

# แบบจำลอง ของนิวเคลียส และการประยุกต์

NUCLEAR MODELS AND APPLICATIONS

จรัญ พรหมสุวรรณ

ภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

สำนักหอสมุด มหาวิทยาลัยนเรศวร

๕ - ส.ค. ๒๕๕๖

วันลงทะเบียน.....

เลขทะเบียน..... 1,533,7272

เลขเรียกหนังสือ..... ๖ QP

๖๐๙

.N4x

๖๔๕๖

๖๕๕๖



ภาพปกหน้า :

ภาพซ้ายมือจาก <http://aboutnuclearphysics.blogspot.com/2010/07/liquid-drop-model-of-nucleus.html>

ภาพขวามือจาก [http://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear\\_shell\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_shell_model)

แบบจำลองของนิวเคลียสและการประยุกต์  
พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2556

ผู้เรียบเรียง และพิมพ์ จรัญ พรหมสุวรรณ

ที่ทำงาน ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ตำบลท่าโพธิ์ อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000

โทรศัพท์ 0-5596-3501, 3502 โทรสาร 0-5596-3501

บ้าน เลขที่ 441/6 ถนนบรมไตรโลกนาถ ซอย 13

ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000, โทร (055) 217536

ภูมิลำเนา 806 ถนนเขาน้ำตก ตำบลศรีพนมมาศ อำเภอลับแล จังหวัดอุตรดิตถ์



## คำนำ

ความรู้ในเรื่องแบบจำลองของนิวเคลียส มีความสำคัญอย่างยิ่งในการใช้ทำความเข้าใจและอธิบายเกี่ยวกับสมบัติและกลไกการเปลี่ยนแปลงของนิวเคลียส รวมทั้งใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาทฤษฎีและสร้างสูตรต่าง ๆ แต่ในปัจจุบันเราก็ยังไม่มีแบบจำลองใดที่สมบูรณ์แบบที่จะสามารถอธิบายสมบัติและกลไกการเปลี่ยนแปลงของนิวเคลียสได้อย่างครบถ้วนบริบูรณ์ ดังนั้น จึงยังต้องยึดถือในหลายแบบจำลอง ที่พัฒนากันขึ้นมาโดยมีจุดประสงค์เพื่อการอธิบายสมบัติและกลไกการเปลี่ยนแปลงเฉพาะเรื่อง

สำหรับตำราที่เรียบเรียงเรื่องแบบจำลองนิวเคลียสโดยเฉพาะในปัจจุบันมีน้อยมาก ที่เป็นภาษาต่างประเทศมีเพียงไม่กี่เล่ม ส่วนที่เป็นภาษาไทยไม่เคยเห็น ส่วนใหญ่จะแทรกอยู่ในบทต่าง ๆ ของตำรานิวเคลียร์ฟิสิกส์โดยทั่วไป ด้วยเหตุนี้ผู้เรียบเรียงจึงได้รวบรวมเนื้อหาเกี่ยวกับแบบจำลองทั้งหลายที่มีอยู่ในปัจจุบันที่แทรกอยู่ในบทต่าง ๆ ของตำราต่างประเทศแต่ละเล่มมาไว้ให้อยู่ในตำราเล่มเดียวกัน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้สะดวกต่อการศึกษา และใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาหรือวิจัยต่อยอดความรู้ทางด้านนิวเคลียร์ฟิสิกส์ต่อไป

ศัพท์ภาษาไทยที่ใช้ในตำราเล่มนี้ ผู้เรียบเรียงยึดตามแบบหนังสือศัพท์วิทยาศาสตร์ อังกฤษ-ไทย ไทย-อังกฤษ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 5 แก้ไขเพิ่มเติม พ.ศ. 2546 และพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 10 พ.ศ. 2553 ซึ่งจะมิขัดแย้งที่จะได้ใช้คำศัพท์ภาษาไทยให้เหมือนกัน และสะดวกต่อการสืบค้นย้อนกลับไปหาคำภาษาอังกฤษเดิมที่แปลมา แต่อย่างไรก็ตาม ยังมีศัพท์อีกเป็นจำนวนมากที่ยังไม่ได้บัญญัติไว้ในพจนานุกรมดังกล่าว ผู้เรียบเรียงจึงขอขออนุญาตขึ้นใช้เองในตำราเล่มนี้ไปพลางก่อน

หนังสือเล่มนี้อาจยังมีข้อบกพร่องอยู่มาก เพราะนอกจากเป็นการพิมพ์ครั้งแรกแล้ว ยังต้องรีบเร่งพิมพ์ให้เสร็จภายในเวลาจำกัด 1 ปี ด้วย ซึ่งปรกติการเรียบเรียงและจัดพิมพ์หนังสือฟิสิกส์ ต้องใช้ทั้งเวลาและความอุตสาหะมากพอสมควร

ตลอดเวลาของการสอน วิจัย และเรียบเรียงตำรา ทางนิวเคลียร์ฟิสิกส์ อยู่ที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พินิจโลก หรือปัจจุบันคือมหาวิทยาลัยนเรศวร แห่งนี้ ได้ระลึกอยู่เสมอมาถึงพระคุณของอาจารย์ที่เคยสอนวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์แก่ข้าพเจ้าขณะยังเป็นนิสิตอยู่ที่วิทยาลัยวิชาการศึกษา พินิจโลก และ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย คือ ศาสตราจารย์วิชัย หโยคม ศาสตราจารย์ ดร. ชำรง เมธาศิริ รองศาสตราจารย์ถาวร สุทธิพงศ์ และ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิล จิตวัฒนากร โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์ผู้มีคุณูปการ ที่ช่วยให้คำปรึกษาตลอดจนชี้แนะแนวทางการทำงาน และการดำเนินชีวิตให้ผู้เรียบเรียงเสมอมา คือ ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน

กุศลใดที่บังเกิดจากการเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ ขออุทิศให้แก่ พ่อพา พรหมสุวรรณ พ่อผู้สร้างชีวิตและอนาคตให้แก่ผู้เรียบเรียง และอาจารย์เจริญ พรหมสุวรรณ พี่ชาย ผู้คอยห่วงใยดูแล และช่วยเหลือผู้เรียบเรียงมาตลอดชีวิต และหากหนังสือเล่มนี้มีความดีอยู่บ้าง ก็ขอบอบให้แม่ ภรรยา และลูก ๆ



# สารบัญ

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| กล่าวก่อน                                               | 1  |
| บทที่ 1 แบบจำลองหยดของเหลว                              | 5  |
| 1.1 แนวคิดของแบบจำลองหยดของเหลว                         | 5  |
| 1.2 สูตรเชิงกึ่งการทดลอง                                | 6  |
| 1.3 ทฤษฎีของการแบ่งแยกนิวเคลียส                         | 12 |
| 1.3.1 แบบจำลองหยดของเหลวของการแบ่งแยกนิวเคลียส          | 12 |
| 1.3.2 การแบ่งแยกนิวเคลียสโดยการกระตุ้นด้วยนิวตรอน       | 16 |
| 1.3.3 กำแพงการแบ่งแยกตัว                                | 17 |
| 1.3.4 การแบ่งแยกตัวแบบอสมมาตรและไอโซเมอร์               | 19 |
| 1.3.5 การแก้ค่าแบบจำลองหยดของเหลวเนื่องจากโครงสร้างชั้น | 21 |
| 1.3.6 แถบการหมุนไอโซเมอร์การแบ่งแยกตัว                  | 24 |
| แบบฝึกหัด                                               | 28 |
| บทที่ 2 แบบจำลองชั้น                                    | 30 |
| แบบฝึกหัด                                               | 52 |
| บทที่ 3 แบบจำลองกลุ่ม                                   | 55 |
| แบบฝึกหัด                                               | 63 |
| บทที่ 4 แบบจำลองแก๊สเฟอร์มิ                             | 64 |
| แบบฝึกหัด                                               | 72 |
| บทที่ 5 แบบจำลองนิวเคลียสประกอบ                         | 73 |
| 5.1 แบบจำลองนิวเคลียสประกอบ                             | 73 |
| 5.1.1 ข้อสมมุติของโบร์                                  | 73 |
| 5.1.2 ปฏิิกิริยานิวเคลียร์, ภาคตัดขวาง, และอัตราการคาย  | 76 |
| 5.2 ทฤษฎีของการกระเจิงเรโซแนนซ์                         | 79 |



|                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3 ทฤษฎีภาวะต่อเนื่อง                                              | 86         |
| แบบฝึกหัด                                                           | 98         |
| <b>บทที่ 6 ปฏิกริยานิวเคลียร์ตรง</b>                                | <b>100</b> |
| 6.1 กระบวนการของปฏิกริยาตรง                                         | 100        |
| 6.2 ปฏิกริยาปลดปล่อยและปฏิกริยาหอบหิ้ว                              | 106        |
| 6.3 การแจกแจงเชิงมุม                                                | 110        |
| แบบฝึกหัด                                                           | 116        |
| <b>บทที่ 7 แบบจำลองทัศน</b>                                         | <b>118</b> |
| 7.1 อนุพันธ์เชิงรูปแบบของศักย์แบบจำลองทัศน                          | 120        |
| 7.2 ศักย์แบบจำลองทัศนเชิงปรากฏการณ์วิทยา                            | 124        |
| 7.3 ศักย์แบบจำลองทัศนจุลภาค                                         | 129        |
| แบบฝึกหัด                                                           | 136        |
| <b>ภาคผนวก ก การปฏิบัติกับการกระเจิงในแบบกลศาสตร์คลื่น</b>          | <b>137</b> |
| ก.1 กลศาสตร์คลื่นของการกระเจิง                                      | 137        |
| ก.2 ปฏิกริยานิวเคลียร์กับนิวเคลียสที่มีพื้นผิวแฉะ                   | 151        |
| ก.3 การหาภาคตัดขวางจากการใช้เงื่อนไขที่พื้นผิวนิวเคลียส, กรณีทั่วไป | 155        |
| ก.4 การแจกแจงเชิงมุมของอนุภาคที่กระเจิงแบบยืดหยุ่น                  | 161        |
| ก.5 ทฤษฎีบทส่วนกลับของปฏิกริยานิวเคลียร์                            | 162        |
| <b>ภาคผนวก ข ตารางแสดงสมบัติของนิวเคลียส</b>                        | <b>165</b> |
| <b>ภาคผนวก ค ค่าคงตัวเชิงฟิสิกส์</b>                                | <b>177</b> |
| <b>บรรณานุกรม</b>                                                   | <b>180</b> |
| <b>ดัชนี</b>                                                        | <b>182</b> |



## กล่าวก่อน (PREVIEWS)

นิวเคลียสของอะตอมถูกค้นพบโดยเฮอร์เนสต์ รัทเทอร์ฟอร์ด (Ernest Rutherford) ใน ค.ศ. 1911 เป็นผลมาจากการที่เขาตรวจสอบแบบจำลองอะตอมของ เจ.เจ. ทอมสัน (J.J. Thomson) (แบบจำลองขนมพุด) โดยการระดมยิงอนุภาคแอลฟาเข้าไปยังแผ่นโลหะบาง และพบว่ามีการ บำยเบนของอนุภาคแอลฟาเป็นมุมมาก ๆ ทั้งที่อนุภาคแอลฟามีมวลมากกว่าอิเล็กตรอนถึง 8000 เท่า ทำให้ได้ข้อสรุปว่า ใจกลางของอะตอมจะต้องมีความหนาแน่นมากและมีประจุบวก ซึ่งเป็นที่มาของคำว่านิวเคลียสของอะตอม

แม้ว่าหากดูตามประวัติ จะพบว่าการพัฒนาแบบจำลองของนิวเคลียสขึ้นมาหลาย แบบจำลอง แต่ก็ยังไม่มีแบบจำลองใดที่สมบูรณ์แบบ ที่จะสามารถอธิบายสมบัติของนิวเคลียสได้ ครบถ้วนอย่างบริบูรณ์ด้วยแบบจำลองเดียว ซึ่งต่างจากแบบจำลองของอะตอม ที่สามารถ อธิบายสมบัติทั้งหมดของอะตอมได้อย่างบริบูรณ์ด้วยแบบจำลองของโบร์ (Bohr atomic model) แบบจำลองของโบร์จึงเป็นแบบจำลองที่สมบูรณ์แบบ และก็กลายมาเป็นทฤษฎีของอะตอมที่ เรียกว่าทฤษฎีอะตอมของโบร์ (Bohr theory of atom) ในที่สุด เหตุที่แบบจำลองอะตอมของโบร์ อธิบายสมบัติอะตอมได้อย่างบริบูรณ์ ก็เนื่องมาจากว่าเรารู้จักชัดในกฎของแรง (แรงคูลอมบ์) ที่ยึด ส่วนประกอบของอะตอม (อิเล็กตรอนและนิวเคลียส) เข้าไว้ด้วยกัน และสามารถเขียนกฎของแรง เป็นสูตรเชิงคณิตศาสตร์ที่ชัดเจนและแน่นอนได้ การคำนวณหาแบบจำลองจึงทำได้ไม่ยาก แต่ ในส่วนของนิวเคลียสนั้นเรายังไม่มีแบบจำลองของนิวเคลียสแบบจำลองใดที่เป็นแบบจำลองใน อุณหคติ ที่จะสามารถอธิบายสมบัติของนิวเคลียสได้ครบถ้วนอย่างบริบูรณ์ด้วยแบบจำลองเดียว สาเหตุเนื่องมาจากเรายังขาดความรู้ที่แน่ชัดของแรงนิวเคลียร์ (nuclear force) ที่ยึดนิวคลีออน (โปรตอนและนิวตรอน) ไว้ในนิวเคลียส และยังไม่สามารถเขียนกฎของแรงนิวเคลียร์นี้ให้ออกมา เป็นสูตรที่ชัดเจนและสมบูรณ์ได้ ทำให้การคำนวณหาแบบจำลองทำได้ลำบาก ดังนั้นจึงยังต้อง ดำรงแบบจำลองทั้งหลายไว้ เพื่อเลือกเอาแบบจำลองที่เหมาะสมมาใช้ในการอธิบายสมบัติของ นิวเคลียสในแต่ละอย่าง แบบจำลองของนิวเคลียสในปัจจุบันอาจจัดแบ่งออกได้เป็นสองกลุ่ม กลุ่มแรกเป็นกลุ่มของแบบจำลองที่ใช้อธิบายสมบัติของนิวเคลียส ซึ่งจะแบบจำลองที่แสดง โครงสร้าง (structure) ของนิวเคลียส กลุ่มที่สองเป็นแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้อธิบายกลไก

## 2 กล่าวก่อน

ของปฏิกิริยานิวเคลียร์ และอธิบายสถานะถูกกระตุ้น (excited state) ของนิวเคลียสในแต่ละช่วงพลังงานของอนุภาคที่ตกกระทบ

การพัฒนาแบบจำลองในกลุ่มแรก ยังแบ่งแนวทางการพัฒนาออกเป็นสองแนวทาง ดังนี้ แนวทางแรกจะอยู่บนพื้นฐานทางสถิติ แบบจำลองที่อยู่ในแนวทางนี้ได้แก่แบบจำลองหยดของเหลว (liquid drop model) ซึ่งถือว่านิวเคลียสเหมือนกับหยดของเหลว และนิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียสอยู่แบบสุ่ม คล้ายกับโมเลกุลหยดของเหลว อีกแบบจำลองหนึ่งคือแบบจำลองแก๊สเฟอร์มี (Fermi gas model) ที่ให้นิวคลีออนที่อยู่ในนิวเคลียสเหมือนเป็นแก๊สที่บรรจุอยู่ในนิวเคลียส ซึ่งประสบผลสำเร็จอย่างดีกับการอธิบายนิวเคลียสหนัก อีกแนวทางหนึ่งนั้นเป็นการพยายามหาโครงสร้างชั้น (คล้ายกับชั้นของอิเล็กตรอนในอะตอม) และโครงแบบ (configuration) การเรียงตัวของนิวคลีออนภายในนิวเคลียส แบบจำลองที่อยู่ในแนวทางนี้ได้แก่แบบจำลองชั้น (shell model) และอีกแบบจำลองหนึ่งคือแบบจำลองกลุ่ม (collective model) ที่เกิดจากการแก้ไขแบบจำลองชั้นให้สมบูรณ์

ส่วนแบบจำลองในกลุ่มที่สอง ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ถูกพัฒนาขึ้นมา เพื่อใช้อธิบายกลไก (mechanism) ของการเกิดปฏิกิริยานิวเคลียร์ และอธิบายสมบัติของสถานะถูกกระตุ้นของนิวคลีไอน์ในแต่ละช่วงพลังงานของอนุภาคตกกระทบ แบบจำลองในกลุ่มนี้ได้แก่ แบบจำลองนิวเคลียสประกอบ (compound nucleus model) ที่ใช้อธิบายปฏิกิริยาของนิวเคลียสกับอนุภาคตกกระทบที่มีพลังงานอยู่ในย่านพลังงานต่ำ และแบบจำลองปฏิกิริยาตรง (direct reaction model) ที่ใช้อธิบายปฏิกิริยาในย่านพลังงานสูง และแบบจำลองทัศน (optical model) ที่เป็นแบบจำลองเฉลี่ย หรือเฉลี่ยอยู่ระหว่างสองแบบจำลองดังกล่าว นอกจากนี้แบบจำลองหยดของเหลวก็ยังสามารถจัดอยู่ในแนวทางนี้ได้ด้วย

ในการนำเสนอแบบจำลองของนิวเคลียสนี้ จะขอแยกกล่าวออกเป็นแบบจำลองละบท เรียงลำดับกันไป โดยเริ่มจากกลุ่มแรก มีสี่แบบจำลอง จะกล่าวไว้ในบทที่ 1-4 และกลุ่มหลังอีกสามแบบจำลองจะกล่าวไว้ในบทที่ 5-7 โดยมีรายละเอียดย่อ ๆ ของแต่ละบทดังนี้

บทที่ 1 เป็นบทของแบบจำลองหยดของเหลว ซึ่งเป็นแบบจำลองมีมานาน และมีมาก่อนแบบจำลองอื่น และยังเป็นแบบจำลองที่ง่ายที่สุด ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดของแบบจำลองแบบหยดของเหลว และวิธีการสร้างสูตรหาพลังงานยึดเหนี่ยวที่เรียกว่าสูตรมวลกึ่งการทดลอง (semi-empirical mass formula) ซึ่งพัฒนาขึ้นมาโดยใช้แบบจำลองหยดของเหลวเป็นพื้นฐาน นอกจากนี้ยังจะกล่าวถึงทฤษฎีการแบ่งแยกนิวเคลียส (fission theory) ที่อยู่บนพื้นฐานของแบบจำลองหยดของเหลวนี้เช่นเดียวกัน เพราะแบบจำลองหยดของเหลวสามารถมาอธิบายกระบวนการของการแบ่งแยกนิวเคลียสได้ดีอีกด้วย



บทที่ 2 เป็นบทของแบบจำลองชั้น ในบทนี้จะกล่าวถึงความเป็นมาของหลักฐานที่ทำให้เกิดแนวคิดแบบโครงสร้างชั้น และชั้นปิด (closed shell) นิวเคลียส และแสดงวิธีการหาโครงแบบ (configuration) ของนิวคลีออนภายในนิวเคลียส ซึ่งเป็นที่มาของการมีชั้นและชั้นปิด หรือเลขกล (magic number) ของนิวเคลียส รวมทั้งกล่าวถึงวิธีการทำนายสปิน (spin) และเพริตี (parity) ของนิวเคลียสขณะอยู่ที่สถานะพื้น (ground state) ตามแบบจำลองนี้ โดยใช้กฎการคู่ควบ (Coupling Rule) อีกด้วย

บทที่ 3 เป็นบทของแบบจำลองกลุ่ม ซึ่งเป็นแบบจำลองที่เกิดจากการที่แก้ไขรูปทรงของนิวเคลียสที่เป็นแบบทรงกลมในแบบจำลองชั้น ให้สามารถบิดเบี้ยวได้หากมีนิวคลีออนอยู่นอกชั้นปิด หรือไม่เต็มชั้นปิด เพื่อให้สามารถอธิบายสปินของบางนิวคลีโอไให้ตรงกับข้อมูลทางการทดลองได้ด้วย การพิจารณาสถานะถูกกระตุ้นในแบบจำลองนี้มีสองแนวทาง คือสถานะถูกกระตุ้นเกิดจากการสั่น (vibration) กับเกิดจากการหมุนตัว (rotation) ของนิวเคลียสอันเนื่องมาจากรูปทรงที่บิดเบี้ยวไปจากทรงกลม แต่เราอาจจะเลือกเสนอในแนวทางการหมุนตัวที่มีความน่าสนใจ

บทที่ 4 เป็นบทของแบบจำลองแก๊สเฟอร์มิ หรือนิยมเรียกในอีกชื่อหนึ่งว่าแบบจำลองเชิงสถิติ (statistical model) ซึ่งแบบจำลองนี้ถือว่าภายในนิวเคลียสมีแก๊สสองชนิดบรรจุอยู่ คือแก๊สโปรตอนและแก๊สนิวตรอน โดยทั้งโปรตอนและนิวตรอนมีระดับพลังงานตามแบบระดับพลังงานเฟอร์มิ ในบทนี้จะแสดงวิธีการหาระดับพลังงานเฟอร์มิของโปรตอนและนิวตรอน และวิธีการนำไปคำนวณหาความลึกของหลุมศักย์ของแรงนิวเคลียร์ออกมาเป็นตัวเลขได้ ซึ่งความลึกของหลุมศักย์นี้เป็นสารสนเทศ (information) ของแรงนิวเคลียร์ นอกจากนี้ยังแสดงวิธีการหาพจน์ที่สี่ ที่เป็นพจน์ของพลังงานการสมมาตร (symmetry energy) ที่อยู่สูตรมวลถึงการทดลองด้วย

บทที่ 5 เป็นบทของแบบจำลองนิวเคลียสประกอบ ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ใช้อธิบายกลไกและขั้นตอนของการเกิดปฏิกิริยานิวเคลียร์ และอธิบายการเกิดสถานะถูกกระตุ้นของนิวเคลียส ที่มีอนุภาคตกกระทบมีพลังงานต่ำ ในบทนี้นอกจากจะกล่าวถึงแนวคิดของกระบวนการเกิดปฏิกิริยาที่ผ่านขั้นตอนของการเป็นนิวเคลียสประกอบแล้ว ยังจะกล่าวถึงรายละเอียดของทฤษฎีของการกระเจิงเรโซแนนซ์ (resonance scattering) และทฤษฎีของภาวะต่อเนื่อง (continuum theory) ที่อยู่บนพื้นฐานของแบบจำลองประกอบนี้ด้วย

บทที่ 6 เป็นบทของแบบจำลองปฏิกิริยาตรง หรือมักเรียกว่าปฏิกิริยาตรง (direct reaction) หรืออันตรกิริยาตรง (direct interaction) ซึ่งในบทนี้เราจะใช้คำว่าปฏิกิริยาตรง ภายในบทจะกล่าวถึงการอธิบายกลไกของการปฏิกิริยานิวเคลียร์ในกรณีที่มีอนุภาคตกกระทบมีพลังงานสูง (อยู่ในย่าน 10 – 20 MeV) โดยใช้แบบจำลองนี้ ซึ่งกระบวนการของปฏิกิริยาจะข้ามขั้นตอน



#### 4 กล่าวก่อน

ของการเป็นนิเวศวิทยาสประกอบ และแบบจำลองนิเวศวิทยาสประกอบไม่สามารถอธิบายปฏิกิริยาใน  
ย่านพลังงานสูงขึ้นนี้ โดยจะกล่าวถึงแนวคิดของกระบวนการเกิดปฏิกิริยาตรง และการอธิบาย  
กลไกของการเกิดปฏิกิริยาชนิดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในช่วงพลังงานสูงที่วามานี้ พร้อมทั้งจะแสดง  
รายละเอียดในทางทฤษฎีของปฏิกิริยาที่ยกมาพิจารณาเป็นกรณีตัวอย่าง

บทที่ 7 ในบทสุดท้ายนี้ จะเป็นบทของแบบจำลองทัศน ซึ่งอธิบายปฏิกิริยาในส่วนที่  
แบบจำลองนิเวศวิทยาสประกอบและปฏิกิริยาตรงไม่อาจอธิบายได้ โดยจะกล่าวถึงแนวคิดของการ  
การเกิดปฏิกิริยาโดยอาศัยการอธิบายในเชิงทัศนศาสตร์ ซึ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นแบบเฉลี่ย หรือ  
เฉลี่ยระหว่างสองแบบจำลองดังกล่าว ในบทนี้จะแสดงและอภิปรายศัคย์ที่อยู่ในรูปแบบต่าง ๆ ที่  
หามาจากแบบจำลองนี้ เพื่อใช้ศัคย์นี้มาอธิบายการแปรผันของภาคตัดขวางการกระเจิง

เนื้อหาอย่างย่อ ๆ ของตำราเล่มนี้ ที่ยกนำมากล่าวก่อน จะมีเนื้อหาอย่างละเอียดอยู่ในแต่ละ  
ละบท ที่จะได้พบในต่อจากนี้ไป



# บทที่ 1

## แบบจำลองหยดของเหลว (LIQUID DROP MODEL)

### 1.1 แนวคิดของแบบจำลองหยดของเหลว (Concept of Liquid Drop Model)

แบบจำลองหยดของเหลว (liquid drop model) ถูกริเริ่มโดยกามาว (Gamow) และนีลส์ โบร์ (Niels Bohr) เป็นผู้พัฒนาต่อ แบบจำลองหยดของเหลวเป็นผลลัพธ์ที่ได้มาจากการพยายามสร้างสูตรคำนวณพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวเคลียสให้พอดี (fit) กับข้อมูลมากที่สุด โดยโบร์ได้เป็นผู้เสนอแนะให้การสร้างสูตรอยู่บนพื้นฐานของการให้นิวเคลียสเป็นแบบหยดของเหลว และต่อมา วอน ไวซแซคเกอร์ (Von Weizsacker) ได้สร้างสูตรหาพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวเคลียสขึ้น โดยอาศัยแบบจำลองของนิวเคลียสแบบหยดของเหลวเป็นพื้นฐานตามการเสนอแนะของโบร์ (Bohr) สูตรหาพลังงานยึดเหนี่ยวที่ได้นี้ เรียกว่า สูตรเชิงกึ่งการทดลอง (semiempirical formula)

แนวคิดตามแบบจำลองหยดของเหลว คือ

- 1) ถือว่านิวเคลียสประกอบไปด้วยวัตถุของแข็งชิ้นเล็ก ๆ ซึ่งวัตถุชิ้นเล็ก ๆ เหล่านี้ก็คือ นิวคลีออนนั่นเอง เพราะฉะนั้นรัศมีนิวเคลียส  $R \sim A^{1/3}$
- 2) แรงนิวเคลียร์ระหว่างนิวคลีออนจะเหมือนกันหมด ไม่ว่านิวคลีออนนั้นจะเป็น โปรตอนหรือนิวตรอนก็ตาม
- 3) แรงนิวเคลียร์เป็นแรงอึดตัว

ตามแบบจำลองหยดของเหลวนี้ ถือว่านิวเคลียสมีลักษณะเหมือนหยดของเหลว จึงมีความตึงผิวสูง จะพยายามรักษารูปร่างเป็นทรงกลมโดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง แต่หยดของเหลว นิวเคลียสจะเป็นหยดของเหลวที่มีความหนาแน่นสูงมาก ( $\sim 10^{14} \text{ g/cm}^3$ )

แบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองที่ง่ายที่สุด คือไม่ระบุโครงสร้างของนิวเคลียส หรือ โครงแบบ (configuration) การเรียงตัวของนิวคลีออนภายในนิวเคลียส ดังนั้นจึงให้นิวคลีออนที่อยู่

ภายในนิวเคลียสอยู่แบบสุ่ม ๆ คล้ายกับเป็นโมเลกุลของหยดของเหลว ถึงแม้ว่าแบบจำลองนี้จะเป็นแบบจำลองอย่างง่าย ๆ แต่ก็ยังเป็นแบบจำลองที่ประสบผลสำเร็จเป็นอย่างดียิ่งในสองเรื่องต่อไปนี้ คือ

1. ใช้เป็นสมมุติฐานในการสร้างสูตรพลังงานยึดเหนี่ยวที่เรียกว่าสูตรกึ่งการทดลอง ซึ่งค่าที่ได้จากการคำนวณ ให้พอดี (fit) กับข้อมูลพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวคลีโอไอดที่มีจำนวนนิวคลีออน  $A > 20$

2. สามารถอธิบายกระบวนการแบ่งแยกนิวเคลียส (nuclear fission) ได้เป็นอย่างดี

แต่อย่างไรก็ดี แบบจำลองนี้ไม่ได้ระบุโครงสร้างของนิวเคลียส หรือโครงสร้างของการเรียงตัวของนิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียส ดังนั้นจึงไม่สามารถอธิบายหรือทำนายสปิน (spin) ของนิวเคลียสได้ ซึ่งถือเป็นข้อบกพร่องของแบบจำลองนี้ ซึ่งการอธิบายหรือทำนายสปินของนิวเคลียส จะใช้แบบจำลองชั้น (shell model) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

## 1.2 สูตรเชิงกึ่งการทดลอง (Semiempirical Formula)

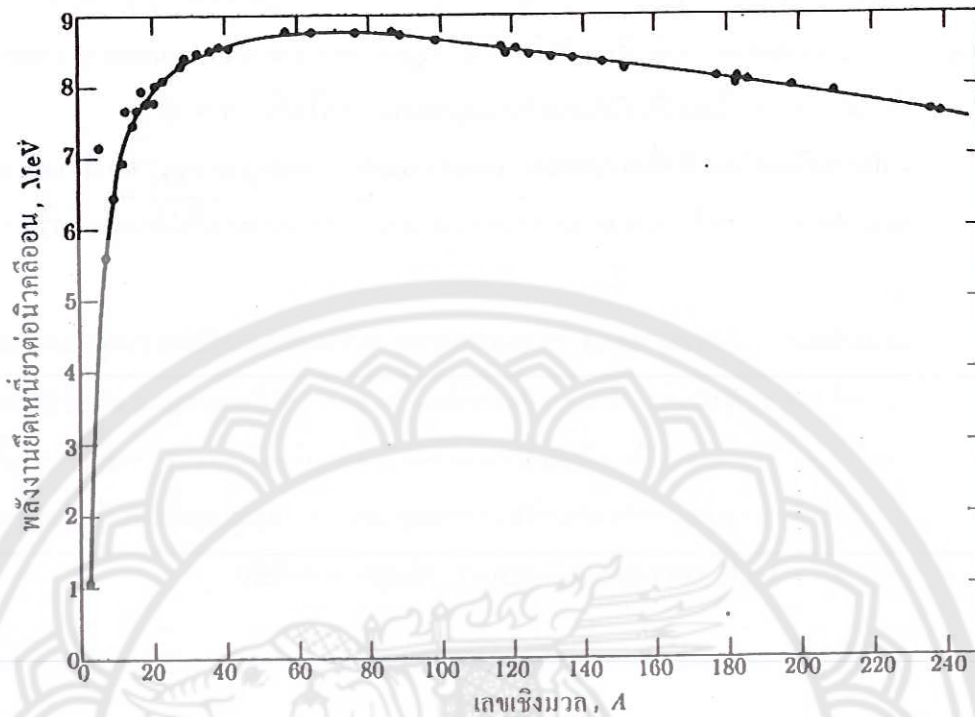
ให้ลองพิจารณาเส้นโค้งของพลังงานยึดเหนี่ยว (binding energy),  $BE$ , ของนิวคลีโอไอดที่เราหามาได้ ปรกติจะมีเส้นโค้งดังในรูป 1.1 โดยเส้นโค้งจะมีค่าสูงสุดบริเวณที่  $A = 50$  พลังงานยึดเหนี่ยวต่อนิวคลีออน  $BE/A \sim 8.8$  MeV ที่  $A$  มีค่าต่ำ ๆ  $BE/A$  จะมีค่าน้อย และเพิ่มค่าขึ้นอย่างรวดเร็วตามการเพิ่มของ  $A$  จนกระทั่งถึง  $A \sim 20$  ในช่วง  $A \sim 20$  และ  $A \sim 40$  ค่า  $BE/A$  แตกต่างกันไม่มาก ค่าเฉลี่ยของ  $BE/A$  ในช่วงนี้  $\sim 8.5$  MeV เมื่อ  $A > 140$ ,  $BE/A$  จะลดลงอย่างช้า ๆ และต่อเนื่องตามการเพิ่มของ  $A$  และจะมีค่า 7.6 MeV ที่  $A = 238$  ( $^{238}\text{U}$ )

สูตรหาพลังงานยึดเหนี่ยวที่สร้างขึ้นอย่างง่าย ๆ ที่รู้จักกันดี ได้มาจากเอนามวลส่วนที่หายไป ที่เรียกว่าส่วนพร่องมวล (mass defect)  $\Delta M = ZM_p + (A - Z)M_n - \frac{A}{Z}M$  ของนิวคลีออนหลังยึดเหนี่ยวกันเป็นนิวเคลียสคูณด้วยความเร็วแสง  $c$  ยกกำลังสอง ตามความสัมพันธ์มวล-พลังงานของไอน์สไตน์ (Einstein) [ $E = (\Delta M)c^2$ ] ซึ่งจะได้สูตรออกมาเป็น

$$BE = [ZM_p + (A - Z)M_n - \frac{A}{Z}M]c^2 \quad (1.1)$$

เมื่อ  $Z$  เป็นจำนวนโปรตอน,  $A - Z$  เป็นจำนวนนิวตรอน,  $m_p$ ,  $m_n$  และ  $\frac{A}{Z}m$  เป็นมวลนิ่งของ





รูป 1.1 เส้นโค้งของพลังงานยึดเหนี่ยวต่อนิวคลีออน  $BE/A$  ของแต่ละนิวคลีไอ เทียบกับ เลขเชิงมวล  $A$  (ดัดแปลงจาก A. P. Arya, *Elementary Modern Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1974, p. 359)

โปรตอน นิวตรอน และนิวเคลียส ตามลำดับ [หมายเหตุ: ถ้าเอาความเร็วแสงยกกำลังสองหาร พลังงานยึดเหนี่ยว,  $BE/c^2$ , จะได้เป็นส่วนพร้อมมวล,  $\Delta M$ ] และจากสมการ (1.1) มวลของ นิวเคลียส ก็จะหาได้จาก

$$M = ZM_p + (A - Z)M_n - BE/c^2 \quad (1.2)$$

ค่า  $BE$  ที่ได้จากสูตรดังกล่าวนี้จะไม่พอดี กับข้อมูลในรูป 1.1 ถ้าหาก  $A > 20$  ทั้งนี้ เพราะการสร้างสูตร สร้างมาจากแนวคิดที่ให้มวลส่วนพร้อมเปลี่ยนไปเป็นพลังงาน โดยไม่ได้นำ ลักษณะหรือแบบจำลองของนิวเคลียสมาใช้ในการสร้างสูตร

ในการพยายามหาสูตรของพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวเคลียส ในตอนแรกบรูเอคเนอร์ (Brueckner) กับเพื่อนร่วมงาน (ค.ศ. 1954 - 1961) ได้หาสูตรโดยใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ผสมกับ กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์ แต่เป็นการหาสูตรที่หยาบมาก เพราะว่าไม่ได้นำแรงนิวเคลียร์มาเกี่ยวข้อง ด้วย เพียงเน้นเรื่องการดูกันอย่างแรงระหว่างนิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียสต่อมา ต่อมาฮอน ไวส์เชกเกอร์ ได้หาสูตรพลังงานยึดเหนี่ยวขึ้นมาใหม่ โดยอาศัยพื้นฐานของแบบจำลองนิวเคลียส

แบบหยดของเหลวตามการเสนอแนะของโบร์ดิงที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น สูตรพลังงานยึดเหนี่ยวที่ได้ นี้เรียกว่า สูตรเชิงกึ่งการทดลอง หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า สูตรไวซ์แซคเกอร์ (Weizsacker formula) ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้หาค่าพลังงานยึดเหนี่ยวได้พอดีกับข้อมูลของนิวคลีโอไอดที่มี  $A > 20$

สูตรพลังงานยึดเหนี่ยวเชิงกึ่งการทดลอง (semiempirical binding energy) ของนิวเคลียสที่สร้างขึ้นโดยยึดแนวคิดตามแบบจำลองหยดของเหลวเป็นหลักนี้ จะประกอบไปด้วยพจน์ต่างๆ ดังต่อไปนี้

ก. พจน์ปริมาตร (volume term) เนื่องจากแรงนิวเคลียร์เป็นแรงอิ่มตัว (saturate) และจะมีผลระหว่างนิวคลีออนที่อยู่ใกล้กัน ดังนั้นพลังงานยึดเหนี่ยวต่อนิวคลีออนของนิวเคลียสจึงคงตัว หรืออีกนัยหนึ่งคือพลังงานยึดเหนี่ยวเป็นปฏิภาคตรงกับจำนวนนิวคลีออน  $A$  แต่โดยเหตุที่จำนวนนิวคลีออน  $A$  เป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาตรของนิวเคลียส เพราะฉะนั้นพจน์นี้จึงเรียกว่า พจน์ปริมาตร หรือพลังงานปริมาตร (volume energy) พลังงานพจน์นี้คือ

$$E_v = a_v A \quad (1.3)$$

พลังงานยึดเหนี่ยวที่คิดอย่างหยาบจากพจน์นี้ จะมากกว่าพลังงานยึดเหนี่ยวที่เป็นจริง

ข. พจน์คูลอมบ์ (coulomb term) เนื่องจากโปรตอนมีประจุ เมื่ออัดกันอยู่ในนิวเคลียสย่อมมีแรงผลักรันเนื่องจากแรงคูลอมบ์ ทำให้พลังงานยึดเหนี่ยวที่คำนวณจากพจน์แรกมีค่าลดลง พจน์นี้จึงมีค่าเป็นลบ พจน์นี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่าพลังงานคูลอมบ์ (coulomb energy) พลังงานคูลอมบ์ของนิวเคลียสที่มีจำนวนนิวคลีออน  $A$  คือ

$$\begin{aligned} E_c &= -a'_c \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{R} \\ &= -4a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

เมื่อ

$$a_c = \frac{3}{20} \frac{e^2}{R_0 \times 10^{-13}} \quad (1.5)$$

ในสมการ (1.4) เราให้รัศมี  $R$  อยู่ในพจน์ของ  $A^{1/3}$  และเลข 4 ใส่เข้าไปเพื่อให้สูตรมีสัญลักษณ์น้อยลง ง่ายแก่การจดจำ

ค. พจน์ผิว (surface term) พจน์นี้จะทำให้พลังงานยึดเหนี่ยวมีค่าน้อยลงเนื่องจากนิวคลีออนที่อยู่บริเวณผิวของนิวเคลียสจะได้รับแรงดึงดูดหรือได้รับอันตรกิริยาน้อยกว่าอนุภาคที่อยู่



