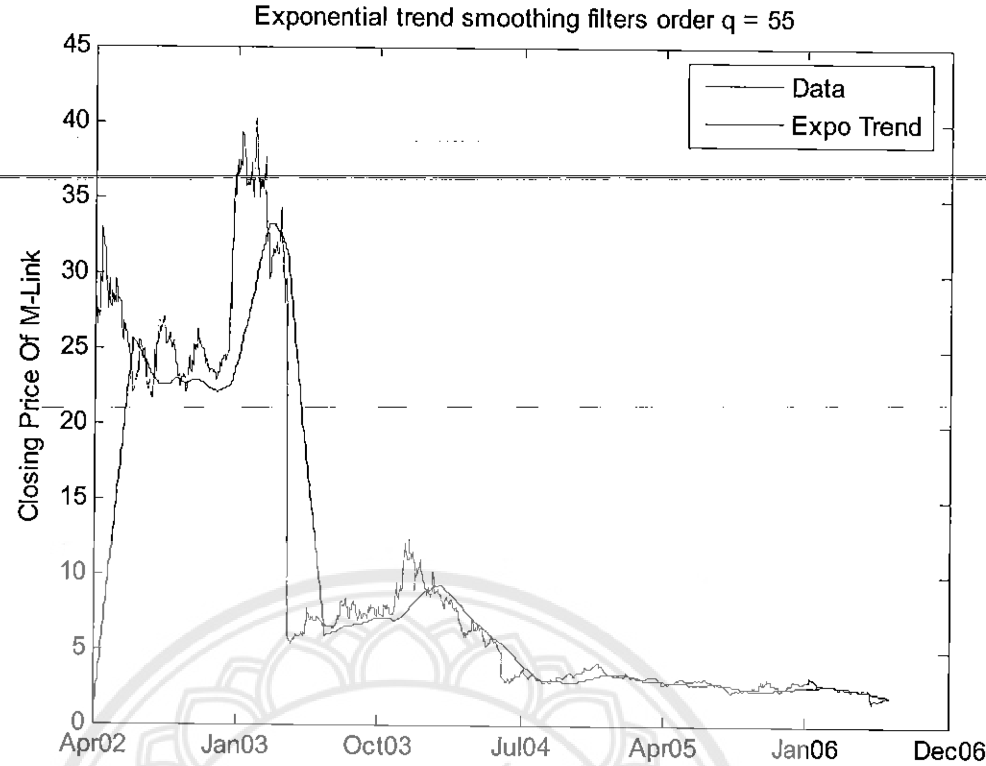
รูปที่ 4.22 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Exponential trend smoothing filter เมื่อ $q = 10$



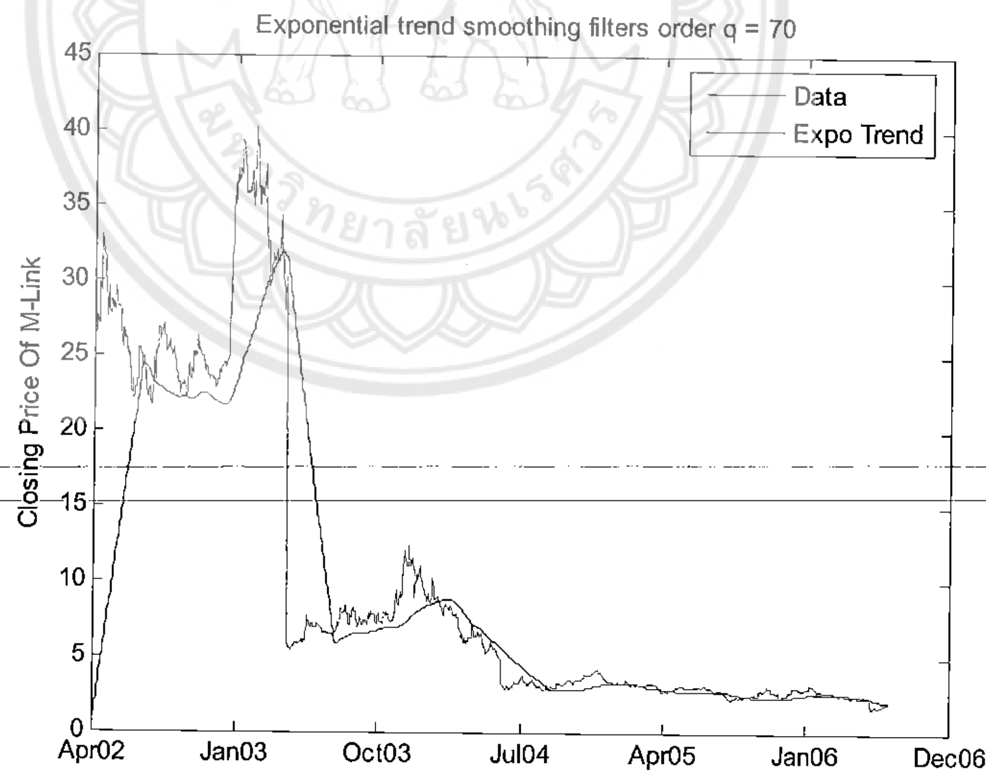
รูปที่ 4.23 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Exponential trend smoothing filter เมื่อ $q = 25$



