

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

ทฤษฎีแมสตีฟการวิดีแบบมวลแปรผันโดยที่ทำให้ทั่วไป



คณะผู้วิจัย สังกัด

นาย พิทยุทธ วงศ์จันทร์ สังกัด วิทยาลัยเพื่อการค้นคว้าระดับปริญญาตรี

สนับสนุนโดยกองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยนเรศวรประจำปี 2559

| |
|-------------------------------|
| สำนักหอสมุด มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| วันลงทะเบียน..... |
| เลขทะเบียน.....1044845 |
| เลขเรียกหนังสือ..... ๖ ๑๙ |

๘๖๒
.PU
พ6715
๒559

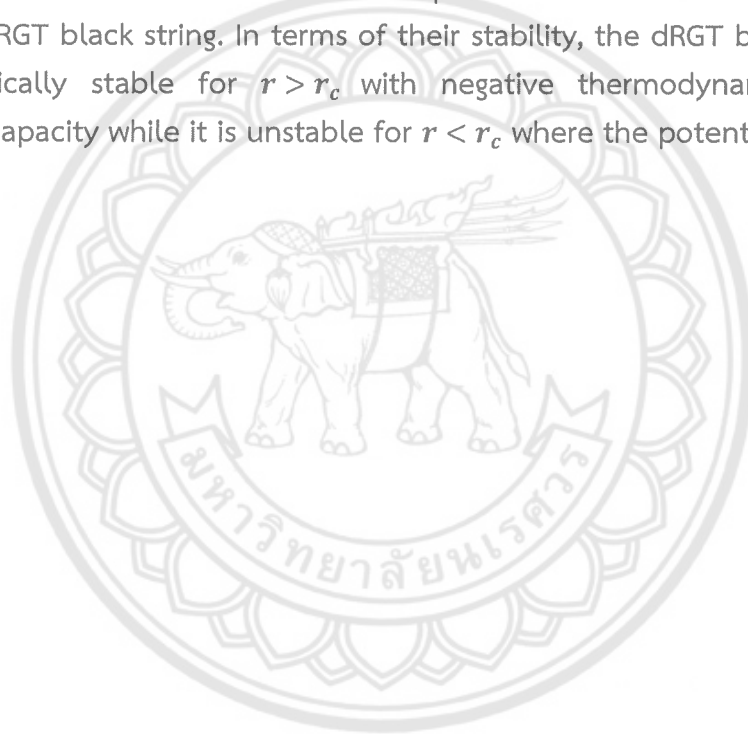
บทคัดย่อ

ในงานวิจัยชิ้นนี้เราได้นำเสนอผลเฉลยสมมาตรทรงกระบอกทั้งแบบมีประจุและไม่มีประจุในทฤษฎีแมสตีฟกราวิตี้แบบ dRGT หรือที่รู้จักกันทั่วไปคือ ผลเฉลยวงแหวนดำ โดยผลเฉลยวงแหวนดำนี้สามารถตีความได้ว่าเป็นผลเฉลยที่มีความทั่วไปมากกว่าผลเฉลยวงแหวนดำที่ค้นพบโดย เลมอส (Lemos) กล่าวคือผลเฉลยวงแหวนดำแบบ dRGT นี้ได้รวมผลของผลเฉลยวงแหวนชั่วเดียวเข้ามาด้วย ทั้งนี้ ในงานวิจัยชิ้นนี้เราได้ศึกษาผลเฉลยนี้โดยการคำนวณหา มวล อุณหภูมิ เอนโทรปี และพบว่า การมีอยู่ของมวลกราวิตรอนนั้นจะมีผลกระทบกับอุณหพลศาสตร์ของวงแหวนดำ โดยที่ การเปลี่ยนเฟส ฮอว์กิงเพส สามารถเกิดขึ้นได้ในขณะที่ผลเฉลยของเลมอสนั้นไม่สามารถเกิดขึ้นได้ นอกจากนี้ เรายังพบว่า ผลเฉลยวงแหวนดำนี้จะมีเสถียรภาพเชิงอุณหพลศาสตร์ถ้า รัศมีของวงแหวนมีค่ามากกว่าวิฤต



Abatract

We present a cylindrically symmetric solution, both charged and uncharged, which is known as a black string solution to the nonlinear ghost-free massive gravity found by de Rham, Gabadadze, and Tolley (dRGT). This "dRGT black string" can be thought of as a generalization of the black string solution found by Lemos. Moreover, the dRGT black string solution also include other classes of black string solution such as the monopole-black string ones since the graviton mass contributes to the global monopole term as well as the cosmological constant term. To investigate the solution, we compute mass, temperature, and entropy of the dRGT black string. We found that the existence of the graviton mass drastically affects the thermodynamics of the black string. Furthermore, the Hawking-Page phase transition is found to be possible for the dRGT black string as well as the charged dRGT black string. In terms of their stability, the dRGT black string solution is thermodynamically stable for $r > r_c$ with negative thermodynamical potential and positive heat capacity while it is unstable for $r < r_c$ where the potential is positive.



Executive Summary

A Theoretical model for describing late-time acceleration of the universe has been intensively investigated. The investigation can be divided into two classes. First, it is investigated by constructing an exotic matter/energy to take into account the accelerating expansion namely **Dark Energy model**. Second, one can describe the accelerating expansion of the universe by modifying the Einstein's gravity theory which is usually called **Modified Gravity Theory**. In this research, we will focus on one of viable models of modified gravity theory which known as de Rham Gabadadze Tolley (dRGT) massive gravity theory. The dRGT massive gravity theory is a modified gravity by which the graviton mass is properly added into the Einstein's gravity theory. It can be used to describe the late-time acceleration of the universe. However, one has to check that the theory can be reduced to describe the gravity theory at local scale such as the Solar system scale, the scale at which Einstein's gravity theory works very well. This is the main purpose of this research project. One of proper ways to investigate this validity is to find the static and cylindrically symmetric solutions of the theory and then compare with the known solution from Einstein's gravity theory. In this research project, we solve the modified Einstein field equation corresponding to the dRGT massive gravity and found that the solutions are rich in properties and can recover most well-known solutions in Einstein's gravity theory. Moreover, the solution can be reduced to the Schwarzschild solution at the limit of the parameter in the model. This implies that dRGT massive gravity can be reduced to Einstein's gravity theory at local scales and then make the same predictions with one from Einstein's gravity theory while it can take into account the late-time expansion of the universe at cosmological scales. Moreover, from this solution, we also investigate the thermodynamic properties of the black hole. For this part of investigation, we compute the mass, temperature, entropy, heat capacity and the free energy in both charged and uncharged solutions. By analyzing the thermodynamic properties of the dRGT black sting, we found that we found that it is possible to obtain the Hawking-Page phase transition in dRGT black string while it is not possible for Lemos solution. The conditions to provide such a transition are explored. In fact, we determine the phase transition in both charged and non-charged case by analyzing the sign of the potential at $r = r_c$, with the stable (unstable) branch for $r > (<)r_c$. The results from this investigation may provide the hint for actual gravity theory which is beyond the Einstein's gravity theory to describe nature of gravitational interaction and structure of the spacetime of our universe.

เนื้อหางานวิจัย

บทนำ

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์เป็นทฤษฎีที่ว่าด้วยความสัมพันธ์ของความโค้งของกาลอวกาศและสสารพลังงาน ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปนี้ถือได้ว่าเป็นทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุทางดาราศาสตร์รวมถึงพลศาสตร์ของจักรวาล จากหลักฐานของการสังเกตการณ์ทางดาราศาสตร์เราพบว่า ณ ปัจจุบันเอกภพกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง [1, 2] โดยการใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปและการพิจารณาสมการทั่วไปที่เรารู้จักกันดีในเอกภพ พบว่า เราไม่สามารถอธิบายการขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพนี้ได้ ความพยายามในการอธิบายการขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพนี้ถูกแบ่งย่อยออกเป็นสองแนวทางคือ การเพิ่มสสารพลังงานรูปแบบใหม่เข้าไปในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป หรือ การปรับเปลี่ยนทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปใหม่

ในงานวิจัยชิ้นนี้เราจะพิจารณาในส่วนที่ว่าด้วยการปรับเปลี่ยนทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์โดยที่ไม่ได้เพิ่มสสารพลังงานพิเศษเข้าไปในทฤษฎีซึ่ง เราเรียกว่า ทฤษฎีโมดิไฟด์กราวิตี (Modified Gravity Theory) ณ ปัจจุบันนี้มีการทำงานวิจัยกันอย่างแพร่หลาย ข้อดีอย่างหนึ่งของการอธิบายการขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพจากวิธีนี้คือ มีความเป็นธรรมชาติมากกว่าที่จะเพิ่มสสารหรือพลังงานที่มีคุณสมบัติแปลกประหลาดเข้ามาในทฤษฎีแบบจำลองโมดิไฟด์กราวิตี สามารถแยกประเภทได้หลายวิธี อย่างไรก็ตาม ณ ที่นี้จะสนใจเฉพาะแบบจำลองความโน้มถ่วงแบบมีมวล หรือ แบบจำลองแมสซีฟกราวิตี (Massive Gravity Model)

การศึกษาความเป็นไปได้ของทฤษฎีแมสซีฟกราวิตีมีมาก่อนช้านานมากแล้ว โดยเริ่มจาก เพียร์ซ์(Fierz) และ พาโล(Pauli) เสนอแอสซิมป์โทติกที่ใช้ได้ก่อนช้านานทั่วไปสำหรับกราวิตอนที่มีมวลเมื่อปี ค.ศ 1939 [3] หลังจากนั้นการศึกษาเกี่ยวกับแมสซีฟกราวิตีค่อนข้างซบเซา อย่างไรก็ตาม เมื่อปี ค.ศ 1970 แมสซีฟกราวิตีกลับมาได้รับความนิยมอีกครั้งเมื่อ แวนแดม (van Dam) เวลทแมน (Veltman) และ ซากาโรฟ(Zakharov) ได้ศึกษาแอสซิมป์โทติกของเพียร์ซ์และพาโลเพิ่มเติมโดยการเพิ่มแหล่งกำเนิดเข้าไปในแอสซิมป์โทติก [4, 5] จากการศึกษาพบว่า การลดรูปจากแมสซีฟกราวิตีไปเป็นแมสเลสกราวิตีจะทำให้เกิดการละเมิดหลักการความต่อเนื่องของพารามิเตอร์ กล่าวคือ เมื่อตั้งค่าให้มวลของกราวิตอนมีค่าเป็นศูนย์ในแมสซีฟกราวิตีเราจะไม่ได้แมสเลสกราวิตีที่สอดคล้องกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์