ภายในโดยเฉลี่ยประมาณครึ่งหนึ่ง เพราะฉะนั้นพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวเคลียสก็ต้องถูกลดลงด้วยพจน์นี้ ซึ่งเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า พลังงานผิว (surface energy) พลังงานผิวนี้คือ

$$E_s = -a_s A^{2/3} \quad (1.6)$$

ซึ่งคล้ายคลึงกับความตึงผิวของของเหลว

ง. พจน์สมมาตร (symmetry term) สำหรับนิวเคลียสที่เสถียร จำนวนนิวคลีออน  $A$  กับจำนวนโปรตอน  $Z$  จะต้องได้สัดส่วนกันพอเหมาะ สำหรับพวกนิวเคลียสของธาตุเบา (light nuclei) ส่วนมากจะมีจำนวนโปรตอน  $Z = A/2$  หรือเท่ากับจำนวนนิวตรอน ถ้าไม่คิดผลของคูลอมบ์ (coulomb effect) จำนวนโปรตอนที่ต่างไปจากนิวตรอนจะเป็นตัวบอกความไม่เสถียรภาพของนิวเคลียส และทำให้พลังงานยึดเหนี่ยวลดค่าลง เพราะฉะนั้นพจน์สมมาตรนี้จึงขึ้นกับผลต่างของจำนวนโปรตอนกับนิวตรอน คือ  $|(A-Z) - Z| = |A - 2Z|$  แต่เราทำให้อยู่ในรูปของยกกำลังสองเพื่อมิให้พจน์นี้เป็นศูนย์ พจน์นี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่าพลังงานสมมาตร (symmetry energy) พลังงานสมมาตรนี้ คือ

$$E_a = -a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (1.7)$$

จ. พจน์ของการเข้าคู่ (pairing term) ลักษณะอย่างหนึ่งในเสถียรภาพของนิวเคลียสคือ ถ้าโปรตอนและนิวตรอนในนิวเคลียสมีจำนวนเป็นเลขคู่ นิวเคลียสจะเสถียรภาพที่สุด และนิวเคลียสของธาตุแบบนี้จะมีอยู่มากที่สุด แต่ถ้าทั้งโปรตอนและนิวตรอนเป็นจำนวนเป็นเลขคี่แล้ว นิวเคลียสนั้นจะเสถียรภาพน้อยที่สุด สำหรับนิวเคลียสที่มีโปรตอนและนิวตรอนมีจำนวนเป็นเลขคู่กับคี่ หรือคี่กับคู่ จะเสถียรภาพอยู่ระหว่างสองแบบแรก ผลที่เกิดจากการเป็นจำนวนคี่-คู่ ของโปรตอนและนิวตรอนนี้ ให้อยู่ในพจน์ของ พลังงานการเข้าคู่ (pairing energy)  $E_\delta$  ค่าของ  $E_\delta$  จะขึ้นอยู่กับการจำนวนนิวคลีออนที่อยู่ในนิวเคลียสด้วย ดังตาราง 4.1 ต่อไปนี้

สูตรของพลังงานยึดเหนี่ยวหาได้จากการรวมพจน์ต่าง ๆ ทุกพจน์ที่กล่าวมาเข้าด้วยกันเป็น

$$BE = a_v A - 4a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_s A^{2/3} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + E_\delta \quad (1.8)$$

จากสูตรของพลังงานยึดเหนี่ยวในสมการ (1.1) ซึ่งเราเขียนมวลของนิวเคลียสได้เป็นสมการ (1.2) คือ

$$M = ZM_p + (A-Z)M_n - BE/c^2$$



ตาราง 1.1 แสดงค่า  $E_\delta$  ของนิวเคลียสที่มีจำนวนนิวคลีออนเป็นเลขคู่หรือคี่

| $A$ | $Z$ | $N$ | $E_\delta$     |
|-----|-----|-----|----------------|
| คู่ | คู่ | คู่ | $\delta / 2A$  |
| คี่ | คี่ | คี่ | 0              |
| คู่ | คี่ | คู่ | 0              |
| คี่ | คู่ | คี่ | $-\delta / 2A$ |

เมื่อ  $M_p$ ,  $M_n$  และ  $M$  เป็นมวลของโปรตอน นิวตรอน และนิวเคลียส ตามลำดับ ดังนั้นเราจึงเขียนสูตรถึงการทดลองของพลังงานยึดเหนี่ยวได้ให้อยู่ในรูปเป็นสูตรถึงการทดลองของมวล (mass semiempirical formula) ได้เป็น

$$M = ZM_p + (A-Z)M_n - \frac{a_v}{c^2} + \frac{4a_c}{c^2} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + \frac{a_s}{c^2} A^{2/3} + \frac{a_a}{c^2} \frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{\delta}{2c^2 A} \quad (1.9)$$

ค่าคงตัวต่าง ๆ ที่ปรากฏในสมการ (1.9) นี้ หาได้จากการคำนวณทางทฤษฎีและการทดลอง ประกอบกัน ค่าของค่าคงตัว  $a_v$ ,  $a_c$ ,  $a_a$ ,  $a_s$  ที่ได้มาจากวิธีดังกล่าวนี้มีค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$a_v = 14.0 \text{ MeV}, \quad a_c = 0.146 \text{ MeV}$$

$$a_a = 19.4 \text{ MeV}, \quad a_s = 13.1 \text{ MeV}$$

ค่า  $\delta$  จะมีค่าดังนี้ นิวเคลียสที่มี  $A$  และ  $Z$  เป็นเลขคู่ จะมีค่าเป็น 270 MeV นิวเคลียสที่มี  $A$  เป็นเลขคี่จะมีค่าเป็น 0 และนิวเคลียสที่มี  $A$  เป็นเลขคู่ และ  $Z$  เป็นเลขคี่ จะมีค่า -270 MeV

ในทางปฏิบัติ เวลาวัดมวลจะเป็นการวัดมวลของอะตอม และสมการ (4.7) ถูกนำมาใช้คำนวณหามวลของอะตอม โดยแทนมวลของโปรตอนด้วยมวลของอะตอมไฮโดรเจน ถ้าแทนสูตรด้วยมวลนิวตรอน  $M_n = 1.008982 \text{ amu}$  และแทนมวลของโปรตอนด้วยมวลของอะตอมไฮโดรเจน  $M_H = 1.008142 \text{ amu}$  สมการ (1.9) จะเขียนได้ดังนี้

$$M = 0.99395A - 0.00084Z + 0.0141A^{2/3} + 0.021 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \frac{0.00063Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{\delta'}{A} \quad (1.10)$$

เมื่อ

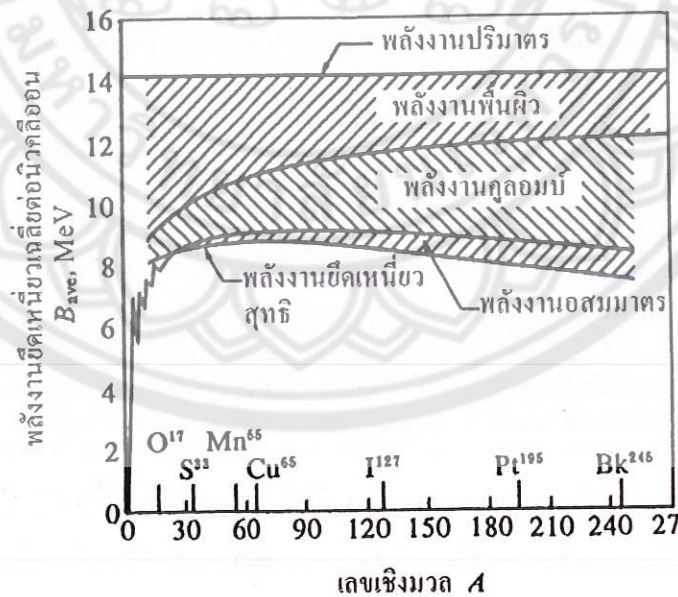
$$\delta' = \begin{cases} 0.145 \text{ amu} & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นเลขคู่ } Z \text{ เป็นเลขคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นเลขคี่ } Z \text{ เป็นเลขคู่ หรือ } A \text{ เป็นเลขคี่ } Z \text{ เป็นเลขคี่} \\ -145 \text{ amu} & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นเลขคู่ } Z \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases} \quad (1.11)$$

และสมการของ  $BE$  ในสมการ (1.8) ก็จะเขียนได้เป็น

$$BE(\text{MeV}) = 14.0A - 0.584 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - 13.1A^{2/3} - 19.4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + E_\delta \quad (1.12)$$

เมื่อ

$$E_\delta = \begin{cases} 135/A \text{ MeV} & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นเลขคู่ } Z \text{ เป็นเลขคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นเลขคี่ } Z \text{ เป็นเลขคู่ หรือ } A \text{ เป็นเลขคี่ } Z \text{ เป็นเลขคี่} \\ -135/A \text{ MeV} & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นเลขคู่ } Z \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases} \quad (1.13)$$



รูป 1.2 สรุบบางส่วนของพลังงานเฉลี่ยของนิวเคลียสที่กระทำต่อพลังงานเฉลี่ย  
(ดัดแปลงจาก W. E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*,  
McGraw-Hill, New York, 1985, p. 45)



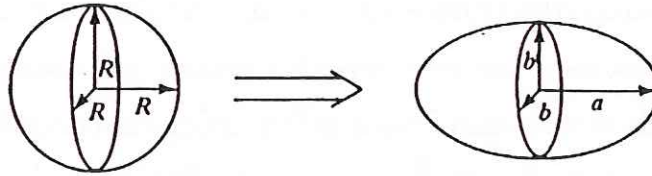
### 1.3 ทฤษฎีของการแบ่งแยกนิวเคลียส (Fission Theory)

#### 1.3.1 แบบจำลองหยดของเหลวของการแบ่งแยกนิวเคลียส (The Liquid Drop Model of Fission)

การแบ่งแยกนิวเคลียส (nuclear fission) ถูกพบโดยบังเอิญ ระหว่างที่มีการค้นหาธาตุทรานสยูเรเนียม (transuranium) ด้วยการระดมยิงนิวตรอนไปยังยูเรเนียมธรรมชาติ (natural uranium) ซึ่งเป็นธาตุหนักที่สุดที่มีอยู่ตามธรรมชาติบนเปลือกโลก ซึ่งจากการวิเคราะห์ทางเคมีเพื่อหาธาตุผลิตผล ฮาห์น (Hahn) และสตราสส์แมนน์ (Strassmann) ก็ได้สรุปออกมาใน ค.ศ. 1393 ว่าการระดมยิงยูเรเนียมด้วยนิวตรอนเช่นนั้น จะได้ไอโซโทปของแบเรียม ( $A \approx 140$ ) เกิดขึ้น และใน ค.ศ. 1939 ไมท์เนอร์ (Meitner) และฟริช (Frisch) ก็ได้อธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนี้ในพจน์ของแบบจำลองหยดของเหลวของนิวเคลียส โดยพวกเขาเชื่อว่านิวเคลียสของธาตุหนักที่มีพลังงานเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยจะกลายรูปร่างผิดไปจากเดิมมากและไม่เสถียร มีการแบ่งแยกตัวออกเป็นนิวเคลียสใหม่สองนิวเคลียสที่มีขนาดใกล้เคียงกัน คล้ายกับการแบ่งแยกตัวออกเป็นสองส่วนของหยดของเหลว พร้อมกับเสนอแนะว่า นิวเคลียสของยูเรเนียมได้พลังงานส่วนนี้มาจากการจับนิวตรอน ซึ่งการแบ่งแยกตัวเช่นนี้จะเรียกว่าเป็นการแบ่งแยกตัวที่กระตุ้นด้วยนิวตรอน (neutron-induced fission) และต่อมาใน ค.ศ. 1940 ก็ได้มีการสังเกตพบการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียสแบบเกิดขึ้นเอง (spontaneous fission) ใน  $^{239}\text{Pu}$

การอธิบายการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียสด้วยแบบจำลองหยดของเหลว จะเริ่มต้นจากสูตรกึ่งการทดลองมวลไวส์แซกเกอร์ (Weizsacker semi-empirical mass formula) ตามสมการ (1.8) ซึ่งเป็นสูตรที่อยู่บนพื้นฐานของการให้นิวเคลียสเป็นแบบหยดของเหลว ความจริงสูตรนี้เป็นสูตรของพลังงานยึดเหนี่ยว (เพื่อความสะดวก ในหัวข้อนี้เราจะใช้สัญลักษณ์เป็น  $E_B$  แทน  $BE$ ) แต่เนื่องจากสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสูตรของมวลได้ จึงมักเรียกกันว่าเป็นสูตรมวลกึ่งการทดลอง โดยเราอาจสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ทำความเข้าใจเรื่องการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียสได้จากสูตรมวลกึ่งการทดลองนี้ โดยเราจะพิจารณาจากผลกระทบที่มีต่อพลังงานยึดเหนี่ยวเมื่อนิวเคลียสซึ่งเดิมเป็นทรงกลมมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างโดยการยืดออกทีละน้อยอย่างช้าๆ ไปเป็นรูปทรงรี ในการยืดออกนี้ปริมาตรของนิวเคลียสยังเท่าเดิม ดังนั้นพจน์ของพลังงานปริมาตรที่อยู่ในสูตรมวลกึ่งการทดลองจะไม่ได้รับผลกระทบใดๆ จากการยืดออกนี้ จึงข้ามพจน์นี้ไปไม่ต้องนำมาคิด ส่วนพจน์ของพลังงานการสมมาตรและพลังงานการเข้าคู่ก็ดูจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการ





รูป 1.3 การผิดรูปจากทรงกลมไปเป็นทรงรีที่มีปริมาตรคงเดิม;

$$a = R(1 + \varepsilon) : b = R(1 + \varepsilon)^{-1/2} \text{ สำหรับการผิดรูปแบบทรง}$$

แบนจั่ว (prolate) มี  $\varepsilon$  เป็นบวก (จาก N.A. Jelley, *Fundamentals*

*of Nuclear Physics.*, Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 145)

เปลี่ยนแปลงในพจน์ของพลังงานพื้นผิวและพจน์ของพลังงานคูลอมบ์ซึ่งได้รับผลกระทบจากการยืดออกมาก ดังนั้นพจน์ที่เปลี่ยนแปลงเมื่อนิวเคลียสผิดรูป ได้แก่พจน์ของพลังงานพื้นผิวกับพจน์ของพลังงานคูลอมบ์

การผิดรูปทรงของนิวเคลียสจากทรงกลมรัศมี  $R$  ไปเป็นรูปทรงรีที่มีปริมาตร  $\frac{4}{3}\pi ab^2$  เมื่อ  $a$  เป็นครึ่งแกนหลัก (semimajor axis) และ  $b$  เป็นครึ่งแกนรอง (semiminor axis) ดูได้จากในรูป 1.3 เราจะกำหนดให้  $a$  และ  $b$  อยู่ในพจน์ของพารามิเตอร์การบิดเบี้ยว  $\varepsilon$  คือ

$$\begin{aligned} a &= R(1 + \varepsilon) \\ b &= R(1 + \varepsilon)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

เมื่อ  $\varepsilon$  เป็นความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ของรูปทรงรี ซึ่งสัมพันธ์กับพารามิเตอร์การผิดรูป  $\beta$  (deformation parameter) ตามนิยาม  $\varepsilon = \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$  (หมายเหตุ: เนื่องจาก  $R^3 = ab^2$  ดังนั้นปริมาตรจึงยังคงเดิม) เมื่อทรงกลมค่อย ๆ ยืดออกเป็นรูปทรงรี พื้นที่พื้นผิวของมันจะเพิ่มขึ้นเป็น  $S = 4\pi R^2(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots)$  และส่งผลให้พจน์ของพลังงานพื้นผิวที่อยู่ในสูตรมวลเกิดการทดลองมีค่าเพิ่มขึ้นตาม ขณะที่พจน์ของพลังงานคูลอมบ์จะลดลงโดยตัวประกอบ  $(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots)$  (เมื่อสมมติให้การแจกแจงประจุเป็นแบบเอกรูป) เพราะฉะนั้นผลต่างของพลังงาน  $\Delta E$  (อันที่จริงเป็นค่าที่ลดลงของพลังงานยึดเหนี่ยว) ในระหว่างเมื่อนิวเคลียสเป็นรูปทรงกลมกับเมื่อยืดออกเป็นรูปทรงรี แต่ปริมาตรยังคงเดิม จะเป็น

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_B(\varepsilon) - E_B(\varepsilon = 0) \\ &= -a_s A^{2/3} (1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots) - a_c Z^2 A^{-1/3} (1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots) \\ &\quad + a_s A^{2/3} + a_c Z^2 A^{-1/3} \\ &\cong \left( -\frac{2}{5}a_s A^{2/3} + \frac{1}{5}a_c Z^2 A^{-1/3} \right) \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

เราอาจให้ความหมายของพจน์ทั้งสองที่อยู่ทางด้านขวามือของสมการ ดังต่อไปนี้ พจน์แรกแทนงานที่ทำ (work done) โดยแรง "ความตึงผิว" ("surface-tension" force) เหตุที่มีเครื่องหมายเป็นลบเพราะว่าแรงนี้ต้านการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียส เหมือนกับแรงความตึงผิวที่ต้านการเพิ่มของพื้นที่ผิวของหยดของเหลว ซึ่งจะเพิ่มขึ้นเมื่อหยดของเหลวยืดออกและแบ่งแยกออกเป็น สองหยด ส่วนพจน์ที่สองแทนงานที่ทำโดยแรงคูลอมบ์ พจน์นี้มีเครื่องหมายเป็นลบเพราะว่าแรงคูลอมบ์ในที่นี้เป็นแรงผลักระหว่างประจุ (โปรตอน) ในนิวเคลียส ซึ่งส่งเสริมการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียส

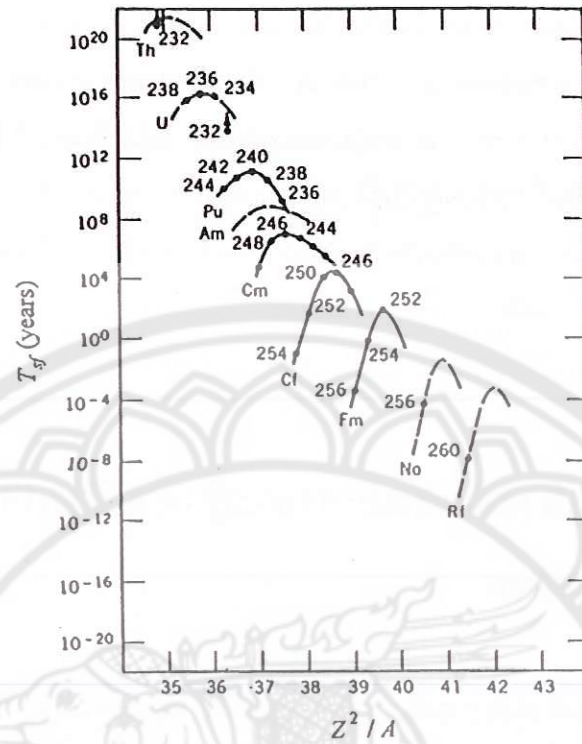
ถ้าพจน์ที่สองมากกว่าพจน์แรก การเปลี่ยนแปลงของพลังงานจะเป็นบวกหรือเพิ่มขึ้น และนิวเคลียสก็จะยืดออก -- ก็เหมือนกับเราเพิ่มพลังงานให้แก่นิวเคลียสโดยการออกแรงดึงเพื่อให้ นิวเคลียสยืดออก ยิ่งเราเพิ่มพลังงานมากขึ้นเท่าใด (ออกแรงดึงมากขึ้น) ก็จะทำให้นิวเคลียสยืดออกได้มากยิ่งขึ้นเท่านั้น-- แต่การเสถียรของนิวเคลียสจะลดน้อยลงสวนทางกับการยืดออก เมื่อ นิวเคลียสยืดออกนิวเคลียสก็พร้อมที่จะการแบ่งแยกตัว ดังนั้นเงื่อนไขของการแบ่งแยกตัวแบบเกิดขึ้นเองก็คือ

$$\frac{1}{5} a_c Z^2 A^{-1/3} > \frac{2}{5} a_s A^{2/3}$$

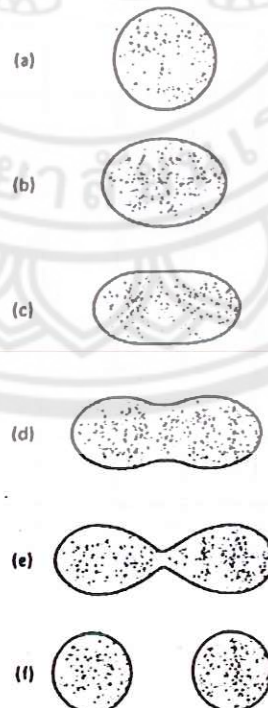
และถ้าแทนค่า  $a_s$  และ  $a_c$  ก็จะได้

$$\frac{Z^2}{A} > 47 \quad (1.16)$$

ซึ่งถือเป็นเกณฑ์ที่การแบ่งแยกตัวแบบเกิดขึ้นเองจะสามารถเกิดขึ้นได้ การประมาณนี้ต้องปรับปรุงบางอย่างอีก เพื่อให้รับกันกับปรากฏการณ์การทะลุผ่านกำแพงศักย์ในทางกลศาสตร์ควอนตัม ซึ่งยินยอมให้เกิดการแบ่งแยกตัวแบบเกิดขึ้นเองได้ แม้ว่าพลังงานการฝืนรูปจะเป็นลบก็ตาม นอกจากนี้นิวคลีโอไที่อยู่ในบริเวณแถว ๆ ยูเรเนียมยังมีการฝืนรูปอย่างสมดุลดาว (รูปร่างสมดุลดอยู่เป็นรูปทรงรีมากกว่าจะเป็นทรงกลม) แต่ถึงอย่างไรก็ตาม พารามิเตอร์  $Z^2 / A$  ก็ใช้เป็นตัวบ่งชี้ถึงความสามารถในการแบ่งแยกตัวแบบเกิดขึ้นเองของนิวเคลียสอย่างหยาบ ๆ ได้ ดังแสดงในรูป 1.4 ซึ่งจะเห็นว่า ถ้าค่า  $Z^2 / A$  มีค่าเพิ่มขึ้น ครึ่งชีวิตของการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียสก็จะสั้นลง ซึ่งจากรูปเราอาจจะประมาณค่านอกช่วงหาค่าครึ่งชีวิตของการแบ่งแยกตัวแบบเกิดขึ้นเองในกรณีของ  $(Z^2 / A) \approx 47$  ได้ว่ามีครึ่งชีวิตประมาณ  $10^{-20}$  s เพราะฉะนั้นนิวคลีโอไที่มี  $Z^2 / A$  อยู่เหนือค่าวิกฤตินี้ขึ้นไปจะแบ่งแยกตัวได้ "ทัน" กับสเกลของเวลานิวเคลียร์



รูป 1.4 ครึ่งชีวิตสำหรับการแบ่งแยกตัวแบบเกิดขึ้นเอง ครึ่งชีวิตมีแนวโน้มลดลงตามการเพิ่มของ  $Z^2/A$  (จาก K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, Singapore: John Wiley & Sons, 1988, p. 483)



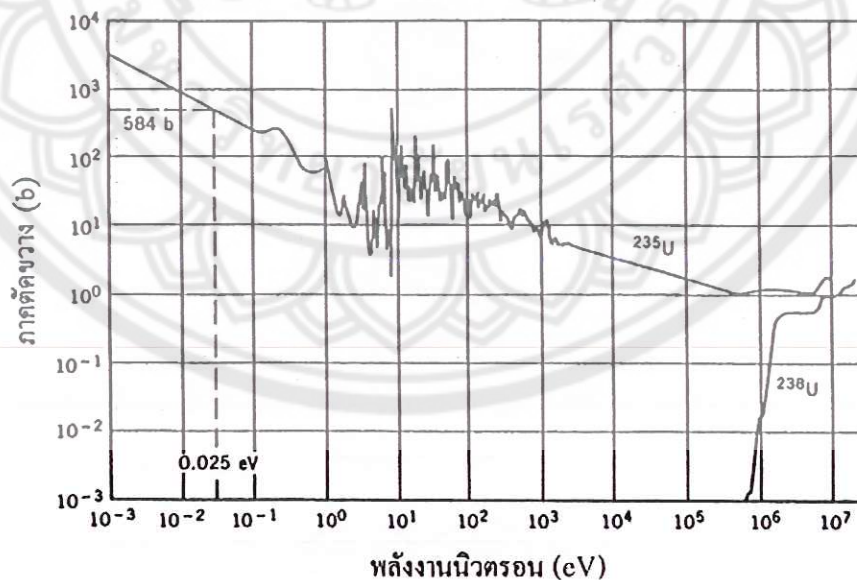
รูป 1.5 การแบ่งแยกตัวของของนิวเคลียสแบบหยดของเหลว



ลำดับขั้นของการแบ่งแยกตัวนิวเคลียสพิจารณาอย่างง่าย ๆ ได้จากการกำหนดให้นิวเคลียสมีลักษณะเหมือนหยดของเหลว เริ่มต้นด้วยนิวเคลียสเป็นรูปทรงกลม (ดังรูป 1.5a); ต่อมาก็ยืดออกเล็กน้อย (ดังรูป 1.5b); ถัดมายุ่ค่ออกมากขึ้นและเริ่มเห็นการโป่งออกของส่วนที่จะเป็นส่วนแบ่งแยกตัว แต่ยังเชื่อมกันอยู่เห็นเป็นคอคอด (ดังรูป 1.5c,d); ถัดมากคอคอดก็จะคอดมากขึ้นจนส่วนแบ่งแยกตัวหลุดออกจากกันเป็นสองส่วน (ดังรูป 1.5e,f) จะเห็นได้ชัดแจ้งว่าแรงความตึงผิวต้านการยืดออกของนิวเคลียส

### 1.3.2 การแบ่งแยกนิวเคลียสโดยการกระตุ้นด้วยนิวตรอน (Neutron-Induced Fission)

ในรูป 1.6 แสดงภาคตัดขวางของการแบ่งแยกตัวโดยการกระตุ้นด้วยนิวตรอนของ  $^{235}\text{U}$  และ  $^{238}\text{U}$  จะเห็นว่าภาคตัดขวางของ  $^{235}\text{U}$  ในย่านพลังงานของการเป็นเทอร์มัลนิวตรอน ภาคตัดขวางจะขึ้นกับ  $1/v$  และมีเรโซแนนซ์อย่างแรงในช่วงพลังงาน 1 - 100 eV อันเนื่องมาจากโครงสร้างภายในของนิวเคลียส ภาคตัดขวางการแบ่งแยกตัวของ  $^{235}\text{U}$  ที่กระตุ้นด้วยเทอร์มัล



รูป 1.6 ภาคตัดขวางการแบ่งแยกตัวแบบกระตุ้นด้วยนิวตรอน  
ของ  $^{235}\text{U}$  และ  $^{238}\text{U}$  (คัดแปลงจาก K.S. Krane, *Introductory  
Nuclear Physics.*, Singapore: John Wiley & Sons, 1988, p. 488)

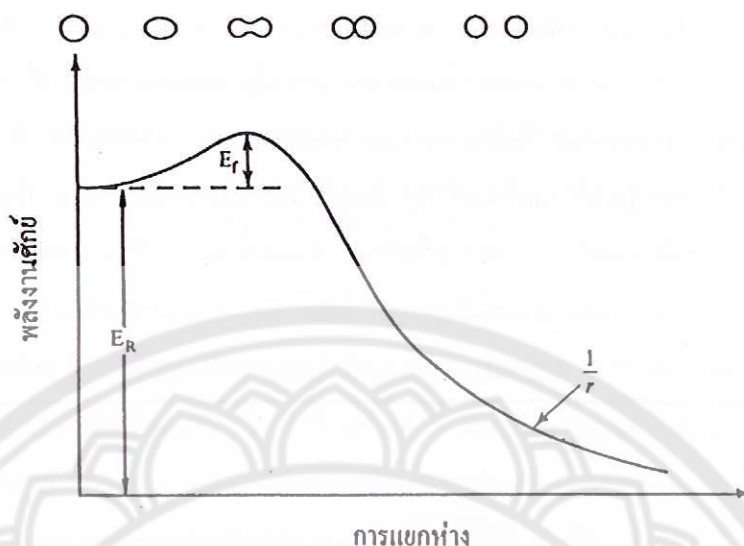
นิวตรอน (584 b) จะมีค่าขั้วภาคตัดขวางการกระเจิง (9 b) และภาคตัดขวางการจับแตรังสี (94 b) และมีมากกว่าภาคตัดขวางการแบ่งแยกตัวที่เกิดจากการกระตุ้นโดยนิวตรอนเร็วด้วยอันดับขนาดเป็น 3 ดังนั้นถ้าจะเอานิวตรอนเร็วที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียสหนึ่ง ซึ่งมีพลังงานในหน่วยของ MeV ไปกระตุ้นให้นิวเคลียส  $^{235}\text{U}$  ที่อยู่ถัดไปเกิดการแบ่งแยกตัว ก็จะต้องหาวิธีลดความเร็วของมันลงให้เป็นเทอร์มัลนิวตรอนเสียก่อน ส่วนกรณีของ  $^{238}\text{U}$  ภาคตัดขวางการแบ่งแยกตัวในย่านพลังงานของเทอร์มัลนิวตรอนจะไม่มี นอกจากในย่านพลังงานของนิวตรอนเร็วเท่านั้น ดังนั้นนิวเคลียส  $^{238}\text{U}$  จึงเกิดการแบ่งแยกตัวได้เฉพาะกับนิวตรอนเร็วเท่านั้น พฤติกรรมการแบ่งแยกตัวที่แตกต่างกันอย่างมากระหว่าง  $^{235}\text{U}$  กับ  $^{238}\text{U}$  นี้ เป็นผลลัพธ์มาจากความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานการกระตุ้นของระบบประกอบ (นิวเคลียสประกอบ) กับพลังงานการก่อกัมมันต์ (activation energy) ซึ่งเป็นพลังงานที่ต้องการในการเอาชนะกำแพงการแบ่งแยกตัว (หรือคือ ส่วนสูงของกำแพงการแบ่งแยกตัวนั่นเอง)

ในการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียสโดยการกระตุ้นด้วยนิวตรอนนี้ การแบ่งแยกตัวจะเกิดขึ้นถ้าหากว่านิวเคลียสประกอบที่เกิดจากการจับนิวตรอนของนิวคลีไอด์นั้นมีพลังงานการกระตุ้นมากกว่ากำแพงศักย์ ซึ่งโดยทั่วไปขึ้นอยู่กับจำนวนโปรตอน  $Z$  ของนิวเคลียสเป้า และการมีจำนวนนิวคลีออน  $A$  เป็นเลขคู่หรือคี่ของนิวเคลียสเป้าอันเนื่องมาจากผลของการเข้าคู่ ตัวอย่างเช่นในการจับนิวตรอนช้า ( $E_n \approx 1/40$  MeV) ของ  $^{235}\text{U}$  นิวเคลียสประกอบ  $^{236}\text{U}$  ก่อรูปขึ้นโดยมีพลังงานการกระตุ้นเท่ากับพลังงานการแยก  $S_n^{236} > E_f$ , ส่วนสูงของกำแพง, ดังนั้นการแบ่งแยกตัวจึงเกิดขึ้นทันที แต่กับ  $^{238}\text{U}$  ถ้าหาก  $^{238}\text{U}$  จับนิวตรอนช้าดังกล่าว นิวเคลียสประกอบ  $^{239}\text{U}$  จะอยู่ที่พลังงานการกระตุ้น  $S_n^{239} < E_f$  ดังนั้นการแบ่งแยกตัวจะไม่เกิด จนกว่า  $E_n > 1.4$  ซึ่งคือผลต่างของ  $S_n^{239}$  และ  $E_f$

### 1.3.3 กำแพงการแบ่งแยกตัว (Fission Barrier)

กำแพงศักย์ของการแบ่งแยกตัวเป็นค่าสุทธิ ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของการหักล้างกันระหว่างพลังงานพื้นผิวซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นตามการเพิ่มของพื้นผิวกับพลังงานกูลอมบ์ซึ่งมีค่าลดลงตามการแยกห่างของประจุเมื่อนิวเคลียสผิดรูปร่างมากขึ้น ดังจะเห็นได้ในรูป 1.7 ซึ่งในรูป  $E_f$  จะเป็นส่วนสูงของกำแพงการแบ่งแยกตัว ที่อาจประมาณค่าได้จากสมการ (1.15) ดังตัวอย่างเช่น การประมาณค่า  $E_f$  ของนิวคลีไอด์  $A = 240$  จากสมการ (1.15) ซึ่งทำได้โดยการให้  $|e| = 0.29$  ซึ่งจากการใช้วิธีนี้ก็จะประมาณค่า  $E_f$  ของกำแพงการแบ่งแยกตัวของ  $^{238}\text{U}$  ได้มีค่าประมาณ 6.1 MeV เป็นต้น



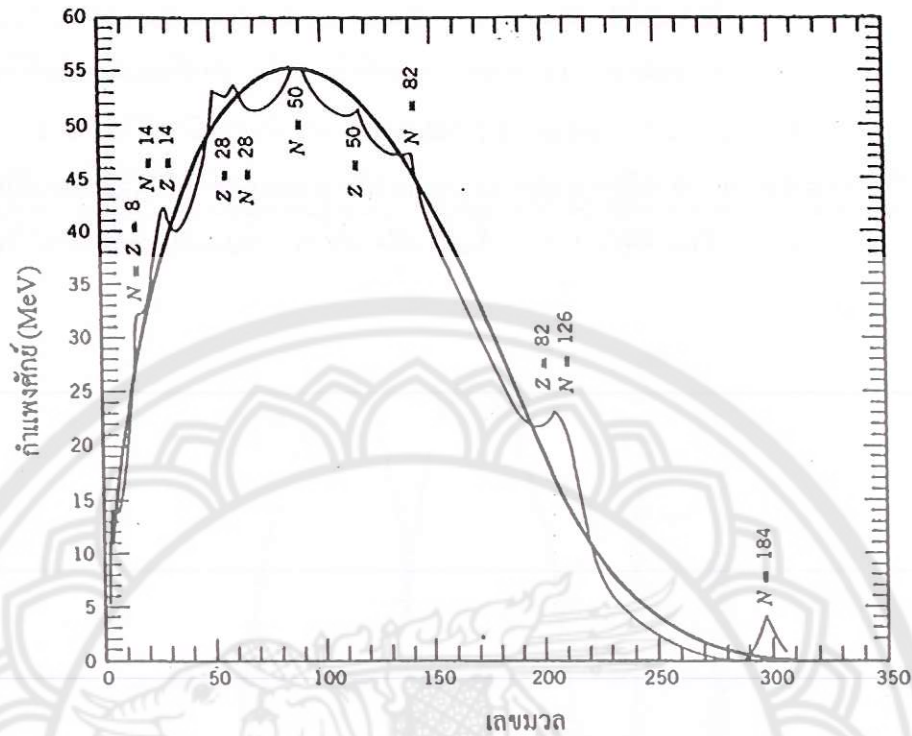


รูป 1.7 แสดงรูปแบบของกำแพงการแบ่งแยกตัว (ดัดแปลงจาก N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 145)

กำแพงการแบ่งแยกตัวนี้จะคล้ายคลึงกับกำแพงคูลอมบ์ในเรื่องการสลายตัวให้อัลฟา และการแบ่งแยกตัวก็เกิดขึ้นได้โดยผ่านทางอุโมงค์ทางกลศาสตร์ควอนตัมเช่นเดียวกัน ชั่วชีวิตของการแบ่งแยกตัวก็อาจหาได้จากเส้นโค้งของกำแพงการแบ่งแยกตัวนี้ (กล่าวคือชั่วชีวิตของการแบ่งแยกตัวขึ้นกับลักษณะการชี้กำลังของ  $E_r$ ) คล้ายกับการหาชั่วชีวิตของการสลายตัวให้อัลฟา สำหรับ  $E_R$  ที่อยู่ในรูปเดียวกัน เป็นพลังงานที่ถูกคายออกมาจากการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียส หากเราได้จากสมการ (1.8) โดยให้  $E_R = E_B(Z, A) - 2E_B(Z/2, A/2)$  เมื่อ  $E_B(Z, A)$  เป็นพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวเคลียสก่อนการแบ่งแยกตัว และ  $E_B(Z/2, A/2)$  เป็นพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวเคลียสใหม่ที่เป็นส่วนแบ่งแยกตัวจากการแบ่งแยกตัวแบบสมมาตร (หมายเหตุ: เราใช้สัญลักษณ์  $E_B$  แทน  $BE$  แล้ว)

ส่วนสูงของกำแพงการแบ่งแยกตัวเหนือสถานะพื้น,  $E_r$  นี้ อาจเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็นพลังงานการก่อกัมมันต์ ซึ่งเป็นพลังงานที่ต้องการในการเอาชนะกำแพงการแบ่งแยกตัว หรือเป็นพลังงานที่ต้องกระตุ้นต่อนิวเคลียสเพื่อให้นิวเคลียสเกิดการแบ่งแยกตัว ในรูป 1.8 แสดงส่วนสูงของกำแพงการแบ่งแยกตัว (หรือพลังงานการก่อกัมมันต์) แปรผันตามเลขมวล  $A$  ของแต่ละนิวคลีโอไอด้านบนพื้นฐานของแบบจำลองหยดของเหลว (เห็นเป็นเส้นโค้งหนาในรูป) แต่ในรูปจะแสดงให้เห็นผลลัพธ์ของการคำนวณที่มีรายละเอียดมากยิ่งขึ้น โดยการนำเอาผลของการมีโครงสร้างแบบชั้นของนิวเคลียสเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย (เห็นเป็นเส้นโค้งบางในรูป) อยู่ด้วย ซึ่งผลการคำนวณได้ให้ข้อบ่งชี้ประการหนึ่งว่า นิวคลีโอไอดังที่หนักมาก ที่มีเลขมวล  $A$  แฉว ๆ





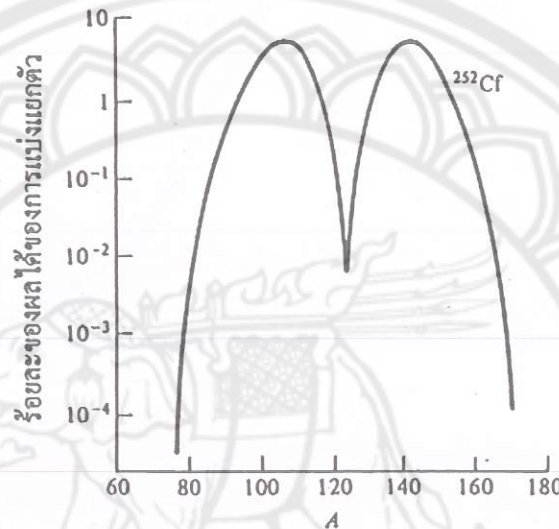
รูป 1.8 การแปรผันของพลังงานการก่อกัมมันต์ของการแบ่งแยกตัว  
เทียบกับเลขมวล  $A$  เส้นโค้งนี้เป็นผลลัพธ์ของการคำนวณโดยอาศัย  
พื้นฐานของแบบจำลองหยดของเหลว และเลือกคำนวณเฉพาะกับเลขมวล  
ของไอโซโทปที่เสถียรที่สุด ส่วนเส้นโค้งบางเกิดจากการนำเอาผลของการ  
มีโครงสร้างแบบชั้นของนิวเคลียสมาเกี่ยวข้องด้วย (ดัดแปลงจาก K.S. Krane,  
*Introductory Nuclear Physics.*, Singapore: John Willey & Sons, 1988, p. 482)

300 อาจจะด้านการแบ่งแยกตัว (หรือเสถียรต่อการแบ่งแยกตัว) ได้มากกว่าที่คาดหมายจากพื้นฐาน  
ของแบบจำลองหยดของเหลว ซึ่งกำหนดการแบ่งแยกตัวควรเป็นศูนย์แล้ว เหตุที่เป็นเช่นนี้คาดว่า  
เนื่องมาจากการมีจำนวนนิวตรอนครบชั้นของนิวคลีไอนั้นเอง

### 1.3.4 การแบ่งแยกตัวแบบอสมมาตรและไอโซเมอร์ (Asymmetric Fission and Isomer)

ในการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียส ไม่ว่าจะเป็นแบบเกิดขึ้นเองหรือกระตุ้นให้เกิดก็ตาม