รูปที่ 4.24 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Exponential trend smoothing filter เมื่อ $q = 40$



รูปที่ 4.25 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Exponential trend smoothing filter เมื่อ $q = 55$



รูปที่ 4.26 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับ Exponential trend smoothing filter เมื่อ $q = 70$

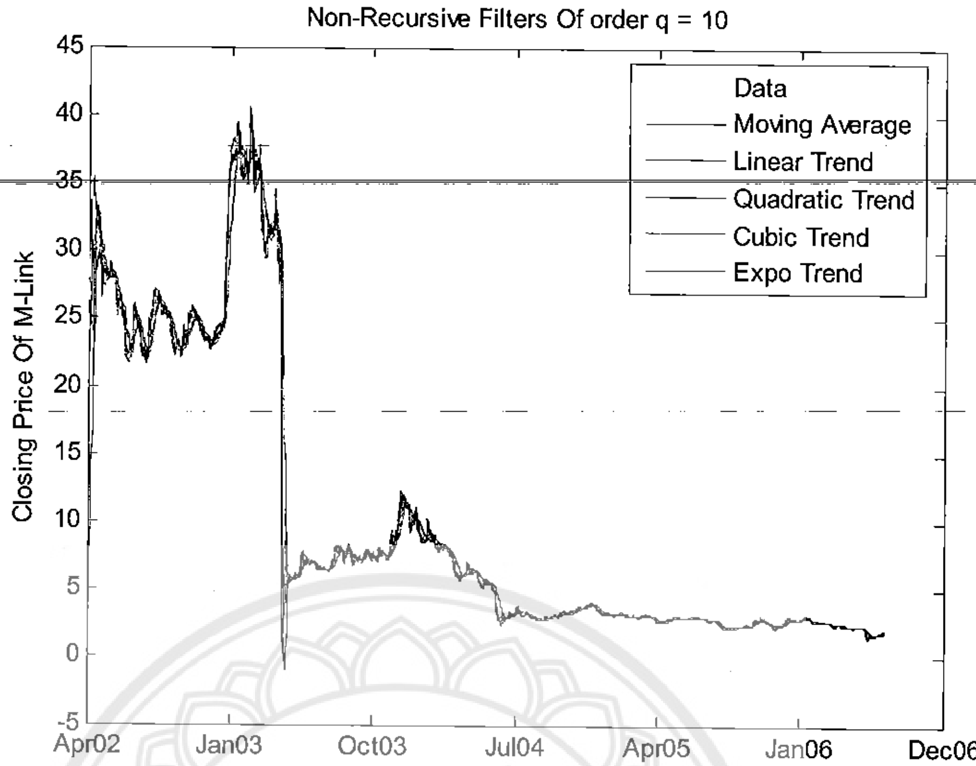
ตารางที่ 4.5 สรุปค่าความคลาดเคลื่อนของ Exponential trend smoothing filter ที่ q ต่างๆ

Exponential trend smoothing filter		
q	MSE	MAE
10	4.5867	0.6638
25	12.9669	1.2821
40	21.2502	1.8321
55	29.5636	2.3288
70	37.4527	2.8049