หลังจากนั้น ทฤษฎีแมสซีฟกราวิตีได้ถูกพัฒนาขึ้นตามลำดับ [6-8] จนในที่สุดในปี ค.ศ 2010 เดอรัม (de Rham) กาบาดาเซ (Gabadadze) และ ทอลเลย์ (Tolley) ได้เสนอแบบจำลองแมสซีฟกราวิตีที่มีเสถียรภาพและปราศจากปัญหาความไม่ต่อเนื่องของพารามิเตอร์ขึ้น [9-11] ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะเรียกแบบจำลองแมสซีฟกราวิตีแบบนี้ว่า แบบจำลองดีอาร์จีที (dRGT model) แนวความคิดหลักๆของแบบจำลองนี้คือการพยายามสร้างแบบจำลองให้มีคอนสเตรนท (Constraint) สองลำดับเพื่อจำกัดเฟสสเปซของระบบพลวัตให้อยู่ในช่วงที่แบบจำลองมีเสถียรภาพ [12-17] โดยที่คอนสเตรนทนั้นได้มาจากการเพิ่มสนามลากรางมัลติพลีเออ (Lagrange multiplier field) เข้าไปในแบบจำลอง ซึ่งสนามลากรางมัลติพลีเออนี้ถูกเรียกว่า ฟิดูเซียลเมตริก (Fiducial metric) หรือเมตริกตัวช่วย แบบจำลองแมสซีฟกราวิตีแบบดีอาร์จีทีนี้ได้ถูกพัฒนาและปรับเปลี่ยนเพื่อให้สามารถอธิบายข้อมูลจากการสังเกตการณ์ที่พบว่าเอกภพกำลังขยายตัวด้วยความเร่งอย่างแพร่หลาย อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีโมดิไฟด์กราวิตีใดๆนั้นต้องสามารถอธิบายความโน้มถ่วงในระดับระบบสุริยะได้ถูกต้องเทียบเท่าทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นที่จะทดสอบทฤษฎีแมสซีฟกราวิตีแบบดีอาร์จีทีโดยเทียบผลของทฤษฎีนี้กับผลที่ได้จากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ในระดับระบบสุริยะ

การหาผลเฉลยสมมาตรทรงกลมจากสมการการเคลื่อนที่ที่ได้จากทฤษฎีแมสส์ฟราวิตินั้นจะทำให้เราสามารถเปรียบเทียบแล้ววิเคราะห์ข้อแตกต่าง รวมถึงข้อดีและข้อได้เปรียบของทฤษฎีนี้ได้ ในงานวิจัยนี้ เราได้ทำการหาผลเฉลยนี้และวิเคราะห์ได้ว่า ผลเฉลยมีคุณลักษณะที่ครอบคลุมหลากหลายผลเฉลยที่หาได้จากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ อาทิเช่น ผลเฉลยเลมอส (Lesmos solution) หรือ ผลเฉลยขั้วเดียว (monopole solution) นอกจากนี้แล้วเรายังพบว่า ผลเฉลยทั่วไปนี้ยังสามารถสรุปไปเป็นผลเฉลยวงแหวนค่ามาตรฐานในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ได้เมื่อให้มวลของกราวิตอนหายไป ซึ่งนี่บ่งบอกเราได้ว่า ทฤษฎีแมสส์ฟราวิตีแบบดิวาร์จี่ที่นั่นสามารถให้ผลการทำนายความโน้มถ่วงที่ระดับระบบสุริยะได้เหมือนกับทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ยิ่งไปกว่านั้น เรายังได้ทำการวิเคราะห์หาคำคุณสมบัติทางอุณหพลศาสตร์จากผลเฉลยวงแหวนค่าที่หาได้จากทฤษฎีแมสส์ฟราวิตีนี้ จากการวิเคราะห์ เราพบว่า มีความเป็นไปได้ที่จะเกิดการเปลี่ยนเฟสแบบฮอว์กิงค์เพชโดยใช้ผลเฉลยนี้ในขณะที่การเปลี่ยนเฟสนี้จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้ในผลเฉลยของเลมอสจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ ข้อมูลจากการเปลี่ยนเฟสนี้จะทำให้เราเข้าใจโครงสร้างทางอุณหพลศาสตร์ในกระบวนการที่แก๊สร้อนรวมตัวกันกลายเป็นวงแหวนค่าได้ ผู้ทำวิจัยหวังว่า ผลจากงานวิจัยชิ้นนี้จะเป็นส่วนหนึ่งในการสร้างทฤษฎีความโน้มถ่วงที่มีความถูกต้องมากกว่าทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ที่สามารถอธิบายธรรมชาติของเทหวัตถุและพลศาสตร์ของเอกภพได้

แบบจำลองแมสส์ฟราวิตีแบบดิวาร์จี่

แบบจำลองแมสส์ฟราวิตีสามารถอธิบายได้จากแอกชันทั่วไปดังนี้ [9-11]

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \frac{M_{Pl}^2}{2} [R + m_g^2 U(g, \phi^a)]$$

โดยที่ R คือ ริคชีสเกลาร์ (Ricci scalar) $g_{\mu\nu}$ คือ เมทริกเทนเซอร์ (metric tensor) และ $m_g^2 U(g, \phi^a)$ คือ พจน์มวลที่เพิ่มเข้ามาจากทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ทั้งนี้ m_g^2 บ่งบอกถึงมวลของกราวิตอน และ U คือ ฟังก์ชันเฉพาะสำหรับทฤษฎีแมสส์ฟราวิตีแบบดิวาร์จี่ที่ นิยามได้ดังนี้

$$\begin{aligned} U(g, \phi^a) &= U_2 + \alpha_3 U_3 + \alpha_4 U_4 \\ U_2 &= [K]^2 - [K^2] \\ U_3 &= [K]^3 - [K][K^2] + 2[K]^3 \\ U_4 &= [K]^4 - 6[K^2][K^2] + 8[K][K]^3 - 6[K^4] \\ K_\nu^\mu &= \delta_\nu^\mu - \sqrt{g^{\mu\rho} f_{ab} \partial_\nu \phi^a \partial_\rho \phi^b} \end{aligned}$$

โดยที่ f_{ab} คือ ฟิดูเซียลเมทริกซ์ สัญลักษณ์ $[K]$ หมายถึง เทรซ (trace) ของ K_ν^μ α_3 และ α_4 คือพามีเตอร์ของทฤษฎีและ ϕ^b คือ สตรัคเคสเบิร์กสเกลาร์ (Struckelberg scalars) มีหน้าที่เพื่อให้เกิดการแปลงของมันทำให้ทฤษฎีกลับมาเป็นสมมาตรเจนเนอราลโควาเรียนซ์ (general covariance) เหมือนทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ สมการการเคลื่อนที่จากทฤษฎีสามารถหาได้จากแปรผันแอกชันนี้เทียบกับเมทริกแล้วใช้หลักการแปรผันน้อยสุดของแอกชัน ซึ่งสมการการเคลื่อนที่นั้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$G_{\mu\nu} + m_g^2 X_{\mu\nu} = 0$$

โดยที่ $X_{\mu\nu}$ คือปริมาณเทนเซอร์ที่บ่งบอกถึงพลังงานและโมเมนตัมที่เกิดขึ้นจากมวลของกราวิตอน ซึ่งเขียนเต็มรูปแบบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} &= K_{\mu\nu} - K g_{\mu\nu} - \alpha \left(K_{\mu\nu}^2 - K K_{\mu\nu} + \frac{1}{2} ([K]^2 - [K^2]) g_{\mu\nu} \right) \\ &\quad + 3\beta \left(K_{\mu\nu}^3 - K K_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} K_{\mu\nu} ([K]^2 - [K^2]) - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} ([K]^3 - [K][K^2] + 2[K]^3) \right) \end{aligned}$$

สมการการเคลื่อนที่นี้ถูกมองได้ว่าเป็นสมการที่ปรับปรุงสมการสนามของไอน์สไตน์เนื่องจากมวลกราวิตอนและเรา
จะใช้สมการนี้เป็นสมการหลักในการหาผลเฉลยหลุมดำ

ผลเฉลยสมมาตรทรงกระบอก

สมการสนามของไอน์สไตน์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์คู่ควบไม่เชิงเส้น ดังนั้น โดยทั่วไปแล้วจะไม่สามารถหาผล
เฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ วิธีการหนึ่งที่จะทำให้เราหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้คือ การพิจารณาสมมาตรของระบบที่
ต้องการหาผลเฉลย ทั้งนี้ สมมาตรที่ง่ายและพบบ่อยในธรรมชาติของระบบในดาราศาสตร์คือสมมาตรทรงกระบอก
เมื่อพิจารณาระบบที่อยู่นิ่งด้วยแล้ว เมทริกซ์ทั่วไปสำหรับสมมาตรนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$ds^2 = -n(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + L(r)^2(d\phi^2 + \alpha_g^2 dz^2)$$

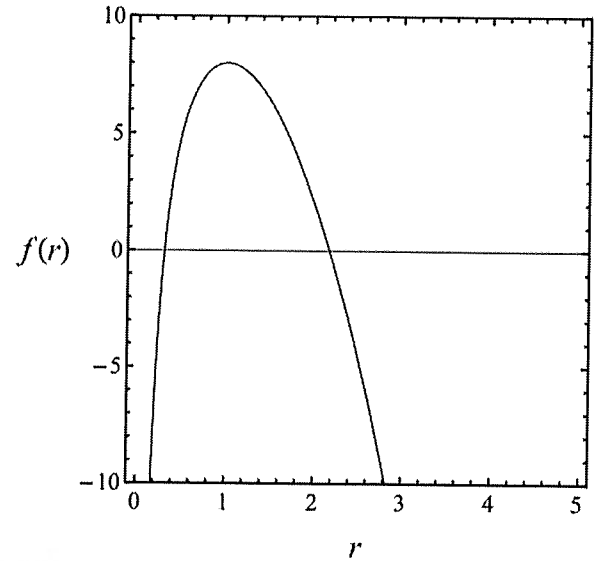
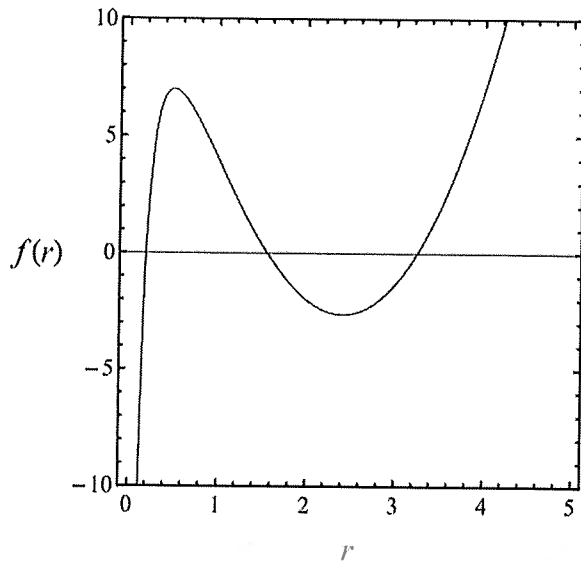
เนื่องจากทฤษฎีแมสตีฟกราวิตีนั้น เราจำเป็นที่จะต้องหารูปแบบของเมทริกซ์ตัวช่วย ซึ่งการเลือกรูปแบบที่เมทริกซ์ตัว
ช่วยให้เหมาะสมนั้นจะช่วยทำให้เราสามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ ในที่นี้เราจะเลือกรูปแบบเมทริกซ์ตัวช่วย
ตามเอกสารอ้างอิง [25]

$$f_{\mu\nu} = \text{diag}(0,0, h(r)^2, \alpha_g^2 h(r)^2)$$

แทนค่าเมทริกซ์ทั้งสองนี้ลงในสมการการเคลื่อนที่ จากนั้นทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลเฉลย ผลเฉลยดังกล่า
สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(r) = n(r) = \alpha_m^2 r^2 - \frac{4M}{\alpha_g r} + \alpha_m^2 c_1 r + \alpha_m^2 c_0$$