ส่วนแบ่งแยกตัวของนิวเคลียสจะมีขนาดพอ ๆ กัน ซึ่งจากการทำนายโดยใช้แบบจำลองหยดของเหลวจะได้ว่า ส่วนแตกตัวต้องมีขนาดเท่ากันอย่างแท้จริง หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือการแบ่งแยกตัวต้องเป็นแบบสมมาตร แต่จากการสังเกตการแบ่งแยกตัวของนิวคลีไอด์ที่มี  $A > 200$  กลับขัดแย้งกับการทำนาย กล่าวคือการแจกแจงมวลของส่วนแบ่งแยกตัวกลับมีลักษณะเป็นแบบสองโหนด (two humps) ดังจะเห็นในรูป 1.9 ซึ่งเป็นเส้นโค้งการแจกแจงมวลของนิวคลีไอด์ที่เป็น



รูป 1.9 การลงจุดระหว่างผลได้ของการแบ่งแยกตัว (fission yield) ตามเกิดขึ้นเอง กับมวลของส่วนแตกตัวของ  $^{252}\text{Cf}$  (คัดแปลงจาก N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 148)

ส่วนแตกตัวของ  $^{252}\text{Cf}$  (เส้นโค้งที่เห็นในรูปมีศูนย์กลางของเส้นโค้งอยู่ที่แถว  $A = 124$  มากกว่าที่จะอยู่แถว 126 นั้นเนื่องจากว่า เมื่อนิวเคลียสแบ่งแยกตัว จะมีการคายนิวตรอนออกมาอย่างฉับพลัน) จึงนับได้ว่าแบบจำลองหยดของเหลวล้มเหลวเมื่อทำนายการแบ่งแยกตัวแบบอสมมาตร

รายละเอียดของความล้มเหลวอื่นๆ ของแบบจำลองหยดของเหลว นอกเหนือจากการอธิบายการแบ่งแยกตัวแบบอสมมาตรก็คือ ความล้มเหลวในการอธิบายการปรากฏของไอโซเมอร์การแบ่งแยกตัว (fission isomer) ซึ่งค้นพบโดยโพลีคานอฟและคณะ (Polikanov et al.) ใน ค.ศ. 1992 สถานะไอโซเมอร์ถูกพบในนิวคลีไอด์แถว ๆ  $A = 240$  ที่การกระตุ้น 2 - 3 MeV ด้วยชั่วชีวิตอยู่ในช่วง  $10^{-2}$  ถึง  $10^{-9}$  s ซึ่งจะสลายตัวต่อมาโดยการแบ่งแยกตัวมากกว่าการคายแกมมาตามแบบจำลองหยดของเหลว การที่สถานะถูกกระตุ้น 2 - 3 MeV มีชั่วชีวิตในช่วงสั้นเช่นนี้



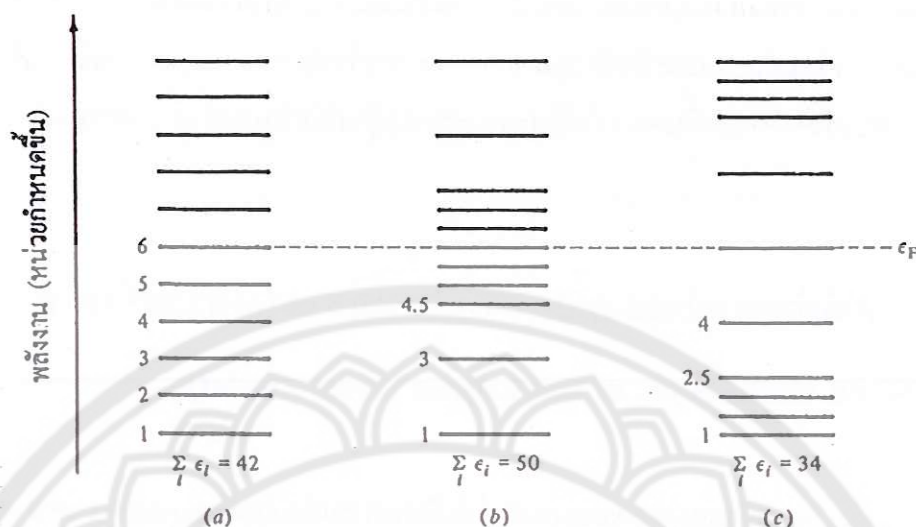
เนื่องมาจากการลดลงของส่วนสูงกำแพงศักย์  $E_f$  แต่สถานะเช่นนี้คาดว่าจะเป็นการสลายตัวให้แกมมามากกว่า เว้นแต่สถานะจะมีสปินสูงมาก ๆ แต่อย่างไรก็ดีจากการทดลองวัดอัตราส่วนระหว่างไอโซเมอร์ต่อสถานะพื้นพบว่าไม่มีสถานะถูกกระตุ้นที่มีสปินสูงมาก ๆ เช่นนั้น

### 1.3.5 การแก้ค่าแบบจำลองหยดของเหลวเนื่องจากโครงสร้างชั้น

#### (Shell Collections to the Liquid Drop Model)

ในการนำแบบจำลองหยดของเหลวมาใช้อธิบายการแบ่งแยกตัวแบบอสมมาตรและการปรากฏของไอโซเมอร์ การแบ่งแยกตัวที่เราสังเกตพบนั้นจะต้องมีการแก้ค่าอันเนื่องจากการมีโครงสร้างชั้นของนิวเคลียสด้วย ซึ่งในการพิจารณาเชิงแบบจำลองชั้นเราจะให้นิวคลีออนที่อยู่ในนิวเคลียสอยู่เต็มระดับนับตั้งแต่ระดับพลังงานต่ำสุดขึ้นมาเรื่อยจนถึงระดับเฟอร์มี (Fermi level) และพลังงานสถานะพื้นของนิวเคลียส ก็หาได้โดยการรวมพลังงานของระดับที่ถูกนิวคลีออนยึดครองทุกระดับเข้าด้วยกัน วิธีการเช่นนี้สามารถใช้คำนวณการผิดรูปอย่างอ้อมตัวของนิวเคลียสได้ โดยเริ่มต้นจากการใช้แบบจำลองนิลส์สัน (Nilsson Model) กำหนดค่าระดับพลังงานก่อน และต่อมารวมระดับพลังงานที่มีนิวคลีออนยึดครองอยู่ทั้งหมดเข้าด้วยกัน (รวมในทางที่จะให้ค่าที่น้อยที่สุด) พลังงานรวมที่ได้มานี้จะเป็นฟังก์ชันของการผิดรูปเพราะแต่ละระดับพลังงานที่นำมา รวมกันอยู่ขึ้นกับการผิดรูป ปรากฏว่าวิธีเช่นนี้ให้ผลลัพท์ของกันดีกว่าผลการสังเกตการผิดรูปที่สถานะพื้น แต่กับการผิดรูปมาก ๆ เหมือนกับที่ปรากฏในการแบ่งแยกตัว ปรากฏว่ากลวิธีนี้ล้มเหลว ซึ่งก็อาจเป็นไปได้ว่าในการคำนวณตามกลวิธีดังกล่าวนี้ไม่ได้กำหนดให้การแจกแจงวัตถุ (หมายถึงนิวคลีออน) ดำเนินตามการแจกแจงศักย์

เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าว สตรูตินสกี (Strutinsky) ได้พัฒนากลวิธีขึ้นมาอีก ใน ค.ศ. 1968 โดยพิจารณาถึงความแตกต่างกันระหว่างแบบจำลองหยดของเหลวกับแบบจำลองชั้น โดยเมื่อพิจารณาตามแบบจำลองหยดของเหลวที่ถือว่าภายในนิวเคลียสไม่มีโครงสร้างชั้น ก็สมนัยได้กับการสมมุติว่าความหนาแน่นของระดับพลังงาน  $\rho(\epsilon)$  เป็นแบบเอกรูปดังแสดงในรูป 1.10a แต่เมื่อ  $\bar{\rho}(\epsilon)$  ได้รับผลกระทบจากการมีโครงสร้างชั้น ความหนาแน่นของระดับพลังงานจะเปลี่ยนไปเป็นแบบในรูป 1.10b และ 1.10c ซึ่งมีความหนาแน่นของสถานะที่พื้นผิวเฟอร์มี (Fermi surface),  $\rho_F(\epsilon)$ , มากกว่าและน้อยกว่า  $\rho(\epsilon)$  ตามลำดับ

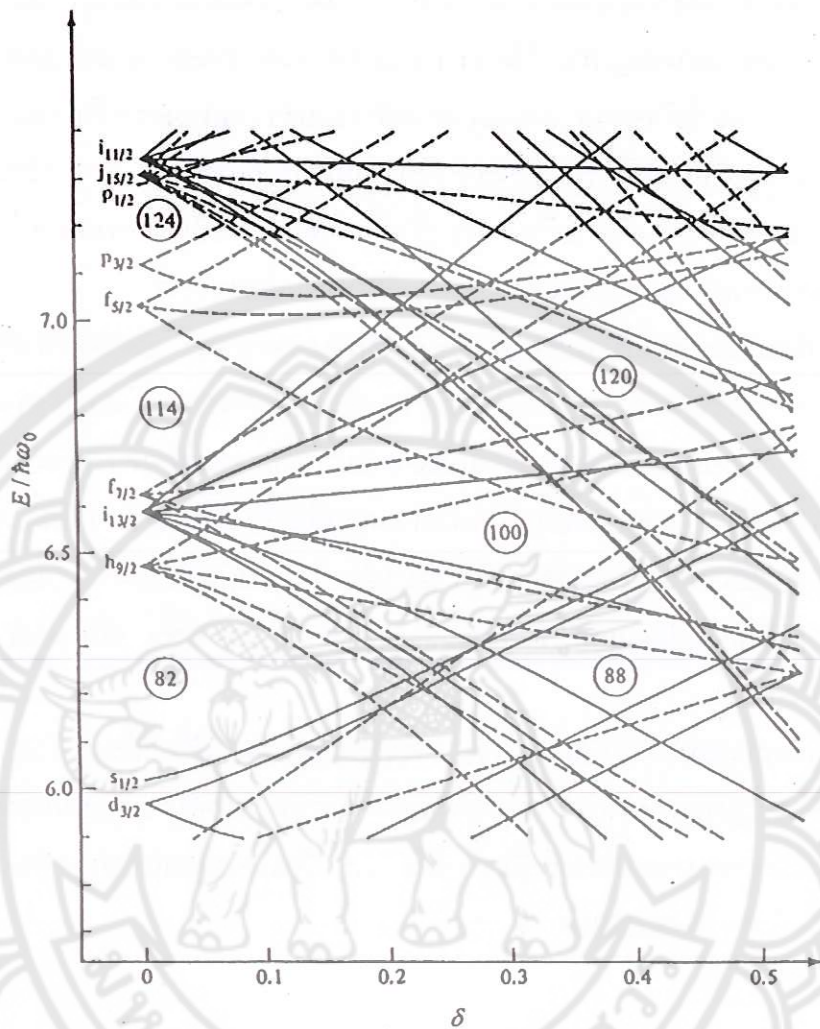


รูป 1.10 ความหนาแน่นระดับที่พื้นผิวเฟร์มี  $\rho_F(\epsilon)$ : (a)  $\rho_F(\epsilon) = \bar{\rho}(\epsilon)$  (b)  $\rho_F(\epsilon) > \bar{\rho}(\epsilon)$ ; (c)  $\rho_F(\epsilon) < \bar{\rho}(\epsilon)$  ผลรวมของทุกระดับที่ถูกยึดครอง (สมมุติให้มีสองนิวคลีออนต่อระดับ) แสดงอยู่ข้างล่างของแต่ละชุดระดับ (คัดแปลงจาก N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 149)

ถ้าดูผลรวมของทุกระดับยึดครอง (สมมุติว่าในแต่ละระดับยึดครองมีสองนิวคลีออน) ที่แสดงไว้ที่ได้รูปแต่ละรูป ก็จะเห็นว่านิวเคลียสจะยึดแน่นยิ่งขึ้น หาก  $\rho_F(\epsilon)$  มีค่าน้อยกว่าค่าในแบบจำลองหยดของเหลว  $\bar{\rho}(\epsilon)$  โดยการเพิ่มขึ้นของพลังงานยึดเหนี่ยวอันเป็นผลจากโครงสร้างชั้นนี้เป็นสัดส่วนกับ  $[\bar{\rho}(\epsilon) - \rho_F(\epsilon)]$  และการแก้ค่าที่ได้จากแบบจำลองหยดของเหลวก็สามารถทำได้โดยการประเมินค่าหาปริมาณอันนี้ การหาค่า  $\bar{\rho}(\epsilon)$  และ  $\rho_F(\epsilon)$  สามารถทำได้โดยใช้แบบจำลองนิสต์สันหา  $\rho(\epsilon)$  สำหรับเฉพาะรายของการผิดรูปก่อน แล้วต่อจากนั้นค่อยคำนวณหา  $\bar{\rho}(\epsilon)$  และ  $\rho_F(\epsilon)$  โดยการเฉลี่ย  $\rho(\epsilon)$  ตลอดช่วงพลังงานที่มากกว่าหรือน้อยกว่า

การที่ความหนาแน่นระดับ  $\rho(\epsilon)$  แปรผันกับการผิดรูปเป็นผลให้ดูเหมือนกับการแก้ค่าของแบบจำลองหยดของเหลวเป็นฟังก์ชันของการผิดรูป ดังจะเห็นได้ดังในรูป 1.11 ซึ่งเป็นแผนภาพโครงร่างของระดับพลังงานตามแบบจำลองนิสต์สันสำหรับโปรตอนที่มีจำนวนเป็นเลขคี่และมีจำนวนเกิน  $Z = 82$  ขึ้นไป ที่การผิดรูปเท่ากับศูนย์ เลขกล (magic number) 82 และ 114 จะอยู่ในที่ความหนาแน่นระดับมีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ย ซึ่งสมมุติได้กับว่านิวคลีไออยู่กันอย่างยึดแน่นมาก หากการผิดรูปเพิ่มมากขึ้นเลขกลก็จะเปลี่ยนแปลงไป ที่แถว  $\delta \sim 0.3$  ( $\delta \approx 3\epsilon/2$ ) นิวคลีไอที่มี 100 โปรตอนจะกลายเป็นนิวคลีไอที่มีเลขกล ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของเลขกลตามการผิดรูปที่





รูป 1.11 การแปรผันตามการผิดรูปของความหนาแน่นระดับ ตามแบบจำลองนิลส์สัน สำหรับโปรตอนจำนวนที่ ที่มีจำนวนเกินกว่า  $Z = 82$  ขึ้นไป (จาก N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 150)

เป็นมาผลลัพธ์จากการคำนวณที่มีการแก้ค่าโครงสร้างชั้นนี้ จะทำให้ส่วนแบ่งแยกตัวซึ่งมีแนวโน้มว่าแต่ละส่วนจะต้องมีจำนวนนิวคลีออนเท่ากับเลขกลมีการแจกแจงเป็นแบบสองโหนดดังที่เห็นในรูป 1.9

ในการแบ่งแยกตัวของนิวเคลียส เมื่อนิวเคลียสเพิ่มการผิดรูปมากขึ้น นิวเคลียสจะมีรูปร่างคล้ายกับเป็นสองทรงกลมติดกันอยู่ ซึ่งโดยทั่วไปขนาดของทรงกลมทั้งสองไม่เท่ากัน จากการที่ทรงกลมทั้งสองเอียงศูนย์กลาง (มีระยะแยกระหว่างศูนย์กลาง) กันนี้ แบบจำลองนิลส์สัน

จึงสามารถนำมาใช้ได้ และสำหรับแต่ละระยะการแยกศูนย์กลาง (หรือการเยื้องศูนย์กลาง) การแก้ค่าเนื่องจากโครงสร้างชั้นจะถูกนำมาใช้เพื่อการคำนวณหาอัตราส่วนของมวลที่แตกต่างกันของส่วนแตกตัวทั้งสอง อันที่จริงนอกจากผลของโครงสร้างชั้นแล้ว ผลของการเข้าคู่ (pairing) ก็จะต้องแก้ค่าด้วย และมีแนวโน้มที่จะไปลดทอนขนาดของการแก้ค่าอีกด้วย เพราะว่าพลังงานยึดเหนี่ยวเนื่องจากการเข้าคู่จะเพิ่มขึ้นเมื่อ  $\rho(\epsilon)$  เพิ่มขึ้น แต่ที่นับว่าเป็นผลกระทบหลักจริงๆ ต่อรูปร่างของกำแพงการแบ่งแยกตัวจะมาจากการแก้ค่าโครงสร้างชั้นมากกว่า

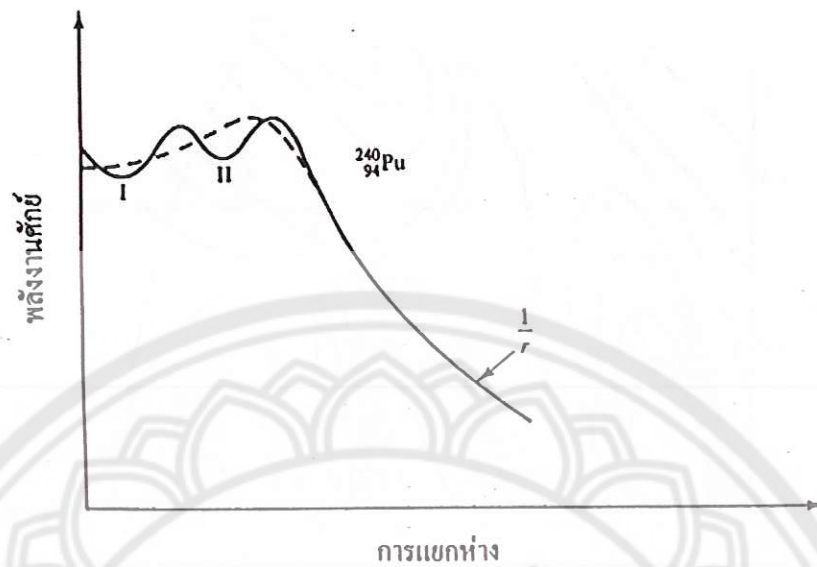
การเปลี่ยนแปลงของกำแพงการแบ่งแยกตัวแบบหยดของเหลว เมื่อได้แก้ค่าอันเนื่องมาโครงสร้างชั้นและการเข้าคู่แล้ว จะเป็นดังในรูป 1.12 ซึ่งเป็นกำแพงการแบ่งแยกตัวของ  $^{240}_{94}\text{Pu}$  โดยที่เห็นเป็นเส้นโค้งหนาที่บ่งเป็นกำแพงการแบ่งแยกตัวที่ได้รับการแก้ค่าแล้ว ส่วนที่เห็นเป็นเส้นประเป็นกำแพงการแบ่งแยกตัวแบบหยดของเหลวตอนที่ยังไม่ได้มีการแก้ค่า มีสิ่งน่าแปลกที่เห็นก็คือการปรากฏเป็นโนนกู่ (double hump) ขึ้นในกำแพงการแบ่งแยกตัวที่แก้ค่าแล้ว ซึ่งสะท้อนให้เห็นว่าเป็นการเปลี่ยนแปลงที่มีผลมาจากการแก้ค่าโครงสร้างชั้น เมื่อ  $\rho(\epsilon)$  แปรผันกับการผิดรูปหรือการแยก

จากการคำนวณกับ  $^{236}\text{U}$  (รูป 1.13) แสดงว่าการแบ่งแยกตัวจะเริ่มต้นด้วยการแบ่งแยกแบบสมมาตรเมื่อทะลุผ่านกำแพงแรก และถัดจากนั้นแนวโน้มก็จะกลายเป็นแบบอสมมาตร โดยอัตราส่วนมวลของส่วนแบ่งแยกตัวชอบที่จะไปเป็น  $\sim 1.4$  ซึ่งสอดคล้องกับผลการสังเกตการแบ่งแยกตัวของ  $^{252}\text{Cf}$  ที่แสดงในรูป 1.9

### 1.3.6 แถบการหมุนไอโซเมอร์การแบ่งแยกตัว (Fission Isomeric Rotational Band)

การปรากฏมีโนนกู่ขึ้นมาในเส้นโค้งศักย์การแบ่งแยกตัวที่แก้ค่าแล้ว ดังเส้นโค้งของ  $^{240}_{94}\text{Pu}$  ในรูป 1.12 หลุมที่สอง (ในรูปคือหลุม II) ที่เกิดจากศักย์แบบสองโนนกู่จะทำให้เกิดสถานะไอโซเมอร์ของการแบ่งแยกตัวขึ้นมาในหลุมนั้น ซึ่งถ้านิวเคลียส  $^{240}_{94}\text{Pu}$  ก่อรูปอยู่ในสถานะต่ำสุดของหลุม II นี้แล้ว การกระตุ้นของนิวเคลียสก็จะอยู่ที่ 2 - 3 MeV และการที่ชั่วชีวิตของการแบ่งแยกตัวผ่านทางกำแพงที่สองมีค่า  $10^{-9}$  s ก็รับกันกับส่วนสูงที่ลดทอนลงของกำแพงศักย์ นอกจากนี้การสลายตัวให้แกมมายังถูกห้ามอย่างแรงเพราะรูปร่างนิวเคลียสที่อยู่ในสถานะไอโซเมอร์ (ในหลุม II) จะแตกต่างไปจากรูปร่างในสถานะต่ำกว่า (ในหลุม I) ซึ่งผิดรูปน้อยกว่า

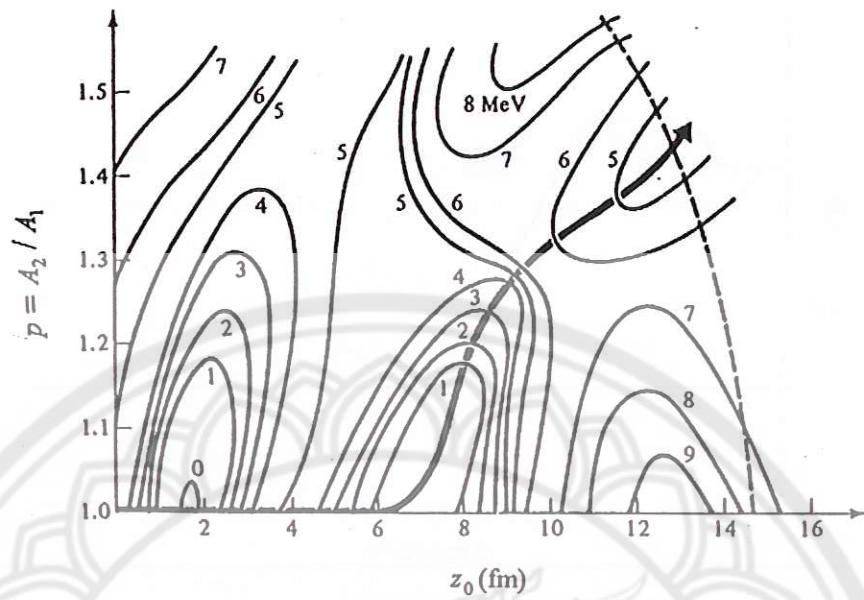




รูป 1.12 รูปร่างของกำแพงการแบ่งแยกตัวของ  $^{240}_{94}\text{Pu}$  ที่ทำนาย  
โดยแบบจำลองหยดของเหลว (เส้นประ) และทำนายโดยแบบจำลอง  
หยดของเหลวรวมกับการแก้โครงสร้างชั้นและการเข้าคู่ (เส้นทึบ)  
(คัดแปลงจาก N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*,  
Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 151)

เหมือนกับว่าสถานะพื้นอยู่ที่ก้นของหลุม I ไอโซเมอร์ชนิดนี้จะเรียกว่าไอโซเมอร์รูปร่าง (shape isomerism)

การทดลองที่สนับสนุนการตีความไอโซเมอร์การแบ่งแยกตัวดังกล่าว คือการทดลอง  
ของสเปคท์ (Specht) และคณะใน ค.ศ. 1972 โดยใช้ปฏิกิริยา  $^{238}_{92}\text{U}(\alpha, 2n)^{240}_{94}\text{Pu}$  ที่พลังงาน  
ตกกระทบของอนุภาคแอลฟาที่มีค่า 25 MeV เป็นตัวสร้างสมาชิกของแถบการหมุนขึ้นบนสถานะ  
ไอโซเมอร์การแบ่งแยกตัวของ  $^{240}_{94}\text{Pu}$  หลังจากนั้นสังเกตการย้ายแบบ E2 (การย้ายควอดรูโพล  
ทางไฟฟ้า) ที่เกิดขึ้นภายในแถบการหมุนนั้น การสังเกตการย้ายทำได้โดยวัดพลังงานการย้าย แต่  
เนื่องจากว่า  $^{240}_{94}\text{Pu}$  มี Z มาก และพลังงานการย้ายมีค่าต่ำ จึงมีอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาจาก  
วงโคจรวงในเป็นจำนวนมากออกมาเป็นภูมิหลังของการวัด เพื่อขจัดภูมิหลังดังกล่าว การวัด  
การย้ายจึงใช้วิธีวัดการบรรจบกันระหว่างอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาเมื่อนิวเคลียสมีการย้าย กับ  
ส่วนแบ่งแยกตัว ซึ่งผลการวัดก็จะได้สเปกตรัมของอิเล็กตรอนบรรจบ จากการแยกแยะสเปกตรัม  
ของอิเล็กตรอนบรรจบซึ่งเป็นพวกอิเล็กตรอนเปลี่ยนผันจะสมนัยได้กับการย้าย E2 ชนิด  
 $8^+ \rightarrow 6^+$ ,  $6^+ \rightarrow 4^+$  และ  $4^+ \rightarrow 2^+$  เกิดขึ้นในแถบพลังงานการหมุน (ส่วนการย้าย  $2^+ \rightarrow 0^+$  ไม่  
อาจจำแนกออกจากภูมิหลังโดยวิธีวัดการบรรจบ) ในตาราง 1.2 แสดงพลังงานการย้ายในแถบ



รูป 1.13 เส้นทางคอนทัวร์ (contour) ของพลังงานศักย์ และวิถีการแบ่งแยกตัว (fission path) ของ  $^{236}\text{U}$  พารามิเตอร์  $p = A_2 / A_1$  เป็นอัตราส่วนของมวลส่วนแบ่งแยกตัว และ  $z_0$  เป็นการแยกระหว่างส่วนแบ่งแยกตัว (จาก N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 152)

ตาราง 1.2 พลังงานการย้ายในแถบสถานะพื้น (หลุม I) กับในแถบไอโซเมอร์ (หลุม II)

| การย้าย                | พลังงานการย้าย (keV) |         |
|------------------------|----------------------|---------|
|                        | หลุม I               | หลุม II |
| $2^+ \rightarrow 0^+$  | 42.82                |         |
| $4^+ \rightarrow 2^+$  | 95.86                | 46.6    |
| $6^+ \rightarrow 4^+$  | 152.63               | 73.0    |
| $8^+ \rightarrow 6^+$  | 203.3                | 99.4    |
| $10^+ \rightarrow 8^+$ | 253.8                |         |



สถานะพื้น (ในหลุม I) และในแถบไอโซเมอร์ (ในหลุม II) โมเมนต์ความเฉื่อยของแถบไอโซเมอร์มากกว่าของแถบสถานะพื้น 2.1 เท่า ซึ่งรับกันกับที่นิวเคลียสผิดรูปในสถานะไอโซเมอร์มากกว่าในสถานะพื้น

### เอกสารอ้างอิง

1. A. P. Arya, *Elementary Modern Physics*, Addison-Wesley, Phillippines, 1970.
2. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
3. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
4. W.E. Burcham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
5. W. N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An Introduction to Nuclear Physics*. 2nd edit, Cambridge University, Cambridge, 2001.
6. A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
7. V. Devanathan, *Nuclear Physics*, Narosha Publishing House, New Delhi, 2006
8. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
9. R.D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, New York, 1955.
10. E.S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955.
11. E. M. Henley and A. Garcia, *Subatomic Physics*, 3rd edit, World Scientific, New Jersey 2007.
12. K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*, 2nd edit, Institute of Physics, Brista, 1999.
13. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.

## บทที่ 2

### แบบจำลองชั้น

### (SHELL MODEL)

แนวคิดของแบบจำลองนี้คือ นิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียสจะอยู่เป็นชั้น ๆ คล้ายกับชั้นของอิเล็กตรอนในอะตอม และมีตัวเลขครบชั้นเช่นเดียวกับอิเล็กตรอนในอะตอมด้วย ความคิดเริ่มต้นในเรื่องแบบจำลองชั้นของนิวเคลียสได้มาจากการพิจารณาตารางธาตุ ซึ่งพบว่าธาตุที่มีเลขอะตอม (atomic number) 2, 10, 18, 36 และ 54 ได้แก่ He, Ne, Ar, Kr และ Xe ตามลำดับ จะเสถียรภาพเป็นพิเศษ กล่าวคืออะตอมของมันรวมกับอะตอมของธาตุอื่นได้ยาก หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือเกิดปฏิกิริยาเคมีได้ยาก และถ้าจะทำให้อะตอมของมันแตกตัวเป็นไอออนก็ทำได้ยากอีกเช่นกัน จึงเรียกบรรดาธาตุเหล่านี้ว่าแก๊สเฉื่อย (inert gas) เลขอะตอมของแก๊สเฉื่อย 2, 10, 18, 36 และ 54 เหล่านี้เรียกว่าเลขกล (magic number) ของตารางธาตุ ซึ่งสัมพันธ์กับตัวเลขชั้นปิดของอิเล็กตรอนในอะตอม เมื่อตรวจสอบสมบัติเชิงสถิต (static property) และสมบัติเชิงพลวัต (dynamics property) ของนิวคลีไอแล้ว ปรากฏผลแน่ชัดว่าโครงสร้างของนิวเคลียสจะต้องเป็นชั้นคล้ายกับโครงสร้างของอะตอม ผู้ที่เสนอแบบจำลองชั้นเป็นครั้งแรกได้แก่ จี. กามาว (G. Gamow) และ ดับเบิลยู. เอลแซสเซอร์ (W. Elsassser) จากการสรุปหลักฐานพบว่าตัวเลข 2, 8, 20, 28, 50, 82, และ 126 เป็นตัวเลขชั้นปิดของโปรตอนหรือนิวตรอนภายในนิวเคลียส และเรียกได้ว่าเป็นตัวเลขกลของนิวเคลียส

#### ก. หลักฐานสำหรับโครงสร้างชั้น (Evidence for the Shell Structure)

(1) จำนวนของไอโซโทปเสถียร (Number of Stable Isotope) ธาตุที่มีเลขอะตอมอยู่ในชุดเลขกล จะมีจำนวนไอโซโทปเสถียรมากกว่าธาตุข้างเคียง ตัวอย่างเช่น  ${}_{20}\text{Ca}$  มี 6 ไอโซโทปเสถียร ขณะที่  ${}_{19}\text{K}$  มีเพียง 3 และ  ${}_{21}\text{Sc}$  มีเพียง 1 ไอโซโทปเสถียรเท่านั้น ในทำนองเดียวกัน  ${}_{50}\text{Sn}$  มี 10 ไอโซโทปเสถียร (มากที่สุดในการตารางธาตุ) ขณะที่  ${}_{49}\text{In}$  และ  ${}_{51}\text{Sb}$  มีเพียงธาตุละ 2 ไอโซโทปเสถียร, และ  ${}_{82}\text{Pb}$  มี 4 ไอโซโทปเสถียร ขณะที่  ${}_{81}\text{Tl}$  และ  ${}_{83}\text{Bi}$  มีเพียง 2 และ 1 ไอโซโทปเสถียร ตามลำดับ



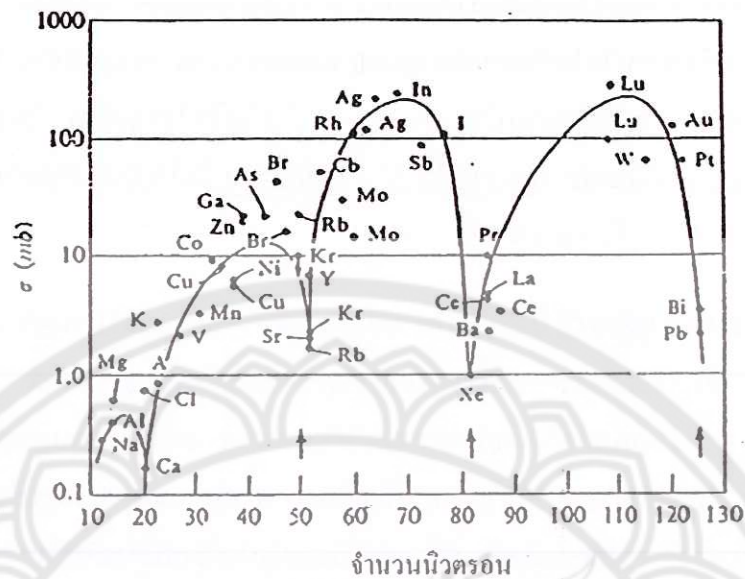
(2) จำนวนของไอโซโทนเสถียร (Number of Stable Isotone) ธาตุที่มีจำนวนนิวตรอนอยู่ในชุดเลขกล จะมีจำนวนไอโซโทนเสถียร (stable isotone) มากกว่าธาตุที่มีจำนวนนิวตรอนข้างเคียง ตัวอย่างเช่น ธาตุที่มีจำนวนนิวตรอน  $N = 20$  มี 5 ไอโซโทนเสถียร ในขณะที่ธาตุที่มี  $N = 19$  ไม่มีไอโซโทนเสถียรเลย และธาตุที่มี  $N = 21$  มีเพียง 1 ไอโซโทนเสถียรเท่านั้น พฤติกรรมเช่นนี้นำไปสู่การค้นพบเลขกลอื่น ๆ ด้วย

(3) ความสมบูรณ์ของนิวไคลด์ในไอโซโทปธรรมชาติ (Natural Isotopic Abundance of the Nuclides) เมื่อพิจารณาถึงความสมบูรณ์ของไอโซโทปที่มีอยู่ในธรรมชาติ ไอโซโทปที่มีจำนวนนิวตรอนและโปรตอนเท่ากับเลขใดเลขหนึ่งในชุดเลขกล จะมีความสมบูรณ์มากกว่าความสมบูรณ์โดยทั่วไป ตัวอย่างเช่น ไอโซโทปที่มีเลขมวล  $A$  เป็นเลขคู่ จะมีอยู่เพียง 3 ไอโซโทปเท่านั้นที่มีความสมบูรณ์อยู่มากกว่าร้อยละ 60 และทั้งสามไอโซโทปนี้ต่างก็มีจำนวนนิวตรอนอยู่ในชุดเลขกล ไอโซโทปเหล่านี้คือ  $^{88}_{38}\text{Sr}$  ( $N = 50$ ) มีความสมบูรณ์ร้อยละ 82.6,  $^{138}_{56}\text{Ba}$  ( $N = 82$ ) มีร้อยละ 71.7 และ  $^{140}_{58}\text{Ce}$  ( $N = 82$ ) มีร้อยละ 88.5 เมื่อพิจารณา  $^{208}_{82}\text{Pb}$  ( $Z = 82, N = 126$ ) ซึ่งมีเลขกลคู่ จะมีความสมบูรณ์มากกว่านิวคลีไอ คู่-คู่ อื่น ๆ โดยมีความสมบูรณ์ร้อยละ 52.3

(4) ผลผลิตการสลายตัวของอนุกรมกัมมันตรังสี (Decay Product of Radioactive Series) ผลผลิตสุดท้ายของอนุกรมทอเรียม (thorium series), อนุกรมยูเรเนียม (uranium series), และแอกทิเนียม (actinium series) คือ  $^{208}_{82}\text{Pb}$ ,  $^{206}_{82}\text{Pb}$ , และ  $^{207}_{82}\text{Pb}$  ตามลำดับ จะมีเลขอะตอม ( $Z = 82$ ) เป็นเลขกล โดยเฉพาะ  $^{208}_{82}\text{Pb}$  มีความสมบูรณ์มากที่สุด จะมีจำนวนโปรตอน ( $Z = 82$ ) และจำนวนนิวตรอน ( $N = 126$ ) เป็นเลขกลทั้งคู่ ส่วนผลผลิตสุดท้ายของอนุกรมเนปทูเนียม (neptunium series) คือ  $^{209}_{83}\text{Bi}$  นั้น มี  $N = 126$

(5) ภาคตัดขวางการจับนิวตรอน (Neutron Capture Cross Section) รูป 2.1 แสดงการลงจุดของภาคตัดขวางการจับนิวตรอนกับจำนวนนิวตรอน ซึ่งจากรูปจะเห็นว่านิวคลีไอดที่มีจำนวนนิวตรอนเท่ากับเลขกลพอดีจะมีภาคตัดขวางการจับนิวตรอนต่ำ แสดงว่าจำนวนนิวตรอนที่มีอยู่ของนิวคลีไอดมีจำนวนครบชั้นพอดี นิวคลีไอดจึงไม่ต้องการจับนิวตรอนอื่นเข้ามาไว้อีก โดยเฉพาะ  $^{40}_{20}\text{Ca}$  และ  $^{208}_{82}\text{Pb}$  ซึ่งเป็นไอโซโทปมีเลขกลคู่ (doubly magic number) ทั้งสองไอโซโทปนี้จะมีภาคตัดขวางการจับนิวตรอนต่ำมาก ส่วนนิวคลีไอดที่มีจำนวนนิวตรอนน้อยกว่าเลขกลอยู่หนึ่ง ภาคตัดขวางการจับนิวตรอนจะสูง แสดงว่านิวคลีไอดต้องการจับนิวตรอนเข้ามาเพิ่มอีก 1 ตัว เพื่อจะได้มีจำนวนครบชั้นหรือชั้นปิดพอดี

(6) พลังงานยึดเหนี่ยวของนิวตรอนหรือโปรตอนตัวสุดท้าย (Binding Energy of the

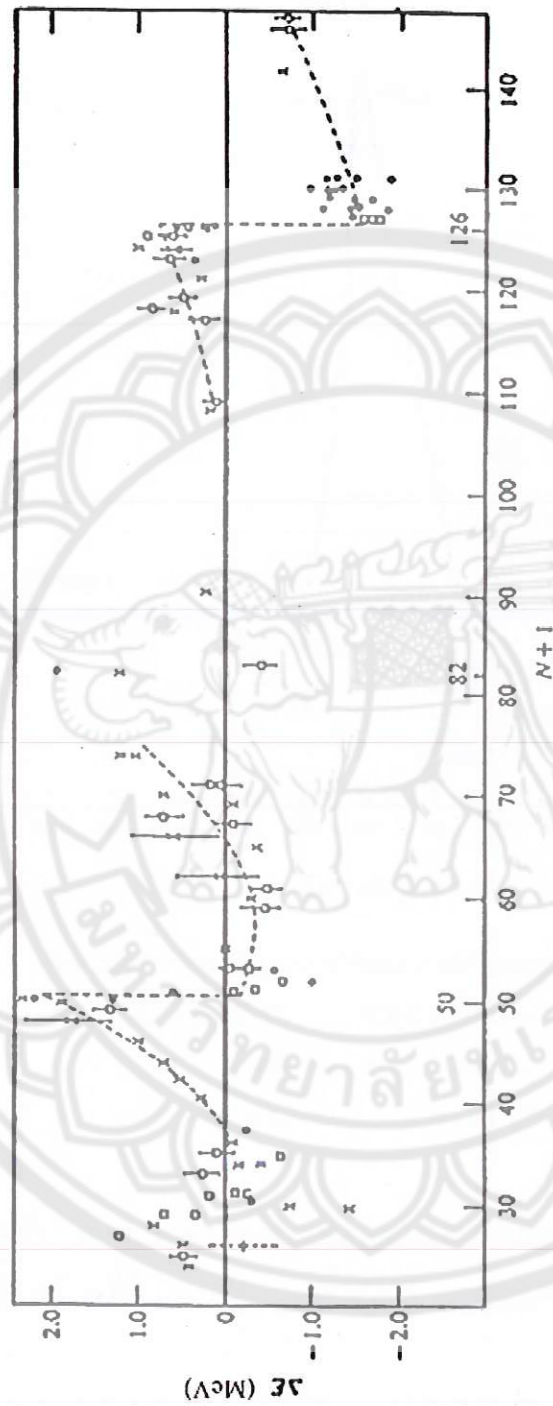


รูป 2.1 การลงจุดระหว่างภาคตัดขวางการจับนิวตรอนกับ  
จำนวนนิวตรอน (ดัดแปลงจาก A.P. Arya, *Fundamentals  
of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 357)