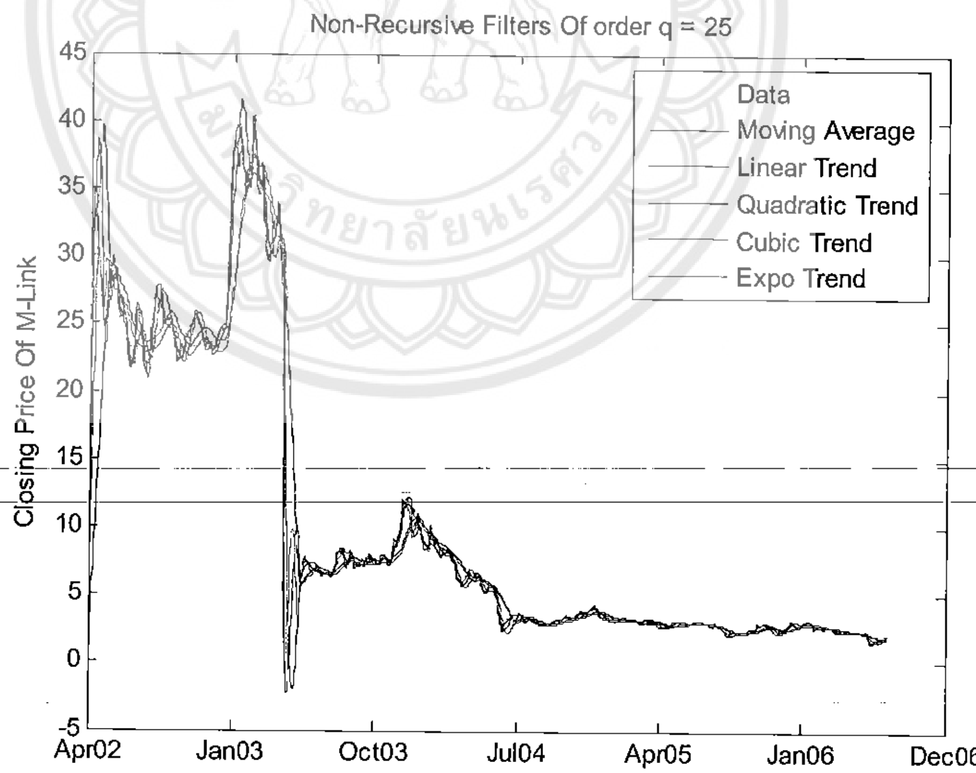
จากรูปที่ 4.22 วิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล มีเส้นกราฟที่ใกล้เคียงกับเส้นกราฟของข้อมูลจริงมากที่สุด แต่เมื่อทำการเพิ่ม q ในรูปที่ 4.23 – 4.26 เส้นกราฟของค่าคาดคะเนเริ่มเกิดการ delay มากขึ้น ซึ่งจะคล้ายๆกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter) จากตารางที่ 4.5 ค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE ที่ q เท่ากับ 10 มีค่าน้อยกว่า q อื่นๆในวิธีเดียวกัน แต่เมื่อทำการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีอื่นๆที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้ ที่ q เดียวกัน วิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลมีค่าความคลาดเคลื่อนมากกว่าวิธีอื่นๆ

สุดท้ายนี้ ทำการรวมวิธีการทำให้เรียบ (Smoothing filters) รูปแบบต่างๆทั้ง 5 กรณี (วิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average filter), วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง (Linear trend smoothing filter), วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสอง (Quadratic trend smoothing filter), วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีสาม (Cubic trend smoothing filter), วิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential trend smoothing filter) เข้าไว้ในรูปเดียวกัน เพื่อดูลักษณะของเส้นกราฟของแต่ละวิธีเปรียบเทียบกัน โดยทำการแสดงที่ q เท่ากันไว้ในรูปเดียวกัน แสดงได้ดังรูปที่ 4.27 – 4.31 โดยที่