โดยที่ $\alpha_m^2 = m_g^2(1 + \alpha + \beta)$, $c_1 = h_0(1 + 2\alpha + 3\beta)/(1 + \alpha + \beta)$ และ $c_0 = h_0(\alpha + 3\beta)/(1 + \alpha + \beta)$
ทั้งนี้รายละเอียดและวิธีการแก้สมการนั้น สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวก จากผลเฉลยนี้ จะเห็นได้ว่า เมื่อเรา
ให้ $c_1 = c_0 = 0$ และ $\alpha_m = \alpha_g$ จะได้ว่า ผลเฉลยวงแหวนดำนี้จะลดรูปไปเป็นผลเฉลยวงแหวนดำของเลมอส [30]
ซึ่งเป็นผลเฉลยสมมาตรทรงกระบอกของสมการไอน์สไตน์ที่มีค่าคงที่จักรวาล ทั้งนี้ จะเห็นได้ว่า ค่าคงที่จักรวาล α_g
ในผลเฉลยของเลมอสนั้น มีความเกี่ยวเนื่องโดยกับค่าของมวลกราวิตอนในทฤษฎีแมสตีฟกราวิตีโดยที่เราไม่
จำเป็นต้องใส่ค่าคงที่จักรวาลเข้ามาในทฤษฎี นอกจากนี้แล้ว เรายังพบว่า ผลเฉลยวงแหวนดำแบบ dRGT นี้ยังมี
พจน์เพิ่มเข้ามา 2 พจน์ กล่าวคือ พจน์ที่มีค่าคงที่ c_1 และ c_0 โดยที่ พจน์ที่มีค่าคงที่ C_0 สอดคล้องกับผลเฉลย โกล
บอลโมโนโพล (global monopole) ทั้งนี้ผลเฉลยโกลบอลโมโนโพลนี้สามารถพบได้จากทฤษฎีฟิสิกส์พลังงานสูง
ที่มีการทำลายของสมมาตรเกจ [26, 27] สำหรับ พจน์ที่มีค่าคงที่ c_1 นั้นเป็นพจน์ที่บ่งบอกถึงลักษณะเฉพาะของ
ผลเฉลยนี้โดยที่ยังไม่พบผลเฉลยลักษณะนี้มาก่อน ดังนั้น เราจะพบว่าทฤษฎีแมสตีฟกราวิตี ยิ่งไปกว่านั้น ในผล
เฉลยทั่วไปนี้ พจน์ที่มีค่าคงที่ c_1 ยังทำให้โครงสร้างของหลุมดำเปลี่ยนไปโดยที่พจน์นี้จะนำไปสู่การมีอยู่ของขอบฟ้า
เหตุการณ์ (event horizon) ได้ถึงสามค่า ซึ่งผลเฉลยโดยทั่วไปในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปนี้มีได้เพียงสองค่า
เท่านั้น ทั้งนี้เพื่อความน่าเชื่อถือ เราได้ใช้วิธีการทางตัวเลขเพื่อหาพื้นที่ของพารามิเตอร์ที่ทำให้เกิดขอบฟ้า
เหตุการณ์ได้สามค่า ซึ่งแสดงในรูปที่ 1 ทางด้านซ้ายมือ และในรูปขวามือนั้น เราได้เลือกจุดของพารามิเตอร์ใน
พื้นที่ดังกล่าวนำไปวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของ f และ r ซึ่งพบว่า ขอบฟ้าเหตุการณ์มีได้สามค่าจริง จะเห็น
ได้ว่า ผลเฉลยที่เราพบนั้นมีคุณลักษณะเฉพาะตัวที่เป็นเอกลักษณ์ ดังนั้นผลเฉลยลักษณะนี้อาจจะมีผลทำให้
คุณลักษณะทางอุณหพลศาสตร์ของหลุมดำมีค่าเปลี่ยนไป ซึ่งในบทต่อไปเราจะกล่าวถึงคุณสมบัติของวงแหวนดำ
ในเชิงของอุณหพลศาสตร์



รูปที่ 1. กราฟแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยหลุมดำที่ได้จากทฤษฎีแมสส์พกราวิตีนั้นมีขอบฟ้าเหตุการณ์ได้ถึงสามค่า

คุณสมบัติทางอุณหพลศาสตร์ของหลุมดำ

สิ่งที่น่าสนใจอย่างหนึ่งสำหรับการศึกษาคงสมบัติของวงแหวนดำคือการศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ สำหรับผลเฉลยเลมอสันั้น เราพบความสอดคล้องกันระหว่างกฎทางอุณหพลศาสตร์และกฎของวงแหวนดำ ยกตัวอย่างเช่น กฎข้อสองของอุณหพลศาสตร์กล่าวว่า เอนโทรปีของระบบจะต้องเพิ่มขึ้นเสมอ ซึ่งสอดคล้องกับคุณลักษณะของวงแหวนดำที่ว่า พื้นที่ผิวของวงแหวนดำจะต้องเพิ่มขึ้นเสมอ จากความสอดคล้องกันนี้ทำให้นักวิจัยศึกษาคงสมบัติของวงแหวนดำเชิงอุณหพลศาสตร์กันอย่างแพร่หลาย นอกจากนี้แล้ว การศึกษาว่าความสอดคล้องนี้ยังใช้ได้หรือไม่ และมีคุณสมบัติพิเศษเพิ่มอย่างไร ถ้าผลเฉลยวงแหวนดำเปลี่ยนไป ในบทนี้เราจะศึกษาคงสมบัติดังกล่าวสำหรับผลเฉลยวงแหวนดำที่พบในทฤษฎีแมสส์พกราวิตี

จากผลเฉลยสมมาตรทรงกลมในบทที่ผ่านมา เราสามารถคำนวณหาค่าของขอบฟ้าเหตุการณ์ได้โดยหาจาก $f(r) = 0$ ซึ่งโดยทั่วไปนั้นผลเฉลยนี้จะมีได้สามค่า หนึ่งในนั้นสามารถเขียนแทนด้วย r_+ เมื่อแทนค่า r_+ กลับเข้าไปใน $f(r) = 0$ เราจะสามารถคำนวณหามวลของหลุมดำได้ดังนี้

$$M = \frac{r_+ \alpha_g \alpha_m^2}{4} (r_+^2 - c_1 r_+ + c_0)$$

นอกจากนี้แล้วเรายังสามารถคำนวณหาอุณหภูมิของหลุมดำได้ดังนี้

$$T = \frac{f'}{4\pi} = \frac{\alpha_m^2}{4\pi r_+} (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0)$$

จากสองปริมาณนี้ เราสามารถคำนวณหาเอนโทรปีของหลุมดำได้จากสมการทางอุณหพลศาสตร์ $dM = T dS$ ดังนี้

$$S = \int T^{-1} dM = \int T^{-1} \frac{\partial M}{\partial r_+} dr_+ = \frac{1}{2} \alpha_g \pi r_+^2 = \frac{A_+}{4}$$

จากเอนโทรปีที่คำนวณได้นี้ แสดงให้เห็นว่าความสอดคล้องกันระหว่างเอนโทรปีและพื้นที่ผิวของวงแหวนดำนั้นยังคงใช้ได้กระทั่งในทฤษฎีแมสส์พกราวิตีซึ่งเป็นทฤษฎีที่ปรับเปลี่ยนจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปแล้ว คุณลักษณะสำคัญอย่างหนึ่งสำหรับวงแหวนดำในทฤษฎีแมสส์พกราวิตีคือ เราจะเห็นได้ว่าอุณหภูมิของหลุมดำจะมีค่าต่ำสุด ซึ่งคุณลักษณะนี้จะไม่พบในหลุมดำชวาชิลด์ การมีค่าต่ำสุดของอุณหภูมินี้สามารถตีความทางฟิสิกส์ได้คือ สำหรับอุณหภูมิกำหนึ่งที่ต่ำกว่าอุณหภูมิต่ำสุดนี้ จะเห็นได้ว่า เราไม่สามารถหาค่าของ r_+ ที่สอดคล้องกับอุณหภูมิต่ำสุดได้ นั่นหมายความว่า ที่อุณหภูมิกำนี้จะไม่มีหลุมดำนั่นเอง ซึ่งบ่งบอกเราได้ว่า สถานะของระบบยังคงเป็นเพียงกลุ่มของแก๊สร้อนเท่านั้น แต่เมื่ออุณหภูมิกำนี้เพิ่มสูงขึ้น ณ ที่อุณหภูมิต่ำสุด จะได้ว่ามีความเป็นไปได้ที่จะมีวง

แหวนดำเกิดขึ้น การเปลี่ยนสถานะของระบบเช่นนี้เรียกว่า การเปลี่ยนเฟสแบบฮอว์กิง-เพจ (Hawking-Page phase transition) [28, 29] การเปลี่ยนเฟสนี้มีความสำคัญอย่างมากสำหรับฟิสิกส์พลังงานสูงรวมถึงทฤษฎีโฮโลกราฟี กล่าวคือ การเปลี่ยนเฟสลักษณะนี้สมมูลกับการเปลี่ยนเฟสระหว่างสถานะคอนไฟน์เมนต์ (confinement) และ สถานะดีคอนไฟน์เมนต์ (deconfinement) ของระบบอนุภาคพลังงานสูง อย่างไรก็ตาม การที่จะเกิดการเปลี่ยนเฟสนี้ได้จริงเราจะเป็นจะต้องศึกษาเสถียรภาพของแต่ละสถานะ การหาเสถียรภาพของสถานะหลุมดำหรือแก๊สร้อนในเชิงอุณหพลศาสตร์นี้ สามารถวิเคราะห์ได้โดยการคำนวณหา ค่าพลังงานอิสระ และ ค่าความจุความร้อนของหลุมดำ ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$F = M - TS = \frac{r_+ \alpha_g \alpha_m^2}{4} (c_0 - r_+^2)$$

$$C_+ = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{r=r_+} = \frac{\pi \alpha_g r_+^2 (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0)}{3r_+^2 - c_0}$$