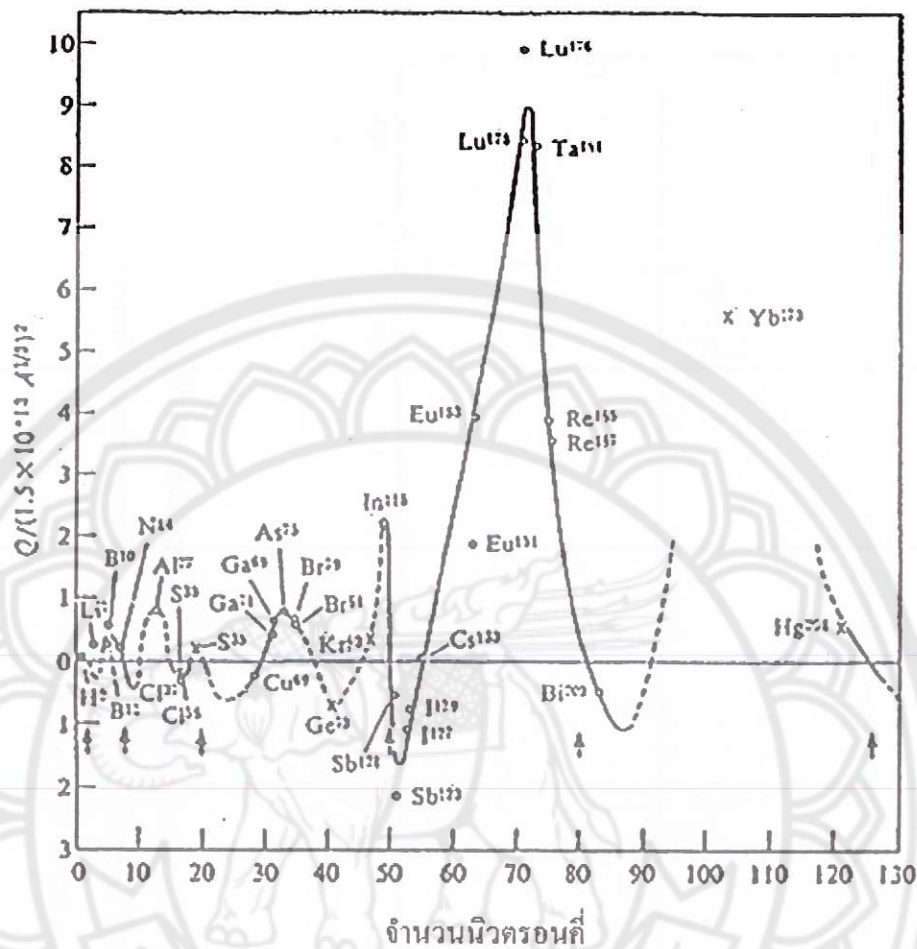
**Last Proton or Neutron)** ถ้าชั้นปิดอยู่ที่เลขกลพอดี ไอโซโทปที่มีจำนวนนิวตรอนหรือโปรตอนอยู่สุดในเลขกลจะต้องเสถียรมาก ซึ่งมีนัยว่าพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวตรอนหรือโปรตอนตัวสุดท้ายที่เพิ่มเข้ามาแล้วชั้นปิดพอดีจะต้องมีค่ามาก เมื่อตรวจสอบความจริงในเรื่องนี้จากรูป 2.2 ซึ่งลงจุดระหว่างพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวตรอนตัวสุดท้ายที่เพิ่มเข้ามาแล้วชั้นปิดพอดี กับจำนวนนิวตรอนบวกหนึ่ง ( $N + 1$ ) ก็จะเห็นว่าพลังงานยึดเหนี่ยวจะมียอดสูงที่เห็นได้อย่างชัดเจนเป็นจริงตามนั้น

(7) ธาตุที่คายนิวตรอนตามปรกติวิสัย (Spontaneous Neutron Emitters) ถ้าหากแบบจำลองนิวเคลียสเป็นแบบชั้น ธาตุที่มีจำนวนนิวตรอนเกินเลขกลไปหนึ่งตัว (หรือเกินชั้นปิดไปหนึ่งตัว) จะต้องมีความพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวตรอนตัวสุดท้ายต่ำมาก ซึ่งก็เป็นจริงตามนั้น เพราะเมื่อตรวจสอบจากธาตุที่มีการคายนิวตรอนตามปรกติวิสัยที่รู้จักกันดีสี่ธาตุ ได้แก่  $^{17}\text{O}$ ,  $^{87}\text{Kr}$ ,  $^{137}\text{Xe}$ , และ  $^{89}\text{Kr}$  จะเห็นได้ว่าในบรรดาธาตุที่มีพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวตรอนตัวสุดท้ายต่ำมากเหล่านี้ ธาตุที่มีจำนวนนิวตรอนเกินเลขกล (หรืออยู่นอกชั้นปิด) ไปหนึ่งตัวมีถึงสามธาตุ (คือสามธาตุแรก) ขณะที่มียูเพียงธาตุเดียวเท่านั้นที่มีจำนวนนิวตรอนเกินเลขกลไปสามตัว (คือ  $^{89}\text{Kr}$ )





รูป 2.2 การทดลองระหว่างผลต่างของพลังงานยึดเหนี่ยวกับจำนวนนิวตรอน ที่เป็น  
หลักฐานแสดงว่านิวเคลียสมีโครงสร้างชั้น (จาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear  
Physics*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 358)



รูป 2.3 การลงจุดระหว่างควอดรูโพลโมเมนต์กับจำนวนนิวตรอนที่เป็นเลขคี่ เครื่องหมาย x และ o แสดงถึงนิวคลีโอไอด์ที่มีจำนวนนิวตรอนและโปรตอนเป็นเลขคี่ตามลำดับ ลูกศรในภาพจะสมนัยกับเลขกล (ดัดแปลงจาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 360)

(8) ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้า (Electric Quadrupole Moments) เป็นที่ทราบกันดีว่าถ้านิวเคลียสมีรูปร่างแบบสมมาตรทรงกลม ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าจะมีค่าเป็นศูนย์ แต่ถ้ารูปร่างของมันเบี่ยงไปจากแบบสมมาตรทรงกลม ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าก็จะมีค่ามากขึ้น (ไม่คิดเครื่องหมาย) อันนี้มีความหมายในพจน์ของโครงสร้างชั้นของนิวเคลียส คือถ้านิวเคลียสมีจำนวนนิวคลีโอออนครบชั้นตามเลขกล การแจกแจงประจุจะเป็นแบบสมมาตรทรงกลม และควอดรูโพลโมเมนต์จะมีค่าเป็นศูนย์หรือเกือบเป็นศูนย์ (มีค่าน้อยมาก) ถ้านิวเคลียสมีจำนวนนิวคลีโอออนไม่ครบชั้น การแจกแจงประจุจะเบี่ยงไปจากแบบสมมาตรทรงกลม ค่าควอดรูโพลโมเมนต์ก็จะมีค่ามากขึ้น ซึ่งจากการพิจารณาข้อเท็จจริงในรูป 2.3 ที่แสดงการลงจุดระหว่าง



ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้ากับจำนวนนิวคลีออนที่ ปรากฏว่าเป็นจริงตามการทำนาย กล่าวคือ ไอโซโทปที่มีจำนวนนิวคลีออนครบชั้นตามเลขกล จะมีค่าควอดรูโพลโมเมนต์เป็นศูนย์ หรือไม่ก็เกือบเป็นศูนย์ ส่วนไอโซโทปที่มีจำนวนนิวคลีออนอยู่ระหว่างเลขครบชั้น (เลขกล) ตัวหนึ่งกับอีกตัวถัดไปจะมีค่าควอดรูโพลโมเมนต์มาก

หลักฐานทั้งหมดที่กล่าวมานี้เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า นิวเคลียสมีโครงสร้างแบบชั้น โดยมีตัวเลขชั้นปิดของนิวตรอนและโปรตอน (พิจารณาแยกกัน) เป็นไปตามเลขกล โดยเลขกลของนิวตรอนคือ 2, 8, 20, 28, 50, 82, และ 126 และของโปรตอนคือ 2, 8, 20, 28, 50, และ 82

#### ข. แบบจำลองชั้นของนิวเคลียส (Nuclear Shell Model)

เลขกลของนิวเคลียสได้มาจากการถอดสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ของอนุภาค (ซึ่งก็คือ นิวคลีออน) ที่เคลื่อนที่ภายใต้สนามของแรงที่สมมาตรทรงกลม โดยสมมุติให้ศักย์ของแรงเป็น ศักย์ศูนย์กลาง,  $V(r)$ , แต่รูปแบบของศักย์นั้นกำหนดได้ยาก ศักย์ที่นำมาใช้ในการถอดสมการคลื่นจึงเป็นศักย์ที่ได้มาจากการเดา (ไม่เหมือนกับศักย์ลูอมบ์ที่นำมาใช้ในการถอดสมการคลื่นของอะตอมซึ่งเป็นศักย์ที่ทราบรูปแบบแน่นอน)

การคำนวณในแบบจำลองชั้นตั้งอยู่บนข้อสมมุติสองข้อคือ ข้อแรก จะสมมุติให้นิวคลีออนแต่ละนิวคลีออนเคลื่อนที่อย่างอิสระภายใต้ศักย์ศูนย์กลางที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของระบบนิวคลีออน โดยแต่ละนิวคลีออนได้รับอิทธิพลของศักย์เท่า ๆ กัน รวมทั้งให้นิวคลีออนเป็นอิสระ ไม่เกี่ยวข้องหรือขึ้นกับนิวคลีออนตัวอื่น ทั้ง ๆ ที่ตามความจริงแล้วระหว่างนิวคลีออนจะมีแรงคู่ออย่างแรงอยู่ในรูปของพลังงานยึดเหนี่ยว ดังมีรายละเอียดอยู่ในเรื่องสูตรการทดลองของพลังงานยึดเหนี่ยว หรือสูตรไวส์แซกเกอร์ เราจะเรียกชื่อแบบจำลองชั้นที่ตั้งอยู่บนข้อสมมุติข้อแรกนี้ว่า แบบจำลองอนุภาคเชิงเดี่ยว (single particle model) ข้อสมมุติข้อที่สอง คือ เรากำหนดให้มีสถานะกำหนดแน่ (definite state) ของนิวคลีออนเดี่ยว (single nucleon) และการเติมเต็มขึ้นมาของนิวคลีออนในแต่ละระดับ (สถานะ) ต้องสอดคล้องกับหลักการกีดกันของเพาลี

ฟังก์ชันคลื่นรวมซึ่งเป็นฟังก์ชันคลื่นของระบบนิวคลีออน (หรือของนิวเคลียส) จะเป็นผลคูณของฟังก์ชันคลื่นของแต่ละนิวคลีออน คือ

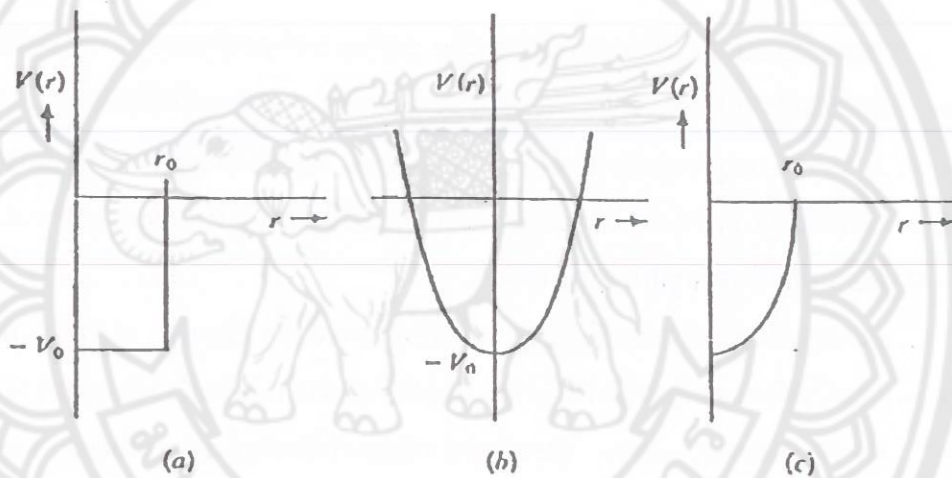
$$\Psi = \phi(1)\phi(2)\phi(3)\dots\phi(n) \quad (2.1)$$

เมื่อ  $\Psi$  เป็นฟังก์ชันคลื่นรวม และ  $\phi$  เป็นฟังก์ชันคลื่นของแต่ละนิวคลีออน

เพราะฉะนั้นสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ที่เขียนขึ้นตามข้อสมมุติข้างต้น ของนิวคลีออนที่มีมวล  $M$  และโมเมนตัมเชิงมุม  $l\hbar$  เคลื่อนที่ภายใต้ศักย์  $V(r)$  จะเขียนได้เป็น

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{2M}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2Mr^2} \right] (rR) = 0 \quad (2.2)$$

เมื่อฟังก์ชันคลื่นรัศมี,  $R$ , และค่าเฉพาะพลังงาน (energy eigenvalue),  $E$ , เป็นฟังก์ชันของทั้งเลขควอนตัมรวม (total quantum number),  $n$ , และเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum quantum number),  $l$ , โดยชุดเลขควอนตัมที่เกยไข้อยู่ในเรื่องอะตอมจะถูกนำมาใช้ในแบบจำลองของนิวเคลียสด้วย ชุดเลขควอนตัมนี้ได้แก่  $n, l, j, m$



รูป 2.4 การลจจุของ (a) ศักย์หลุมสี่เหลี่ยม (b) ศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ และ (c) ศักย์ผลรวมของศักย์หลุมสี่เหลี่ยมกับศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ แล้ว

(จาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 361)

ในการถอดสมการคลื่นข้างบนนี้จำเป็นต้องทราบรูปแบบของฟังก์ชันศักย์  $V(r)$  รูปแบบเชิงรัศมีของศักย์นิวเคลียร์นี้อาจหาได้จากทดลองการกระเจิง แต่การถอดสมการจะยากมาก ดังนั้นศักย์ที่นำมาใช้ในการคำนวณเป็นศักย์ศูนย์กลาง,  $V(r)$ , ที่มีรูปร่างแบบง่าย ๆ คือศักย์หลุมสี่เหลี่ยม และศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ (harmonic-oscillator potential) ที่สอดคล้องกับสมบัติของแรงนิวเคลียร์ที่ว่าเป็นแรงพิสัยสั้น เพราะศักย์จะเป็นศูนย์ที่ขอบของนิวเคลียสและสอดคล้องกับสมบัติของแรงนิวเคลียร์ที่ทำให้ค่าพลังงานยึดเหนี่ยวต่อนิวคลีออนมีค่าคงตัว เพราะศักย์ลึก แรงกระทำต่อนิวคลีออนจึงมีค่ามากจนกระทั่งแรงยึดต่อนิวคลีออนมีค่าเหมือนกันหมด รูปแบบของ



ฟังก์ชันศักย์หลุมสี่เหลี่ยมและศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ แสดงในรูป 2.4

(1) ศักย์หลุมสี่เหลี่ยม เงื่อนไขของศักย์หลุมสี่เหลี่ยมกำหนดเป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 & \text{สำหรับ } r < r_0 \\ &= 0 & \text{สำหรับ } r > r_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

แต่เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ จะสมมติให้ขอบหลุมศักย์มีศักย์เป็นอนันต์ ดังนั้นจึงเขียนเงื่อนไขเสียใหม่เป็น

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 & \text{สำหรับ } r < r_0 \\ &= \infty & \text{สำหรับ } r > r_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

เมื่อใช้เงื่อนไขในสมการ (2.4) กับสมการคลื่น (2.2) แล้วถอดสมการหาผลเฉลย ผลเฉลยของสมการคลื่นที่ได้จะให้ระดับพลังงานเรียงเป็นลำดับนับจากกันหลุมศักย์ขึ้นมา ดังต่อไปนี้

$$1s \ 1p \ 1d \ 2s \ 1f \ 2p \ 1g \ 2d \ 1h \ 3s \ 2f \ 1i \ 3p \ \dots$$

เมื่อ  $s, p, d, f, g, h, \dots$  เป็นสัญลักษณ์ในทางสเปกตรัมที่ใช้เขียนแทนสถานะ  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  ตามลำดับ แต่เนื่องจากว่าจำนวนโปรตอนหรือนิวตรอนในแต่ละสถานะ  $l$  มีได้จำนวน  $2(2l+1)$  ตัว ชั้นปิดจึงอยู่ที่เลข 2, 8, 18, 20, 34, 40, 58 ซึ่งไม่สมนัยกับเลขกลที่กล่าวไว้ในตอนแรก

(2) ศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ เงื่อนไขของศักย์นี้กำหนดให้เป็น

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}Kr^2 \quad (2.5)$$

รูปแบบของศักย์จะเป็นแบบพาราโบลา (parabola) ดังในรูป 2.5 และเมื่อใช้ศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์นี้กับสมการคลื่น (2.2) จะได้ค่าเฉพาะพลังงานที่มีค่าไม่ต่อเนื่อง และเป็นแบบเต็มหน่วยเรียงขึ้นมานับจากกันหลุม ค่าเฉพาะพลังงานที่ได้จะเป็น

$$E = \left( n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega$$

หรือ

$$E = \left( n_0 + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega \quad (2.6)$$

เมื่อ  $n_1, n_2, n_3$  เป็นจำนวนเต็ม และ  $n_0 (= n_1 + n_2 + n_3 \geq 0)$  เป็นจำนวนบัพจำกัด (finite node) ทั้งหมดในฟังก์ชันคลื่น, ถ้า  $n_0$  เป็นเลขคู่  $l = n_0, n_0 - 2, \dots, 0$  ถ้า  $n_0$  เป็นเลขคี่  $l = n_0, n_0 - 2, \dots, 1$  สภาพซ้อนสถานะ (degeneracy) ของระดับ  $n_0$  ถูกกำหนดให้โดย  $[(n_0 + 1)(n_0 + 2)]$  หรือ  $2(2l + 1)$ , จากทั้งหมดนี้นำไปสู่แผนภาพระดับพลังงานในรูป 2.5b ซึ่งมีการเรียงระดับดังต่อไปนี้

1s 1p 1d 2s 1f 2p ...

ซึ่งได้ตัวเลขชั้นปีอยู่ที่ 2, 8, 20, 40, 70 และ 112 ซึ่งไม่ตรงกันกับเลขกลของนิวเคลียสเสถียรทั้งหมด โดยมีสามลำดับแรกคือ 2, 8, 20 นั้นตรง แต่อีกสามลำดับหลังคือ 40, 70 และ 112 นั้นไม่ตรง

เมื่อใช้ศักย์ผลรวมของศักย์หลุมสี่เหลี่ยมกับศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ ที่มีรูปแบบดังในรูป 2.4c ซึ่งมีเงื่อนไข คือ

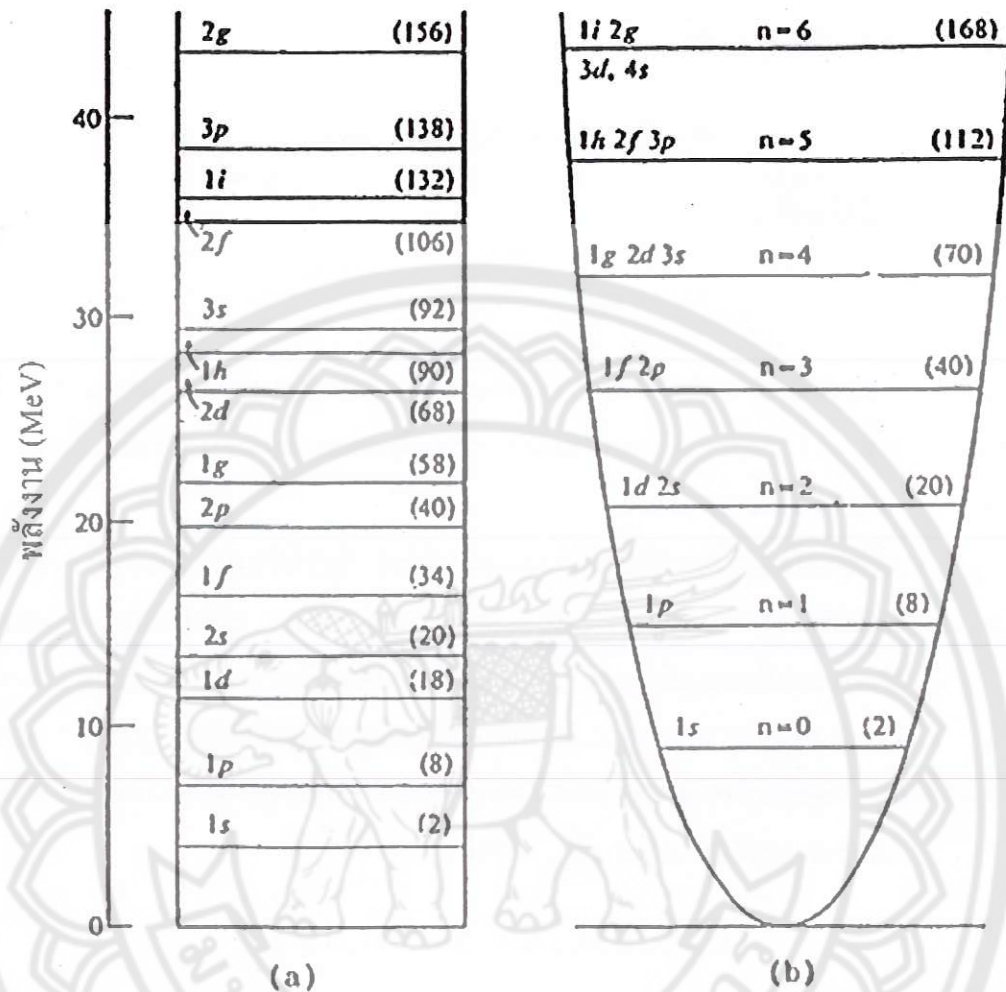
$$V(r) = \begin{cases} -V_0(1 - r^2/r_0^2), & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ผลเฉลยของสมการคลื่นจะให้ตัวเลขชั้นปีตรงตามเลขกลทั้งหมด ยกเว้น 28 ทั้งนี้เพราะศักย์ผลรวมนี้คล้ายคลึงกับศักย์จริง ๆ ของนิวเคลียสมากกว่าเพื่อน

#### ก. แบบจำลองการคู่ควบ สปิน-ออร์บิต (The Spin Orbit-Coupling Model)

เมเยอร์ (M. Major) และกลุ่มของแฮกเซล (O. Haxel), เจนเสน (J. Jensen), และซูเอส (H. Suess) ต่างก็ได้เสนอแนะอย่างอิสระแต่สอดคล้องกันว่า ในแต่ละพลังงานที่หาได้ในแบบจำลองอนุภาคเชิงเดี่ยวที่กล่าวมาในหัวข้อ ข. จะแยกออกเป็นระดับย่อยได้สองระดับอันเนื่องมาจากอันตรกิริยาระหว่างโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจรกับโมเมนตัมเชิงมุมสปินของนิวคลีออน ระดับย่อยสองระดับนี้คือระดับพลังงานล่าง (lower energy) และระดับพลังงานบน (higher energy) นิวคลีออนในระดับพลังงานล่างจะมีโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจรขนานกับโมเมนตัมเชิงมุมสปิน (นั่นคือ  $j = l + \frac{1}{2}$ ) เมื่อ  $j$  เป็นเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมรวม,  $l$  เป็นเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจร และ  $1/2$  เป็นเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมสปิน) ส่วนนิวคลีออนในระดับพลังงานบนจะมีโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจรขนานสวนกับโมเมนตัมเชิงมุมสปิน (นั่นคือ  $j = l - \frac{1}{2}$ ) อันตรกิริยาระหว่างโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจรกับโมเมนตัมเชิงมุมสปินจะเรียกง่าย ๆ ว่าอันตรกิริยาสปิน-ออร์บิต





รูป 2.5 ระดับพลังงานของนิวคลีอัส (a) ในศักย์หลุมสี่เหลี่ยมที่มีขอบสูงอนันต์ (b) ในศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ (คัดแปลงจาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 361)

(spin-orbit interaction) ผลลัพธ์ของอันตรกิริยานี้ก่อให้เกิดส่วนของแรงที่เป็นแบบไม่คู่สมศูนย์กลาง ศักย์  $V(r)$  จะต้องเป็นสัดส่วนกับอันตรกิริยานี้ด้วย คือเป็นสัดส่วนกับ  $S \cdot L$  เมื่อ  $S$  เป็นเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมสปิน และ  $L$  เป็นเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมวงโคจร ถ้า  $S \cdot L$  มีค่าเป็นบวกพลังงานของนิวคลีออนจะลดลง ถ้า  $S \cdot L$  มีค่าเป็นลบพลังงานของนิวคลีออนจะเพิ่มขึ้น จึงมีนัยสรุปได้ว่าสถานะ  $j = l + \frac{1}{2}$  มีพลังงานน้อยกว่า และวางอยู่ต่ำกว่าสถานะ  $j = l - \frac{1}{2}$  ซึ่งกลับกันกับกรณีของอิเล็กตรอนในอะตอม

เพราะฉะนั้นเมื่อใช้ศักย์ในรูปแบบ  $V(r)S \cdot L$  โดยที่  $V(r)$  เป็นศักย์ผลรวมของศักย์

หลุมที่เชื่อมกับศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ตามสมการ (2.7) ระดับพลังงานที่ได้ออกมาจะมีการเรียงลำดับนับจากกันหลุมดังนี้

$$1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 1p_{5/2}, 1d_{3/2}, 2s_{1/2}, \dots$$

และตัวเลขชั้นปิดที่ได้จะเป็น

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

ซึ่งสอดคล้องกับเลขกลของนิวเคลียสทั้งหมด ระดับพลังงานแสดงในรูป 2.6 เลขควอนตัมที่ใช้ในแบบจำลองนี้คือ  $n, l, j$  และ  $m_j$  ความสามารถสูงสุดของแต่ละระดับพลังงานจะรับจำนวนโปรตอนหรือนิวตรอนได้คือ  $2j+1$  ตัว

อันตรกิริยาสปิน-ออร์บิตเป็นผลมาจากแรงนิวเคลียร์ ไม่ใช่เป็นผลทางแม่เหล็กไฟฟ้า ความแรงของอันตรกิริยาจึงแรงกว่าอันตรกิริยาทางแม่เหล็กมาก แต่ความจริงยังมีผลของอันตรกิริยาทางดูลอมบ์ระหว่างโปรตอนเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ซึ่งทำให้ระดับพลังงานของโปรตอนเลื่อนแตกต่างออกไปจากระดับพลังงานของนิวตรอนเล็กน้อยที่เลขควอนตัมเดียวกัน ในรูป 2.7 แสดงระดับพลังงานที่นำผลดูลอมบ์ (Coulomb effect) และผลการเข้าคู่ (pairing effect) มาเกี่ยวข้องด้วย ซึ่งระดับพลังงานที่เลขควอนตัมน้อย ๆ จะเรียงลำดับเป็น

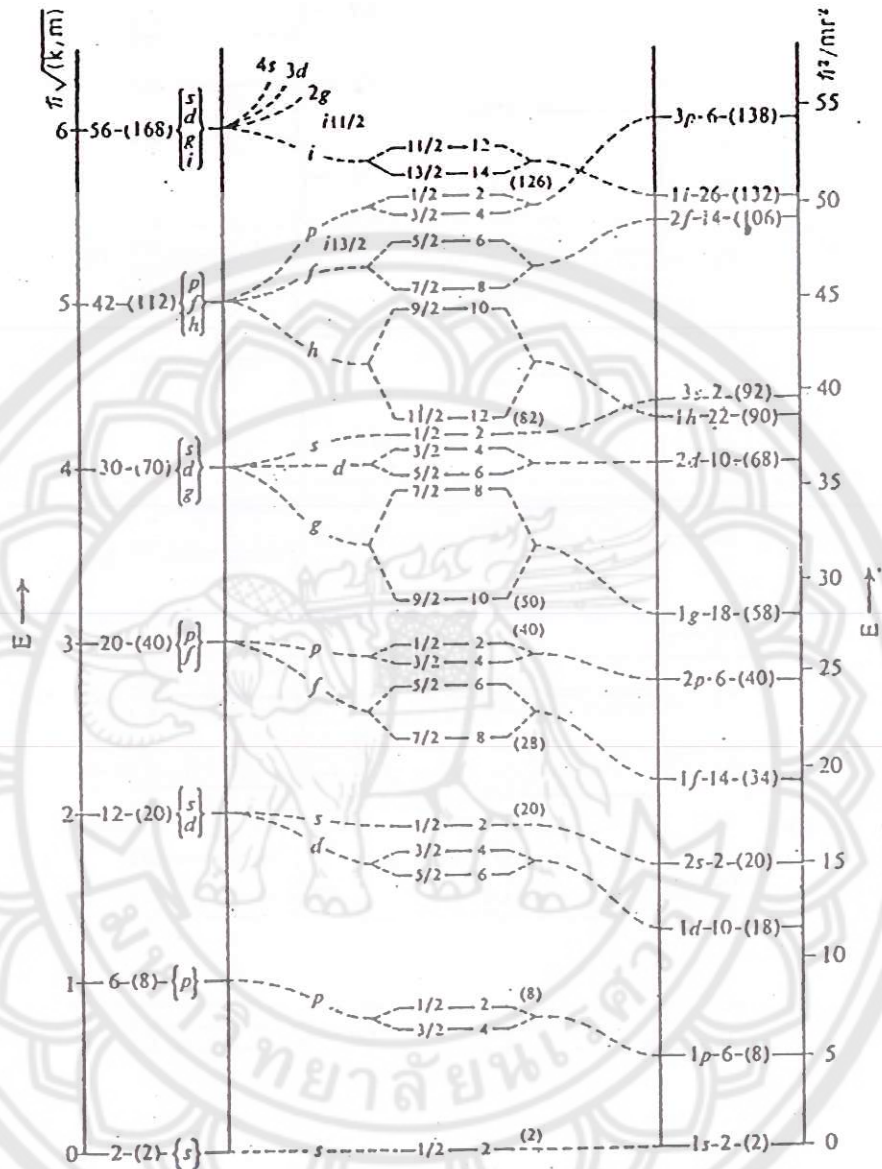
$$1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}, 1f_{7/2}, \dots$$

### ง. การประยุกต์ (Applications)

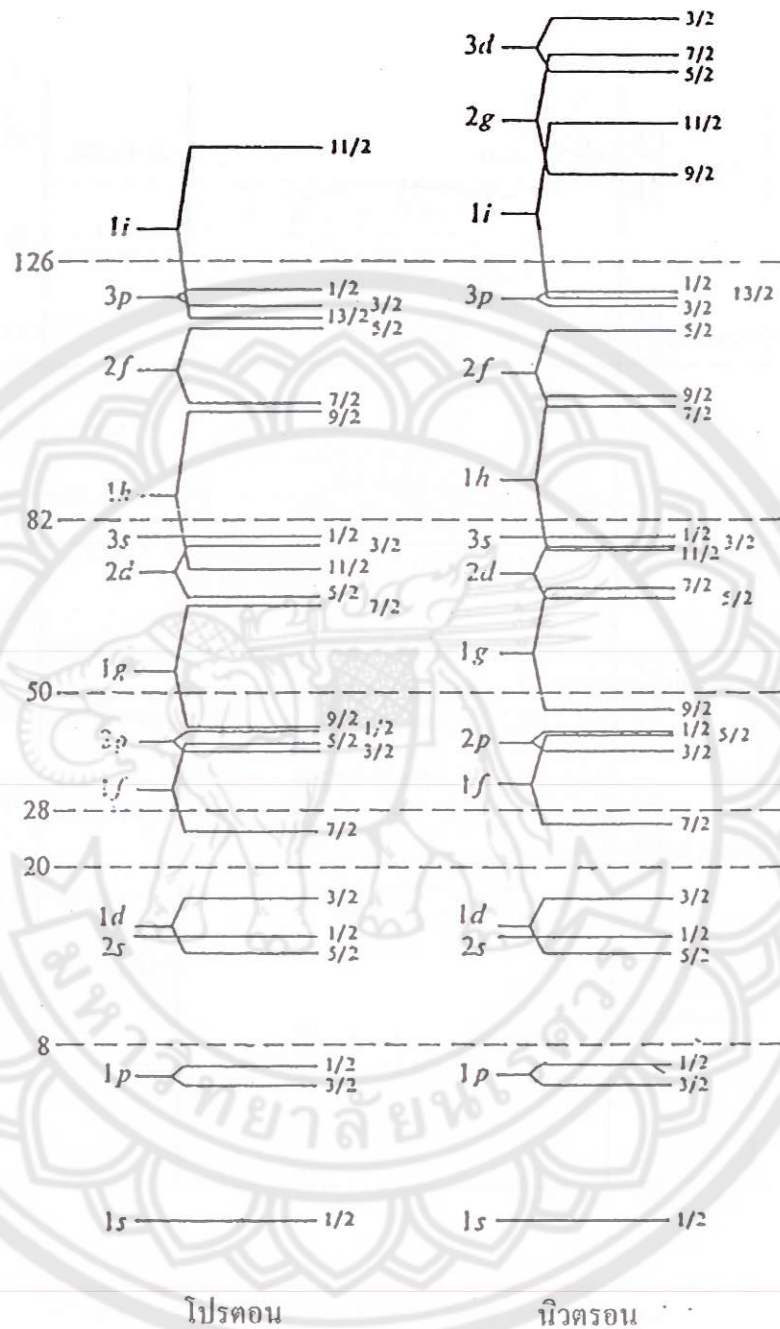
แบบจำลองชั้นของนิวเคลียสดำรงอยู่ได้เพราะสามารถทำนายสมบัติของนิวเคลียสได้สอดคล้องกับผลการทดลองดีมาก ดังจะได้กล่าวเป็นข้อ ๆ ต่อไปนี้ หนึ่งเวลาใช้แบบจำลองชั้นมาทำนายสมบัติของนิวเคลียสให้สมมุติว่านิวคลีออนมีอยู่เต็มในทุกะดับพลังงานนับตั้งแต่ระดับต่ำสุดขึ้นมา เว้นแต่ในระดับสุดท้ายซึ่งนิวคลีออนอาจเหลือมีจำนวนเป็นเศษ ทำให้ระดับสุดท้ายมีอยู่ไม่เต็มระดับ

(1) สปินและพริติของนิวเคลียส (Nuclear Spins and Parities) ในการทำนายสปินและพริติของนิวคลีไอที่อยู่ในสถานะพื้นโดยใช้แบบจำลองชั้น ถ้าเราพิจารณาตามนี้คือ (i) ในระดับพลังงานที่มีนิวคลีออนอยู่เต็ม (ชั้นหรือชั้นย่อย) ผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจรกับโมเมนตัมเชิงมุมสปินของทุกนิวคลีออน จะได้ผลลัพธ์เป็น โมเมนตัมเชิงมุมรวมที่มีค่าเท่ากับ





รูป 2.6 ลำดับของระดับพลังงานของนิวคลีออนตามแบบจำลองชั้น  
 ขวามือเป็นระดับพลังงานเนื่องจากศักย์หลุมสี่เหลี่ยม ซ้ายมือเป็นระดับ  
 พลังงานเนื่องจากศักย์ฮาร์โมนิก-ออสซิลเลเตอร์ ตรงกลางเป็นระดับ  
 พลังงานที่ได้จากการใช้ศักย์รวมทั้งสองแบบและนำผลของการก่อกวน  
 สปิน-ออร์บิตมาเกี่ยวข้องด้วย (จาก A.P. Arya, *Fundamentals of  
 Nuclear Physics.*, Boston : Allyn and Bacon, 1968, p. 364)



รูป 2.7 พลังงานของนิวตรอนและโปรตอนตามแบบจำลองชั้น  
 ระดับพลังงานของโปรตอนได้ถูกแก้ไขผลทางกลูออนแล้ว (คัดแปลงจาก  
 A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon,  
 1968, p. 366)



ศูนย์ (ii) ในระดับพลังงานที่มีนิวคลีออนอยู่ไม่เต็ม นิวคลีออนจะเข้าคู่กัน (คู่โปรตอน-โปรตอน หรือ นิวตรอน-นิวตรอน แต่จะไม่ใช่คู่ โปรตอน-นิวตรอน) ข้อสมมุติทั้งสองนี้จะทำให้ได้กฎการคู่ควบ (coupling rule) ที่ใช้ทำนายสปินและพริตซ์ขึ้นมามีดังต่อไปนี้:

### กฎการคู่ควบ (Coupling Rule)

กฎข้อที่ 1 ในสถานะพื้นของนิวคลีไอ คู่-คู่ (even-even nuclei) จะมีโมเมนตัมเชิงมุมรวม (หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าสปินของนิวเคลียส) เป็นศูนย์ และมีพริตซ์คู่ (even parity) เพราะ

$$\sum J_N = 0, \text{ และ } \sum J_P = 0$$

เมื่อ  $J_N$  และ  $J_P$  เป็น โมเมนตัมเชิงมุมรวมของนิวตรอนและโปรตอนตามลำดับ

### กฎข้อที่ 2

(2.1) ในนิวคลีไอที่มีจำนวนโปรตอนเป็นเลขคู่ และมีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคู่ หรือนิวคลีไอ คู่-คู่ (odd-even nuclei) จะมี

$$\sum J_N = 0, \text{ และ } \sum J_P \neq 0$$

ในกรณีเช่นนี้การบอกโมเมนตัมเชิงมุมรวม (สปิน) และพริตซ์ของสถานะนิวเคลียสจะบอกจากโมเมนตัมเชิงมุมรวม,  $j$ , และพริตซ์  $\pi$ , ของสถานะที่โปรตอนคู่ตัวสุดท้ายอยู่

(2.2) ในนิวคลีไอที่มีจำนวนโปรตอนเป็นเลขคู่ และมีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคี่ หรือนิวคลีไอ คู่-คี่ (even-odd nuclei) จะมี

$$\sum J_N \neq 0, \text{ และ } \sum J_P = 0$$

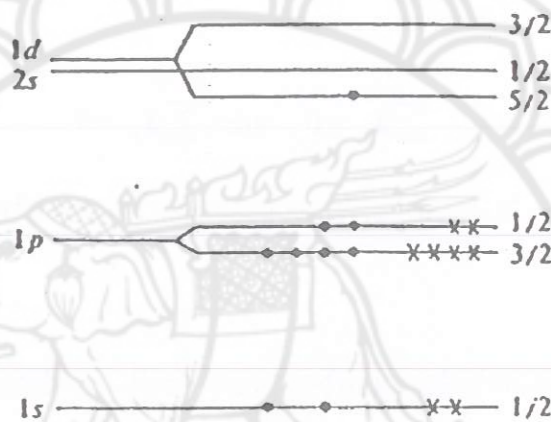
ในกรณีเช่นนี้การบอกโมเมนตัมเชิงมุมรวม (สปิน) และพริตซ์ของสถานะนิวเคลียสจะบอกได้จากโมเมนตัมเชิงมุมรวม,  $j$ , และพริตซ์,  $\pi$ , ของสถานะที่นิวตรอนคู่ตัวสุดท้ายอยู่

(2.3) สำหรับในนิวเคลียสที่มีจำนวนนิวตรอนและโปรตอนเป็นเลขคี่ทั้งคู่ หรือคือ

นิวคลีไอ คี่-คี่ (odd-odd nuclei) จะมี

$$\sum J_N \neq 0, \text{ และ } \sum J_P \neq 0$$

ในกรณีเช่นนี้โมเมนตัมเชิงมุมรวม (สปิน) ของสถานะนิวเคลียสจะมีค่าไม่แน่นอน โดยจะมีค่าอยู่ระหว่าง  $|j_P - j_N|$  ถึง  $|j_P + j_N|$  เมื่อ  $j_N$  และ  $j_P$  เป็นโมเมนตัมเชิงมุมรวม,  $j$ , ของสถานะที่นิวตรอนที่ตัวสุดท้ายและโปรตอนตัวสุดท้ายอยู่ ตามลำดับ