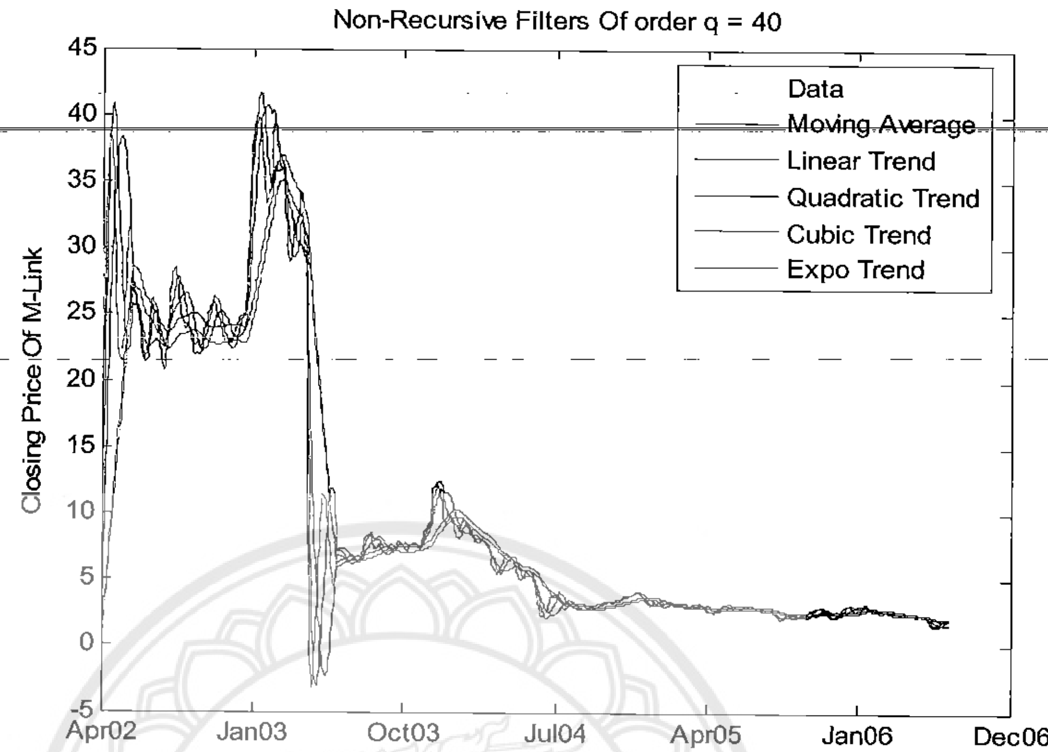
เส้นสีเหลือง คือ ข้อมูลจริง
เส้นสีน้ำเงิน คือ Moving average filter
เส้นสีเขียว คือ Linear trend smoothing filter
เส้นสีแดง คือ Quadratic trend smoothing filter
เส้นสีฟ้า คือ Cubic trend smoothing filter
เส้นสีม่วง คือ Exponential trend smoothing filter



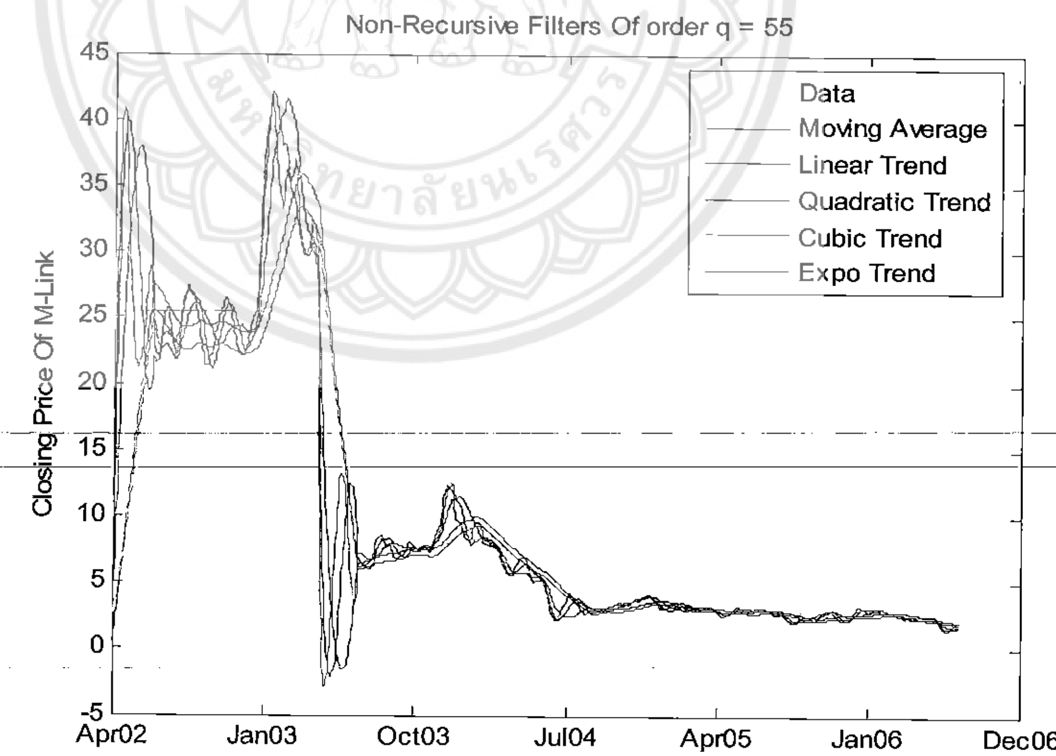
รูปที่ 4.27 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับค่าการคาดคะเนของแต่ละวิธีที่ $q=10$