เงื่อนไขที่จะทำให้สถานะของแหวนดำมีเสถียรภาพคือ $F < 0$ และ $C_+ > 0$ ซึ่งจะให้เงื่อนไขดังนี้

$$r > r_c = \sqrt{c_0} \text{ และ } r > \sqrt{\frac{c_0}{3}}$$

ตามลำดับ ซึ่งเมื่อรวมทั้งสองเงื่อนไขแล้ว เราพบว่า วงแหวนจะมีเสถียรภาพในเชิงอุณหพลศาสตร์ก็ต่อเมื่อ $r > r_c$ และด้วยเหตุนี้ การเปลี่ยนเฟสแบบฮอว์กิง-เพจจะเกิดขึ้นที่ $r = r_c$ นอกจากนี้แล้วเรายังได้หาผลเฉลยและวิเคราะห์คุณสมบัติของวงแหวนดำที่มีประจุ ในทฤษฎีแมสส์พกราวิตีด้วย ซึ่งวิธีการและขั้นตอนการคำนวณนั้นเหมือนกันกับวิธีการคำนวณในแบบที่ไม่มีประจุดังที่ได้กล่าวไปแล้ว เพียงแต่สมการจะมีความยุ่งยากและยาวกว่า ทั้งนี้ จึงไม่นำมานำเสนอ ณ ที่นี้ ผู้สนใจรายละเอียดการคำนวณและวิเคราะห์สามารถศึกษาได้จากภาคผนวก อย่างไรก็ตาม ผลสำคัญที่คำนวณได้ ณ ที่นี้คือ การมีอยู่ของรัศมีวิกฤตทั้งระบบแกรนด์คาโนนิคัล และ ระบบคาโนนิคัล ตามลำดับ ดังนี้

$$r_c = \sqrt{c_0 - \frac{\mu^2}{\alpha_m^2}} \text{ และ } r_c = \sqrt{c_0 \left(1 + \left[1 + \frac{144q^2}{\alpha_g^2 \alpha_m^2 c_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right)}$$

โดยที่ μ ศักย์เคมี และ q คือประจุของวงแหวนดำ ทั้งนี้ วงแหวนจะมีเสถียรภาพในเชิงอุณหพลศาสตร์ก็ต่อเมื่อ $r > r_c$ และ การเปลี่ยนเฟสแบบฮอว์กิง-เพจจะเกิดขึ้นที่ $r = r_c$ คล้ายกันกับในระบบที่ไม่มีประจุ ทั้งนี้ ไม่มีประจุ และ ศักย์เคมี ระบบก็จะสามารถลดรูปไปเป็นกรณีที่ไม่มีประจุโดยอัตโนมัติ ประเด็นสำคัญอย่างหนึ่งที่แตกต่างจากผลเฉลยของเลมอสคือ ในกรณีของผลเฉลยเลมอส $c_0 = 0$ นั้นหมายความว่า จะเกิดการเปลี่ยนเฟสได้ก็ต่อเมื่อรัศมีวงแหวนดำเป็นศูนย์ ซึ่งนำไปสู่ใจความสำคัญที่ว่า ไม่มีทางเกิดการเปลี่ยนเฟสได้ในกรณีของผลเฉลยเลมอสนั่นเอง

สรุป

ในงานวิจัยชิ้นนี้ เราได้ทำการหาผลเฉลยสมมาตรทรงกระบอกจากสมการการเคลื่อนที่ที่ได้จากทฤษฎีแมสส์พกราวิตีแบบ dRGT ซึ่งเป็นทฤษฎีหนึ่งในการปรับเปลี่ยนทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป หรือ ทฤษฎีโมดิไฟด์กราวิตี จากการวิเคราะห์ที่ได้ดังกล่าว จะได้ว่า ผลเฉลยนี้มีคุณลักษณะที่ครอบคลุมหลากหลายผลเฉลยที่ทำได้จากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ กล่าวคือ ผลเฉลยเลมอส หรือ ผลเฉลยชิวเดียว นอกจากนี้แล้วเรายังพบว่า ผลเฉลยทั่วไปนี้ยังสามารถลดรูปไปเป็นผลเฉลยวงแหวนดำมาตรฐานในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ได้เมื่อให้มวลของกราวิตอนหายไป ซึ่งนี่บ่งบอกเราได้ว่า ทฤษฎีแมสส์พกราวิตีแบบดาร์จิทินั้นสามารถให้ผลการทำนายความโน้มถ่วงที่ระดับระบบสุริยะได้เหมือนกับทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ยิ่งไปกว่านั้น เรายังได้ทำการคำนวณหาปริมาณทางอุณหพลศาสตร์ เช่น มวล อุณหภูมิ เอนโทรปี พลังงานอิสระ หรือ ค่าความจุความร้อน จากผลเฉลยวงแหวนดำที่ทำได้จากทฤษฎีแมสส์พกราวิตีนี้ จากการวิเคราะห์ปริมาณดังกล่าว เราพบว่า มีความเป็นไปได้

ได้ที่จะเกิดการเปลี่ยนเฟสแบบฮอกริงค์เพชโดยใช้ผลเฉลยนี้ในขณะที่การเปลี่ยนเฟสนี้จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้ในผลเฉลยเลมอสจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ นอกจากนี้แล้ว เรายังพบว่า กฎสำคัญของหลุมดำ เช่น พื้นที่ของหลุมดำจะต้องเพิ่มขึ้นเสมอ ยังคงใช้ได้ถึงแม้เราจะปรับเปลี่ยนทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปไปเป็นทฤษฎีแมสส์สปีกราวตี้แล้วก็ตาม ประเด็นที่น่าสนใจอีกอย่างสำหรับการทดสอบทฤษฎีแมสส์สปีกราวตี้คือการหาเสถียรภาพของทฤษฎี หรือ แม้กระทั่งหาผลเฉลยอื่นที่มีความทั่วไปมากกว่านี้ ทั้งนี้ทฤษฎีแมสส์สปีกราวตี้นี้อาจจะให้ผลที่แตกต่างอย่างมีนัยยะเมื่อเราเลือกรูปแบบของเมตริกตัวช่วยให้มีความเหมาะสม หรือ มีความสอดคล้องกับผลเฉลยทั่วไปมากกว่านี้ โดยงานวิจัยในส่วนนี้อยู่นอกเหนือจากงานวิจัยชิ้นนี้ ผู้วิจัยจะทำการดำเนินงานในโครงการวิจัยขั้นต่อไปและผู้ทำวิจัยหวังว่า ผลจากงานวิจัยชิ้นนี้จะเป็นส่วนหนึ่งในการสร้างทฤษฎีความโน้มถ่วงที่มีความถูกต้องมากกว่าทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ที่สามารถอธิบายธรรมชาติของเทหวัตถุและพลศาสตร์ของเอกภพได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Supernova Cosmology Project Collaboration, S. Perlmutter et al., "Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae," *Astrophys. J.*517 (1999) 565-586, arXiv:astro-ph/9812133.
- [2] Supernova Search Team Collaboration, A. G. Riess et al., "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant," *Astron. J.*116 (1998) 1009-1038, arXiv:astro-ph/9805201.
- [3] M. Fierz and W. Pauli, "On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," *Proc. Roy. Soc. Lond.*A173 (1939) 211-232.
- [4] H. van Dam and M. J. G. Veltman, "Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields," *Nucl. Phys.*B22 (1970) 397-411.
- [5] V. I. Zakharov *JETP Letters (Sov. Phys.)*12 (1970) 312.
- [6] A. I. Vainshtein, "To the problem of nonvanishing gravitation mass," *Phys. Lett.* B39 (1972) 393-394.
- [7] D. G. Boulware and S. Deser, "Can gravitation have a finite range?," *Phys. Rev.*D6 (1972) 3368-3382.
- [6] N. Arkani-Hamed, H. Georgi, and M. D. Schwartz, "Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space," *Ann. Phys.*305 (2003) 96-118, arXiv:hep-th/0210184.
- [9] C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, "Resummation of Massive Gravity," *Phys. Rev. Lett.*106, 231101 (2011), [arXiv:1011.1232 [hep-th]].
- [10] C. de Rham and G. Gabadadze, "Self-tuned Massive Spin-2," *Phys. Lett.*B693, 334 (2010) [arXiv:1006.4367 [hep-th]].
- [11] C. de Rham and G. Gabadadze, "Generalization of the Fierz-Pauli Action" *Phys. Rev.*D82, 044020 (2010) [arXiv:1007.0443 [hep-th]].
- [12] S. F. Hassan and R. A. Rosen, "Resolving the Ghost Problem in non-Linear Massive Gravity," *Phys. Rev. Lett.* 108, 041101 (2012) [arXiv:1106.3344 [hep-th]].
- [13] S. F. Hassan and R. A. Rosen, "Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity," *JHEP* 1204, 123 (2012) [arXiv:1111.2070 [hep-th]].
- [14] S. F. Hassan, R. A. Rosen and A. Schmidt-May, "Ghost-free Massive Gravity with a General Reference Metric," *JHEP* 1202, 026 (2012) [arXiv:1109.3230[hep-th]].
- [15] S. F. Hassan and R. A. Rosen, "On Non-Linear Actions for Massive Gravity," *JHEP* 1107, 009 (2011) [arXiv:1103.6055 [hep-th]].
- [16] C. de Rham, G. Gabadadze and A. Tolley, "Ghost free Massive Gravity in the Stückelberg language," *Phys. Lett.*B711, 190 (2012) [arXiv:1107.3820[hep-th]].