รูป 2.8 การเรียงระดับพลังงานของ  $^{17}_8\text{O}$  ที่มีนิวตรอนตัวสุดท้าย อยู่ที่สถานะ  $1d_{5/2}$  เครื่องหมาย x แสดงว่าเป็นโปรตอน ส่วน เครื่องหมาย o แสดงว่าเป็นนิวตรอน (จาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 368)

ตัวอย่างเช่น การทำนายโมเมนตัมเชิงมุมรวมหรือสปินของนิวเคลียส  $^{17}_8\text{O}$  ซึ่งมีจำนวนโปรตอนเป็นเลขคู่คือ  $Z=8$  และมีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคี่คือ  $N=9$  นิวตรอนตัวสุดท้ายคือตัวที่ 9 อยู่ที่สถานะ  $1d_{5/2}$  ที่มี  $j=5/2$  ดังในรูป 2.8 ดังนั้นจากกฎการคู่ควบข้อ 2.2 จะบอกได้ว่าโมเมนตัมเชิงมุมรวมหรือสปินของนิวเคลียส  $^{17}_8\text{O}$  คือ  $5/2$  อีกตัวอย่างหนึ่ง คือการทำนายโมเมนตัมเชิงมุมรวมหรือสปินของนิวเคลียส  $^{17}_9\text{F}$  ซึ่งมีจำนวนโปรตอนเป็นเลขคี่คือ  $Z=9$  และมีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคี่คือ  $N=8$  โปรตอนตัวสุดท้ายอยู่ที่สถานะ  $1d_{5/2}$  ที่มี  $j=5/2$  ดังนั้นจากกฎการคู่ควบข้อ 2.1 จะบอกได้ว่าโมเมนตัมเชิงมุมรวมหรือสปินของ  $^{17}_9\text{F}$  คือ  $5/2$  (อนึ่ง: จะเห็นว่าการบอกโมเมนตัมเชิงมุมรวมหรือสปินของนิวเคลียสนิยมบอกเป็นเลขควอนตัม เช่นเลข



5/2 นี้ ความจริงคือเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมรวมหรือเลขควอนตัมสปินนั่นเอง)

ส่วนการทำนายเพริติของนิวเคลียสให้ดูจากเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจร  $l$  ของระดับพลังงานหรือสถานะที่นิวคลีออนที่ตัวสุดท้าย (โปรตอนหรือนิวตรอนที่ตัวสุดท้าย) อยู่ ถ้า  $l$  เป็นเลขคี่ เพริติของนิวเคลียสจะเป็นเพริติคี่ (odd parity) หรือเพริติลบ (negative parity) ถ้า  $l$  เป็นเลขคู่ เพริติของนิวเคลียสจะเป็นเพริติคู่ (even parity) หรือเพริติบวก (positive parity) เพราะฉะนั้นจากตัวอย่างที่  $^{17}_8\text{O}$  มีนิวตรอนตัวสุดท้ายอยู่ที่สถานะ  $1d_{5/2}$  ซึ่งมี  $l = 2$  แสดงว่ามีเพริติคู่ และ  $^{17}_9\text{F}$  มีโปรตอนตัวสุดท้ายอยู่ที่สถานะ  $1d_{5/2}$  ซึ่งมี  $l = 2$  ก็แสดงว่ามีเพริติคู่ เช่นเดียวกัน

ตาราง 2.1 สปินของนิวไคลด์ที่บางนิวไคลด์ ที่ได้จากการวัด และ การทำนายโดยแบบจำลองชั้น (คัดแปลงจาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 367)

| นิวไคลด์              | สปินและเพริติ<br>จากการทำนาย | สปินและเพริติ<br>จากการวัด |
|-----------------------|------------------------------|----------------------------|
| นิวตรอน               | $1s_{1/2}$                   | $1/2^+$                    |
| โปรตอน                | $1s_{1/2}$                   | $1/2^+$                    |
| $^3_1\text{H}$        | $1s_{1/2}$                   | $1/2^+$                    |
| $^3_2\text{He}$       | $1s_{1/2}$                   | $1/2^+$                    |
| $^7_3\text{Li}$       | $1p_{3/2}$                   | $3/2^-$                    |
| $^9_4\text{Be}$       | $1p_{3/2}$                   | $3/2^-$                    |
| $^{11}_5\text{B}$     | $1p_{3/2}$                   | $3/2^-$                    |
| $^{13}_6\text{C}$     | $1p_{1/2}$                   | $1/2^-$                    |
| $^{17}_8\text{O}$     | $1d_{5/2}$                   | $5/2^+$                    |
| $^{17}_9\text{F}$     | $1d_{5/2}$                   | $5/2^+$                    |
| $^{19}_9\text{F}$     | $1d_{5/2}$                   | $1/2^*$                    |
| $^{23}_{11}\text{Na}$ | $1d_{5/2}$                   | $3/2^*$                    |
| $^{43}_{20}\text{Ca}$ | $1f_{7/2}$                   | $7/2^-$                    |
| $^{51}_{23}\text{V}$  | $1f_{7/2}$                   | $7/2^-$                    |
| $^{129}_{53}\text{I}$ | $1g_{7/2}$                   | $7/2^+$                    |

ตาราง 2.1 แสดงสปินของนิวไคลด์ที่มีจำนวนนิวคลีออนเป็นเลขคี่ ที่ได้มาจากการทำนายโดยแบบจำลองชั้นและจากการวัด ค่าจากการทำนายและจากการวัดส่วนใหญ่ก็จะสอดคล้องกันดี ยกเว้นบางนิวไคลด์คือ  ${}^9_9\text{F}$  และ  ${}^{23}_{11}\text{Na}$  ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน กล่าวคือ  ${}^9_9\text{F}$  มีสปินจากการทำนายมีค่าเป็น  $5/2$  โดยโปรตอนที่สุดท้ายอยู่ที่สถานะ  $1d_{5/2}$  แต่สปินที่ได้จากการวัดกลับมีค่าเป็น  $1/2$  สาเหตุของความคลาดเคลื่อนนี้อาจอธิบายง่าย ๆ ได้ว่าเป็นเพราะสถานะ  $1d_{5/2}$  และ  $2s_{1/2}$  อยู่ใกล้กันมาก โปรตอนที่สุดท้ายจึงไปอยู่ที่สถานะ  $2s_{1/2}$  มากกว่าจะอยู่ที่สถานะ  $1d_{5/2}$  อันนี้อาจอธิบายได้ว่าเป็นผลมาจากการคู่ควบระหว่างนิวคลีออนที่อยู่นอกชั้นปิดคือสองนิวตรอนที่อยู่สถานะสปิน  $5/2$  กับหนึ่งโปรตอนที่อยู่สถานะสปิน  $5/2$  (นิวคลีออนแต่ละตัวจะมีสปินของตัวเองเป็น  $1/2$ ) การคู่ควบระหว่างนิวคลีออนที่อยู่นอกชั้นปิดนี้ก่อให้เกิดสปินลัพธ์เป็น  $1/2$  อีกตัวอย่างหนึ่งคือ  ${}^{23}_{11}\text{Na}$  ก็เช่นเดียวกัน สปินที่ได้จากการทำนายมีค่าเป็น  $5/2$  แต่จากการวัดมีค่าเป็น  $3/2$  สาเหตุของความคลาดเคลื่อนนี้อาจอธิบายได้เช่นเดียวกับกรณีของ  ${}^9_9\text{F}$

ความคลาดเคลื่อนนี้จะเกิดที่สถานะ โมเมนตัมเชิงมุม (สปิน) สูง ๆ ซึ่งเราจะพบว่า มีนิวคลีโอไที่มี  $A$  สูง ๆ อยู่หลายนิวคลีโอไ ที่จากการทำนายพบว่า มีนิวคลีโอไที่ตัวสุดท้ายอยู่ที่สถานะ  $1h_{11/2}$  แต่จากการวัดปรากฏว่าไม่พบนิวคลีโอไที่มีสปิน  $11/2$  เลย สาเหตุของความคลาดเคลื่อนนี้เป็นเพราะว่าแบบจำลองชั้นอยู่บนข้อสมมุติที่ว่านิวคลีโอไแต่ละตัวเป็นอิสระไม่เกี่ยวข้องกัน จึงไม่ได้นำเอาเรื่องการมีพลังงานงานยึดเหนี่ยวมากเป็นพิเศษหากนิวคลีโอไเข้าคู่กันมาพิจารณาด้วย ซึ่งเมื่อโมเมนตัมเชิงมุมสูงขึ้นพลังงานยึดเหนี่ยวของการเข้าคู่จะมากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นที่สถานะที่มีโมเมนตัมเชิงมุมสูง ๆ นิวคลีโอไจึงอยู่ในลักษณะเข้าคู่กัน นิวคลีโอไที่ตัวที่เหลือจากการเข้าคู่จึงต้องเลื่อนขึ้นไปอยู่ในระดับพลังงานที่สูงขึ้น แต่มีโมเมนตัมเชิงมมน้อยกว่า และเสถียรภาพมากกว่า ดังตัวอย่างของเรื่องนี้ได้แก่  ${}^{137}_{56}\text{Ba}$  ซึ่งนิวตรอนที่ตัวสุดท้าย (คือตัวที่ 81) ควรจะอยู่ที่สถานะ  $1h_{11/2}$  แต่จากการวัดพบว่า มีสปิน  $3/2$  แสดงว่านิวตรอนที่ตัวสุดท้ายเลื่อนขึ้นไปอยู่ในสถานะ  $2d_{3/2}$

แพริติของระบบกำหนดได้จาก  $(-1)^l$  ถ้าหากนิวคลีโอไที่ตัวสุดท้ายอยู่ที่สถานะ  $s, d, g, \dots$  ซึ่ง  $l = 0, 2, 4, \dots$  ตามลำดับ แพริติจะเป็นบวก (+) แต่ถ้าอยู่ที่สถานะ  $p, f, h, \dots$  ซึ่ง  $l = 1, 3, 5, \dots$  ตามลำดับ แพริติจะเป็นลบ (-)

(2) โมเมนต์แม่เหล็ก (Magnetic Moment) เราจะเห็นว่าบนพื้นฐานของทฤษฎีของอนุภาคเชิงเดี่ยว (หรือแบบจำลองชั้น) การหาสมบัติของนิวคลีโอไหาได้จากนิวคลีโอไที่ตัวสุดท้าย การคำนวณหาโมเมนต์แม่เหล็กก็ด้วยเช่นกัน ในกรณีนิวคลีโอไ คู่-คู่ สปินจะเป็นศูนย์ โมเมนต์แม่เหล็กก็จะเป็นศูนย์ด้วย สำหรับกรณีที่นิวคลีโอไมี  $A$  เป็นเลขคี่ ค่าโมเมนต์แม่เหล็กก็จะ



กำหนดให้โดย

$$\mu = g_l a_l j + g_s a_s j \quad (2.8)$$

เมื่อ  $g_l = 1$  สำหรับโปรตอน และ  $g_l = 0$  สำหรับนิวตรอน, และ  $g_s = 5.5854$  สำหรับโปรตอน และ  $g_s = -3.8262$  สำหรับนิวตรอน สัมประสิทธิ์  $a_l$  และ  $a_s$  เป็นโพรงเจกชั้นของ  $l$  และ  $s$  บน  $j$  ตามลำดับ

$$a_l = \frac{i \cdot j}{|j|^2} = \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} \quad (2.9)$$

และ

$$a_s = \frac{s \cdot j}{|j|^2} = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (2.10)$$

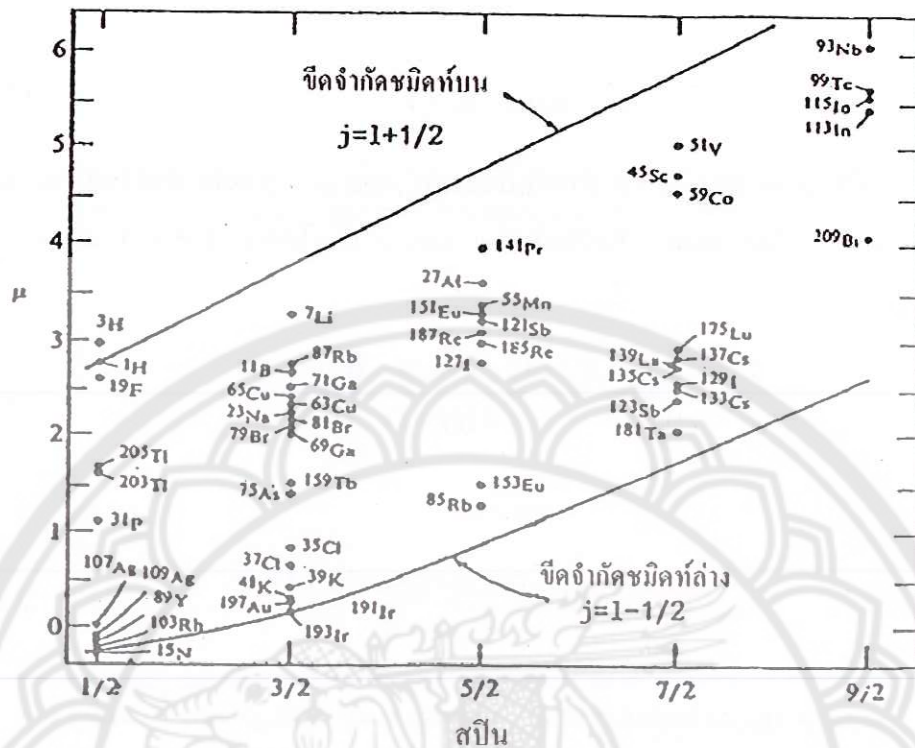
แทนสมการ (2.9) และ (2.10) ลงในสมการ (2.8) และแทน  $s = \frac{1}{2}$  และ  $j = l + \frac{1}{2}$  หรือ  $j = l - \frac{1}{2}$  จะได้สมการ (2.8) ใหม่เป็น

$$\mu_l = \left(j - \frac{1}{2}\right) g_l + \frac{1}{2} g_s \quad \text{สำหรับ } l = j = l + \frac{1}{2} \text{ หรือ } l = j - \frac{1}{2} \quad (2.11)$$

และ

$$\mu_l = \frac{j}{j+1} \left[ \left(j + \frac{3}{2}\right) g_l - \frac{1}{2} g_s \right] \quad \text{สำหรับ } l = j = l - \frac{1}{2} \text{ หรือ } l = j + \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

ค่า  $\mu$  ในรูปแบบของสมการข้างบนนี้เรียกว่า ขีดจำกัดของชมิทท์ (Schmidt's limit) เพราะที่ ชมิทท์ (T. Schmidt) เป็นผู้กำหนดรูปแบบของสมการดังกล่าว ในรูป 2.9 แสดงการลงจุดโมเมนต์แม่เหล็กที่ได้จากการวัด เทียบกับสปิน  $I (=j)$  ของนิวคลีออนในแบบจำลองอนุภาคเชิงเดี่ยวของนิวคลีไอที่มี  $A$  เป็นเลขที่ ชนิดที่มี  $Z$  เป็นเลขที่ และ  $N$  เป็นเลขคู่ ส่วนในรูป 2.10 ก็เช่นเดียวกัน แต่เป็นของนิวคลีไอ  $A$  ที่ ชนิดที่มี  $N$  เป็นเลขที่ และ  $Z$  เป็นเลขคู่ และได้แสดงขีดจำกัดของชมิทท์ไว้ในรูปด้วย จากรูป 2.9 และ 2.10 จะเห็นว่าโมเมนต์แม่เหล็กจะต้องอยู่ภายในขีดจำกัดของชมิทท์นี้ โดยส่วนใหญ่ของมันมีแนวโน้มที่จะอยู่ใกล้ขีดจำกัดใดขีดจำกัดหนึ่ง คือ ไม่เข้าใกล้ขีดจำกัดชมิทท์ล่าง (lower schmidt limit) ก็เข้าใกล้ขีดจำกัดชมิทท์บน (upper schmidt limit) การที่มันอยู่แยกห่างออกจากขีดจำกัดทั้งสองนี้อาจอธิบายได้ว่าเนื่องจากโมเมนต์แม่เหล็กเป็นผลลัพธ์มาจากสถานะผสม (หมายเหตุ: ซึ่งไม่สามารถเป็นสถานะผสมของขีดจำกัด  $j = l - \frac{1}{2}$



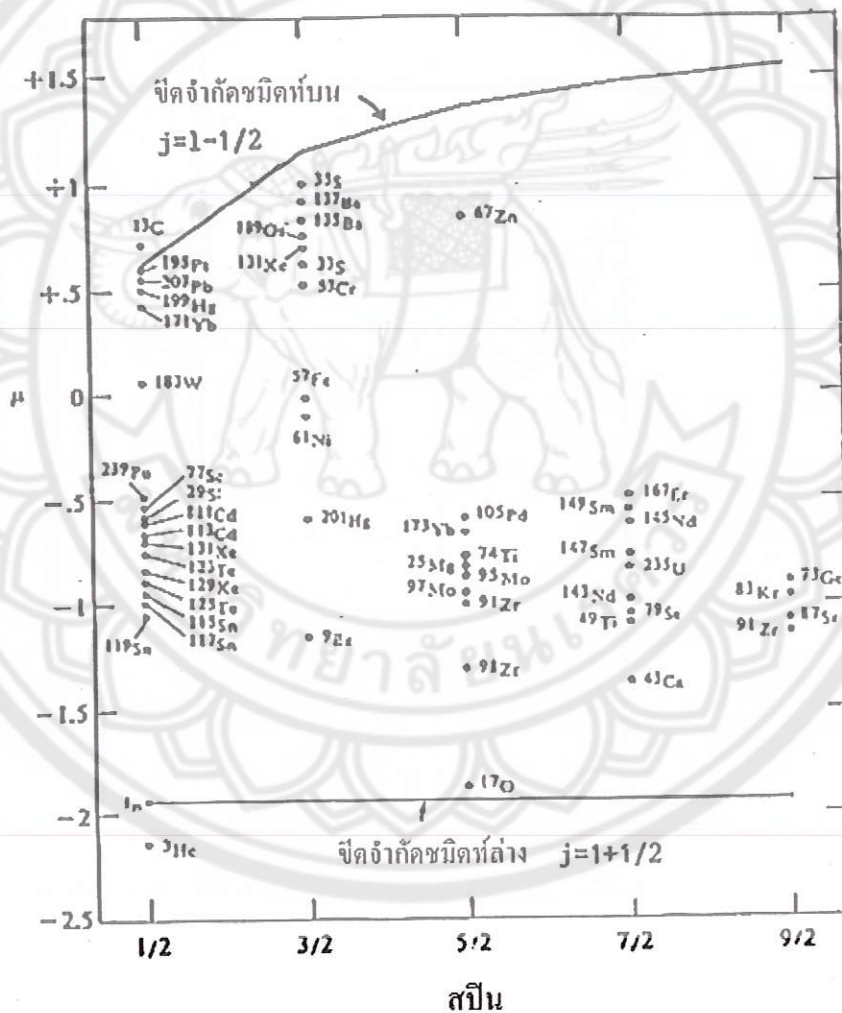
รูป 2.9 โมเมนต์แม่เหล็กของนิวคลีไอด์ที่มีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคู่ และมีจำนวนโปรตอนเป็นเลขคี่ (คัดแปลงจาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 369)

และ  $j = l + \frac{1}{2}$  ได้ เพราะว่ามีเพริตตรงข้ามกัน) ตอนนี้อาจมีคำถามเกิดขึ้นว่า แล้วทำไมไม่นำเหตุผลอันนี้ไปใช้ในการทำนายสปินของแบบจำลองชั้นบ้าง ซึ่งคำตอบก็คือ เพราะสปินเป็นปริมาณควอนไทซ์ (quantized) ซึ่งมีค่าไม่ต่อเนื่อง และมีค่าเป็นค่ากำหนดแน่ เพราะฉะนั้นคำตอบที่ได้ของการทำนายสปินโดยใช้แบบจำลองชั้นจึงมีผิดกับถูกเท่านั้น ไม่มีคำตอบที่เป็นค่าอยู่ระหว่าง แต่ส่วนใหญ่จะถูก ซึ่งไม่เหมือนกับกรณีของโมเมนต์แม่เหล็ก

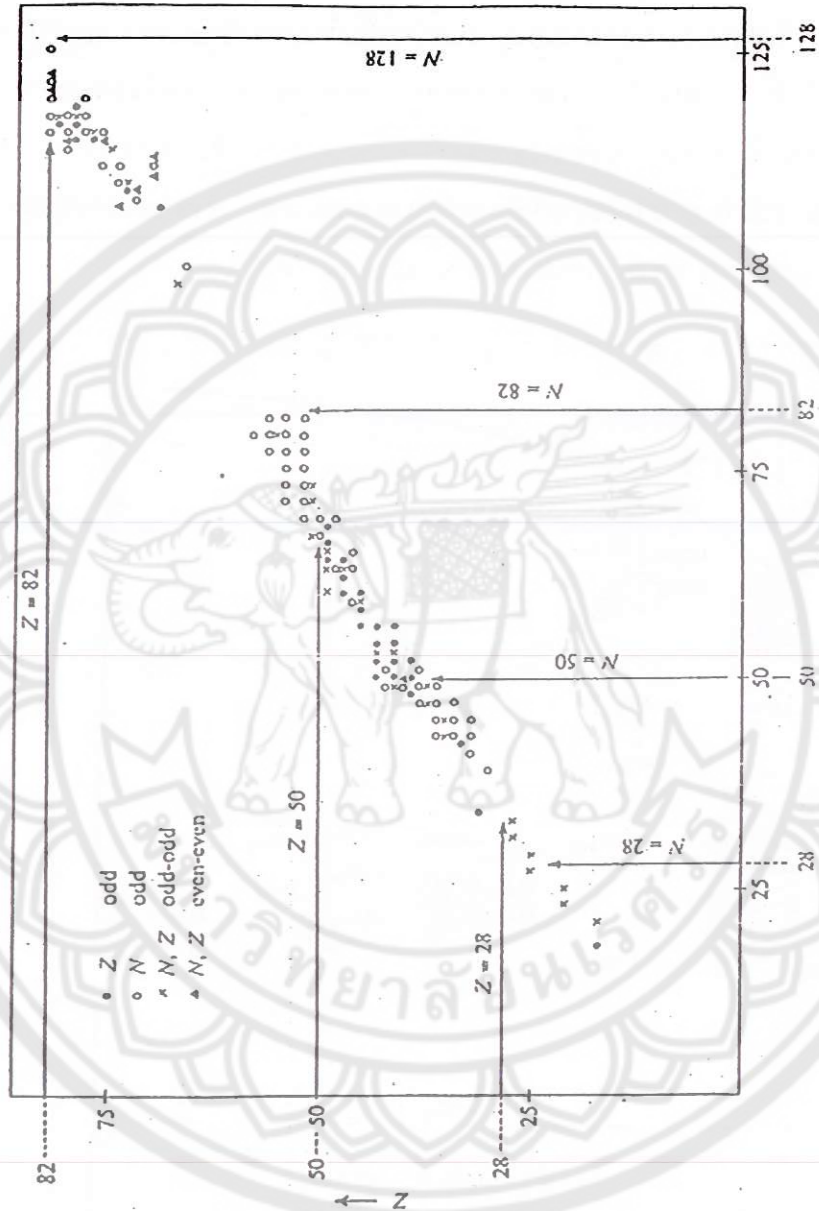
(3) ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้า (Electric Quadrupole Moments) ข้อสมมุติที่ให้นิวเคลียสมีรูปร่างเป็นแบบทรงกลมนั้นจะต้องต่อเมื่อจำนวนนิวตรอนหรือโปรตอนของนิวเคลียสเท่ากับหรือใกล้เคียงเลขกลม (มากกว่าหรือน้อยกว่าเลขกลม 1 หรือ 2 ตัว) แต่ถ้าจำนวนของโปรตอนหรือนิวตรอนย้ายเบนออกไปจากเลขกลมแล้ว รูปร่างแบบทรงกลมของนิวเคลียสก็จะบิดเบี้ยวออกไปเป็นรูปร่างคล้ายทรงกลม (ไม่ใช่ทรงกลมแต่คล้ายทรงกลม เช่นทรงรีเป็นต้น) เพราะฉะนั้นค่าควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าจะเพิ่มขึ้น เราพบว่าค่าควอดรูโพลโมเมนต์จะมีค่ามากในจำพวกธาตุที่หายากในโลก (rare-earth element) ซึ่งมีจำนวนโปรตอน  $Z$  อยู่ระหว่าง 50 กับ 82 และจำนวนนิวตรอน  $N$  อยู่ระหว่าง 82 และ 126



(4) ไอโซเมอริซึมของนิวเคลียส (Nuclear Isomerism) การย้ายระหว่างสองสถานะกระตุ้นที่ใช้ช่วงเวลายาวนานมาก หรือมีครึ่งชีวิตยาวนานมาก เป็นผลลัพธ์ของการเปลี่ยนแปลงสปีนอย่างมาก,  $\Delta I \geq 3$ , ระหว่างสองสถานะกระตุ้น และผลต่างของพลังงานระหว่างสองสถานะกระตุ้นมีค่าน้อยมาก ในรูป 2.11 แสดงการลงจุดระหว่างคู่ไอโซเมอร์ (isomeric pair) กับจำนวนนิวคลีออน จะเห็นได้ว่าส่วนมากของคู่ไอโซเมอร์จะปรากฏกับนิวเคลียสที่มีจำนวนนิวตรอนหรือโปรตอนเป็นเลขคี่ ในย่านระหว่างจำนวนนิวคลีออน 19 ถึง 27, 33 ถึง 49, 63 ถึง 81, และ 107 ถึง 127 จะเรียกย่านเหล่านี้ว่า เกาะไอโซเมอริซึม (island of isomerism) จำนวนของสถานะไอโซเมอร์จะลดลงอย่างรวดเร็วมากแถวใกล้เลขกุด 50, 82, และ 128



รูป 2.10 โมเมนต์แม่เหล็กของนิวคลีไอที่มีจำนวนโปรตอนเป็น เลขคู่ และมีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคี่ (ดัดแปลงจาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 370)



รูป 2.11 จำนวนสถานะไอโซเมอร์ของนิวไคลด์ที่มีมวลเป็นเลขคี่ ดังจุดเทียบกับจำนวนนิวตรอนที่เป็นเลขคี่ (จาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 371)



การที่โอกาสการย้าย (transition probability) มีค่าน้อย และมีครึ่งชีวิตยาวของสถานะไอโซเมอร์ สามารถอธิบายโดยใช้แบบจำลองอนุภาคเชิงเดี่ยวสำหรับนิวคลีไอที่มี  $A$  เป็นเลขคี่ กล่าวคือเมื่อชั้นใกล้เคียงระดับพลังงานของอนุภาคเชิงเดี่ยวจะอยู่ใกล้กันมาก เพราะฉะนั้นการย้ายมีพลังงานน้อยมาก ปรกติจะมีการเปลี่ยนระดับพลังงานจากสถานะออสซิลเลเตอร์บน (higher oscillator state) ลงมาสู่สถานะออสซิลเลเตอร์ล่าง (lower oscillator) อยู่เสมอในแถว ๆ ใกล้ชั้นปิดตัวแปรที่ทำให้การย้ายเป็นไปอย่างช้ามากจึงได้แก่ ความแตกต่างของสปินจะต้องมีค่าสูง และความแตกต่างของพลังงานจะต้องมีค่าต่ำ การย้ายที่เกิดเป็นประจำเป็นธรรมดาได้แก่การย้าย  $1f_{7/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ ,  $1g_{9/2} \rightarrow 2p_{1/2}$ ,  $1h_{11/2} \rightarrow 2d_{3/2}$  เป็นต้น

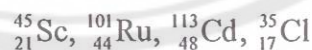
### เอกสารอ้างอิง

1. A. P. Arya, *Elementary Modern Physics*, Addison-Wesley, Phillippines, 1970.
2. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
3. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
4. W.E. Burcham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
5. W. N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An Introduction to Nuclear Physics*. 2nd edit, Cambridge University, Cambridge, 2001.
6. A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
7. V. Devanathan, *Nuclear Physics*, Narosha Publishing House, New Delhi, 2006
8. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
9. R.D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, New York, 1955.
10. E.S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955.

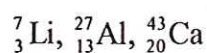
11. E. M. Henley and A. Garcia *Subatomic Physics*, 3rd edit, World Scientific, New Jersey 2007.
12. K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*, 2nd edit, Institute of Physics, Brista, 1999.
13. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.
14. I. Kaplan, *Nuclear Physics*, Addison-Wesley, London, 1958.
15. K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
16. B.R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, Wiley, West Sussex, 2006.
17. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
18. H.C. Ohanian, *Modern Physics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1990.
19. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.

### แบบฝึกหัด

1. จงคำนวณหาระดับพลังงานต่ำสุดของอนุภาคมวล  $M$  ที่เคลื่อนที่ใน (ก) ศักย์หลุมสี่เหลี่ยม (ข) ศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์ และหาผลต่างของระดับพลังงานในศักย์ทั้งสองแบบ ว่ามีอันดับขนาดเท่าไร ?
2. จงบอกสปินและพริตตี้ที่สถานะพื้นของนิวคลีไอดต่อไปนี้โดยใช้แบบจำลองชั้น



3. สปินที่สถานะพื้นของ  ${}^9\text{F}$  ที่ได้จากการทำนายโดยแบบจำลองชั้นได้ค่าเป็น  $1d_{5/2}$  แต่จากการทดลองได้ค่าเป็น  $1/2$  จงอธิบายสาเหตุของความคลาดเคลื่อนนี้
4. ให้เขียนแผนภาพระดับพลังงานตามแบบจำลองชั้นเฉพาะระดับที่มีนิวตรอนหรือโปรตอนอยู่จริงของนิวคลีไอดต่อไปนี้





5. จากการทดลองวัดสปินของนิวเคลียส  $^{23}_{11}\text{Na}$  ได้ค่าเป็น  $3/2$  ขณะที่จากการทำนายโดยใช้แบบจำลองชั้นได้ค่าเป็น  $1d_{5/2}$  จงอธิบายความคลาดเคลื่อนนี้
6. จากการทดลองวัดสปินของ  $^{10}_5\text{B}$  ได้ค่าเท่ากับ 3 เป็นไปได้หรือไม่ที่จะยอมรับค่านี้โดยการรวมสปินของสถานะโปรตอนและของสถานะนิวตรอนตามแบบจำลองชั้นเข้าด้วยกัน
7. สถานะพื้นและสถานะกระตุ้นสามสถานะแรกของ  $^{109}_{27}\text{Ag}$  คือ  $1/2^-$ ,  $7/2^+$ ,  $3/2^-$  และ  $5/2^-$  จงหาว่าสถานะแบบจำลองชั้นอะไรที่รับกันกับสิ่งที่กำหนดนี้
8. จากความสัมพันธ์

$$|j|^2 = |l|^2 + |s|^2 + 2l \cdot s$$

จงแสดงว่า

$$l \cdot s = l \quad \text{ถ้า } j = l + \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad l \cdot s = (l+1) \quad \text{ถ้า } j = l - \frac{1}{2}$$

9. สปินและโมเมนต์แม่เหล็กของ  $^7_3\text{Li}$  ตามแบบจำลองชั้นมีค่าเป็นเท่าไร ? และเมื่อเปรียบเทียบกับค่าโมเมนต์แม่เหล็กที่ได้นี้กับค่าจากผลการทดลองคือ 3.2563 nm จะเป็นอย่างไร ?
10. สปินและโมเมนต์แม่เหล็กของ  $^{14}_7\text{N}$  ตามแบบจำลองชั้นมีค่าเป็นเท่าไร ? และเมื่อเปรียบเทียบกับค่าสปินและโมเมนต์แม่เหล็กที่ได้นี้กับค่าจากผลการทดลองคือ สปินเท่ากับ 1 และโมเมนต์แม่เหล็กเท่ากับ 0.404 nm จะเป็นอย่างไร ?
11. เหตุใดไอโซเมอร์ซีมีแนวโน้มที่จะปรากฏกับนิวคลีไอที่มี  $A$  เป็นเลขคี่ และมีจำนวนโปรตอนและนิวตรอนใกล้เคียงกัน ?

### บทที่ 3

## แบบจำลองกลุ่ม

## (THE COLLECTIVE MODEL)

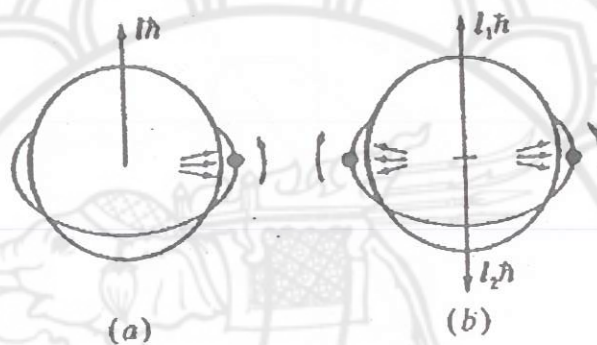
แม้ว่าแบบจำลองชั้นจะประสบผลสำเร็จในการอธิบายสมบัติของนิวเคลียสได้หลายประการก็จริง แต่ก็ยังมีบางอย่างไม่สามารถอธิบายได้ ดังจะเห็นได้ดังต่อไปนี้ แบบจำลองชั้นก่อรูปขึ้นจากการที่นิวคลีออนหนึ่งหรือสองนิวคลีออนถูกยกขึ้นจากสถานะพื้นขึ้นไปสู่สถานะถูกกระตุ้นที่มีอยู่ตามแบบจำลองชั้น แต่เป็นที่ทราบกันดีว่ามีหลายกรณีที่มีการก่อรูปขึ้นเป็นสถานะถูกกระตุ้นเกิดขึ้นจากหลายลักษณะประกอบกัน และไม่อาจทำนายได้โดยแบบจำลองชั้น นอกจากนี้ถ้าได้พิจารณาค่าที่วัดได้ของโมเมนต์แม่เหล็กและควอดรูโพล-โมเมนต์ จะพบว่าบ่าเบนไปจากค่าที่คำนวณได้ตามแบบจำลองชั้น นับว่าเป็นข้อบกพร่องของแบบจำลองชั้น ทั้งนี้สาเหตุเนื่องมาจากว่าแบบจำลองชั้นไม่ได้นำเรื่องการก่อรูปเป็น “แก่น (core)” ของชั้นปีดมาเกี่ยวข้องด้วยนั่นเอง แต่สิ่งเหล่านี้จะอธิบายได้ง่ายขึ้น ถ้าหากปฏิบัติอยู่บนพื้นฐานของแบบจำลองอีกแบบจำลองหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าแบบจำลองกลุ่ม (collective model)

ผู้ที่เสนอแบบจำลองกลุ่มเป็นครั้งแรกคือ เจ. เรนวอเตอร์ (J. Rainwater) และผู้ที่พัฒนามาได้แก่ เอ. โบร์ (A. Bohr) และ บี. มอทเทลสัน (B. Mottelson) ตามแบบจำลองนี้รูปร่างและโมเมนตัมของแก่นจะเป็นส่วนที่มีบทบาทสำคัญ สถานะถูกกระตุ้น โมเมนต์แม่เหล็ก และควอดรูโพลโมเมนต์ ต่างก็เป็นผลลัพธ์มาจากการเคลื่อนที่กลุ่ม (collective motion) ของหลายนิวคลีออน ไม่ใช่เฉพาะแต่นิวคลีออนที่อยู่รอบชั้นปีดเท่านั้น แบบจำลองกลุ่มมีลักษณะรวมกันของแบบจำลองชั้นและแบบจำลองหยดของเหลว

สาระสำคัญของแบบจำลองกลุ่มก็คือ แบบจำลองกลุ่มจะกำหนดให้นิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียสเคลื่อนที่อย่างอิสระภายใต้ศักย์,  $V(r)$ , เหมือนกับแบบจำลองชั้น แต่จะมีแตกต่างไปจากแบบจำลองชั้นตรงที่ศักย์ในแบบจำลองกลุ่มอาจบิดเบี้ยวออกไปจากรูปร่างเดิมที่เป็นแบบทรงกลมสมมาตรของมัน การบิดเบี้ยวนี้เกิดจากการโคจรของของนิวคลีออนที่อยู่รอบชั้นปีด (หรือแก่น) กล่าวคือ นิวคลีออนที่มีจำนวนครบชั้นจะก่อรูปเป็นรูปร่างแบบสมมาตรทรงกลม ที่เรียกว่า “แก่น” ส่วนนิวคลีออนที่เกินจำนวนครบชั้นจะโคจรรอบนอกชั้นปีดหรือแก่น โดยจะมีอันตรกิริยาที่เป็นแรงคู่อย่างแรงระหว่างนิวคลีออนนอกชั้นปีดหรือแก่นกับนิวคลีออนที่อยู่



ภายในชั้นปิดหรือแก่น แล้วแก่นก็จะบิดเบี้ยวออกไปในทิศทางที่นิวคลีออนนั้นอยู่ดังรูป 3.1a ถ้า นิวคลีออนที่อยู่รอบนอกแก่นมีอยู่สองนิวคลีออนและอยู่ในวงโคจรเดียวกัน (มีทิศทางการโคจรตรงข้ามกัน, เนื่องจากผลของการเข้าสู่) ดังรูป 3.1b การบิดเบี้ยวของแก่นก็จะเพิ่มมากขึ้น และถ้าหากนิวคลีออนนอกแก่นมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ แก่นก็จะบิดเบี้ยวเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ เช่นเดียวกัน จนกระทั่งถึงจุดจุดหนึ่งว่าการบิดเบี้ยวจะไม่เพิ่มขึ้นอีกแล้ว คือการโคจรของนิวคลีออนที่เพิ่มมากขึ้นมีผลต่อการบิดเบี้ยวของแก่นน้อยลง การบิดเบี้ยวที่คงรูปไม่เพิ่มขึ้นอีกแล้วนี้เรียกว่า การบิดเบี้ยวถาวร (permanent deform)



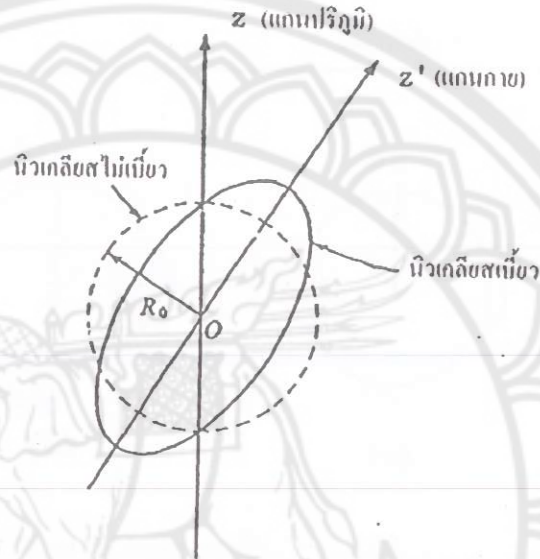
รูป 3.1 การทำให้เกิดการบิดเบี้ยวของนิวเคลียสโดยนิวคลีออนที่อยู่  
นอกชั้นปิด (a) โดยนิวคลีออนตัวเดียว (b) โดยนิวคลีออนสองตัว  
ที่มีโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจรสวนทิศกัน (จาก W. E. Meyerhof,  
*Elements of Nuclear Physics*, New York : McGraw-Hill, 1989, p. 58)