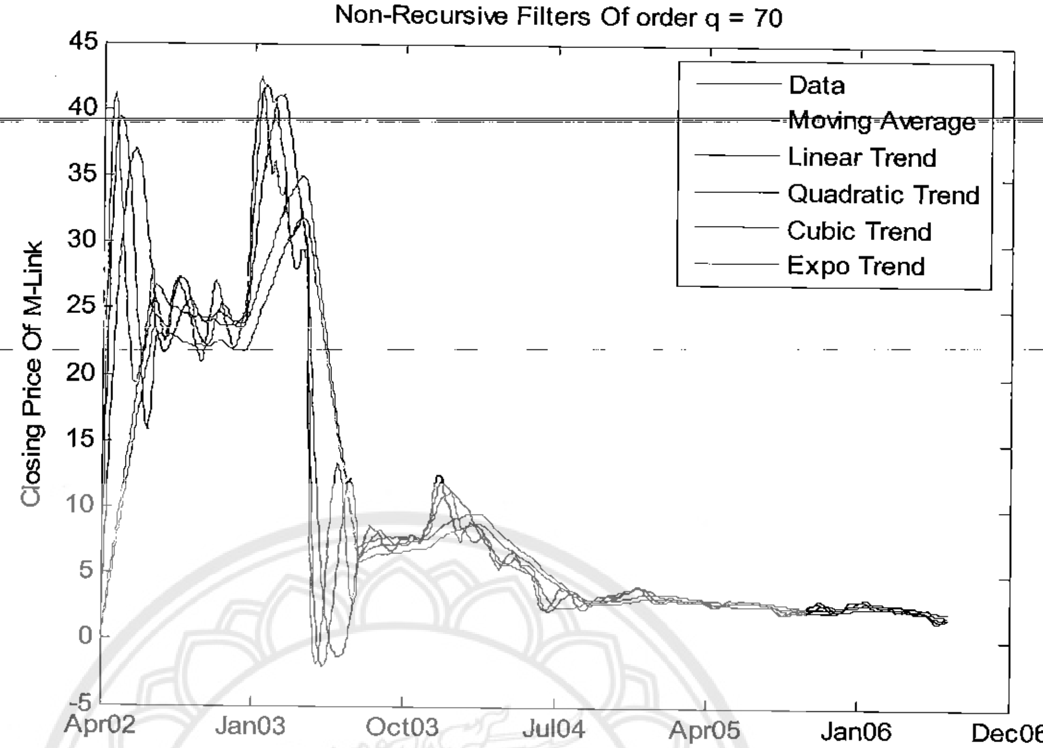
รูปที่ 4.28 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับค่าการคาดคะเนของแต่ละวิธีที่ $q=25$



รูปที่ 4.29 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับค่าการคาดคะเนของแต่ละวิธีที่ q=40



รูปที่ 4.30 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับค่าการคาดคะเนของแต่ละวิธีที่ q=55