- [17] S. F. Hassan, A. Schmidt-May and M. von Strauss, "Proof of Consistency of Nonlinear Massive Gravity in the Stuckelberg Formulation," Phys.Lett. B715, 335 (2012) arXiv:1203.5283 [hep-th].
- [18] Q. -G. Huang, Y. -S. Piao and S. -Y. Zhou, "Mass-Varying Massive Gravity," Phys. Rev. D 86, 124014 (2012) [arXiv:1206.5678 [hep-th]].
- [19] E. N. Saridakis "Phantom crossing and quintessence limit in extended nonlinear massive gravity," Class.Quant.Grav. 30, 075003 (2013) arXiv:1207.1800 [gr-qc].
- [20] Yi. Cai, C. Gao and E. N. Saridakis "Bounce and cyclic cosmology in extended nonlinear massive gravity," JCAP 1210, 048 (2012) arXiv:1207.3786 [astro-ph].
- [21] D. -J. Wu, Y. -S. Piao and Y. -F. Cai, "Dynamical analysis of the cosmology of massvarying massive gravity," Phys. Lett. B 721, 7 (2013) arXiv:1301.4326 [hep-th].
- [22] A. De Felice and S. Mukohyama, "Towards consistent extension of quasidilaton massive gravity," Physics Letters B 728C (2014) arXiv:1306.5502 [hep-th].
- [23] A. De Felice, A. E. Gumrukcuoglu and S. Mukohyama, "Generalized quasi-dilaton theory," Phys. Rev. D 88, 124006 (2013) [arXiv:1309.3162 [hep-th]].
- [24] L. Tannukij and P. Wongjun "Mass-Varying Massive Gravity with k-essence" Eur. Phys. J. C 76, 1, 17 (2016) [arXiv:1511.02164 [gr-qc]].
- [25] D. Vegh, "Holography without translational symmetry" arXiv:1301.0537 [hep-th].
- [26] Q. Huang, J. Chen and Y. Wang, "Spinning Particle in Gravitational Field of Black Hole Involving Global Monopole, Int. J. Theor. Phys. 54, 2, 459 (2015) [arXiv:1408.6901 [gr-qc]].
- [27] T. Tamaki and N. Sakai, "Properties of global monopoles with an event horizon," Phys. Rev. D69, 044018 (2004) [gr-qc/0309068].
- [28] S. W. Hawking and D. N. Page, "Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space" Commun. Math. Phys. 87, 577 (1983).
- [29] J. W. York, Jr., "Black hole thermodynamics and the Euclidean Einstein action" Phys. Rev. D 33, 2092 (1986).
- [30] J.P.S. Lemos., "Thermodynamics of Reissner-Nordstrom anti-de Sitter black holes in the grand canonical ensemble" Phys. Rev. D 59, 044020 (1999).

Output ที่ได้จากโครงการ

ผลงานการวิจัยสำหรับโครงการนี้ได้ถูกส่งไปตีพิมพ์วารสาร The European Physical Journal C ภายใต้หัวข้อ "Black string in dRGT massive gravity" โดยงานวิจัยชิ้นนี้ได้รับการตีพิมพ์แบบอิเล็กทรอนิกส์แล้วตามลิงค์ดังนี้ <https://link.springer.com/article/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-017-5426-0> ทั้งนี้วารสารดังกล่าวเป็นวารสารระดับนานาชาติ มี impact factor ปี 2016 คือ 5.331 และอยู่ในระดับควอไทล์ Q1

ภาคผนวก



Black string in dRGT massive gravity

Lunchakorn Tannukij^{1,2,3,a}, Pitayuth Wongjun^{3,4,b}, Suchant G. Ghosh^{5,6,c}

¹ Department of Physics, Faculty of Science, Mahidol University, Bangkok 10400, Thailand

² Department of Physics, Hanyang University, Seoul 133-891, Korea

³ The Institute for Fundamental Study, Naresuan University, Phitsanulok 65000, Thailand

⁴ Thailand Center of Excellence in Physics, Ministry of Education, Bangkok 10400, Thailand

⁵ Centre of Theoretical Physics, Jamia Millia Islamia, New Delhi 110025, India

⁶ Astrophysics and Cosmology Research Unit, School of Mathematical Sciences, University of Kwazulu-Natal, Private Bag 54001, Durban 4000, South Africa

Received: 1 February 2017 / Accepted: 28 November 2017

© The Author(s) 2017. This article is an open access publication

Abstract We present a cylindrically symmetric solution, both charged and uncharged, which is known as a black string solution to the nonlinear ghost-free massive gravity found by de Rham, Gabadadze, and Tolley (dRGT). This “dRGT black string” can be thought of as a generalization of the black string solution found by Lemos. Moreover, the dRGT black string solution includes other classes of black string solution such as the monopole-black string ones since the graviton mass contributes to the global monopole term as well as the cosmological-constant term. To investigate the solution, we compute mass, temperature, and entropy of the dRGT black string. We found that the existence of the graviton mass drastically affects the thermodynamics of the black string. Furthermore, the Hawking–Page phase transition is found to be possible for the dRGT black string as well as the charged dRGT black string. The dRGT black string solution is thermodynamically stable for $r > r_c$ with negative thermodynamical potential and positive heat capacity while it is unstable for $r < r_c$ where the potential is positive.

1 Introduction

In general relativity (GR), where the corresponding graviton is a massless spin-2 particle, is the current description of gravitation in physics and has importantly astrophysical implications. One of the alternating theory of gravity, which follows a very simple idea of generalization to GR, is known as massive gravity where interaction terms, corresponding to graviton mass, are added into GR. The result of such an intro-

duction is that the model of gravity is modified significantly at a large scale so that, from the cosmological point of view, a system like our universe can enter the cosmic accelerating expansion phase. Not only that; the gravity at smaller scale is not altered much by such a modification to ensure the same predictions as GR makes.

However, adding generic mass terms for the graviton on given background usually brings about various instabilities and ghosts for the gravitational theories. To avoid the appearance of the ghost in massive gravity suggested by Boulware and Deser [1], the set of possible interaction terms is constructed accordingly by de Rham, Gabadadze and Tolley (dRGT) [2,3]. In particular, the interaction terms are constructed in a specific way to ensure that the corresponding equations of motion are at most second order differential equations so that there is no ghost field. The allowed interaction terms for the four-dimensional theory consist of three kinds of combination; the quadratic, the cubic, and the quartic orders of the metric. Unfortunately, such nonlinearities involve complexities in the calculation as a price to pay for eliminating the ghost and usually make it cumbersome to find an exact solution. Nevertheless, there have been plenty interesting approaches to tackle the complexity to obtain spherical symmetric solutions in massive gravity theories [4–26]. In particular, it was found by Vegh [4] that a spherically symmetric black hole with a Ricci flat horizon is a solution to the four-dimensional massive gravity and then the solution was studied in the aspect of thermodynamical properties and phase transition structure [5,6]. The spherically symmetric solutions for dRGT were also considered in [9,10]. The extension of the solution in terms of electric charge was found in [11,12]. Moreover, the bi-gravity extension of the solution was found in [13] which covers the previously known spherically symmetric solutions (see [14–16] for reviews on black

^a e-mail: l_tannukij@hotmail.com

^b e-mail: pitbaa@gmail.com

^c e-mail: sgghosh@gmail.com

holes in massive gravity). Recently, other extensions of the dRGT massive gravity solution were explored [27–36].

In astrophysics, it is commonly known that black holes can be created by the gravitational collapse of massive stars. However, the famous Thorne [37] hoop conjecture states that gravitational collapse of a massive star will yield a black hole only if the mass M is compressed to a region with circumference $C < 4\pi M$ in all directions. If the hoop conjecture is true, cylindrical matter will not form a black hole. However, the hoop conjecture was given for a spacetime with a zero cosmological constant. When a negative cosmological constant is introduced, the spacetime will become an asymptotically anti-de Sitter spacetime. Indeed, Lemos [38] has shown a possibility of cylindrical black holes from the gravitational collapse with cylindrical matter distribution in an anti-de Sitter spacetime, violating in this way the hoop conjecture. This cylindrically static black hole solutions in an anti-de Sitter spacetime are called black strings. The pioneering work on the black string is due to Lemos [39–41], and soon its charged and rotating [42] counterpart were also obtained.

The main purpose of this paper is to present an exact black string solution, including its generalization to the charge case in dRGT massive gravity, and also to discuss their thermodynamical properties with a focus on thermodynamic stability. The possibility to obtain a Hawking–Page phase transition is explored. We use units which fix the speed of light and the gravitational constant via $G = c = 1$, and use the metric signature $(-, +, +, +)$.

2 dRGT massive gravity

In this section we review an important ingredient of dRGT massive gravity theory, which is a well-known nonlinear generalization of a massive gravity and is free of the Boulware–Deser ghost by incorporating higher order interaction terms into the Lagrangian. The dRGT massive gravity action is the well-known Einstein–Hilbert action plus suitable nonlinear interaction terms as given by [3]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left[R(g) + m_g^2 \mathcal{U}(g, f) \right], \quad (1)$$

where R is the Ricci scalar and \mathcal{U} is a potential for the graviton which modifies the gravitational sector with the parameter m_g interpreted as the graviton mass. The effective potential \mathcal{U} in four-dimensional spacetime is given by

$$\mathcal{U}(g, \phi^a) = \mathcal{U}_2 + \alpha_3 \mathcal{U}_3 + \alpha_4 \mathcal{U}_4, \quad (2)$$

where α_3 and α_4 are dimensionless free parameters of the theory. The terms \mathcal{U}_2 , \mathcal{U}_3 and \mathcal{U}_4 can be written in terms of the physical metric $g_{\mu\nu}$ and the reference (or fiducial) metric $f_{\mu\nu}$ as

$$\mathcal{U}_2 \equiv [\mathcal{K}]^2 - [\mathcal{K}^2], \quad (3)$$

$$\mathcal{U}_3 \equiv [\mathcal{K}]^3 - 3[\mathcal{K}][\mathcal{K}^2] + 2[\mathcal{K}^3], \quad (4)$$

$$\mathcal{U}_4 \equiv [\mathcal{K}]^4 - 6[\mathcal{K}]^2[\mathcal{K}^2] + 8[\mathcal{K}][\mathcal{K}^3] + 3[\mathcal{K}^2]^2 - 6[\mathcal{K}^4], \quad (5)$$

where

$$\mathcal{K}_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \sqrt{g^{\mu\nu} f_{\mu\nu}}, \quad (6)$$

where the rectangular brackets denote the traces, namely $[\mathcal{K}] = \mathcal{K}_\mu^\mu$ and $[\mathcal{K}^n] = (\mathcal{K}^n)_\mu^\mu$. Note that we choose the unitary gauge in our consideration [4]. One can see that there are no kinetic terms for the fiducial metric. It seems to play the role of the Lagrange multiplier to help us to construct the suitable form of the mass term. Conveniently, we redefine the two parameters α_3 and α_4 of the graviton potential in Eq. (2) by introducing two new parameters α and β , as follows:

$$\alpha_3 = \frac{\alpha - 1}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{\beta}{4} + \frac{1 - \alpha}{12}. \quad (7)$$

The equation of motion of the theory can be obtained by varying the action with respect to the dynamical metric $g_{\mu\nu}$ as

$$G_{\mu\nu} + m_g^2 X_{\mu\nu} = 0, \quad (8)$$

where $X_{\mu\nu}$ is obtained by varying the potential term with respect to $g_{\mu\nu}$ known as the effective energy-momentum tensor. This effective energy-momentum tensor can be written explicitly as

$$X_{\mu\nu} = \mathcal{K}_{\mu\nu} - \mathcal{K} g_{\mu\nu} - \alpha \left(\mathcal{K}_{\mu\nu}^2 - \mathcal{K} \mathcal{K}_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{U}_2}{2} g_{\mu\nu} \right) + 3\beta \left(\mathcal{K}_{\mu\nu}^3 - \mathcal{K} \mathcal{K}_{\mu\nu}^2 + \frac{\mathcal{U}_2}{2} \mathcal{K}_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{U}_3}{6} g_{\mu\nu} \right), \quad (9)$$

and it obeys a constraint by using the Bianchi identities as follows:

$$\nabla^\mu X_{\mu\nu} = 0, \quad (10)$$

where ∇^μ denotes the covariant derivative which is compatible with $g_{\mu\nu}$. In the next section, we will find the solution to this equation of motion by imposing the static and axial symmetry.