การเคลื่อนที่แบบกลุ่มอาจพรรณนาในรูปแบบการเคลื่อนที่เชิงสั่น (vibrational motion) รอบจุดสมดุล หรือพรรณนาในรูปแบบการเคลื่อนที่เชิงหมุน (rotational motion) แต่การเคลื่อนที่เชิงหมุนมีความสำคัญที่น่าพิจารณามากกว่า ซึ่งจะกล่าวในตอนถัดไป การหมุนของกลุ่มนิวคลีออนรอบผิวของแก่นจะคล้ายกับเป็นคลื่นน้ำ (tidal wave) รอบผิวของแก่น หรือคล้ายกับการกระเพื่อมของผิวหยดของเหลว ดังรูป 3.5 ดังนั้นการแสดงสมบัติของนิวเคลียส เช่น โมเมนตัมเชิงมุม จึงเป็นผลลัพธ์ของไม่ใช่เฉพาะนิวคลีออนที่อยู่รอบชั้นปิดเท่านั้น แต่จะมีชั้นปิดหรือแก่นมาเป็นส่วนร่วมด้วย

ถ้านิวเคลียสบิดเบี้ยวไปเป็นรูปร่างแบบทรงรี (elliptical shape) และสมมาตรรอบแกน  $Oz'$  ซึ่งเป็นแกนวัตถุ (body axis) ดังแสดงในรูป 3.2 พารามิเตอร์ที่กำหนดการบิดเบี้ยวจะเรียกว่า พารามิเตอร์การบิดเบี้ยว (deformation parameter),  $\beta$ , ซึ่งให้นิยามเป็น

$$\beta = \Delta R / R_0 \quad (3.1)$$

$R_0$  คือรัศมีเฉลี่ยของนิวเคลียส และ  $\Delta R$  คือผลต่างระหว่างกึ่งแกนเอก (semimajor axis) และกึ่งแกนโท (semiminor axis) ของทรงรี การบิดเบี้ยวนี้ขึ้นกับจำนวนนิวคลีออนนอกชั้นปิด และจะบิดเบี้ยวมากที่สุดถ้าจำนวนนิวคลีออนมีค่าอยู่ระหว่างเลขกล



รูป 3.2 การเบี้ยวของนิวเคลียสรอบแกน  $Oz'$

(ดัดแปลงจาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 374)

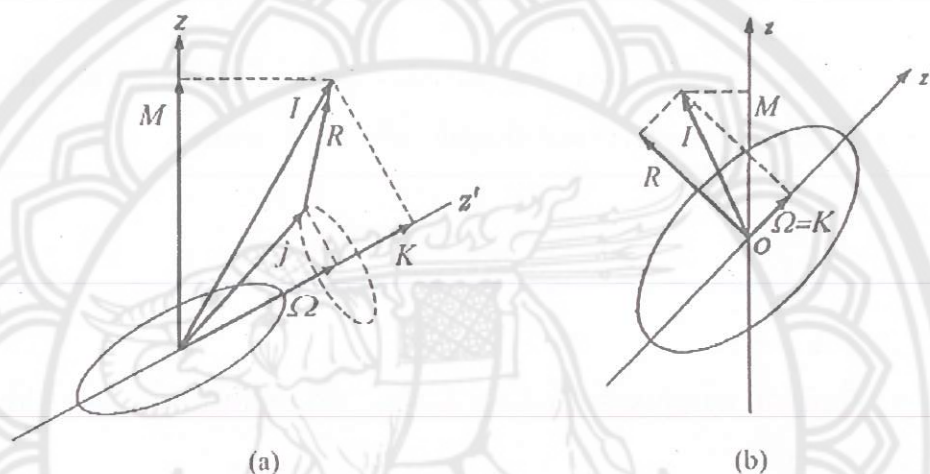
เราอาจหมายเหตุไว้ในที่นี้ว่า ระดับพลังงานเนื่องมาจากการเคลื่อนที่เชิงหมุน หรือเรียกย่อว่าระดับพลังงานการหมุน (rotational level),  $E_{rot}$ , ประคดจะมีค่าน้อยกว่าระดับพลังงานประจำตัวหรือเรียกย่อว่าระดับพลังงานประจำตัว (intrinsic level),  $E_{int}$ , ที่ได้มาจากแบบจำลองชั้นอนุภาคเชิงเดี่ยว

$$E_{int} \gg E_{rot}$$

ระดับพลังงานประจำตัวหรือระดับพลังงานตามแบบจำลองชั้น สัมพันธ์กับระดับพลังงานการหมุนในลักษณะเดียวกันกับความสัมพันธ์ระหว่างระดับพลังงานของอิเล็กตรอนกับระดับพลังงานการหมุนของโมเลกุล



ก. ระดับพลังงานการหมุน (Rotation Energy Level) พลังงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่เชิงหมุนมีลักษณะเป็นควอนไทซ์ และจะมีเลขควอนตัมอื่น ๆ มาเป็นตัวกำหนดค่าพลังงานด้วย ดังจะพิจารณาต่อไปนี้ ให้  $I$  เป็นโมเมนตัมเชิงมุมรวมของนิวเคลียส,  $j$  เป็นโมเมนตัมเชิงมุมของนิวคลีออนนอกชั้นปิด (เป็นชั้นปิดตามแบบจำลองชั้น, ในแบบจำลองชั้นนิวคลีออนตัวสุดท้ายจะเป็นตัวบอกลสปิน),  $R$  เป็นโมเมนตัมเชิงมุมที่เกิดเนื่องจากการเคลื่อนที่เชิงหมุน, และ  $I = j + R$  ดังรูป 3.3



รูป 3.3 แผนภาพการถ่วงของโมเมนตัมเชิงมุมของนิวเคลียส ที่บิดเบี้ยวเป็นรูปทรงรี (a) เป็นกรณี  $\Omega \neq K$  (b) เป็นกรณีที่  $\Omega = K$  (คัดแปลงจาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 375)

$\Omega$  และ  $K$  เป็นโพรเจกชัน (projection) หรือภาพฉายของ  $j$  และ  $I$  บนแกน  $z'$ ,  $M$  เป็นภาพฉายของ  $I$  บนแกน  $z$  ถ้า  $R$  ตั้งฉากกับแกนสมมาตร (แกน  $z'$ ) แล้ว  $\Omega$  จะเท่ากับ  $K$  ดังรูป 3.3b และถ้าโมเมนตัมเชิงมุมของการหมุน (rotational angular momentum) เป็นศูนย์  $\Omega$  และ  $K$  จะเท่ากันหมด ถ้าเราจะกำหนดการถ่วงให้เป็นดังรูป 3.3b และให้โมเมนตัมเชิงมุมเนื่องจากการเคลื่อนที่เชิงหมุน (หรือการเคลื่อนที่กลุ่ม) มีขนาดเป็น  $R\hbar$  แล้ว จะได้สมการเป็น

$$|R|^2 \hbar^2 = [I(I+1) - |K|^2] \hbar^2 \quad (3.2)$$

พลังงานจลน์การหมุน (rotational kinetic energy),  $E_{rot}$ , ของระบบอาจให้นิยามได้เป็น

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2 \quad (3.3)$$

เมื่อ  $\mathcal{I}$  เป็นโมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia),  $\omega$  เป็นความเร็วเชิงมุม (angular velocity) สมการ (3.3) เขียนใหม่ได้เป็น

$$E_{rot} = \frac{(\mathcal{I}\omega)^2}{2\mathcal{I}} = \frac{1}{2\mathcal{I}} [I(I+1) - |K|^2] \hbar^2 \quad (3.4)$$

เมื่อ  $\mathcal{I}\omega = |R|\hbar$  เป็นโมเมนต์เชิงมุมการหมุน (rotational angular momentum) ถ้ากำหนดค่า  $K$  ก็จะหาแถบพลังงานการหมุนได้ ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

ข. นิวคลีไอ คู่-คู่ (Even-Even Nuclei) เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่านิวคลีไอ คู่-คู่ จะมีสปินประจำตัว (หรือโมเมนต์เชิงมุมประจำตัว) เป็นศูนย์ หรือ  $K=0$  ดังนั้น

$$E_{rot} = \frac{1}{2\mathcal{I}} I(I+1)\hbar^2$$

เมื่อ  $I = 0, 2, 4, 6, \dots$

การที่พลังงานการหมุนจะต้องมี  $I = 0, 2, 4, 6, \dots$  นั้น สรุปรมาจากความต่อเนื่องฟังก์ชันคลื่นรวมของสถานะคือ

$$\Psi = \rho_{rot} \Psi_{intnuc}$$

เมื่อ  $\rho_{rot}$  เป็นฟังก์ชันคลื่นการหมุน (rotation wave function) สำหรับนิวคลีไอ คู่-คู่ การดำเนินการบนฟังก์ชันคลื่นรวมของสถานะโดยตัวดำเนินการเพริติ (parity) จะเขียนได้เป็น

$$P\Psi = +\Psi$$

เมื่อ  $P$  เป็นตัวดำเนินการเพริติ (parity operator) ซึ่งทำให้เราได้ว่า

$$P\rho_{rot} = +\rho_{rot} = (-1)^I \rho_{rot}$$

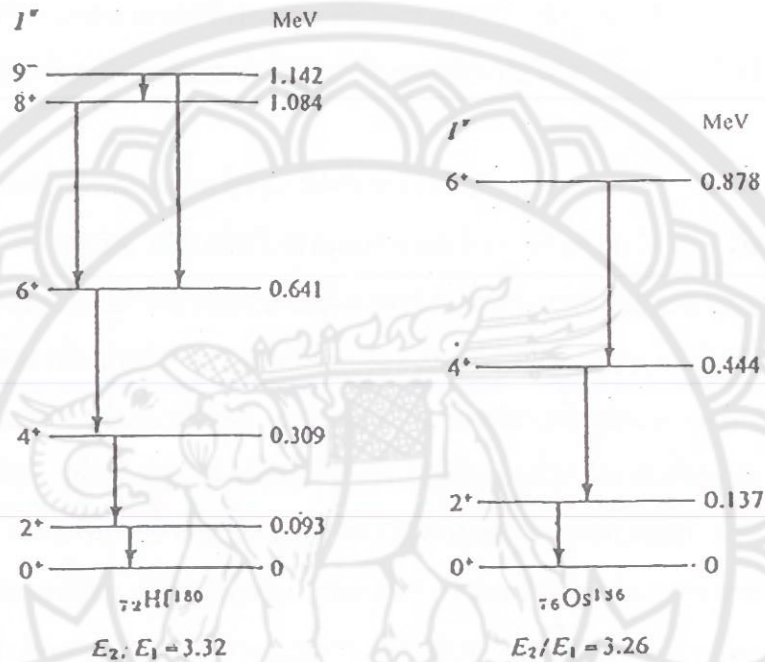
ซึ่งจะเป็นไปได้ถ้าหากว่า

$$I = 0, 2, 4, 6, \dots$$

เท่านั้น สำหรับกรณีของนิวคลีไอ คู่-คู่ นี้  $E_4/E_2 = 4(4+1)/2(2+1) = 3.33$ ,  $E_6/E_4 = 6(6+1)/4(4+1) = 2.1$ ,  $E_8/E_6 = 8(8+1)/6(6+1) = 1.71$  ซึ่งเป็นอัตราส่วนในทางทฤษฎี ปรากฏ



ว่าอัตราส่วนนี้สอดคล้องกันดีกับค่าอัตราส่วนที่ได้มาจากการทดลองในทุกนิวคลีไอ อัตราส่วนของ  $E_4/E_2$  สำหรับบางนิวคลีไอที่ได้จากการทดลองมีค่าดังนี้  $^{176}_{72}\text{Hf}$  เท่ากับ 3.30,  $^{180}_{72}\text{Hf}$  เท่ากับ 3.33,  $^{238}_{90}\text{Th}$  เท่ากับ 3.26, และ  $^{250}_{92}\text{Cf}$  เท่ากับ 3.39 ในรูป 3.4 แสดงระดับพลังงานการหมุนของนิวคลีไอ คู่-คู่



รูป 3.4 ระดับพลังงานการหมุนของนิวคลีไอ คู่-คู่;  $^{180}_{72}\text{Hf}$  และ  $^{186}_{76}\text{Os}$  (จาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 337)

ในกรณีที่นิวคลีอามี  $A$  เป็นเลขคี่ สปินประจำตัวของนิวคลีอามีค่าไม่เป็นศูนย์,  $K \neq 0$ , และจะมีค่าเป็นจำนวนเต็มครึ่ง ในกรณีนี้สปิน  $I$

$$I = K, K + 1, K + 2, \dots$$

จะมีค่าเป็นจำนวนเต็มครึ่ง

ก. โมเมนต์แม่เหล็กและไฟฟ้า (Magnetic and Electric Moment) ได้เคยกล่าวมาแล้วว่า นิวคลีออนที่อยู่นอกชั้นปิดจะมีการเคลื่อนที่รอบแก่น เปรียบเสมือนเป็นคลื่นน้ำรอบผิวของแก่น

และโมเมนต์เชิงมุมรวมของนิวเคลียสจะเป็นค่าที่เสริมกันระหว่างโมเมนต์เชิงมุมของแก่นกับโมเมนต์เชิงมุมของนิวคลีออนที่อยู่รอบแก่น (รอบชั้นปิด) สำหรับกรณีของโมเมนต์แม่เหล็กของนิวเคลียสก็เช่นเดียวกัน ค่าที่ได้จะเป็นค่ามาจากการเสริมกันระหว่างโมเมนต์แม่เหล็กของแก่นกับโมเมนต์แม่เหล็กของโปรตอนที่อยู่รอบแก่น โดยการเคลื่อนที่ของโปรตอนรอบแก่นคล้ายกับมีกระแสวนอยู่รอบแก่น โมเมนต์แม่เหล็กที่เกิดจากกระแสวนรอบแก่นนี้จะไปเสริมกับโมเมนต์แม่เหล็กของแก่น ทำให้ค่าโมเมนต์แม่เหล็กที่วัดได้มีค่าแตกต่างไปจากการคำนวณในทางทฤษฎีในแบบอนุภาคเชิงเดี่ยว โดยค่าที่ได้จะอยู่ห่างจากเส้นชนิดที่ และอยู่ระหว่างเส้นชนิดที่ต่ำและเส้นชนิดที่บน

สำหรับการอธิบายควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าของนิวเคลียสในกรณีที่ค่าที่ได้จากการวัดมากกว่าค่าที่ได้จากการทำนายตามแบบจำลองชั้นอนุภาคเชิงเดียวนั้น อธิบายได้ว่าการบิดเบี้ยวของแก่นอันเนื่องมาจากนิวคลีออนนอกแก่นหรือนอกชั้นปิดมีผลต่อการเพิ่มค่าของควอดรูโพลทางไฟฟ้า แม้ว่าการบิดเบี้ยวของแก่นจะมีเพียงเล็กน้อย แต่ก็มีผลทำให้ค่าโมเมนต์ควอดรูโพลเพิ่มขึ้นเป็นอย่างมาก เพราะการบิดเบี้ยวแม้จะเป็นเพียงเล็กน้อย แต่โปรตอนจำนวนมากก็จะแยกห่างออกจากกัน เพราะฉะนั้นหากจำนวนนิวคลีออนนอกชั้นปิดเพิ่มจำนวนมากขึ้น การบิดเบี้ยวของแก่นก็จะเพิ่มมากขึ้น และควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าก็จะเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งการบิดเบี้ยวจะมากที่สุดเมื่อจำนวนนิวคลีออนอยู่ระหว่างเลขคี่ และควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าก็จะมีค่ามากที่สุดตามไปด้วย การบิดเบี้ยวอาจเกิดเนื่องจากโปรตอนหรือนิวตรอนก็ได้ แต่จากการวัดค่าควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าพบว่าไม่ว่าจะเป็นการบิดเบี้ยวเนื่องจากโปรตอนหรือนิวตรอนต่างก็มีผลต่อการเพิ่มค่าของควอดรูโพลโมเมนต์เหมือนกัน เพราะจะมีผลต่อการทำให้โปรตอนที่อยู่ภายในแก่นแยกห่างออกจากกันทั้งสองกรณี และโปรตอนที่อยู่ในแก่นจะเป็นนิวคลีออนที่มีบทบาทมากต่อการกำหนดค่าควอดรูโพลโมเมนต์ของนิวเคลียส

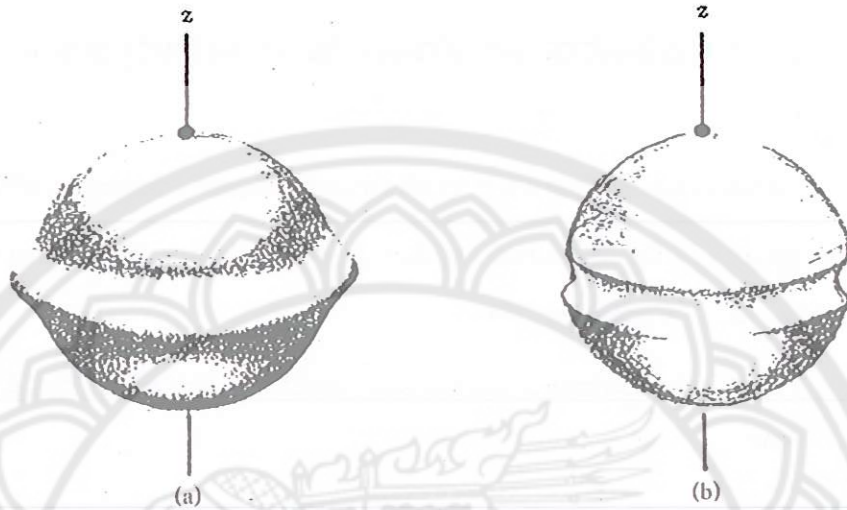
ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าของนิวเคลียส กำหนดให้ตามวิชาไฟฟ้าเป็น

$$Q = \int \rho(x, y, z) [3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] dv \quad (3.5)$$

เมื่อ  $\rho(x, y, z)$  เป็นความหนาแน่นของประจุในนิวเคลียส (คือประจุของโปรตรอนในนิวเคลียส) การหาปริพันธ์จะกระทำทั่วทั้งปริมาตรของนิวเคลียส ถ้าประจุกระจายเป็นรูปทรงกลมสมมาตร  $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$  จะได้  $Q = 0$ , ถ้าประจุกระจายตามแกน  $z$  ที่เรียกว่ารูปทรงแบนข้าง (prolate),  $\overline{z^2} > \overline{x^2} (= \overline{y^2})$ , จะได้ค่า  $Q > 0$ , และถ้ากระจายเป็นรูปแบนขั้ว (oblate),  $\overline{z^2} < \overline{x^2} (= \overline{y^2})$ , จะได้ค่า  $Q < 0$ , สำหรับนิวเคลียสที่มีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคู่ และมีจำนวนโปรตอนเป็นเลขคี่ที่มีจำนวนมากกว่าเลขคี่ไปหนึ่ง การมีค่าควอดรูโพลโมเมนต์จะมีสาเหตุมาจากโปรตอนคี่ที่



เคลื่อนที่อยู่รอบชั้นปิดหรือแก่นที่ภายในมีประจุกระจายเป็นรูปทรงกลมสมมาตร ในกรณีเช่นนี้จะมี  $\overline{z^2} < \overline{x^2} (= \overline{y^2})$ , และ  $Q < 0$ , ในทางกลับกันถ้าหากนิวเคลียสมีจำนวนนิวตรอนเป็นเลขคู่



รูป 3.5 ภาพนิวเคลียสที่มี  $N$  เป็นเลขคู่ และ  $Z$  เป็นเลขคี่ที่มากกว่าและน้อยกว่าเลขกลไปหนึ่ง รูป (a)  $Z$  มากกว่าไปหนึ่ง การเคลื่อนที่ของโปรตอนรอบแก่นหรือชั้นปิดทำให้การแจกแจงของประจุมองดูคล้ายกับว่ามีวงแหวนล้อมแก่นหรือชั้นปิดอยู่ รูปทรงของนิวเคลียสเป็นรูปแบนข้าง,  $Q < 0$ , รูป (b)  $Z$  น้อยกว่าไปหนึ่ง การเคลื่อนที่ของ หลุมโปรตอนรอบแก่นหรือชั้นปิดมองดูคล้ายกับมีหยักรอบแก่นหรือชั้นปิด รูปทรงของนิวเคลียสเป็นรูปแบนข้าง,  $Q > 0$

และมีจำนวนโปรตอนเป็นเลขคี่ที่มีจำนวนน้อยกว่าเลขกลไปหนึ่ง การมีค่าควอดรูโพลโมเมนต์จะมีสาเหตุมาจากการเคลื่อนที่ของหลุมโปรตอน (proton hole) รอบชั้นปิดหรือแก่น ในกรณีเช่นนี้,  $\overline{z^2} > \overline{x^2} (= \overline{y^2})$ , และ  $Q > 0$ , จากที่กล่าวมานี้จะเป็นการอธิบายได้ว่าเพราะเหตุใดควอดรูโพลโมเมนต์ของนิวเคลียสจึงมีค่าเป็นไปได้อย่างบวกและลบ โดยที่หากนิวเคลียสที่มีจำนวนนิวคลีออนใกล้เคียงกับเลขกลแต่มากกว่า จะมีค่าเป็นลบ หากใกล้เคียงกับเลขกลแต่น้อยกว่า จะมีค่าเป็นบวก



## เอกสารอ้างอิง

1. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
2. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
3. W.E. Burcham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
4. W. N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An Introduction to Nuclear Physics*. 2nd edit, Cambridge University, Cambridge, 2001.
5. A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
6. V. Devanathan, *Nuclear Physics*, Narosha Publishing House, New Delhi, 2006
7. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
8. E. M. Henley and A. Garcia, *Subatomic Physics*, 3rd edit, World Scientific, New Jersey 2007.
9. K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*, 2nd edit, Institute of Physics, Brista, 1999.
10. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.
11. I. Kaplan, *Nuclear Physics*, Addison-Wesley, London, 1958.
12. K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
13. B.R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, Wiley, West Sussex, 2006.
14. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
15. H.C. Ohanian, *Modern Physics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1990.
19. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.

## แบบฝึกหัด

1. ถ้าระดับพลังงานการหมุนแรกของนิวเคลียส ฐู่-ฐู่ มีค่า 0.32 MeV และมีสปิน  $2^+$  จงหาค่าพลังงานของระดับการหมุน  $4^+$ ,  $6^+$  และ  $8^+$
2. ระดับพลังงานการหมุนถูกกระตุ้น (excited rotational level) ระดับแรกของ  $^{228}_{90}\text{Th}$  อยู่ที่ 0.057 MeV ส่วนระดับถูกกระตุ้นอื่นอยู่ที่ 0.186 MeV, 0.328 MeV, 0.393 MeV, และ 0.965 MeV ให้หาว่าระดับถูกกระตุ้นอื่นเหล่านี้เป็นส่วนหนึ่งของแถบการหมุน (rotational band) หรือไม่ ?
3. สถานะ  $\frac{9}{2}^-$  ของ  $^{179}_{74}\text{W}$  ซึ่งมี  $K = \frac{7}{2}^-$  เป็นสถานะถูกกระตุ้นที่มีพลังงาน 120 keV ให้ทำนายค่าพลังงานของ  $^{179}_{74}\text{W}$  นี้ที่สถานะถูกกระตุ้น  $\frac{11}{2}^-$ ,  $\frac{13}{2}^-$  และ  $\frac{15}{2}^-$
4. ระดับของสปิน-พารีตี  $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$ ,  $6^+$ ,  $8^+$  ของนิวเคลียส  $^{234}_{92}\text{U}$  อยู่ที่สถานะพลังงาน 0, 44, 134, 296 และ 500 keV ตามลำดับ ให้แสดงว่าพลังงานเหล่านี้เป็นแถบพลังงานการหมุน (rotational energy band) พร้อมกับให้ทำนายพลังงานที่สถานะ  $10^+$

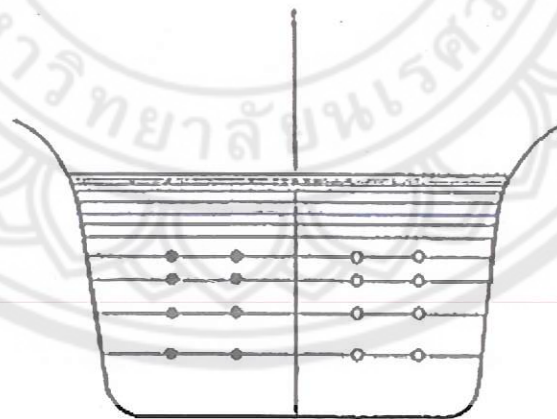
## บทที่ 4

### แบบจำลองแก๊สเฟอร์มิ

#### (THE FERMI GAS MODEL)

แบบจำลองแก๊สเฟอร์มิ (Fermi Gas Model) นอกจากจะใช้ในวิชาฟิสิกส์ของอะตอมแล้ว ยังนำมาใช้ในวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์อีกด้วย โดยในวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์ แบบจำลองแก๊สเฟอร์มิถูกนำไปอธิบายพจน์บางพจน์ในสูตรการทดลองมวล ทำนายการกระเจิงแบบวิถีอิสระเฉลี่ย (mean free path) ขวามากของนิวคลีออนที่มีพลังงานสูงมาก รวมทั้งใช้ทำนายความลึกของหลุมศักย์

ตามแบบจำลองแก๊สของเฟอร์มิของนิวเคลียส จะสมมุติให้นิวตรอนและโปรตอนเคลื่อนที่อย่างอิสระภายใต้หลุมศักย์ของแรงดึงดูดภายในนิวเคลียส โดยจะไม่นำแรงระหว่างคู่ของนิวคลีออนมาคิดถึงแม้ว่าจะมีผลต่อหลุมศักย์ก็ตาม ทุกนิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียสจะถูกสมมุติให้เป็นแก๊สอยู่ภายในปริมาตรทรงกลมเล็ก ๆ ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของนิวเคลียส โดยแก๊สนี้จะต้องสอดคล้องกับทฤษฎีพลังงานจลน์ของแก๊ส ดังนั้นทุกครั้งที่เราพูดถึงนิวเคลียสเราก็จะพิจารณาให้นิวเคลียสเป็นปริมาตรของแก๊ส โดยแก๊สที่อยู่ในปริมาตรนี้มีสองชนิดคือ แก๊สเฟอร์มิโปรตอน



นิวตรอน

โปรตอน

รูป 4.1 แผนภาพระดับพลังงานของโปรตอนและนิวตรอน  
ตามแบบจำลองแก๊สเฟอร์มิ (ดัดแปลงจาก A. P. Arya,  
*Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon,  
1968, p. 339)



(proton Fermi gas) และแก๊สเฟอร์มินิวตรอน (neutron Fermi gas) ซึ่งเมื่อเวลาพิจารณา ก็จะพิจารณาแยกกันเป็นชนิด ๆ ไป และการคำนวณในแบบจำลองนี้จะใช้วิชาสถิติเข้ามาช่วย

ทั้งโปรตอนและนิวตรอนที่เป็นอนุภาคเฟอร์มิจะต้องสอดคล้องกับหลักการกีดกันเพาลี ดังนั้นในแต่ละระดับพลังงานของโปรตอนก็จะมีจำนวนโปรตอนได้อย่างมากที่สุดสองตัว (คือมีสปิน  $+\frac{1}{2}$  และ  $-\frac{1}{2}$ ) ในระดับพลังงานของนิวตรอนก็เช่นเดียวกัน ในรูป 4.1 แสดงระดับพลังงานของเฟอร์มิ ระยะห่างระหว่างระดับพลังงานจะเป็นอันดับของสองสาม MeV

ในการคำนวณหาความลึกของหลุมศักย์ของนิวเคลียสที่อยู่ในสถานะพื้นโดยใช้แบบจำลองแก๊สเฟอร์มิ จะสมมุติให้นิวคลีออนที่เป็นอนุภาคเฟอร์มิ เคลื่อนที่อยู่ภายใต้ศักย์คงตัวภายในปริมาตรที่กำหนดให้เป็นกล่องลูกบาศก์แทนปริมาตรทรงกลม (เพื่อให้การถอดสมการคลื่นง่ายขึ้น) และด้วยเหตุที่นิวคลีออนจะต้องอยู่ในปริมาตรนี้เท่านั้น เราจึงสมมุติให้ศักย์ที่ขอบกล่องมีค่าสูงมากจนกระทั่งฟังก์ชันคลื่นเป็นศูนย์ที่ขอบกล่อง สมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ของนิวคลีออนจะเป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E\psi \quad (4.1)$$

ผลเฉลยของสมการนี้จะหายไปที  $x=y=z=0$  และที่  $x=y=z=L$  เมื่อ  $L$  เป็นความยาวของลูกบาศก์ เราเขียน  $\psi$  ได้เป็น

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (4.2)$$

เมื่อใช้วิธีแยกตัวแปร จะได้ส่วนประกอบในแนวแกน  $x$  ของสมการคลื่นเป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = E_x X(x) \quad (4.3)$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$X(x) = A' \sin \frac{\sqrt{2ME_x}}{\hbar} x \quad (4.4)$$

เมื่อ

$$\frac{\sqrt{2ME_x}}{\hbar} L = n_x \pi \quad \text{และ} \quad n_x = 1, 2, 3, 4, \dots$$

หรือ

$$E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2ML^2} \quad (4.5)$$

เราอาจหา  $Y(y)$ ,  $Z(z)$ , และ  $E_y$ ,  $E_z$  ได้ในทำนองเดียวกัน และเมื่อแทน  $X(x)$ ,  $Y(y)$ , และ  $Z(z)$  ที่หาได้ลงในสมการ (4.2) จะได้

$$\psi(x, y, z) = A \sin \frac{\sqrt{2ME_x}}{\hbar} x \sin \frac{\sqrt{2ME_y}}{\hbar} y \sin \frac{\sqrt{2ME_z}}{\hbar} z \quad (4.6)$$

และ

$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ML^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (4.7)$$

เมื่อ  $n_x = 1, 2, 3, 4, \dots$ ,  $n_y = 1, 2, 3, 4, \dots$ , และ  $n_z = 1, 2, 3, 4, \dots$

เพราะว่า  $E = \frac{p^2}{2M} = \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$  เมื่อเทียบกับสมการ (4.7) จะได้

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2} n^2 \quad (4.8)$$

เมื่อ  $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$  เพราะฉะนั้นจำนวนสถานะที่อยู่ในช่วงโมเมนตัม 0 ถึง  $p$  จะกำหนดให้โดย

$$n^2 (= n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \leq \frac{p^2 L^2}{\pi^2 \hbar^2} \quad (4.9)$$

จำนวนสถานะที่เป็นไปได้ ที่มีโมเมนตัมอยู่ในช่วง 0 ถึง  $p$  อาจคำนวณจากจำนวนจุดแลตทิซหน่วย (unit lattice-point) ที่อยู่ภายในหนึ่งอัฐภาค (octant) ของทรงกลม ที่มีรัศมี  $pL / \pi \hbar$  ( $= n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ ) ที่อยู่ในปริภูมิ (space) ของเลขควอนตัม  $n_x$ ,  $n_y$ , และ  $n_z$  (เหตุที่ต้องคิดเพียงหนึ่งอัฐภาคเพราะว่าเลขควอนตัมเหล่านี้จะต้องมีค่าเป็นบวกทั้งหมด) พิกัดทั้งสามของแต่ละจุดแลตทิซจะเป็นชุดที่เป็นไปได้ของเลขควอนตัม  $n_x$ ,  $n_y$ , และ  $n_z$  (เลขควอนตัมแต่ละตัวมีค่ามากกว่าศูนย์) เพราะฉะนั้นจำนวนสถานะที่เป็นไปได้จะเป็น

$$n = 2 \left( \frac{1}{8} \right) \left( \frac{4\pi}{3} \right) \left( \frac{pL}{\pi \hbar} \right)^3$$

เมื่อเลข 2 ที่คูณอยู่กับพจน์ทางด้านขวามือของสมการ มาจากเหตุผลเนื่องจากแต่ละสถานะมี

นิวคลีออนอยู่ได้ 2 ตัว ดังนั้นสถานะทั้งหมดที่เป็นไปได้ (เมื่อเรียงสถานะให้นิวคลีออนอยู่สถานะละ 1 ตัว) จึงมีจำนวนเป็นสองเท่า จึงต้องคูณด้วย 2 และเมื่อแทน  $L^3$  ด้วยปริมาตรลูกบาศก์  $V$  จะได้

$$n = \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{p^3 V}{\pi^2 \hbar^3} \right) \quad (4.10)$$

และจำนวนสถานะระหว่างโมเมนตัม  $p$  ถึง  $p + dp$  คือ

$$dn = \frac{V p^2}{\pi^2 \hbar^3} dp \quad (4.11)$$

การคำนวณหาพลังงานสูงสุดของนิวคลีออน หรือที่เรียกในที่นี้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็นพลังงานเฟอร์มิ (Fermi energy) และพลังงานเฉลี่ยของนิวคลีออนภายในนิวเคลียส ทำได้ดังนี้ ให้นิวเคลียสอยู่ที่สถานะพื้น และให้  $n = N$  หรือ  $Z$ ,  $V = (4\pi/3)(R^3)$  เมื่อ  $R = r_0 A^{1/3}$ , เมื่อแทนลงในสมการ (4.10) จะได้ค่าสูงสุดของโมเมนตัมดังต่อไปนี้ คือ

$$p_{\max}^p = C'(Z/A)^{1/3} \quad \text{และ} \quad p_{\max}^n = C'(N/A)^{1/3} \quad (4.12)$$

ด้วยก "p" และ "n" แทนโปรตอนและนิวตรอนตามลำดับ, และ  $C' = (9\pi/4)^{1/3} (\hbar/r_0)$  พลังงานเฟอร์มิกำหนดให้โดย  $E_f = p_{\max}^2 / 2M$  เมื่อแทน  $p_{\max}$  ของโปรตอนและนิวตรอนที่ปรากฏอยู่ในสมการ (4.12) ลงไป จะได้พลังงานเฟอร์มิของโปรตอนและนิวตรอนเป็น

$$\begin{aligned} E_f^p &= C(Z/A)^{2/3} \quad \text{สำหรับโปรตอน} \\ E_f^n &= C(N/A)^{2/3} \quad \text{สำหรับนิวตรอน} \end{aligned} \quad (4.13)$$

เมื่อ  $C = (1/2M)(9\pi/4)^{2/3} (\hbar^2/r_0^2)$  พลังงานเฟอร์มินี้ก็จะหาค่าออกมาเป็นตัวเลขได้โดยการกำหนดให้  $r_0 \cong 1.2 \times 10^{-13} \text{ cm}$  และ  $N \approx Z \approx A/2$  ซึ่งเมื่อแทนค่าเหล่านี้และค่าคงตัวอื่น ๆ ลงในสมการ (4.13) แล้ว ก็จะได้พลังงานเฟอร์มิของโปรตอนและนิวตรอนเป็น

$$E_f^p \cong E_f^n \cong E_f \cong 32 \text{ MeV} \quad (4.14)$$

ความลึกของหลุมศักย์,  $V_0$ , สัมพันธ์กับพลังงานเฟอร์มิ,  $E_f$ , และพลังงานยึดเหนี่ยว,  $E_b$ , ของแต่ละนิวคลีออน ดังนี้

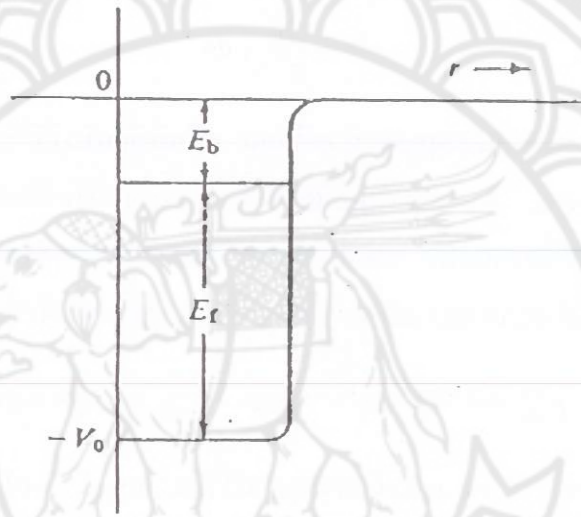


$$V_0 = E_f + E_b \cong 40 \text{ MeV} \quad (4.15)$$

เมื่อแทนค่า  $E_f$  จากสมการ (4.14) และประมาณให้  $E_b$  ของแต่ละนิวคลีออนมีค่า 8 MeV ก็จะสามารถหาความลึกของหลุมศักย์ได้เป็น

$$V_0 = 32 + 8 = 40 \text{ MeV}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $V_0$ ,  $E_f$ , และ  $E_b$  แสดงเป็นแผนภาพดังในรูป 4.2



รูป 4.2 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความลึกของหลุมศักย์,  $V_0$ , พลังงานเฟอร์มิ,  $E_f$ , และพลังงานยึดเหนี่ยวของนิวคลีออน,  $E_b$  (จาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 382)

พลังงานจลน์รวมของทุกโปรตอน  $E_Z$  และของทุกนิวตรอน  $E_N$  คำนวณหาตามแบบจำลองแก๊สเฟอร์มิได้จากความสัมพันธ์

$$E_Z = \int_0^Z E dn \quad (4.16)$$

$$E_N = \int_0^N E dn$$

แทน  $E = p^2/2M$  และ  $dn$  จากสมการ (4.11) ลงในสมการ (4.16) พร้อมทั้งเปลี่ยนขีดจำกัดของการหาปริพันธ์ และนำสมการ (4.13) มาใช้ด้วย จะได้

$$E_Z = \frac{3}{5}(ZE_f^p) \quad (4.17)$$

$$E_N = \frac{3}{5}(NE_f^n)$$

ผลรวมของพลังงานจลน์ของโปรตอนและนิวตรอนทั้งหมดจะเป็นพลังงานของนิวเคลียส  $E(Z, A)$  :

$$E(Z, A) = E_Z + E_N \quad (4.18)$$

นำ  $E_Z$  และ  $E_N$  จากสมการ (4.17) มาแทน แล้วนำสมการ (4.13) มาช่วย จะได้

$$E(Z, A) = \frac{3}{5}CA^{-2/3}(Z^{5/3} + N^{5/3}) \quad (4.19)$$

เพราะว่า  $Z = N = A/2$ , พลังงานของนิวเคลียส  $E(Z, A)$  จึงเป็นฟังก์ชันของ  $Z$  และ  $A$  เท่านั้น ไม่จำเป็นต้องบอกว่าเป็นฟังก์ชันของ  $N$  สำหรับนิวเคลียสโดยทั่วไปพลังงานจลน์เฉลี่ยต่อ นิวคลีออนมีค่าประมาณ 20 MeV

ต่อไปนี้จะคำนวณหาผลของการเข้าคู่ (effect of pairing) ของนิวคลีออนที่อยู่ในสูตรกึ่ง การทดลองมวล

พลังงานต่ำสุด  $E_{\min}$  ของนิวเคลียสหาได้จากสมการ (4.19) โดยการกำหนดให้  $Z = N = A/2$  เพราะนิวเคลียสจะเสถียรที่สุดหรือมีพลังงานต่ำสุดเมื่อมีจำนวนโปรตอนเท่ากับ จำนวนนิวตรอน และ  $E_{\min}$  ที่ได้จากสมการ (4.19) หลังจากแทน  $N$  และ  $Z$  ด้วย  $A/2$  จะเป็น

$$E_{\min} = \frac{3}{5}CA^{-2/3}[2(A/2)^{5/3}] \quad (4.20)$$

ค่าแยก (departure) จากพลังงานต่ำสุด,  $f(Z, A)$ , อาจเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} f(Z, A) &\propto E(Z, A) - E(Z, A)_{\min} \\ &= \frac{3}{5}CA^{-2/3} \left[ N^{5/3} + Z^{5/3} - 2\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \right] \end{aligned}$$

ถ้าเราแทน

$$d = N - Z = N - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} - Z$$

เราจะได้

$$f(Z, A) = \frac{3}{5} CA^{-2/3} \left[ \left( \frac{A}{2} + d \right)^{5/3} + \left( \frac{A}{2} - d \right)^{5/3} - 2 \left( \frac{A}{2} \right)^{5/3} \right] \quad (4.21)$$

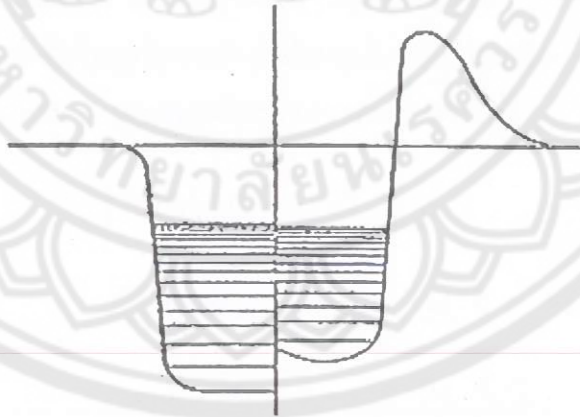
กระจาย  $\left( \frac{A}{2} + d \right)^{5/3}$  และ  $\left( \frac{A}{2} - d \right)^{5/3}$  ในพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และรักษาไว้เฉพาะพจน์ถึง  $d^2$  เท่านั้น เราจะได้

$$f(Z, A) \propto \frac{d^2}{A} = \frac{\left( \frac{A}{2} - Z \right)^2}{A} \quad (4.22a)$$

หรือ

$$f(Z, A) = a_4 \frac{\left( \frac{A}{2} - Z \right)^2}{A} \quad (4.22b)$$

เมื่อ  $a_4$  เป็นค่าคงตัว ซึ่งพจน์  $f(Z, A)$  นี้เป็นพจน์หนึ่งในสูตรการทดลองมวล เรียกว่า พจน์สมมาตร (symmetry term) เมื่ออยู่ในสูตรพจน์นี้จะมีเครื่องหมายเป็นลบ ถ้าจำนวนโปรตอน



นิวตรอน โปรตอน

รูป 4.3 ระดับพลังงานของนิวตรอนและโปรตอน

ระดับพลังงานของโปรตอนที่ต่างไปจากระดับพลังงานของนิวตรอนนั้นเนื่องจากสัทธิกลอมบ์ (คัดแปลงจาก

A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 384)



ไม่เท่ากับจำนวนนิวตรอน พจน์นี้จะไม่เป็นศูนย์ มีผลทำให้พลังงานยึดเหนี่ยวน้อยลงหรือนิวเคลียสเสถียรน้อยลง แต่ถ้ามีจำนวนเท่ากันจะมีค่าเป็นศูนย์ และมีผลทำให้พลังงานยึดเหนี่ยวมีค่ามากหรือนิวเคลียสเสถียรมากขึ้น

ในตอนท้ายของบทนี้อาจมีข้อสงสัยเกิดขึ้นว่า ทำไมนิวคลีไอที่อยู่ในตารางนิวคลีไอดีจึงมีจำนวนนิวตรอนมากกว่าโปรตอน ทั้งที่สมควรจะต้องเท่ากันมากกว่า ข้อสงสัยนี้อธิบายได้ว่า เนื่องจากการในแบบจำลองแก๊สแฟร์มิที่เราไม่ได้คำนึงถึงผลของศักย์คูโลมบ์ที่เกิดจากการผลักกันระหว่างโปรตอนภายในนิวเคลียส ซึ่งศักย์คูโลมบ์จะมีขนาดเป็น eV ศักย์คูโลมบ์นี้จะไปหักล้างกับศักย์แรงดึงดูดระหว่างโปรตอน มีผลทำให้ศักย์ของโปรตอนตื้นกว่าของนิวตรอนเล็กน้อย (ตื้นกว่ากันเป็น eV) แต่ระดับพลังงานสูงสุดของโปรตอนและนิวตรอนนั้นเกือบเท่ากัน ดังจะเห็นในรูป 4.3 ดังนั้นระดับพลังงานของนิวตรอนจึงมีจำนวนมากกว่าระดับพลังงานของโปรตอน มีผลทำให้นิวเคลียสเสถียรมีจำนวนนิวตรอนมากกว่าโปรตอนได้

## เอกสารอ้างอิง

1. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
2. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
3. W.E. Burcham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
4. W. N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An Introduction to Nuclear Physics*. 2nd edit, Cambridge University, Cambridge, 2001.
5. A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
6. V. Devanathan, *Nuclear Physics*, Narosha Publishing House, New Delhi, 2006
7. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.