รูปที่ 4.31 เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลจริงกับค่าการคาดคะเนของแต่ละวิธีที่ q =70

แสดงผลของค่า MSE ของทุกวิธีในกรณีต่างๆรวมอยู่ในตารางที่ 4.6 และ แสดงผลของค่า MAE ของทุกวิธีในกรณีต่างๆรวมอยู่ในตารางที่ 4.7 เพื่อทำการเปรียบเทียบและเลือกวิธีที่มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

ตารางที่ 4.6 ตารางเปรียบเทียบค่า MSE ของแต่ละวิธีที่ q ต่างๆ

MSE					
q	Moving	Linear	Quadratic	Cubic	Expo
10	4.5414	1.2035	0.50063	0.1911	4.5867
25	12.7313	4.2964	1.9641	1.0043	12.9669
40	20.6971	7.4231	4.1995	2.4555	21.2502
55	28.5816	10.8216	5.9478	4.009	29.5636
70	35.9452	14.43	8.2149	5.0909	37.4527

ตารางที่ 4.7 ตารางเปรียบเทียบค่า MAE ของแต่ละวิธีที่ q ต่างๆ

MAE					
q	Moving	Linear	Quadratic	Cubic	Expo
10	0.6644	0.34311	0.21878	0.13949	0.6638
25	1.2864	0.74272	0.51644	0.36408	1.2821
40	1.8031	1.1062	0.81314	0.61971	1.8321
55	2.2547	1.4299	1.0412	0.86464	2.3288
70	2.6257	1.6846	1.3245	1.0071	2.8049

4.4 วิเคราะห์ผลการทดลอง

จากผลการทดลองที่ได้แสดงมานั้น วิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ แสดงในรูปที่ 4.2 เมื่อ $q =$ 10 จะเห็นว่าเส้นกราฟของวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับเส้นกราฟของข้อมูลจริงมากที่สุด แต่เมื่อทำการเพิ่มค่า q มากขึ้น ในรูปที่ 4.3 – 4.6 เส้นกราฟของวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ จะเริ่มออกห่างจากเส้นกราฟข้อมูลจริงตามจำนวน q กล่าวคือถ้าจำวน q ยิ่งมาก เส้นกราฟของวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ ก็จะยิ่งห่าง และจากตารางที่ 4.1 เห็นได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนทั้งค่า MSE กับค่า MAE ด้วยวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ที่ $q = 10$ มีค่าน้อยกว่า q อื่นๆ

วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่งแสดงในรูปที่ 4.7 เมื่อ $q =$ 10 เส้นกราฟของวิธีการทำให้เรียบแบบ โพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง จะใกล้เคียงมากกว่าวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ เมื่อ q เท่ากัน เพราะว่าได้ทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ให้มีความยืดหยุ่นมากกว่าวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ และจากตารางที่ 4.2 ค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE ที่ $q = 10$ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งน้อยกว่าของวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ เมื่อ q เท่ากัน

เมื่อทำการเพิ่มดีกรีของวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลก็จะเห็นว่าเส้นกราฟใกล้เคียงกับเส้นข้อมูลจริงมากกว่าวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่งและค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE ก็มีค่าน้อยลงกว่าวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลดีกรีหนึ่ง วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลไม่เกิดการ Delay ของค่าคาดคะเนเหมือนกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ แล้วที่จำนวน q น้อยๆ แต่วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลนั้นเกิดการแกว่งของค่าคาดคะเน แต่สำหรับวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลที่แสดงในรูปที่ 4.22 เมื่อ $q = 10$ จะมีลักษณะที่ใกล้เคียงกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ เมื่อจำนวน q เท่ากัน อาจเป็นเพราะค่าพารามิเตอร์ที่หามาได้จาก [2.5 วิธีการหาคำตอบพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับ Exponential model] นั้น มีค่าเท่ากับ

0.99747 เมื่อแทนในสมการ (3.73) จะมีลักษณะที่ใกล้เคียงกับสมการ (2.1) จึงทำให้ค่าที่ได้ใกล้เคียงกัน