3 Black string solution in dRGT massive gravity

In this section, we will look for a static and axially symmetric solution of the modified Einstein equations (8) with the following physical metric ansatz:

$$ds^2 = -n(r)dt^2 + 2d(r)dt dr + \frac{dr^2}{f(r)} + L(r)^2 d\Omega^2, \quad (11)$$

and with the Minkowski flat fiducial metric,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{12}$$

Here $d\Omega^2 = d\varphi^2 + \alpha_g^2 dz^2$ is a metric on the 2-D surface. The 2-D surface is chosen to be compatible with the black string solution [40,43]. The solutions in this ansatz can be classified into two branches: $d(r) = 0$ or $L(r) = l_0 r$, where l_0 is a constant, in terms of the parameters α and β as

$$l_0 = \frac{(\alpha + 3\beta \pm \sqrt{\alpha^2 - 3\beta})}{2\alpha + 3\beta + 1}. \tag{13}$$

From this stage, it is convenient to investigate the branch $d = 0$. Even though we choose to investigate the simple branch, the equation is still difficult to investigate analytically. Since the fiducial metric seems to play the role of a Lagrange multiplier to eliminate the BD ghost, one can choose an appropriate form to simplify the calculation. Indeed, the suitable form of the fiducial metric significantly provides the analytical form of the physical metric, for example [4] for a spherically symmetric solution and [44] for a cosmological solution. In the present work, we choose the fiducial metric to be

$$f_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, h(r)^2, \alpha_f^2 h(r)^2), \tag{14}$$

where $h(r)$ is an arbitrary function. The line element of the corresponding physical metric in this branch can be written as

$$ds^2 = -n(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + L(r)^2 d\Omega^2. \tag{15}$$

From this ansatz, the components of the Einstein tensor can be written as

$$G_t^t = \frac{L f' L' + 2 f L L'' + f L'^2}{L^2}, \tag{16}$$

$$G_r^r = \frac{f L' (n L' + L n')}{L^2 n}, \tag{17}$$

$$G_\varphi^\varphi = G_z^z = \frac{n f' (2n L' + L n') + f (4n^2 L'' + 2n L' n' + 2L n n'' - L n'^2)}{4L n^2}. \tag{18}$$

Computing the effective energy-momentum tensor in Eq. (9) with this ansatz, the tensor $X_{\mu\nu}$ can be written as

$$X_t^t = X_r^r = \frac{h\alpha_f}{L\alpha_g} - \frac{3L-h}{L} + \alpha \left(\frac{h\alpha_f(2L-h)}{L^2\alpha_g} - \frac{3L-2h}{L} \right) + \beta \left(\frac{3h\alpha_f(L-h)}{L^2\alpha_g} - \frac{3(L-h)}{L} \right), \tag{19}$$

$$X_\varphi^\varphi = \frac{h\alpha_f}{L\alpha_g} - 3 + \alpha \left(\frac{2h\alpha_f}{L\alpha_g} - 3 \right) + \beta \left(\frac{3h\alpha_f}{L\alpha_g} - 3 \right), \tag{20}$$

$$X_z^z = - \left(\frac{h-3L}{L} + \frac{\alpha(2h-3L)}{L} + \frac{3\beta(h-L)}{L} \right). \tag{21}$$

By substituting these components into the modified equation in Eq. (8) and then using the equations for the (t, t) and (r, r) components, we found the constraint

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f L'^2}{n} \right) = 0. \tag{22}$$

In order to obtain the black hole solution with $f = n$, the function $L(r)$ must be proportional to r . Therefore, we can set $L = r$ for the following investigation. By using this setting, we have only two independent functions, f and h . The two independent equations for these two functions are the conservation of the energy-momentum tensor in Eq. (10) and the (t, t) component of the modified Einstein equation in Eq. (8), which can be expressed, respectively, as

$$\frac{h'(r(1+2\alpha+3\beta)(\alpha_f+\alpha_g) - 2h\alpha_f(\alpha+3\beta))}{\alpha_g r^2} = 0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{r f' + f}{r^2} = & -m_g^2 \left(\frac{h\alpha_f}{\alpha_g r} - \frac{3r-h}{r} \right) \\ & + \alpha \left(\frac{h\alpha_f(2r-h)}{\alpha_g r^2} - \frac{3r-2h}{r} \right) \\ & + \beta \left(\frac{3h\alpha_f(r-h)}{\alpha_g r^2} - \frac{3(r-h)}{r} \right). \end{aligned} \tag{24}$$

From Eq. (23), two exact solutions of h can be written as

$$h(r) = \frac{r(1+2\alpha+3\beta)(\alpha_f+\alpha_g)}{2\alpha_f(\alpha+3\beta)}, \tag{25}$$

$$h(r) = h_0 = \text{constant}, \tag{26}$$

and with these solutions of $h(r)$, Eq. (24) admits the following two solutions:

$$f_1(r) = \left(-\frac{m_g^2(1+\alpha+\alpha^2-3\beta)}{3(\alpha+3\beta)} \right) r^2 - \frac{b}{\alpha_g r}, \tag{27}$$

$$f_2(r) = -\frac{b}{\alpha_g r} + m_g^2 \left((1+\alpha+\beta)r^2 - h_0(1+2\alpha+3\beta)r + h_0^2(\alpha+3\beta) \right), \tag{28}$$

where b is an integration constant. Note that we have used the component (φ, φ) of the modified Einstein equation in Eq. (8) to obtain the constraint $\alpha_f = \alpha_g$. The first solution in Eq. (27) coincides with the black string solution in general relativity [39,40,43] with an effective cosmological constant Λ as

$$\Lambda = -\frac{m_g^2(1+\alpha+\alpha^2-3\beta)}{3(\alpha+3\beta)}. \tag{29}$$

Note that in [39,40,43], the constant α_g^2 is chosen to be $\alpha_g^2 = -\Lambda/3$, and

$$\alpha_g^2 = \frac{m_g^2(1+\alpha+\alpha^2-3\beta)}{(\alpha+3\beta)}. \tag{30}$$

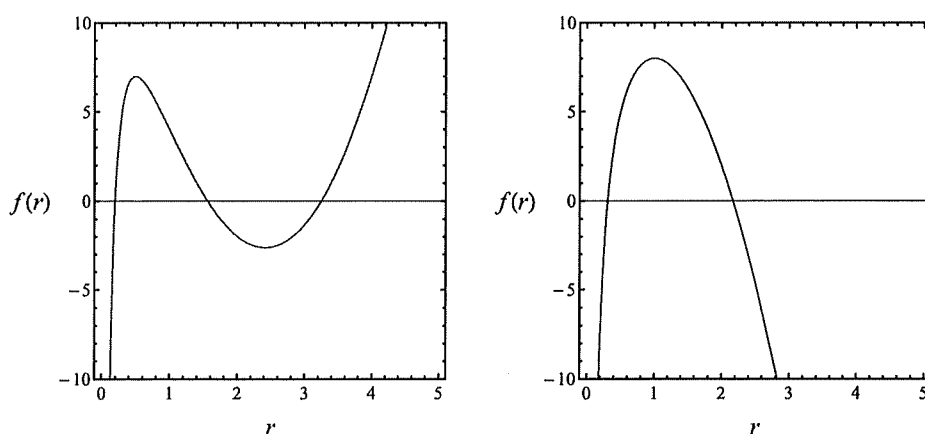


Fig. 1 The left panel shows the horizon structure of the AdS solution for specific values of the parameters where $\alpha_m^2 = 4$, $c_0 = 6$, $c_1 = 5$. The right panel shows the horizon structure of the dS solution for the value of the parameters as $\alpha_m^2 = -4$, $c_0 = -3$, $c_1 = 1$

The integration constant b can be obtained by using the solutions in the Newtonian limit which can be expressed as $b = 4M$, where M is the ADM mass per unit length in z direction. Mathematically, the solution (27) is exactly the same as the one in general relativity which is already widely investigated. Moreover, its charged and rotating counterparts, and their properties including thermodynamics, have also widely been investigated [37–42]. Although the solution (27) coincides mathematically with that of Lemos [39,40,43], the dRGT solution naturally generates the cosmological-constant-like term from the graviton mass while for Lemos' black string solution [39] the cosmological constant is introduced by hand. Hence, the properties of the solution (27) can be analyzed as in the previously mentioned cases, and hence we shall not address them here. The second solution in Eq. (28) is new. We can redefine the variables and parameters as follows:

$$f_2(r) = \alpha_m^2 r^2 - \frac{4M}{\alpha_g r} - \alpha_m^2 c_1 r + \alpha_m^2 c_0, \quad (31)$$

where

$$\alpha_m^2 \equiv m_g^2 (1 + \alpha + \beta), \quad c_1 \equiv \frac{h_0(1 + 2\alpha + 3\beta)}{1 + \alpha + \beta},$$

$$c_0 \equiv \frac{h_0^2(\alpha + 3\beta)}{1 + \alpha + \beta}. \quad (32)$$

The solution in Eq. (31) is an exact black string solution in dRGT massive gravity which, in the limit $\alpha_m = \alpha_g$ and $c_0 = c_1 = 0$, naturally goes over to Lemos' [39] black string in general relativity. Henceforth, for definiteness, we shall call this massive gravity solution (31) a dRGT black string. In particular, it incorporates the cosmological-constant term naturally in terms of the graviton mass m_g , which should not be surprising since the graviton mass serves as the cosmological constant in the self-expanding cosmological solution in

massive gravity. The graviton mass also generates a constant term which is known as the so-called global monopole term.

It is important to note that the strong coupling scale of the dRGT massive gravity theory is $\Lambda_3 = (m_g^2 M_{Pl})^{1/3}$. This is fixed by the construction of the mass terms of the theory [45], which may not be obvious from the action in Eq. (2). However, this scale can be simply seen through this solution. From this solution, the nonlinear scale known as the Vainshtein radius can be written as

$$r_V = \left(\frac{M}{\alpha_g m_g^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{M}{\alpha_g M_{Pl}} \right)^{1/3} \frac{1}{\Lambda_3}. \quad (33)$$

The parameter M is dimensionful with mass per unit length scaled by α_g^{-1} . Therefore, M/α_g is the mass of the black string. By taking the values within the solar system and $m_g \sim H$, one found that $r_V \sim 10^{16} \text{ km} \gg \Lambda_3^{-1} \sim 10^3 \text{ km}$. In particular, this indicates that we do not have to worry about the strong coupling issue in dRGT massive gravity for a system of scale below Λ_3 (or of length scale beyond $\sim 10^3 \text{ km}$). The same situation also occurs in the spherically symmetric case [45].