8. E. M. Henley and A. Garcia, *Subatomic Physics*, 3rd edit, World Scientific, New Jersey 2007.
9. K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*, 2nd edit, Institute of Physics, Brista, 1999.
10. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.
11. I. Kaplan, *Nuclear Physics*, Addison-Wesley, London, 1958.
12. K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
13. B.R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, Wiley, West Sussex, 2006.
14. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
15. H.C. Ohanian, *Modern Physics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1990.
16. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.

### แบบฝึกหัด

1. บนพื้นฐานของแบบจำลองแก๊สเฟอร์มิ จงคำนวณการยกตัวของก้นหลุมศักย์โปรตอน ที่เป็นผลเนื่องมาจากแรงผลักรูบอมบ์
2. ให้คำนวณหาพลังงานเฟอร์มิของนิวคลีออนในนิวเคลียส  $^{40}_{20}\text{Ca}$  และหาส่วนลึกของหลุมศักย์  $V_0$  ของแรงนิวเคลียร์
3. จงคำนวณหาพลังงานสมมาตร (พจน์สมมาตร) และอัตราส่วนระหว่างพลังงานสมมาตรกับพลังงานยึดเหนี่ยวรวมของ  $^{27}_{13}\text{Al}$ ,  $^{63}_{29}\text{Cu}$ ,  $^{238}_{92}\text{U}$

## บทที่ 5

### แบบจำลองนิวเคลียสประกอบ

### (THE COMPOUND NUCLEUS MODEL)

#### 5.1 แบบจำลองนิวเคลียสประกอบ (Compound Nucleus Model)

ในการศึกษาโครงสร้างของนิวเคลียส ประเด็นสำคัญของการศึกษาจะมุ่งไปที่แบบจำลองอนุภาคเชิงเดียวกับแบบจำลองกลุ่ม ทำนองเดียวกันในการศึกษาปฏิกิริยานิวเคลียร์ ประเด็นสำคัญจะมุ่งไปที่เรื่องปฏิกิริยาตรง (direct reaction) กับการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบ (compound nucleus formation) ในกรณีของปฏิกิริยาตรงจะใช้ได้ดีกับกรณีของอนุภาคตกกระทบมีพลังงานสูง โดยให้นิวคลีออนที่เป็นอนุภาคตกกระทบหนึ่งนิวคลีออนมีอันตรกิริยากับนิวคลีออนของนิวเคลียสได้เพียงหนึ่งนิวคลีออนเท่านั้น และเวลาของการมีอันตรกิริยาไม่เกินอันดับของ  $10^{-12}$  s โดยช่วงเวลาดังกล่าวนี้ เทียบได้กับช่วงเวลาที่ใช้ไปในการเคลื่อนที่ผ่านนิวเคลียสในแนวเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาคที่มีพลังงานจลน์มากกว่าอันดับของ 1 MeV ในช่วงเวลาสั้น ๆ ขนาดนี้ โอกาสที่อนุภาคตกกระทบจะมีอันตรกิริยากับนิวคลีออนของนิวเคลียสเกินกว่าหนึ่งครั้งนั้นมีน้อยมาก และอันตรกิริยาจะมีเฉพาะกับนิวคลีออนในบริเวณผิวของนิวเคลียสเป่านั้น ซึ่งผลของอันตรกิริยานิวคลีออนที่อยู่บริเวณผิวจะหลุดออกจากนิวเคลียสโดยไม่มีผลกระทบใดๆ กับนิวคลีออนที่อยู่ส่วนในของตัวนิวเคลียสเลย แต่ถ้าพลังงานของอนุภาคตกกระทบมีค่าน้อยลงจะมีเวลามากพอที่จะให้อนุภาคตกกระทบและนิวเคลียสเป่ารวมตัวกันอยู่นาน เป็นอันดับของ  $10^{-14}$  s ซึ่งสภาวะดังกล่าวนี้ถือว่าเป็นสภาวะของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบ ดังจะนำมากล่าวก่อนในบทนี้ ส่วนปฏิกิริยาตรงจะกล่าวในบทถัดไป

##### 5.1.1 ข้อสมมุติของโบร์ (The Bohr Assumption)

ก่อนจะกล่าวถึงข้อสมมุติของโบร์ (Bohr assumption) ใคร่ขอชี้ว่า ในความเป็นจริง กระบวนการของปฏิกิริยานิวเคลียร์จะเริ่มต้นนับตั้งแต่อนุภาคตกกระทบเข้ามาใกล้นิวเคลียสเป่าจน



อยู่ในพิสัยของแรงนิวเคลียร์ และจะสิ้นสุดเมื่ออนุภาคกระเด็นออกและนิวเคลียสแตกต่าง ซึ่งเป็นผลผลิตของปฏิกิริยาแยกห่างออกจากกันเกินพิสัยของแรงนิวเคลียร์ และช่วงเวลาของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบก็คือช่วงเวลาของการมีอันตรกิริยาต่อกันของอนุภาคตกกระทบกับนิวเคลียสนั่นเอง สำหรับขั้นตอนของปฏิกิริยานิวเคลียร์นั้น นีลส์ โบร์ (Niels Bohr) เป็นบุคคลแรกที่ให้ข้อสมมุติเกี่ยวกับเรื่องนี้ใน ค.ศ. 1936 โดยให้ข้อสมมุติไว้ว่า ขั้นตอนของปฏิกิริยามีสองขั้นตอนคือ ขั้นตอนแรก จะเป็นขั้นตอนของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบ  $C$  ขั้นตอนที่สอง จะเป็นขั้นตอนที่นิวเคลียสประกอบสลายตัว และให้ผลผลิตของปฏิกิริยา ขั้นตอนทั้งสองนี้เป็นอิสระไม่ขึ้นต่อกัน จากข้อสมมุติของโบร์ดังกล่าวนี้ วิธีการสลายตัวของระบบประกอบจึงขึ้นอยู่กับพลังงานโมเมนตัมเชิงมุม และภาวะกึ่งหรือที่เท่ากัน โดยไม่ขึ้นกับวิถีทางของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบเลย เหตุที่โบร์ตั้งข้อสมมุติเช่นนี้เพราะโบร์มองในแง่ว่านิวเคลียสคือระบบอนุภาคที่อนุภาคในระบบมีอันตรกิริยาต่อกันอย่างแรงด้วยแรงพิสัยสั้น ดังนั้นถ้าหากมีอนุภาคจากภายนอก (หรืออนุภาคตกกระทบ) เข้ามาในระบบนี้แล้ว อนุภาคนั้นจะต้องมีอันตรกิริยากับอนุภาคที่อยู่ในระบบ พร้อมกับทำการเฉลี่ยพลังงานให้ด้วยอย่างรวดเร็ว หลังจากนั้นถ้าหากอนุภาคใดมีพลังงานมากพอที่จะหลุดออกไปจากระบบ ซึ่งก็จะเห็นได้ว่า การสลายตัวของนิวเคลียสประกอบไม่มีวิถีทางของการก่อรูปเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยเลย

ความสมเหตุสมผล (validity) และข้อจำกัด (limitation) ของข้อสมมุติของโบร์ อาจจะพิจารณาได้ในแนวทางต่อไปนี้ เนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างนิวคลีออนเป็นอันตรกิริยาอย่างแรง การเฉลี่ยพลังงานระหว่างอนุภาคตกกระทบให้กับอนุภาคอื่น ๆ จะต้องเป็นไปอย่างรวดเร็ว ซึ่งการเฉลี่ยพลังงานจะรวดเร็วได้ก็ต่อเมื่อวิถีอิสระเฉลี่ย (mean free path)  $\Lambda$  ของอนุภาคตกกระทบน้อยกว่ารัศมี  $R$  ของนิวเคลียสมาก ด้วยเหตุนี้พลังงาน  $\varepsilon$  ของอนุภาคตกกระทบต้องไม่สูงมาก ( $\varepsilon < 50$  MeV) อาจประมาณค่า  $\Lambda$  ได้ว่า  $\Lambda \sim 0.4 \times 10^{-13}$  cm ในช่วงที่ค่าพลังงานจลน์ของนิวคลีออนที่เป็นอนุภาคตกกระทบมีค่าสูงถึงประมาณ  $\varepsilon \cong 20$  MeV แต่ถ้าพลังงานสูงขึ้นอีก  $\Lambda$  ก็จะมีค่าสูงขึ้นตามความสัมพันธ์  $\Lambda \sim 1.8 \times 10^{-15} \times E$  cm (เมื่อ  $E$  มีหน่วยเป็น MeV) การเฉลี่ยพลังงานนี้อาจใช้เวลานานจนกว่าพลังงานที่ส่งสมบนอนุภาคใดอนุภาคหนึ่งมากพอที่จะหลุดออกไปจากระบบประกอบได้ ดังจะเห็นได้ดังต่อไปนี้ กำหนดให้พลังงานการกระตุ้นรวม  $E$  ของระบบประกอบมีค่าเป็น  $E = \varepsilon + S_n$  เมื่อ  $S_n$  เป็นพลังงานการแยก ที่ใช้แยกอนุภาคตกกระทบ  $\alpha$  ออกจากนิวเคลียสประกอบ เนื่องจากวิถีอิสระเฉลี่ย  $\Lambda$  มีค่าน้อยมาก การเฉลี่ยพลังงานท่ามกลางจำนวนนิวคลีออน  $A$  ในระบบประกอบจะต้องเป็นไปอย่างรวดเร็ว แต่ละนิวคลีออนจะได้พลังงานจากการเฉลี่ยมาในปริมาณ  $E/A$  แต่ทราบใดที่  $E/A$  ยังมีค่าน้อย เมื่อเทียบกับพลังงานการแยกเฉลี่ย  $S$  ในการแยกนิวคลีออนออกจากระบบประกอบ, ( $E/A \ll S$ ), ก็จะต้องรอให้มีอันตรกิริยาเพื่อการ

แลกเปลี่ยนพลังงานอีกหลายครั้ง เพื่อส่งสมพลังงานบนอนุภาคใดอนุภาคหนึ่งจนมากพอที่จะหลุดออกไปได้ ซึ่งในการแลกเปลี่ยนพลังงานอีกหลายครั้งก่อนที่อนุภาคจะหลุดนี้จะทำให้ข้อสมมุติของโบร์ที่ว่าวิธีการคายอนุภาคของนิวเคลียสประกอบไม่ขึ้นกับวิถีทางของการก่อรูปนั้นสมเหตุสมผล เพราะการหลุดของนิวเคลียสประกอบนั้นขึ้นอยู่กับโอกาสของการส่งสมพลังงานต่างหาก จากที่กล่าวมานี้สรุปได้ว่า เงื่อนไขที่ทำให้ข้อสมมุติของโบร์สมเหตุสมผล คือ

$$(ก) \quad \Lambda \ll R$$

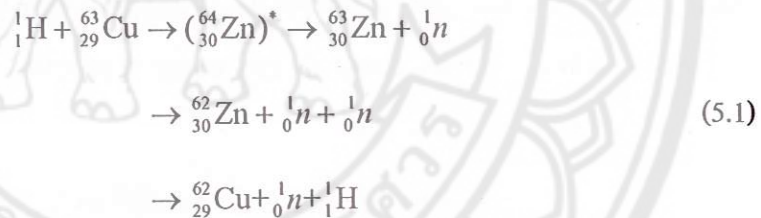
$$(ข) \quad E/A \ll S$$

หรือเขียนใหม่ในรูปแบบ  $(\varepsilon/A) + (S_a/A) \ll S$

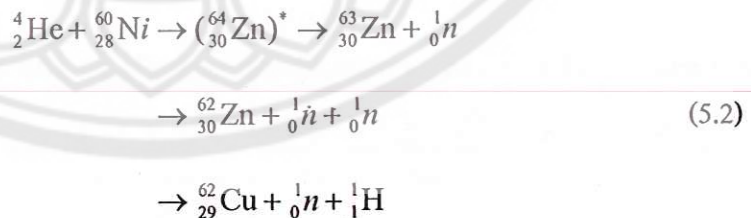
ซึ่งถ้าให้  $S_a \sim S$  จะได้เงื่อนไขในข้อนี้คือ  $\varepsilon \ll (A-1)S$

ซึ่งเงื่อนไขทั้งสองข้อจะสอดคล้องกับกรณีที่นิวคลีไอมิ  $A > 10$  และอนุภาคตกกระทบมีพลังงานในทางที่  $\varepsilon < 50$  MeV

สำหรับการตรวจสอบข้อสมมุติของโบร์ที่ว่าวิธีการสลายตัวของนิวเคลียสประกอบไม่ขึ้นกับวิถีทางการก่อรูปนั้น การตรวจสอบที่ดีที่สุดก็คือการทดลองของ เอส. โกแชล (S. Ghoshal) ซึ่งผลิตนิวเคลียสประกอบ  $^{64}_{30}\text{Zn}$  ด้วยวิถีทางต่างกันสองวิธี คือ



และ



ซึ่งปรากฏว่าภาคตัดขวางของปฏิกิริยาแต่ละวิธีการสลายตัวที่ได้จากสมการ (5.1) และ (5.2) เท่ากัน คือ

$$\sigma(p, n) : \sigma(p, 2n) : \sigma(p, pn) = \sigma(\alpha, n) : \sigma(\alpha, 2n) : \sigma(\alpha, pn)$$



เป็นการยืนยันว่าข้อสมมุติของโบร์ถูกต้อง

### 5.1.2 ปฏิกิริยานิวเคลียร์, ภาคตัดขวาง, และอัตราการคาย (Nuclear Reactions, Cross Sections, and Emission Rates)

ตามข้อสมมุติของโบร์ ภาคตัดขวางของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบตามปฏิกิริยา  $X(a,b)Y$  จะเขียนอยู่ในรูป

$$\sigma(a,b) = \sigma_c(a)G_c(b) \quad (5.3)$$

เมื่อ  $\sigma_c(a)$  เป็นภาคตัดขวางของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบ  $C$  โดยอนุภาคตกกระทบ  $a$  ที่ตกกระทบนิวเคลียส  $X$  และ  $G_c(b)$  เป็นโอกาสที่นิวเคลียสประกอบ  $C$  จะคายอนุภาค  $b$  ออกมาและหลงเหลือเป็นนิวเคลียส  $Y$  เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วย เนื่องจากการคายอนุภาคเป็นไปได้หลายวิธี  $G_c(b)$  จึงเป็นโอกาสของการคายอนุภาคหรือการสลายตัวในแต่ละวิธี หรืออาจเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็นสัดส่วนการแตกสาขา (branching ratio) ของปฏิกิริยาที่แบ่งออกเป็นชนิดคายอนุภาค  $b$  ตามที่กล่าวมานี้ผลรวมของ  $G_c(b)$  ของทุก ๆ อนุภาค  $b$  ที่ถูกคายออกมาจากระบบ  $C$  จะต้องมิต่ำเท่ากับ 1,  $\sum_b G_c(b) = 1$

ตามสมการ (5.3) ถ้าเราให้แขนเนลเข้าของปฏิกิริยา  $X(a,b)Y$  เป็นแขนเนล  $\alpha$  และได้แขนเนลออกเป็น  $\beta$  สมการ (5.3) ก็อาจเขียนได้ใหม่ได้เป็น

$$\sigma(\alpha,\beta) = \sigma_c(\alpha)G_c(\beta) \quad (5.4)$$

เมื่อ  $\sigma(\alpha,\beta)$  เป็นภาคตัดขวางของการมีแขนเนลเข้าเป็นแขนเนล  $\alpha$  และแขนเนลออกเป็นแขนเนล  $\beta$ ,  $\sigma_c(\alpha)$  เป็นภาคตัดขวางของการก่อรูปเป็นระบบประกอบ  $C$  ผ่านทางแขนเนลเข้า  $\alpha$ , และ  $G_c(\beta)$  เป็นโอกาสที่ระบบ  $C$  จะสลายตัวผ่านทางแขนเนล  $\beta$  ตามลำดับ

จากการสรุปจากข้อสมมุติของโบร์ที่ว่า การสลายตัวของระบบประกอบจะขึ้นกับเฉพาะพลังงาน  $E_c$ , โมเมนตัมเชิงมุม  $J_c$ , และภาวะคู่หรือคี่ เท่านั้น โดยไม่ขึ้นกับวิถีทางของการก่อรูปนั้น จะใช้ไม่ได้กับการกระเจิงแบบยืดหยุ่น ซึ่งแขนเนลเข้าและแขนเนลออกเป็นแขนเนล  $\alpha$  เหมือนกัน (และภาคตัดขวางเขียนได้เป็น  $\sigma(\alpha,\alpha)$ ) ทั้งนี้เพราะเราพบว่ามีผลการแทรกสอด (ระหว่าง  $A_{res}$  และ  $A_{pot}$ ) ปรากฏให้เห็นด้วย ซึ่งแสดงว่ามีการเกี่ยวพันกันระหว่างคลื่นตกกระทบ



และคลื่นกระเจิง เพราะฉะนั้นสมการ (5.4) จึงใช้ไม่ได้กับการกระเจิงแบบยืดหยุ่น

เพื่อให้การศึกษานิวเคลียสประกอบของเราในหัวข้อนี้ง่ายขึ้น เราจะตัดการเกี่ยวพันกันระหว่างโมเมนต์เชิงมุมและภาวะคู่หรือคี่ของระบบประกอบทิ้งไป ซึ่งถึงแม้จะทำให้ผลลัพธ์มีความคลาดเคลื่อนไปบ้าง แต่ก็คงไม่ถึงกับทำให้คุณภาพของผลลัพธ์สูญเสียไปมากนัก

มาถึงตอนนี้ใครจะขอแนะนำปริมาณสองสามปริมาณที่ใช้อธิบายการสลายตัวของระบบประกอบ เริ่มด้วยปริมาณที่เรียกว่าชั่วชีวิตเฉลี่ย (mean lifetime),  $\tau(E_C)$ , ของระบบประกอบ  $C$  ก่อนสลายตัว และ  $\Gamma(E_C)$  ซึ่งนิยามให้เป็น

$$\Gamma(E_C) = \frac{\hbar}{\tau(E_C)} \quad (5.5)$$

ซึ่งคืออัตราการสลายตัว  $\hbar$  ครั้งต่อวินาที

$\Gamma$  เป็นพลังงาน แต่ต่อมาแสดงบทบาทเป็นส่วนกว้างระดับ (level width) เราจึงเรียกว่าเป็นส่วนกว้างรวม (total width) ของสถานะพลังงานของระบบประกอบ  $C$  ที่มีพลังงานการกระตุ้น  $E_C$  เนื่องจากระบบ  $C$  อาจสลายตัวได้หลายแขนง เพราะฉะนั้นอัตราการสลายตัวรวม (total decay rate)  $\Gamma$  จะอยู่ในรูปผลรวมของอัตราการสลายตัวย่อยไปสู่แต่ละแขนง  $\Gamma_\beta$

$$\Gamma(E_C) = \sum_{\beta} \Gamma_{\beta}(E_C) \quad (5.6)$$

$\Gamma_{\beta}(E_C)$  เป็นฟังก์ชันของพลังงาน และเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็นส่วนกว้างย่อย (partial width) ของการสลายตัวไปสู่แขนง  $\beta$

โอกาสแตกสาขา (branching probability) หรือสัดส่วนการแตกสาขา  $G_C$  อาจกำหนดให้อยู่ในพจน์ของ  $\Gamma$  ได้โดย

$$G_C(\beta) = \frac{\Gamma_{\beta}}{\Gamma} \quad (5.7)$$

สำหรับกับกระบวนการที่ย้อนกลับกับกระบวนการแรก หรือปฏิกิริยาย้อนกลับกับปฏิกิริยาแรก โดยแขนงนอกเปลี่ยนเป็นแขนงเข้าและแขนงเข้าเปลี่ยนเป็นแขนงนอก เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง  $\sigma_C(\alpha)$  ซึ่งเป็นโอกาสของการก่อรูปเป็นระบบประกอบ  $C$  แล้วสลายตัวออกจากแขนง  $\alpha$  กับ  $\Gamma$  ซึ่งเป็นอัตราการสลายตัวไปสู่แขนง  $\alpha$  หรือส่วนกว้างของแขนง  $\alpha$  ได้โดยใช้ทฤษฎีบทส่วนกลับในสมการ (A.93) (ดูในภาคผนวก A) และจะได้ความสัมพันธ์ออกมาเป็น

$$\frac{\sigma_c(\alpha)}{\Gamma_\alpha \lambda_\alpha^2} = U(E_c) \quad (5.8)$$

และถ้าเราแทนสมการ (5.4) ลงในสมการ (A.93) ซึ่งเป็นทฤษฎีบทส่วนกลับ และใช้ค่า  $G_c(\beta)$  จากสมการ (5.7) จะได้

$$\frac{\sigma_c(\alpha)}{\Gamma_\alpha \lambda_\alpha^2} = \frac{\sigma_c(\beta)}{\Gamma_\beta \lambda_\beta^2} = U(E_c) \quad (5.9)$$

$U(E_c)$  ที่เราได้มาในสมการ (5.8) หรือ (5.9) จะขึ้นกับพลังงานการกระตุ้นเท่านั้น โดยไม่ขึ้นกับแชนเนล  $\alpha$  หรือ  $\beta$

โอกาส  $G_c(\beta)$  ของการสลายตัวผ่านทางแชนเนล  $\beta$  สามารถเขียนเสียใหม่ในรูป ( $k = \lambda^{-1}$ )

$$G_c(\beta) = \frac{k_\beta^2 \sigma_c(\beta)}{\sum_\gamma k_\gamma^2 \sigma_c(\gamma)} \quad (5.10)$$

โดยการบวกจะกระทำกับทุก ๆ แชนเนลที่นิวเคลียสประกอบ  $C$  จะสลายตัวไปได้ ดังนั้นเราอาจคำนวณหาภาคตัดขวาง  $\alpha \rightarrow \beta$  ในสมการ (5.4) ได้ถ้าหากเรารู้ภาคตัดขวาง  $\sigma_c(\gamma)$  ของการก่อรูปเป็นระบบประกอบทุก ๆ แชนเนล แต่ทั้งนี้จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ข้อสมมุติของโบร์สมเหตุสมผลด้วย

ต่อจากนี้ไปเราจะประยุกต์แบบจำลองนิวเคลียสประกอบเข้ากับปฏิกิริยานิวเคลียร์ในแต่ละบริเวณ (บริเวณในที่นี้หมายถึงย่านพลังงาน) ของพลังงานการกระตุ้นสองบริเวณคือ

(ก) บริเวณเรโซแนนซ์ (Resonance Region) บริเวณหรือย่านนี้เป็นบริเวณที่พลังงานการกระตุ้นมีค่าต่ำ ๆ ในบริเวณนี้ส่วนกว้างระดับ  $\Gamma$  จะมีค่าน้อยมากหรือคมเมื่อเทียบกับการแยกห่าง (separation)  $D$  ระหว่างระดับ เราอาจเรียกบริเวณดังกล่าวนี้ว่าเป็นบริเวณหรือย่านที่มี  $\Gamma/D \ll 1$

(ข) บริเวณภาวะต่อเนื่อง (Continuum Region) บริเวณหรือย่านนี้เป็นบริเวณที่พลังงานการกระตุ้นมีค่าสูง ๆ เนื่องจากยิ่งระดับพลังงานสูงขึ้นส่วนกว้างระดับจะมีค่ามากขึ้นขณะเดียวกันการแยกห่างกลับมีค่าน้อยลง ดังนั้นที่บริเวณพลังงานการกระตุ้นสูง ๆ นี้ ส่วนกว้างระดับจึงคาบเกี่ยวกัน บริเวณหรือย่านนี้จึงเรียกว่าเป็นบริเวณภาวะต่อเนื่อง หรือเป็นบริเวณที่มี  $\Gamma/D \ll 1$

การประยุกต์แบบจำลองนิวเคลียสประกอบเข้ากับปฏิกิริยานิวเคลียร์ในบริเวณทั้งสองนี้จะพิจารณาเรียงลำดับหัวข้อดังต่อไปนี้



## 5.2 ทฤษฎีของการกระเจิงเรโซแนนซ์ (Theory of Resonance Scattering)

การพิจารณาปฏิยานิวเคลียร์ในบริเวณหรือย่านเรโซแนนซ์,  $\Gamma/D \ll 1$ , ต่อไปนี้เราจะพยายามทำให้ปัญหาของเราง่ายขึ้นโดยกำหนดข้อสมมุติขึ้นมาสองประการคือ (ก) ให้อนุภาคตกกระทบเป็นนิวตรอนที่มีพลังงานต่ำมาก, และนิวตรอนที่มีผลกระทบบกับนิวเคลียสเป้าเป็นนิวตรอนที่มี  $l=0$  เท่านั้น (ข) แชนเนลเปิด (แชนเนลออก) ของการสลายตัวของนิวเคลียสประกอบเป็นแชนเนล  $\alpha$  แชนเนลเดียวกันกับแชนเนลเข้า ดังนั้นปฏิกริยาที่เราากำลังพิจารณาในที่นี้จึงเป็นเฉพาะแต่เพียงการกระเจิงแบบยืดหยุ่นอย่างเดียวเท่านั้น

ในการกระเจิงแบบยืดหยุ่น ฟังก์ชันคลื่นออกจะแตกต่างจากฟังก์ชันคลื่นตกกระทบเฉพาะการเลื่อนเฟสเท่านั้น ด้วยเหตุนี้ฟังก์ชันคลื่นรวมในแชนเนล  $\alpha$  จึงอาจเขียนได้เป็น

$$u_0 \sim r^{iKr} + e^{i(Kr+2\zeta)}, \quad r < R_x \quad (5.11)$$

เมื่อ  $K$  เป็นเลขคลื่นของระบบในแชนเนล  $\alpha$  จากการใช้นิยามที่กำหนดไว้ในสมการ (A.49) (ดูภาคผนวก A) คือ

$$f_0(r) = R \left( \frac{du_0/dr}{u_0} \right)_{r=R} = R \left( \frac{d(\ln u_0)}{dr} \right)$$

เราจะได้ว่า

$$f_0(E) = -KR \tan(KR + \zeta) \quad (5.12)$$

หรือ

$$f_0(E) = -KR \tan Z(E) \quad (5.13a)$$

เมื่อ

$$Z(E) = (KR + \zeta) \quad (5.13b)$$

เมื่อพลังงานของอนุภาคตกกระทบเพิ่มขึ้น ฟังก์ชัน  $f_0(E)$  ตามสมการ (5.13) จะมี



ค่าขึ้นอยู่กับอยู่ระหว่าง 0 กับ  $\infty$  จากสมการ (A.55) (ดูในภาคผนวก) เราหมายเหตุได้ว่าแอมพลิจูดของการกระเจิงเรโซแนนซ์จะมีค่ามากที่สุดถ้า  $f_0$  มีค่าเป็นศูนย์ เราเรียกพลังงาน  $E_n$  ที่ทำให้  $f_0$  มีค่าเป็นศูนย์ว่าเป็น พลังงานเรโซแนนซ์ (resonance energy) และมีนิยามเป็น

$$f_0(E_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.14a)$$

หรือ

$$Z(E_n) = n\pi \quad (5.14b)$$

เราจะขยาย  $f_0(E_n) = 0$  ให้ใกล้ค่าศูนย์ของมัน หรือใกล้พลังงานเรโซแนนซ์  $E_n$

$$f_0(E_n) = \left( \frac{df}{dE} \right)_{E=E_n} (E - E_n) + \dots \quad (5.15)$$

ดังนั้นเมื่อแทน  $f_0$  ของกรณีใกล้เรโซแนนซ์ลงในสมการ (A.55) (ดูในภาคผนวก) จะได้

$$A_{res} = \frac{-2ikR}{\left( \frac{df_0}{dE} \right)_{E_n} (E - E_n) - ikR} \quad (5.16)$$

เราให้  $\Gamma_n$  เป็นครึ่งส่วนกว้าง (half-width) และนิยามเป็น

$$\Gamma_n = \frac{-2kR}{(df_0/dE)_{E_n}} \quad (5.17)$$

ซึ่งจะให้

$$A_{res} = \frac{i\Gamma_n}{(E - E_n) + i\Gamma_n/2} \quad (5.18)$$

หรือ

$$|A_{res}|^2 = \frac{(\Gamma_n)^2}{(E - E_n)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma_n)^2} \quad (5.19)$$

ให้เราพิจารณาทั้งสามกรณีต่อไปนี้

### ก. ใกล้เรโซแนนซ์ (Near Resonance)

ใกล้เรโซแนนซ์คือ  $E \cong E_n$ , ในกรณีใกล้เรโซแนนซ์  $A_{res} \gg A_{pot}$  ดังนั้นจาก

$$\sigma_{s,0} = \pi \lambda^2 |A_{res} + A_{pot}|^2$$

เมื่อกำจัด  $A_{pot}$  ออกไปเนื่องจากมีค่าน้อยกว่า  $A_{res}$  มาก และแทน  $A_{res}$  จากสมการ (5.19) ลงไปจะได้

$$\sigma_{s,0} = \frac{\pi \lambda^2 (\Gamma_n)^2}{(E - E_n)^2 + (\frac{1}{2} \Gamma_n)^2} \quad (5.20)$$

สูตรนี้เป็นที่รู้จักกันดีในกรณีของการแกว่งกวัด (oscillation) ที่เกิดจากแรงแบบหน่วง (damped force) ว่าเป็น สูตรการกระจาย (dispersion formula) ที่เรโซแนนซ์หรือใกล้เรโซแนนซ์,  $E = E_n$ , ดังนั้นเมื่อแทนลงในสมการ (A.55) จะได้

$$A_{res} = 2$$

และเมื่อแทนลงในสมการ (5.20) จะได้

$$\sigma_{s,0} = 4\pi \lambda^2 \quad (5.21)$$

ขณะที่

$$A_{pot} = e^{2ikR} - 1 \approx 2ikR \quad (5.22)$$

มีค่าน้อยมากเพราะ  $kR \ll 1$  ดังนั้นภาคตัดขวางการกระเจิงรวมในกรณีใกล้เรโซแนนซ์จะเป็นตามสมการ (5.21)

### ข. ไกลจากเรโซแนนซ์ (Far From Resonance)

บางที่ ที่อยู่ระหว่างเรโซแนนซ์หนึ่งกับอีกเรโซแนนซ์หนึ่ง เป็นที่ซึ่งฟังก์ชัน  $f_0$  มีค่าสูงมาก และด้วยเหตุนี้  $A_{res}$  จะมีค่าน้อยมาก เราจะเรียกที่ดังกล่าวนี้ว่าเป็นที่ไกลจากเรโซแนนซ์ และการกระเจิงที่เกิดขึ้นจะเนื่องมาจากการกระเจิงทรงกลมแข็งเท่านั้น ดังนั้นจาก

$$\sigma_{s,0} = \pi\lambda^2 |A_{res} + A_{pot}|^2$$

ในกรณีนี้  $A_{res}$  มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ  $A_{pot}$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sigma_{s,0} = \pi\lambda^2 |A_{pot}|^2$$

สำหรับพลังงานต่ำ ๆ

$$A_{pot} = e^{2ikR} - 1 \sim 2ikR$$

ด้วยเหตุนี้จะได้

$$\sigma_{s,0} = \pi\lambda^2 |2ikR|^2$$

หรือ

$$\sigma_{s,0} = 4\pi R^2 \quad (5.23)$$

ซึ่งสมการ (5.23) ที่ได้นี้ เป็นภาคตัดขวางการกระเจิงรวมของกรณีไกลจากเรโซแนนซ์

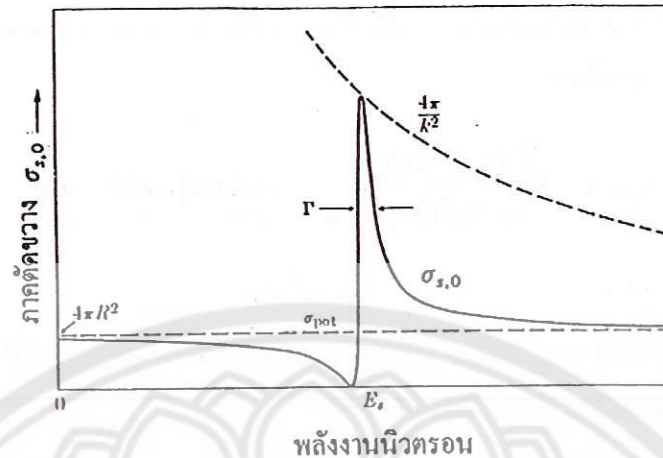
#### ค. บริเวณมัธยันตร์ (Intermediate Region)

สำหรับบริเวณมัธยันตร์ (intermediate region) หรือบริเวณท่ามกลาง ซึ่งเป็นบริเวณหรือย่านที่  $E - E_n > \Gamma_n / 2$  แอมพลิจูด  $A_{res}$  และ  $A_{pot}$  จะมีเครื่องหมายตรงข้ามกันหาก  $E < E_n$  และจะมีเครื่องหมายเหมือนกันหาก  $E > E_n$  ผลของการเปลี่ยนเครื่องหมายทำให้เกิดการแทรกสอดระหว่างสองแอมพลิจูดดังจะเห็นได้ในรูป 5.1

ภาคตัดขวางการกระเจิงที่เป็นฟังก์ชันของพลังงานในทั้งสามบริเวณแสดงในรูป 5.1 ที่บริเวณเรโซแนนซ์ ภาคตัดขวางการกระเจิงแบบยึดหยุ่นจะมีค่ามากที่สุดคือ  $4\pi\lambda^2$  หรือ  $4\pi / k^2$  ส่วนที่บริเวณไกลเรโซแนนซ์จะมีค่า  $4\pi R^2$  และที่บริเวณมัธยันตร์หรือบริเวณท่ามกลางจะมีการแทรกสอดของแอมพลิจูดให้เห็น

จากที่กล่าวมาทั้งหมดนี้เป็นภาพของเรโซแนนซ์อย่างง่าย ๆ ที่พลังงานของอนุภาคตกกระทบมีค่าต่ำ ๆ แต่ต่อจากนี้ไปเราจะขยายปัญหาไปสู่กรณีที่อนุภาคตกกระทบมีพลังงานสูงขึ้น ซึ่งแทนที่แกนเนลออกของการสลายตัวของนิวเคลียสประกอบจะมีเพียงแกนเนลเดียว คือแกนเนลเข้า ก็จะมีแกนเนลออกอื่น ๆ ที่เป็นแกนเนลปฏิบัติการเปิดออกอีกด้วย แกนเนลปฏิบัติการ  $\beta$





รูป 5.1 การแปรผันของภาคตัดขวางการกระเจิงแบบยืดหยุ่นของนิวตรอน  $l=0$  ที่ใกล้เรโซแนนซ์ในนิวเคลียสประกอบ ค่ามากที่สุดของ  $\sigma_{s,0}$  คือ  $4\pi\lambda^2$  (หรือ  $4\pi/k^2$ ) ส่วนที่ใกล้เรโซแนนซ์  $\sigma_{s,0}$  จะมีค่า  $4\pi R^2$  (คัดแปลงจาก H.A. Engle, *Introduction to Nuclear Physics.*, Reading, Mass : Addison-Wesley, 1967, p. 404)

แขนเนลแรกที่เปิดออกก็คือแขนเนลของการคายรังสีแกมมา ซึ่งเราเรียกว่าเป็น กระบวนการจับและแผ่รังสี (radiative capture process) และเมื่อค่าพลังงานของอนุภาคตกกระทบสูงขึ้นอีก แขนเนลออกที่จะเกิดตามมาก็จะเป็นแขนเนลของการคายอนุภาคของนิวเคลียสประกอบ ดังนั้นในกรณีที่อนุภาคตกกระทบมีพลังงานสูง ๆ นี้ภาคตัดขวางปฏิกิริยาจะไม่ใช่อันยัตต่อไป ฟังก์ชันคลื่นในแขนเนลตกกระทบ กำหนดให้โดย

$$u_l \sim e^{-ikr} + be^{ikr}$$

เมื่อ

$$b = e^{2i\zeta} e^{-2q}$$

$b$  เป็นแอมพลิจูดเชิงซ้อน (complex amplitude) ของฟังก์ชันคลื่นกระเจิง แทนที่เคยเป็น  $b = e^{2i\zeta}$  เหมือนในกรณีของการกระเจิงบริสุทธิ์ (หมายเหตุ:  $e^{-2q}$  เป็นปริมาณจริง และ  $q$  เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยมาก)