ทั้งนี้เมื่อดูจากลักษณะกราฟที่ทำการเปรียบเทียบกันทุกวิธีในรูปที่ 4.27 เส้นกราฟของวิธีต่างๆเกือบทับเส้นกราฟข้อมูลจริง แต่เมื่อทำการเพิ่มจำนวน q มากขึ้นผลการทดลองในรูปที่ 4.28 - 4.31 นั้นลักษณะกราฟของค่าคาดคะเนของแต่ละวิธีก็เริ่มห่างจากเส้นข้อมูลจริงมากขึ้นในช่วงแรกๆ แต่ช่วงหลังกราฟก็ยังคงใกล้เคียงเส้นข้อมูลจริงเหมือนเดิมอาจเป็นเพราะช่วงแรกๆนั้นข้อมูลจริงมีการเปลี่ยนแปลงค่อยรวดเร็ว แต่ข้อมูลจริงช่วงหลังมีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างช้า เมื่อทำการดูค่าความคลาดเคลื่อนจากตารางที่ 4.6 และตารางที่ 4.7 นั้น วิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล มีค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE และ MAE ที่ใกล้เคียงกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ และวิธีการทำให้เรียบแบบ โพลิโนเมียลมีค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง MSE กับค่า MAE ที่น้อยลง แต่วิธีที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด คือการทำให้เรียบแบบ โพลิโนเมียลกำลังสาม ที่กรณี q เท่ากับ 10 ซึ่งมีค่า MSE เท่ากับ 0.1911 และค่า MAE เท่ากับ 0.13949

บทที่ 5
สรุปผลการทดลอง

จากการทดลองการนำเทคนิคการใช้วิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average Filter) วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียล (Polynomial trend smoothing filter) และวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential trend smoothing filter) มาใช้ในการพยากรณ์ข้อมูลจริงโดยใช้ข้อมูลหุ้นราคาปิดของบริษัท M-Link ตั้งแต่เดือนเมษายน ปี พ.ศ. 2545 ถึงเดือนตุลาคม ปี พ.ศ. 2549 สามารถสรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะได้ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการทดลอง

ทำการศึกษาทฤษฎีและหลักการเกี่ยวกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ วิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลและวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลด้านการเงินการตลาดที่สนใจนำมาใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล และนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบว่าวิธีใดดีกว่ากันโดยดูจากค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีการคาดคะเนรูปแบบต่างๆจากค่า MSE (Mean Square Error) และ MAE (Mean Absolute Error) เพื่อเป็นแนวทางในการเลือกใช้วิธีการพยากรณ์ให้เหมาะสม

จากผลการทดลองในการประเมินค่าความคลาดเคลื่อนนั้นที่จำนวนเทอม q เท่ากัน ถ้าค่าการคาดคะเนโดยวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียล ดีกรี p มากขึ้นจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยลง และสิ่งที่ต้องพิจารณาในการคำนวณค่าการคาดคะเนอีกอย่างหนึ่ง ก็คือจำนวนเทอม q ที่ใช้ในการคำนวณ กล่าวคือถ้าข้อมูลจริงมีลักษณะที่มีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างเร็วผสมกับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงค่อนช้า การใช้จำนวนเทอม q มาก นั่นจะทำให้ค่าการคาดคะเนเปลี่ยนแปลงตามข้อมูลจริงไม่ทันในช่วงที่ข้อมูลจริงมีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างเร็ว แต่ถ้าใช้จำนวนเทอม q น้อย ค่าคาดคะเนสามารถเปลี่ยนแปลงได้ทันในช่วงที่ข้อมูลจริงมีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างเร็ว นอกจากนี้การใช้วิธีการทำให้เรียบ (Smoothing filters) พยากรณ์ข้อมูลที่มีแนวโน้ม จะพบว่าถ้าข้อมูลจริงมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ค่าคาดคะเนจะมีค่าที่ต่ำกว่าข้อมูลจริง และจะมีค่าที่ต่ำลงอีกเมื่อทำการเพิ่มจำนวนเทอม q มากขึ้น ตรงกันข้ามถ้าข้อมูลจริงมีแนวโน้มต่ำลง ค่าคาดคะเนจะมีค่าสูงกว่าข้อมูลจริงและจะสูงขึ้นอีก เมื่อทำการเพิ่มจำนวนเทอม q มากขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