One can see that the horizon structure depends on the sign of α_m^2 . If $\alpha_m^2 > 0$, corresponding to an anti-de Sitter-like solution, the maximum number of horizons is three. If $\alpha_m^2 < 0$, corresponding to de Sitter-like solution, the maximum number of horizons is two. The generic behavior of the horizon structure is shown in Fig. 1. This solution modifies the black string solution in general relativity with cosmological constant [39] by the three parameters c_0 , c_1 and α_m^2 .

3.1 Thermodynamics of dRGT black string

Now, we analyze the thermodynamics of the new dRGT black string (31). By definition, the horizons are zeros of $f(r_+) = 0$. Depending on the parameters, there may exist up to three

real roots. The horizon radius (r_+) and black string mass (M_+) are related via

$$M_+ = \frac{1}{4} \alpha_g \alpha_m^2 r_+ (r_+^2 - c_1 r_+ + c_0). \tag{34}$$

The mass M_+ depends on the parameters c_0 , c_1 , α_m^2 and α_g^2 . To have a positive definite mass, one may require the term $\alpha_m^2 r_+ (r_+^2 - c_1 r_+ + c_0)$ to be positive. Such a consideration yields the following conditions:

$$\alpha_m^2 > 0, \quad c_1^2 - 4c_0 < 0. \tag{35}$$

The second condition is obtained from the requirement that $r_+^2 - c_1 r_+ + c_0$ cannot be factorized so that, including the condition $\alpha_m^2 > 0$, the term $\alpha_m^2 r_+ (r_+^2 - c_1 r_+ + c_0)$ will be positive definite. The Hawking temperature of the dRGT black string can be obtained by using $T = \kappa/(2\pi)$, where $\kappa = f'(r)/2|_{r=r_+}$ is the surface gravity of the black string. As a result, the temperature can be written as

$$T_+ = \frac{\alpha_m^2}{4\pi r_+} (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0). \tag{36}$$

We can determine a condition for a positive definite temperature by using the same procedure as we did for the mass. Consequently, we obtain

$$c_1^2 - 3c_0 < 0. \tag{37}$$

These positivity conditions for both the mass and the temperature can narrow down the parameter space. The minimum temperature can be found at $r_+ = \sqrt{c_0/3}$. At this point, the temperature can be written as

$$T_{\min} = \frac{\alpha_m^2}{2\pi} (\sqrt{3c_0} - c_1). \tag{38}$$

The square root of c_0 is well defined through the conditions in Eq. (35) and/or in Eq. (37). Next, we can find its entropy via the first law of thermodynamics, $dM_+ = T_+ dS$; it reads

$$S = \frac{1}{2} \pi \alpha_g r_+^2 = \frac{A}{4}, \tag{39}$$

$$A = 2\pi \alpha_g r_+^2, \tag{40}$$

and it turns out to satisfy the area law. Now we find the thermodynamical stability of the black string. For the local thermodynamical stability, we find the heat capacity of the system, which can be expressed as

$$C = \left(T \frac{dS}{dT} \right)_{r=r_+} = \frac{\pi \alpha_g r_+^2 (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0)}{3r_+^2 - c_0}. \tag{41}$$

There exists a minimum temperature; C diverges at that temperature, where the corresponding radius obeys $r_+ = \sqrt{c_0/3}$. Moreover, the heat capacity is negative when $r_+ < \sqrt{c_0/3}$ and positive when $r_+ > \sqrt{c_0/3}$. This suggests that the local

thermodynamical stability of the black string requires the condition $r_+ > \sqrt{c_0/3}$. Apart from the local one, the global thermodynamical stability can be analyzed by considering the Helmholtz potential

$$F = M - TS \tag{42}$$

$$= \frac{\alpha_g \alpha_m^2 r_+}{8} (c_0 - r_+^2). \tag{43}$$

The black string will be stable if the Helmholtz potential is negative. Thus, the global thermodynamical stability condition can be expressed as

$$r_+ > r_c = \sqrt{c_0}. \tag{44}$$

Note that this condition also satisfies the local stability condition. As a result, the Hawking–Page phase transition, the transition from the hot flat space state to the black hole or black string state [46], occurs at the critical point, $r_+ = r_c = \sqrt{c_0}$. It is interesting to note that the phase transition can be realized only for the asymptotic AdS solution. Moreover, the existence of the phase transition depends only on the graviton mass. This can be seen clearly when we consider the case $c_1 = c_0 = 0$. In this case, the Helmholtz potential does not change sign, which means that the Lemos black string is always thermodynamically stable.

4 Charged dRGT black string

Even though the astronomical objects are neutral, the charged black holes are intensively investigated. For spherically symmetric solutions, the charged black hole is a useful toy model since the structure of the horizon usually differs that of the neutral one in a quite drastic way. Moreover, study of thermodynamics of the charged black holes can be significantly extended, since it usually involves an open system such as a grand canonical system where the charge can play the role of the chemical potential. In this section, we extend our consideration by adding the electric charge to the theory. As a result, the action can be obtained by adding a gauge field term as follows:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \left[R + m_g^2 \mathcal{U}(g, \phi^a) \right] - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \tag{45}$$

where $F_{\mu\nu} \equiv (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu)$, $A_\mu = (a(r), 0, 0, 0)$ and $a(r)$ is an arbitrary function. By using the same procedure as in the non-charged case, the solutions still can be divided into two branches according to Eqs. (25) and (26). The equations of motion of the electric field, the Maxwell equations, provide the constraint to the function $a(r)$ of

$$a(r) = -\frac{\gamma}{\alpha_g r}, \tag{46}$$

where γ is an integration constant. In order to reduce the theory to the electromagnetic theory in flat spacetime, the integration constant can be written in terms of the linear charge density, q , in the z direction as $\gamma^2 = 4q^2$. By solving the modified Einstein equations, the solutions for both branches can be written as

$$f_1^{(q)}(r) = \left(-\frac{m_g^2(1 + \alpha + \alpha^2 - 3\beta)}{3(\alpha + 3\beta)} \right) r^2 - \frac{b}{\alpha_g r} + \frac{\gamma^2}{\alpha_g^2 r^2}, \tag{47}$$

$$f_2^{(q)}(r) = \frac{\gamma^2}{\alpha_g^2 r^2} - \frac{b}{\alpha_g r} + m_g^2 \left((1 + \alpha + \beta)r^2 - h_0(1 + 2\alpha + 3\beta)r + h_0^2(\alpha + 3\beta) \right). \tag{48}$$

As we have mentioned before, we will focus on the second branch of the solutions which can be written in terms of the parameters in Eq. (32) as

$$f(r) = \alpha_m^2 r^2 - \frac{4M}{\alpha_g r} + \frac{4q^2}{\alpha_g^2 r^2} - \alpha_m^2 c_1 r + \alpha_m^2 c_0. \tag{49}$$

The solution (49) is the charged dRGT black string solution. The linear mass density M can be expressed by solving $f(r_+) = 0$ as follows:

$$M^{(q)} = \frac{1}{4} \alpha_g \alpha_m^2 r_+ \left(r_+^2 - c_1 r_+ + c_0 \right) + \frac{q^2}{\alpha_g r_+}. \tag{50}$$

For a charged dRGT black string, it can be treated as two kinds of thermodynamical systems; grand canonical and canonical systems. We will separate our considerations into the two following subsections.

4.1 Grand canonical black string

In this aspect of treatment, a charged dRGT black string is considered to be an open system where charge transfer or creation/annihilation are allowed. The energy gain/loss from the increase/decrease of charge is determined by the chemical potential,

$$\mu = \frac{2q}{\alpha_g r}, \tag{51}$$

evaluating at the horizon. The charged dRGT black string mass and the Hawking temperature can be written as

$$M_G^{(q)} = \frac{1}{4} \alpha_g \alpha_m^2 r_+ \left(r_+^2 - c_1 r_+ + c_0 \right) + \frac{1}{4} \alpha_g r_+ \mu^2, \tag{52}$$

$$T_G^{(q)} = \frac{\alpha_m^2 (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0) - \mu^2}{4\pi r_+}. \tag{53}$$

The positive definite of both mass and temperature can be found by following the same step as done in the non-charge case. As a result, the condition can be expressed as

$$\alpha_m^2 > 0, \quad c_1^2 - 3 \left(c_0 - \frac{\mu^2}{\alpha_m^2} \right) < 0. \tag{54}$$

From these thermodynamic quantities, one found that they satisfy the first law of thermodynamics and the area law in which the entropy of the charged dRGT black string in the grand canonical system can be written as

$$S_G^{(q)} = \frac{1}{2} \pi \alpha_g r_+^2 = \frac{A}{4}. \tag{55}$$

For the thermodynamical stability of the system, one can proceed finding the heat capacity and the Gibbs potential. By following the same strategy as done in the non-charge case, the heat capacity and the Gibbs potential can be found as

$$C_G^{(q)} = \left(T \frac{dS}{dT} \right)_{r=r_+} = \frac{\pi \alpha_g r_+^2 \left[\alpha_m^2 (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0) - \mu^2 \right]}{\alpha_m^2 (3r_+^2 - c_0) + \mu^2}, \tag{56}$$

$$G^{(q)} = M - TS - \mu Q = -\frac{\alpha_g r_+}{8} \left[\alpha_m^2 (r_+^2 - c_0) + \mu^2 \right]. \tag{57}$$

The thermodynamical stability conditions can be found by requiring $C_G^{(q)} > 0$ and $G^{(q)} < 0$. The resulting condition can be expressed as

$$r_+ > r_c = \sqrt{\left(c_0 - \frac{\mu^2}{\alpha_m^2} \right)}. \tag{58}$$

This suggests that it is possible to obtain the Hawking–Page phase transition for charged dRGT black string in massive gravity theory, when considered in the grand canonical aspect. Note that this phase transition cannot be provided by using a Lemos black string solution. This issue can be seen by setting $c_1 = c_0 = 0$, from which it turns out that the Gibbs potential is always negative for AdS solution while the dS solution does not satisfy the requirement of positive definite of the charged dRGT black string mass and temperature.

4.2 Canonical black string

For the canonical aspect of the black string, charge transfer or charge creation/annihilation are not allowed. The Hawking temperature can be found as

$$T_C^{(q)} = \frac{1}{4\pi r_+} \left[\alpha_m^2 (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0) - \frac{4q^2}{\alpha_g^2 r_+^2} \right]. \tag{59}$$

From this expression, we found that one of requirements to obtain the positive definite of the black string temperature is

$\alpha_m^2 > 0$. This corresponds to the asymptotic AdS solution. By following the strategy as done before, we found that the system still obeys the first law of thermodynamics and the area law in which the entropy of the black string can be written as

$$S_C^{(q)} = \frac{1}{2} \pi \alpha_g r_+^2 = \frac{A}{4}. \tag{60}$$

For the stability issue of this thermodynamic system, the local stability can be analyzed by considering the heat capacity which can be found as

$$C_C^{(q)} = \frac{\pi \alpha_g r_+^2 \left[\alpha_m^2 (3r_+^2 - 2c_1 r_+ + c_0) - \frac{4q^2}{\alpha_g^2 r_+^2} \right]}{\alpha_m^2 (3r_+^2 - c_0) + \frac{12q^2}{\alpha_g^2 r_+^2}}. \tag{61}$$

By using $T_C^{(q)} > 0$, the positivity of the heat capacity will be guaranteed by requiring

$$r_+ > \sqrt{\frac{c_0}{6} \left(1 + \left[1 - \frac{144q^2}{\alpha_g^2 \alpha_m^2 c_0^2} \right]^{1/2} \right)}. \tag{62}$$

The Helmholtz potential of the system can be written as

$$F^{(q)} = -\frac{\alpha_g r_+}{8} \left[\alpha_m^2 (r_+^2 - c_0) - \frac{12q^2}{\alpha_g^2 r_+^2} \right]. \tag{63}$$

To investigate the global thermodynamical stability, one requires that $F^{(q)} < 0$. The condition turns out to be as follows:

$$r_+ > r_c = \sqrt{c_0 \left(1 + \left[1 + \frac{144q^2}{\alpha_g^2 \alpha_m^2 c_0^2} \right]^{1/2} \right)}, \tag{64}$$

which is stronger than the one for the local stability condition. This suggests that, for the canonical system, it is possible to provide the Hawking–Page phase transition for the charged black string in massive gravity theory. However, for this system, the AdS black string solution can also provide the phase transition. This can be seen by setting $c_1 = c_0 = 0$, from which it turns out that the phase transition occurs when $r_+^2 = \sqrt{\frac{2q}{3\alpha_m^2 \alpha_g^2}}$.

5 Concluding remarks

The dRGT massive gravity describes nonlinear interaction terms as a generalization of the Einstein–Hilbert action when the graviton is massive. It is believed that dRGT massive gravity may provide a possible explanation for the accelerating expansion of the universe that does not require any dark

energy or cosmological constant. In this paper, we have presented a class of black strings, both charged and uncharged, in dRGT massive gravity where the effective cosmological constant is negative, and we studied the thermodynamics and phase structure of the solutions in both the grand canonical and the canonical ensembles. The black string obtained is immensely simplified due to the choice of the fiducial metric. As expected the solution contains the Lemos solutions [39] as a particular case. Our dRGT black string solution can be identified, e.g., as a monopole-black string of general relativity for a suitable choice of the parameters of the theory where the graviton mass in massive gravity naturally generates the cosmological constant and the global monopole term.

We have also analyzed the thermodynamical properties of the dRGT black string solution. The thermodynamic quantities have also been found to contain corrections from the graviton mass except for the black string entropy which is unaffected by massive gravity and still obeys the area law. By analyzing the thermodynamical properties of the black string solution, we found that it is possible to obtain the Hawking–Page phase transition in the dRGT black string case, while this is not possible for Lemos solution. The conditions to provide such a transition were explored. In fact, we determined the phase transition in both charged and non-charged case by analyzing the sign of the potential at $r = r_c$, with the stable (unstable) branch for $r > (<) r_c$.

The results presented here are a generalization of previous discussions of Lemos [39–41], on the black string, in a more general setting. The possibility of a further generalization of these results to higher dimensions is an interesting problem for future research. The rotating dRGT black string solution is also interesting, since most astronomical objects are rotating. We leave this investigation for further work.

Acknowledgements This project is supported by the ICTP through Grant no. OEA-NT-01 and the National Research Foundation of Korea (NRF) Grant funded by the Korea government (MSIP) (no. 2016R1C1B1010107). PW is also supported by the Naresuan University Research Fund through Grant no. R2559C235. S.G.G. would like to thank SERB-DST Research Project Grant no. SB/S2/HEP-008/2014 and also IUCAA, Pune, where part of this work was done, for hospitality.

Open Access This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons license, and indicate if changes were made. Funded by SCOAP³.

References

1. D.G. Boulware, S. Deser, Phys. Rev. D 6, 3368 (1972)

2. C. de Rham, G. Gabadadze, *Phys. Rev. D* **82**, 044020 (2010). arXiv:1007.0443 [hep-th]
3. C. de Rham, G. Gabadadze, A.J. Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 231101 (2011). arXiv:1011.1232
4. D. Vegh, arXiv:1301.0537 [hep-th]
5. R.G. Cai, Y.P. Hu, Q.Y. Pan, Y.L. Zhang, *Phys. Rev. D* **91**, 024032 (2015). arXiv:1409.2369 [hep-th]
6. S.G. Ghosh, L. Tannukij, P. Wongjun, *Eur. Phys. J. C* **76**(3), 119 (2016). arXiv:1506.07119 [gr-qc]
7. A. Adams, D.A. Roberts, O. Saremi, *Phys. Rev. D* **91**(4), 046003 (2015). arXiv:1408.6560 [hep-th]
8. J. Xu, L.M. Cao, Y.P. Hu, *Phys. Rev. D* **91**, 124033 (2015). arXiv:1506.03578 [gr-qc]
9. T.M. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. D* **84**, 024038 (2011). arXiv:1103.5912 [gr-qc]
10. R. Brito, V. Cardoso, P. Pani, *Phys. Rev. D* **88**, 064006 (2013). arXiv:1309.0818 [gr-qc]
11. L. Berezhiani, G. Chkareuli, C. de Rham, G. Gabadadze, A.J. Tolley, *Phys. Rev. D* **85**, 044024 (2012). arXiv:1111.3613 [hep-th]
12. Y.F. Cai, D.A. Easson, C. Gao, E.N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **87**, 064001 (2013). arXiv:1211.0563 [hep-th]
13. E. Babichev, A. Fabbri, *JHEP* **1407**, 016 (2014). arXiv:1405.0581 [gr-qc]
14. M.S. Volkov, *Class. Quantum Gravity* **30**, 184009 (2013). arXiv:1304.0238 [hep-th]
15. G. Tasinato, K. Koyama, G. Niz, *Class. Quantum Gravity* **30**, 184002 (2013). arXiv:1304.0601 [hep-th]
16. E. Babichev, R. Brito, *Class. Quantum Gravity* **32**, 154001 (2015). arXiv:1503.07529 [gr-qc]
17. F. Capela, P.G. Tinyakov, *JHEP* **1104**, 042 (2011). arXiv:1102.0479 [gr-qc]
18. E. Babichev, C. Deffayet, *Class. Quantum Gravity* **30**, 184001 (2013). arXiv:1304.7240 [gr-qc]
19. A. Salam, J.A. Strathdee, *Phys. Rev. D* **16**, 2668 (1977)
20. C.J. Isham, D. Storey, *Phys. Rev. D* **18**, 1047 (1978)
21. D. Comelli, M. Crisostomi, F. Nesti, L. Pilo, *Phys. Rev. D* **85**, 024044 (2012). arXiv:1110.4967 [hep-th]
22. M.S. Volkov, *Phys. Rev. D* **85**, 124043 (2012). arXiv:1202.6682 [hep-th]
23. Z. Berezhiani, D. Comelli, F. Nesti, L. Pilo, *JHEP* **0807**, 130 (2008). arXiv:0803.1687 [hep-th]
24. K. Koyama, G. Niz, G. Tasinato, *Phys. Rev. D* **84**, 064033 (2011). arXiv:1104.2143 [hep-th]
25. K. Koyama, G. Niz, G. Tasinato, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 131101 (2011). arXiv:1103.4708 [hep-th]
26. F. Sbisà, G. Niz, K. Koyama, G. Tasinato, *Phys. Rev. D* **86**, 024033 (2012). arXiv:1204.1193 [hep-th]
27. Y.P. Hu, X.M. Wu, H. Zhang, arXiv:1611.09042 [gr-qc]
28. Y.P. Hu, X.X. Zeng, H.Q. Zhang, *Phys. Lett. B* **765**, 120 (2017). arXiv:1611.00677 [hep-th]
29. D.C. Zou, R. Yue, M. Zhang, arXiv:1612.08056 [gr-qc]
30. S.H. Hendi, R.B. Mann, S. Panahiyan, B.E. Panah, *Phys. Rev. D* **95**(2), 021501 (2017)
31. S.H. Hendi, G.H. Bordbar, B.E. Panah, S. Panahiyan, arXiv:1701.01039 [gr-qc]
32. S.H. Hendi, B.E. Panah, S. Panahiyan, M.S. Talezadeh, arXiv:1612.00721 [hep-th]
33. B.E. Panah, S. Panahiyan, arXiv:1611.10151 [hep-th]
34. S.H. Hendi, S. Panahiyan, S. Upadhyay, B.E. Panah, arXiv:1611.02937 [hep-th]
35. S.H. Hendi, N. Riazi, S. Panahiyan, arXiv:1610.01505 [hep-th]
36. S.H. Hendi, G.Q. Li, J.X. Mo, S. Panahiyan, B. Eslam, Panah, *Eur. Phys. J. C* **76**(10), 571 (2016). arXiv:1608.03148 [gr-qc]
37. K.S. Thorne, in *Magic without magic*, ed. J. R. Klander (Freeman, San Francisco, 1972)
38. J.P.S. Lemos, *Phys. Rev. D* **59**, 044020 (1999)
39. J.P.S. Lemos, *Class. Quantum Gravity* **12**, 1081 (1995)
40. J.P.S. Lemos, *Phys. Lett. B* **353**, 46 (1995). [gr-qc/9404041]
41. N.O. Santos, *Class. Quantum Gravity* **10**, 2401 (1993)
42. J.P.S. Lemos, V.T. Zanchin, *Phys. Rev. D* **54**, 3840 (1996)
43. R.G. Cai, Y.Z. Zhang, *Phys. Rev. D* **54**, 4891 (1996). [gr-qc/9609065]
44. T. Chullaphan, L. Tannukij, P. Wongjun, *JHEP* **06**, 038 (2015). arXiv:1502.08018 [gr-qc]
45. K. Hinterbichler, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 671 (2012). arXiv:1105.3735 [hep-th]
46. S.W. Hawking, D.N. Page, *Commun. Math. Phys.* **87**, 577 (1983)