โดยทั่วไปวิธีทางสถิติที่ใช้ในการพยากรณ์ข้อมูลนั้นสามารถจำแนกได้หลายวิธี แต่ไม่มีวิธีใดที่ดีที่สุดที่จะสามารถนำไปใช้ในการพยากรณ์ได้ในทุกกรณีของข้อมูลในอดีตที่แตกต่างกันไป จึงเป็นการยากในการที่จะเลือกใช้วิธีในการพยากรณ์ให้เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลที่มีอยู่

อย่างไรก็ตาม วิธีการพยากรณ์ดังกล่าวอาจจะไม่เหมาะสมสำหรับภาคปฏิบัติเลยก็ได้ ทั้งนี้เนื่องจากมีข้อจำกัดอื่นๆ เช่น ลักษณะรูปแบบของข้อมูล สภาพแวดล้อมช่วงนั้นๆ เป็นต้น โดยวิธี Linear non-recursive filters of order q นั้นสามารถพัฒนาต่อไปได้อีก โดยผู้สนใจอาจทำการเพิ่มดีกรีให้กับวิธีการทำให้เรียบแบบโพลิโนเมียลหรือรวมสมการโพลิโนเมียลและเอ็กซ์โปเนนเชียลเป็นต้นแบบในวิธีการทำให้เรียบก็ได้

นอกจากนี้ วิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลนั้นจะต้องทำการหาค่าพารามิเตอร์ให้ตัวต้นแบบ ซึ่งวิธีการหาค่าพารามิเตอร์นั้นมีหลายวิธีด้วยกัน ถ้าหาค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีอื่นผลการทดลองของวิธีการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลอาจดีขึ้นอีกก็ได้

บรรณานุกรม

[1] S.Yammen and J.A.Cadzow. "Optimum Linear Trend Smoothing Filters". "Proceeding of the 29th Electrical Engineering Conference", Pattaya, Chonburi, Thailand. Volume II, November 9-10, 2006, PP. 917-920.

[2] สุชาติ แย้มเม่น. เอกสารประกอบการสอนวิชา 305233: Computer Engineering Mathematics. 2547

[3] วิจิต หล่อจีระชุณห์กุล, สมบูรณ์วัลย์ สัตยารักษวิทย์, จิราวัลย์ จิตรถเวช, อัจราวรรณ ปิ่นสุวรรณ. **เทคนิคการพยากรณ์**. กรุงเทพ .โครงการส่งเสริมเอกสารวิชาการสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

[4] กฤษณะ เนียมมณี. **ทฤษฎีความน่าจะเป็น.** กรุงเทพฯ : ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2541.

[5] มนัส สังวรศิลป์, วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. **คู่มือการใช้งาน Matlab** . กรุงเทพ:อินโฟเพรส. 2543

[6] ไม่ปรากฏชื่อผู้แต่ง. "ภาวะร่วมเส้นตรงหลายตัวแปร". [Online]. Available: http://academic.cmru.ac.th/wijai/tutor/econometrics/songsak/4.doc.

[7] ข้อมูลหุ้นของบริษัท M-Link. [Online]. Available: http://www.mlink.co.th/Investor.asp?Topic=2

ประวัติผู้เขียนโครงงาน

ชื่อ นายพงศกร สุระธรรม

ภูมิลำเนา 73/1 หมู่ 9 ตำบลท่าลี่ อำเภอท่าลี่ จังหวัดเลย 42140

ประวิติการศึกษา

- จบมัธยมศึกษาจากโรงเรียนเซนต์โยเซฟ ศรีเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์
- ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail: cpe0079@hotmail.com

ชื่อ นางสาวศิโรรัตน์ วรัญญูลักษนา

ภูมิลำเนา 17/2 หมู่ 5 ตำบลสระกรวด อำเภอศรีเทพ จังหวัดเพชรบูรณ์ 67170

ประวัติการศึกษา

- จบมัธยมศึกษาจากโรงเรียนเซนต์โยเซฟ ศรีเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์
- ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail: sirorat_0137@hotmail.com