ดังนั้น ฟังก์ชันคลื่นของแขนเนลเข้าจึงกำหนดได้โดย

$$u_l \sim e^{-ikr} + e^{i(Kr+2\zeta+2iq)} \quad (5.24)$$

พจน์ที่อยู่ท้ายสุดทางด้านขวามือของสมการ เป็นฟังก์ชันคลื่นที่กลับออกมาจากนิวเคลียสประกอบ ฟังก์ชัน  $f_0(E)$  กำหนดให้โดย

$$f_0(E) = R \left( \frac{du_0(r)/dr}{u_0(r)} \right)_{r=R} = -KR \tan[Z(E) + iq] \quad (5.25)$$

เมื่อ  $Z(E) = KR + \zeta(E)$

เราจะดำเนินการหา  $\sigma_{s,0}$  และ  $\sigma_{r,0}$  อีกครั้ง โดยใช้วิธีการเช่นเดียวกับในตอนก่อน เราสมมุติว่า  $|q| \ll 1$  และเรโซแนนซ์จะนิยามให้โดย

$$f_0(E, q=0) = 0 = -\tan Z(E) \quad (5.26)$$

ขยาย  $f_0(E, q)$  ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ทั้ง  $q$  และ  $E$  ดังนี้

$$f_0(E) = (E - E_n) \left( \frac{\partial f_0}{\partial E} \right)_{E=E_n, q=0} + q \left( \frac{\partial f_0}{\partial q} \right)_{E=E_n, q=0} + \dots, \quad (5.27)$$

แทนค่า  $(\partial / \partial q)_{E=E_n, q=0}$  โดยใช้  $f_0$  จากสมการ (5.25) แทนลงไป จะได้สมการ (5.27) ใหม่เป็น

$$f_0(E) = (E - E_n) \left( \frac{\partial f_0}{\partial E} \right)_{E=E_n, q=0} - iqKR \quad (5.28)$$

กำหนดให้  $\Gamma_n^s$  และ  $\Gamma_n^r$  เป็นส่วนกว้างระดับสำหรับการกระเจิงแบบยืดหยุ่นผ่านทางแชนเนล  $\alpha$  และส่วนกว้างปฏิกิริยาผ่านทางแชนเนล  $\beta$  ตามลำดับ และนิยามให้เป็น ( $l=0$ )

$$\Gamma_n^s = \frac{-2KR}{\left( \frac{\partial f_0}{\partial E} \right)_{E=E_n, q=0}} \quad (5.29)$$

และ

$$\Gamma_n^r = \frac{-2qKR}{\left( \frac{\partial f_0}{\partial E} \right)_{E=E_n, q=0}} \quad (5.30)$$

ส่วนกว้างรวมเป็นผลรวมของส่วนกว้างทั้งสอง คือ

$$\Gamma_n = \Gamma_n^s + \Gamma_n^r \quad (5.31)$$

จากการใช้สมการ (A.54), (A.55) และ (A.56) พร้อมกับสมการ (A.29), (A.30) และ (A.31) ก็จะได้นิพจน์ของภาคตัดขวางการกระเจิงแบบยืดหยุ่นและภาคตัดขวางปฏิกิริยาแซนเนลเดี่ยวสำหรับอนุภาค  $l=0$  ที่ใกล้เรโซแนนซ์  $E \cong E_n$  เป็น

$$\sigma_{s,0} = \pi\lambda^2 \left| \frac{i\Gamma_n^s}{(E - E_n) + \frac{1}{2}i\Gamma_n} + 2kR \right|^2 \quad (5.32)$$

และ

$$\sigma_{r,0} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n^s \Gamma_n^r}{(E - E_n)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2} \quad (5.33)$$

สมการทั้งสองนี้เป็นที่รู้จักกันดีว่าคือ สูตรไบรท์-วิกเนอร์ (Briet-Wigner formulae) ที่มีชื่อเสียงนั่นเอง หมายเหตุ: ถ้าเราไม่คิดการกระเจิงทรงกลมแข็งหรือการกระเจิงศักย์ใกล้เรโซแนนซ์ เราจะได้

$$A_{res} = \frac{i\Gamma_n^s}{(E - E_n) + \frac{1}{2}i\Gamma_n} \quad (5.34)$$

และ

$$\sigma_{s,0} = \pi\lambda^2 \frac{(\Gamma_n^s)^2}{(E - E_n)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma_n)^2} \quad (5.35)$$

สูตรไบรท์-วิกเนอร์ที่ได้มานี้ ได้มาจากการสมมติให้สปินของนิวเคลียสเป้าหมายเป็นศูนย์,  $I=0$ , ถ้าเราจะพิจารณาในกรณีที่สปินนิวเคลียสเป้าหมายเป็น  $I$  ก็จะต้องปรับปรุงสูตรไบรท์-วิกเนอร์เสียใหม่ดังนี้ โมเมนตัมเชิงมุมรวม  $S$  ในแซนเนลเข้ามีค่าเป็นไปได้ทั้ง  $(I + \frac{1}{2})$  หรือ  $(I - \frac{1}{2})$  เมื่อ  $\frac{1}{2}$  เป็นสปินของโปรตอนหรือนิวตรอนที่มี  $l=0$  เนื่องจากว่าแต่ละค่าของ  $S$  มีจำนวนการวางทิศทางสปินในปริภูมิได้  $(2S+1)$  จำนวนทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการวางทิศทางสปินในปริภูมิจึงเป็น  $[2(I + \frac{1}{2}) + 1] + [2(I - \frac{1}{2}) + 1] = 2(2I + 1)$  ด้วยเหตุนี้โอกาสสัมพัทธ์หรือค่าถ่วงน้ำหนักทางสถิติ (statistical weight) เมื่อระบบอนุภาคตกกระทบและนิวเคลียสเป้า (หรือแซนเนลเข้า) มีสปินเป็น  $S$  ก็คือ

$$g(S) = \frac{2S+1}{2(2I+1)} \quad \text{สำหรับ } S = (I + \frac{1}{2}) \text{ หรือ } (I - \frac{1}{2}) \quad (5.36)$$



จากค่าถ่วงน้ำหนักทางสถิตินี้นำไปสู่นิพจน์ของภาคตัดขวางเป็น

$$\sigma_{s,0} = g(S)\pi\lambda^2 \left| \frac{i\Gamma_n^s}{(E - E_n) + \frac{1}{2}i\Gamma_n} + 2kR \right|^2 + [1 - g(S)]4\pi R^2 \quad (5.37)$$

และ

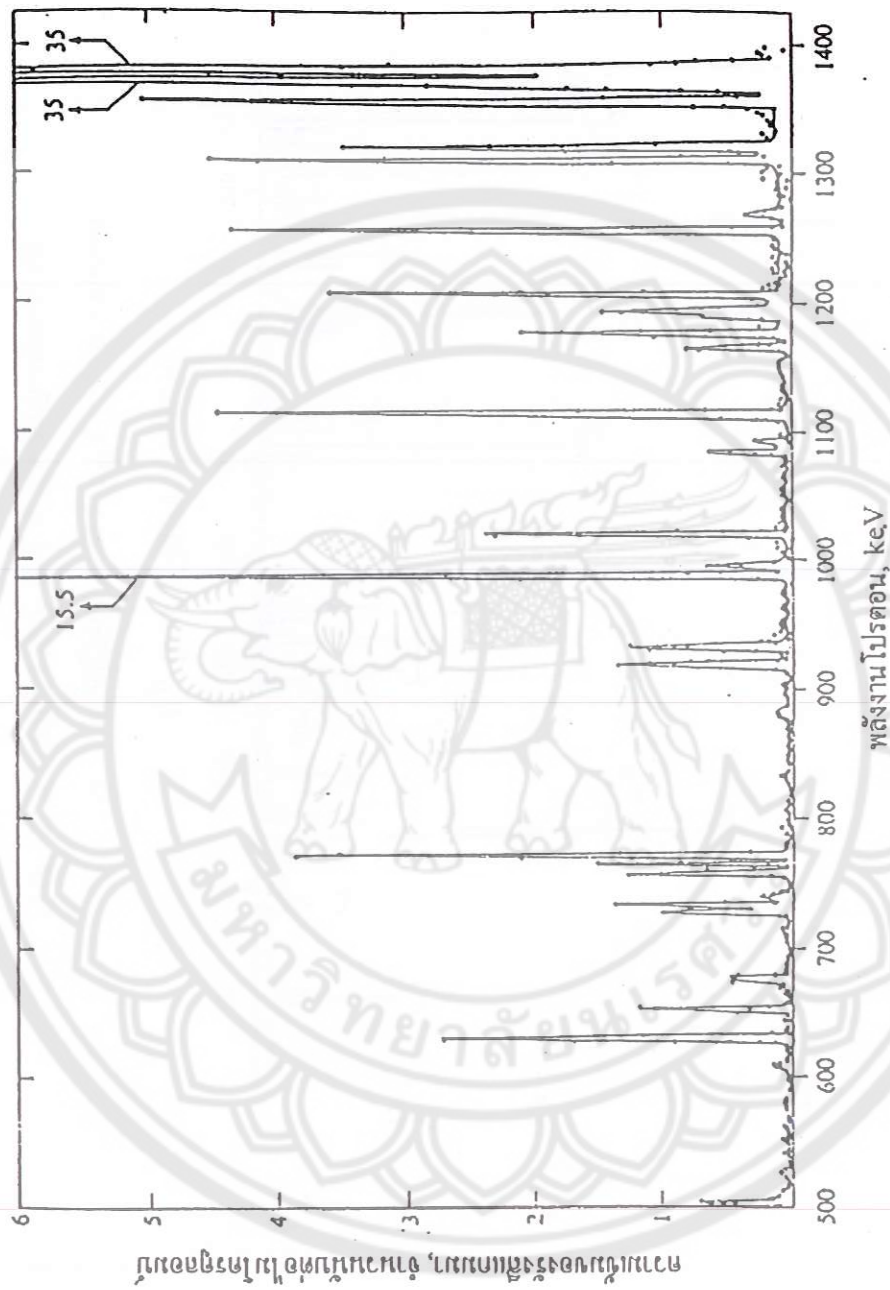
$$\sigma_{r,0} = g(S)\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n^s \Gamma_n^r}{(E - E_n)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2} \quad (5.38)$$

$s$  สมัยได้กับ  $\alpha$  และ  $r$  สมัยได้กับ  $\beta$  ของสัญลักษณ์ที่ใช้ในทั่วไป

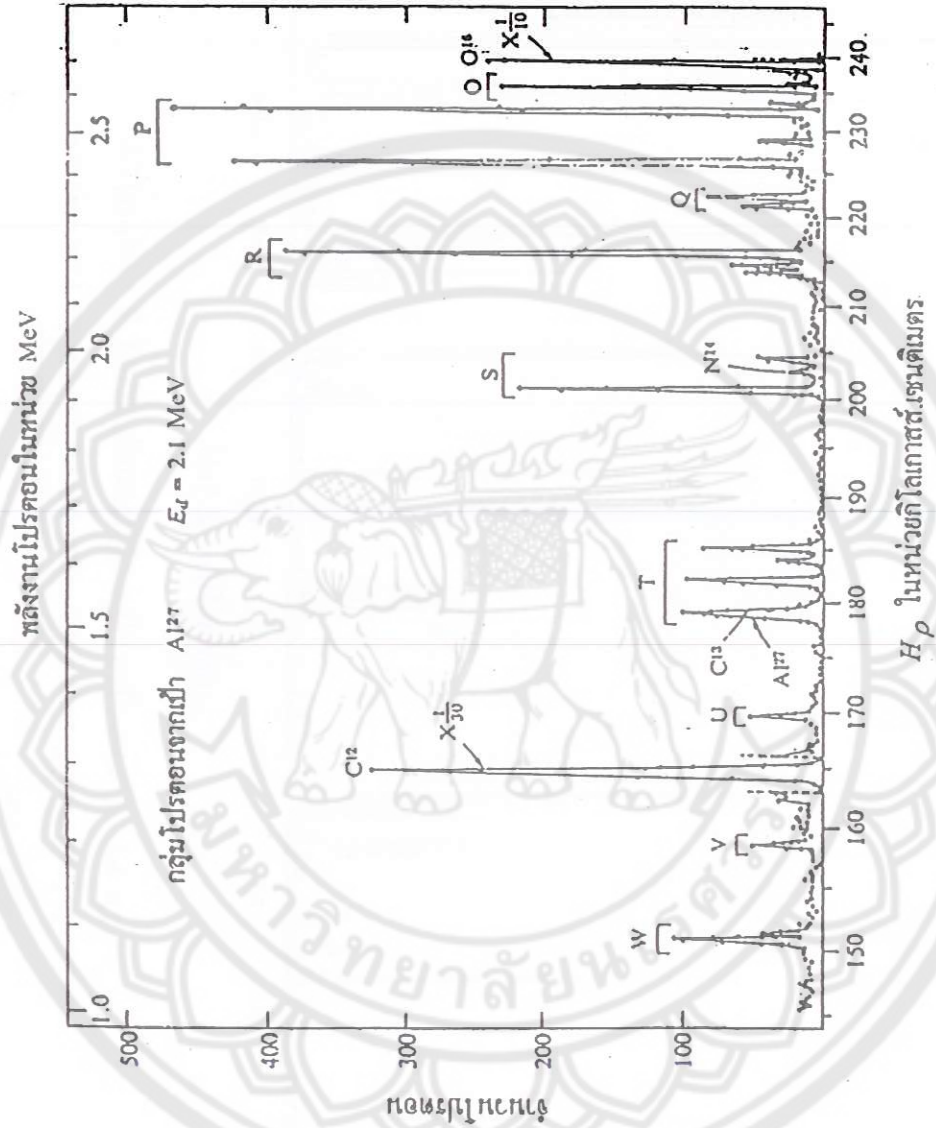
สมการ (5.32), (5.33), (5.37) และ (5.38) ถูกทดสอบกับการทดลองที่ใช้อุณภาคตกกระทบพลังงานต่ำ ในรูป 5.2 แสดงเรโซแนนซ์ในกรณีของปฏิกิริยาการจับและแผ่รังสี  $^{27}\text{Al}(p,\gamma)^{28}\text{Si}$  ในรูป 5.3 แสดงเรโซแนนซ์ในกรณีของปฏิกิริยา  $^{27}\text{Al}(d,p)^{28}\text{Al}$  เมื่อพลังงานตกกระทบของดิวเทรอนมีค่า 2.1 MeV โดยมีแผนภาพของระดับพลังงานที่สมนัยกับเรโซแนนซ์ของปฏิกิริยานี้แสดงในรูป 5.4 ส่วนในรูป 5.5 เป็นการเปรียบเทียบภาคตัดขวางที่ได้มาจากการคำนวณทฤษฎีกับที่ได้มาจากการทดลอง

### 5.3 ทฤษฎีภาวะต่อเนื่อง (Continuum Theory)

ภาพของเรโซแนนซ์ที่อยู่บนพื้นฐานของแบบจำลองนิวเคลียสประกอบใช้ได้กับกรณีที่อนุภาคตกกระทบมีพลังงานต่ำ ๆ (สูงถึง  $\sim 2$  MeV) แต่ถ้าพลังงานของอนุภาคตกกระทบสูงขึ้นจำนวนระดับพลังงานที่ต้องนำมาใช้กับแชนเนลเข้าก็จะมีมากขึ้น อนุภาคตกกระทบที่ผ่านพื้นผิวเข้าไปในนิวเคลียสก็มีโอกาสที่จะถูกจับมาก โดยโอกาสของการถูกคายออกไปทางแชนเนลออกที่เหมือนกับแชนเนลเข้ามีน้อยมาก จนไม่ต้องนำมาคิด (ระดับพลังงานแบบไม่ต่อเนื่องในสถานะคล้ายคงที่ (quasi-stationary state) ของนิวเคลียสประกอบจะอยู่ในช่วงไม่ยาวมากนัก) ระดับพลังงานที่มีจำนวนมากและถี่จน  $\Gamma \gg D$  จะนำไปสู่การคาบเกี่ยวกันอย่างบริบูรณ์ ซึ่งจะทำให้ไม่อาจอธิบายการกระเจิงแบบยึดหยุ่นได้อีกเพราะว่าแชนเนลตกกระทบไม่ได้ถูกนำมาใช้อีกแล้วเมื่อเป็นดังนี้ ก็บ่งชี้เป็นนัยได้ว่าเรโซแนนซ์แบบคม ๆ จะไม่มีให้เห็นอีกต่อไป และสมมุติฐานนิวเคลียสประกอบก็จะต้องล้มเหลว แต่จริง ๆ แล้วก็ไม่ได้เป็นเช่นนั้นเพราะการตีความให้เข้ากับ

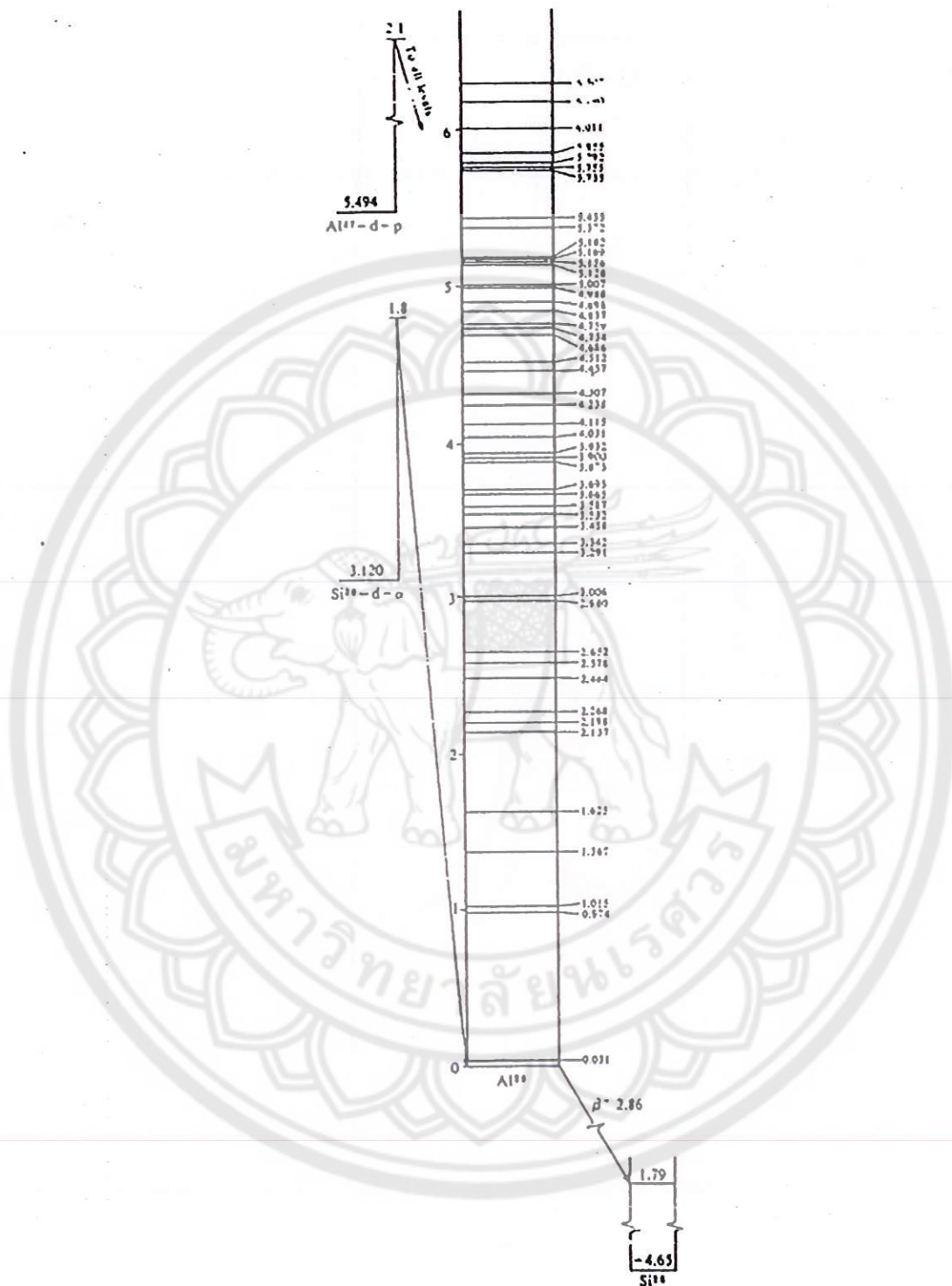


รูป 5.2 เรโซแนนซ์ในกรณีของการจับและแผ่รังสี  $^{27}\text{Al}(p, \gamma)^{28}\text{Si}$   
 (จาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Boston: Allyn and Bacon,  
 1968, p. 416)

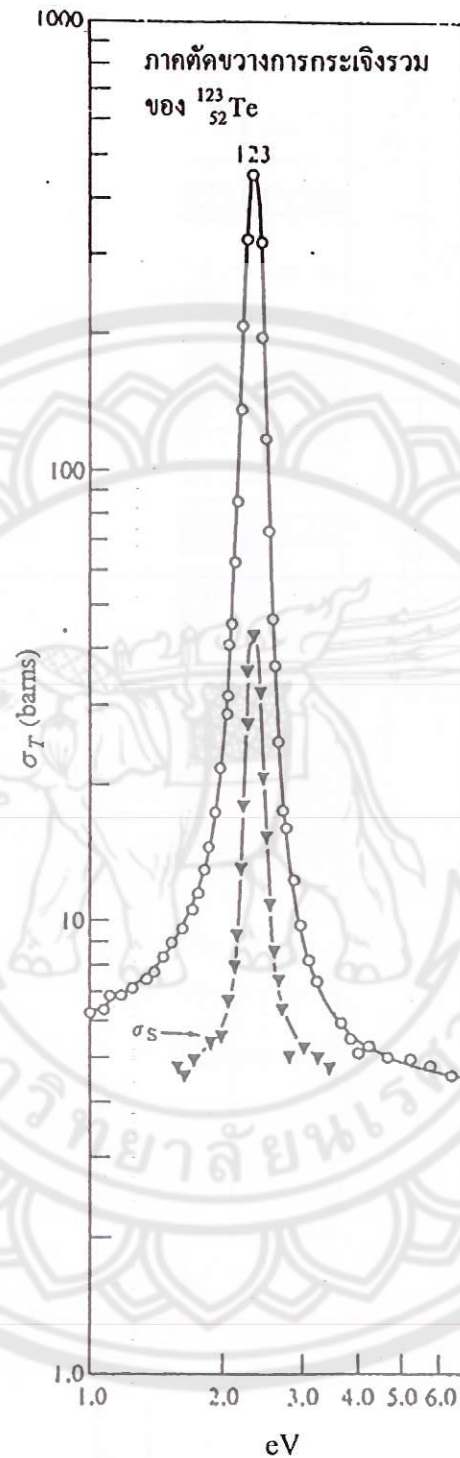


รูป 5.3 เรโซแนนซ์ในปฏิกิริยา  $^{27}\text{Al}(d,p)^{28}\text{Al}$  พลังงานตกกระทบของนิวตรอนเท่ากับ 2.1 MeV (จาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 416)





รูป 5.4 แผนภาพระดับพลังงานของ  $^{28}\text{Al}$  ได้มาจากสเปกตรัมของเรโซแนนซ์  
 ในรูป 5.3 (จาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Boston: Allyn  
 and Bacon, 1968, p. 418)



รูป 5.5 การคล่องงอกันระหว่างภาคตัดขวางทางทฤษฎีที่ทำนายจากสมการ (5.37) และ (5.38) และภาคตัดขวางทางการทดลองที่วัดจากเรโซแนนซ์ที่ 2.33 eV ของ  $^{123}\text{Te}$ , สำหรับ  $E_n = 2.33$  eV ส่วนกว้างการกระเจิง  $\Gamma_n^\alpha = 0.010$  eV และส่วนกว้างการจับ และ แผ่รังสี  $\Gamma_n^\beta = 0.104$  eV (จาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 419)

สมมุติฐานนิวเคลียสประกอบยังทำได้อยู่ ดังแสดงให้เห็นดังต่อไปนี้

สมมุติว่าเรโซแนนซ์กว้างและมีการคาบเกี่ยวกันอย่างบริบูรณ์ และนิวเคลียสประกอบก่อรูปขึ้นโดยมีสถานะต่าง ๆ ผสมกันแบบสุ่ม ๆ การผสมกันแบบสุ่ม ๆ นี้ทำให้โอกาสของการสลายตัวไม่ขึ้นกับวิธีการก่อรูป ซึ่งสมเหตุสมผลกับสมมุติฐานของนิวเคลียสประกอบ สำหรับภาคตัดขวางของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบ,  $\sigma_c(\alpha)$ , จะเท่ากับภาคตัดขวางปฏิกิริยา,  $\sigma$ , ส่วนการอธิบายการกระเจิงแบบยืดหยุ่นนั้น อธิบายบนพื้นฐานของแบบจำลองนิวเคลียสประกอบนี้ได้ว่า เป็นการสะท้อนของคลื่นตกกระทบที่แขนเนลเข้า โดยปราศจากการก่อรูปใด ๆ เป็นนิวเคลียสประกอบขึ้นมาเลย

ทฤษฎีภาวะต่อเนื่องใช้งานได้ดีกับอนุภาคตกกระทบที่มีค่าพลังงานอยู่ในอันดับของสองสาม MeV การแจกแจงพลังงานของอนุภาคที่ถูกคายออกมาจากนิวเคลียสที่กระตุ้นอยู่ในบริเวณภาวะต่อเนื่องคล้ายคลึงกับการแจกแจงพลังงานในระบบอุณหพลวัต (thermodynamic system) จึงมีการพัฒนาการตีความสเปกตรัมขึ้นมาหลาย ๆ ทาง ซึ่งเราจะไม่นำกล่าวในที่นี้ แต่จะทำการหาณิพนธ์ของภาคตัดขวางแทน ดังต่อไปนี้

ในการคำนวณหาภาคตัดขวาง เราจะพยายามดัดแปลงให้สถานะการแผ่เข้าโดยให้อนุภาคตกกระทบเป็นนิวตรอนที่มี  $l=0$  และจะพยายามไม่นำสมบัติต่าง ๆ ของนิวเคลียสมาเกี่ยวข้องด้วย ภาคตัดขวางที่หามาได้จึงไม่ขึ้นกับสถานะควอนตัมและสมบัติอื่นใดของนิวเคลียสเป้า (ความจริงแล้วขึ้นกับชนิดของอนุภาค  $a$  และพลังงานแขนเนล  $\varepsilon$ , และขึ้นกับประจุและรัศมีของนิวเคลียสเป้า) และหวังผลความถูกต้องของผลที่หามาได้เฉพาะส่วนที่เป็นอันดับของขนาดเท่านั้น เนื่องจากว่าแขนเนลเข้าไม่ถูกนำมาใช้อีกต่อไป ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นจะมีเฉพาะส่วนที่เข้าไปอยู่ในนิวเคลียสเท่านั้น โดยไม่มีส่วนที่กลับออกมาจากนิวเคลียสเลย และกำหนดให้เป็น

$$u_0 \sim e^{-iKr} \quad \text{สำหรับ } r < R \quad (5.39)$$

เมื่อ  $K$  เป็นเลขคลื่นของคลื่นที่อยู่ภายในนิวเคลียส ซึ่งกำหนดให้โดย  $\sqrt{2\mu E} / \hbar = \sqrt{2\mu(\varepsilon + V_0)} / \hbar \approx 10^{13} \text{ cm}^{-1}$ ,  $\varepsilon$  เป็นพลังงานแขนเนลของแขนเนลเข้า ( $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$ ) และ  $V_0$  เป็นความลึกของหลุมศักย์สี่เหลี่ยม (แทนศักย์นิวเคลียร์), ทันทีที่นิวเคลียสประกอบก่อรูปขึ้นจะไม่สามารถมีการกระเจิงแบบยืดหยุ่นใด ๆ ได้ สมการ (5.39) จึงให้อนุพันธ์ลอการิทึม (logarithm derivative) ที่  $r = R$  เป็น

$$f_0 = -iKR \quad (5.40)$$



จากค่า  $f_0$  นี้ เมื่อใช้กับสมการ (A.54) และ (A.57) จะได้

$$\sigma_{s,0} = \pi\lambda^2 \left| \frac{2k}{K+k} + e^{2ikR} - 1 \right|^2 \quad (5.41)$$

และ

$$\sigma_{r,0} = \sigma_c(\alpha) = \pi\lambda^2 \frac{4kK}{(K+k)^2} \quad (5.42)$$

เมื่อ  $k$  เป็นเลขคลื่นที่อยู่ภายนอกนิวเคลียส กำหนดให้โดย  $\sqrt{2\mu\varepsilon}/\hbar$

เราจะอภิปรายถึงรายละเอียดบางประการของ  $\sigma_{r,0}$  ในสมการ (5.42) เราอาจเขียนสมการ (5.42) ให้เป็น

$$\sigma_{r,0} = \pi\lambda^2 T_0(E_n) \quad (5.43a)$$

เมื่อ

$T_0 =$  ตัวประกอบการส่งผ่านศักย์ขวางกั้น (barrier transmission factor)

$$= \frac{4kK}{(K+k)^2} \quad (5.43b)$$

เพราะว่าค่ามากที่สุดที่จะเป็นไปได้ของ  $T_0$  คือ 1 เพราะฉะนั้น

$$\sigma_{r,0,\max} = \pi\lambda^2 \quad (5.44)$$

สำหรับนิวตรอนที่มี  $l \neq 0$  เราอาจเขียน

$$\sigma_{r,0} = \pi\lambda^2 (2l+1)T_l \quad (5.45)$$

เมื่อ  $T_l$  เป็นตัวประกอบการทะลุผ่านศักย์ขวางกั้น (barrier penetration factor) อันเนื่องมาจากศักย์ไม่ต่อเนื่อง และกำหนดให้โดย

$$T_l = \frac{4kKv_l}{K^2 + (2kK + k^2v_l')v_l} \quad (5.46)$$

สำหรับ  $l=0$ ,  $v_l$  และ  $v_l'$  จะเท่ากับ 1, สำหรับ  $l$  ที่มีค่าน้อยๆ  $v_l$  และ  $v_l'$  จะมีค่าดังต่อไปนี้

เมื่อ  $x = kR$

$$\begin{aligned}
v_0 &= 1 & v'_0 &= 1 \\
v_1 &= \frac{x^2}{1+x^2} & v'_1 &= \frac{1}{x^2} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 \\
v_2 &= \frac{x^4}{9+3x^2+x^2} & v'_2 &= \left(1 - \frac{6}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^2}\right)^2 \\
v_3 &= \frac{x^6}{225+45x^2+6x^4+x^6} & v'_3 &= \left(1 - \frac{21}{x^2} + \frac{45}{x^4}\right)^2 + \left(\frac{45}{x^3} - \frac{6}{x}\right)^2
\end{aligned} \tag{5.47}$$

ขณะที่ถ้า  $l$  มีค่ามาก ๆ  $v_l$  และ  $v'_l$  จะมีรูปแบบเชิงเส้นกำกับเป็น

$$v_l \cong \frac{x^{2l}}{[(2l-1)!!]^2} \quad v'_l \cong \frac{l^2[(2l-1)!!]^2}{x^{2l+2}} \tag{5.48}$$

ภาคตัดขวางรวม  $\sigma_t$  สำหรับนิวตรอนที่เป็นฟังก์ชันของพลังงานตกกระทบสำหรับแต่ละค่าของ  $K_0$   $\left[ K = (k^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \right]$  ถูกแสดงอยู่ในรูป 5.6 นิยามของ  $K_0$  คือ  $(2\mu\varepsilon'/\hbar^2)^{\frac{1}{2}}$  เมื่อ  $\varepsilon'$  เป็นพลังงานจลน์ของอนุภาค (นิวตรอน) ที่เข้ามาในนิวเคลียสโดยไม่มีพลังงานแชนเนลเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยเหมือนกับกรณีที่เรากำลังพิจารณาอยู่ในขณะนี้ ซึ่งในรูป 5.6 จะเห็นว่าที่พลังงานตกกระทบสูง ๆ ภาคตัดขวางไม่ขึ้นกับ  $K_0$  และดูเหมือนกับการกระเจิงจะเกิดจากทรงกลมสะท้อนบริบูรณ์ (perfectly reflecting sphere)

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีพิเศษของสมการ (5.42) ซึ่งเป็นกรณีที่  $k \ll K$ , ในกรณีนี้  $T_0$  จะกลายเป็น

$$T_0 = \frac{4kK}{(K+k)^2} \cong \frac{4k}{K}$$

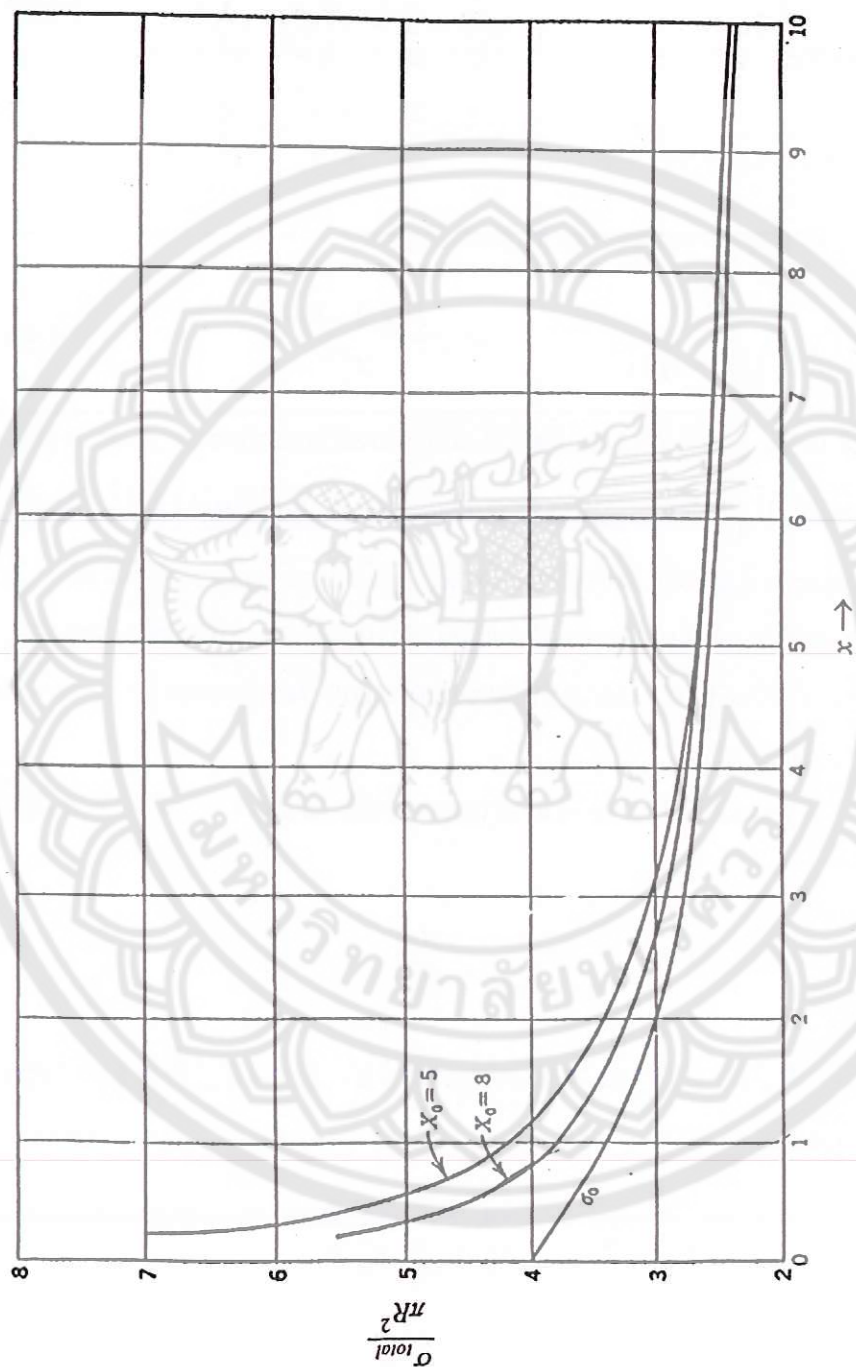
และเนื่องจาก  $K$  มีค่าแปรผันไม่มากนัก ดังนั้นเราอาจพูดได้ว่า  $K = (k^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \cong K_0$  ดังนั้นจะทำให้ได้สมการ (5.43) เป็น

$$\sigma_{r,0} = 4\pi\lambda^2 \frac{k}{K} \cong \frac{4\pi}{k^2} \frac{k}{K_0} \cong \frac{4\pi}{K_0} \frac{1}{k}$$

หรือ

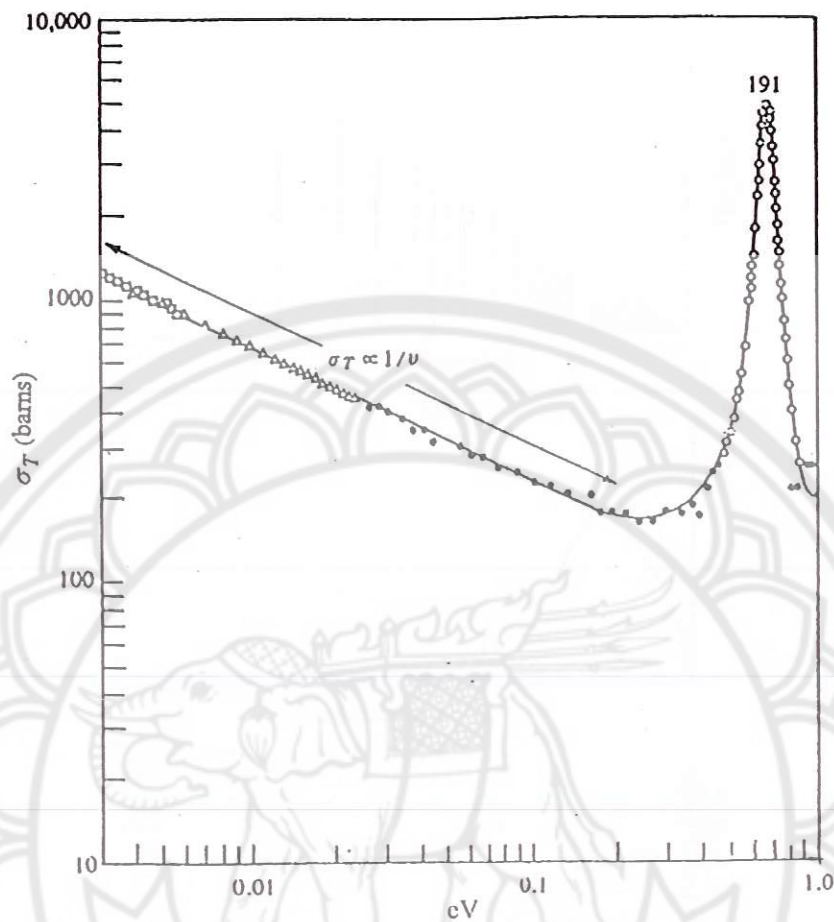
$$\sigma_{r,0} \propto \frac{1}{v} = \frac{\text{constant}}{v} \tag{5.49}$$

นั่นคือ ในการตกกระทบของนิวตรอนที่ความเร็วต่ำ ๆ ภาคตัดขวางปฏิกิริยา  $\sigma_{r,0}$  จะเป็นปฏิกิริยา



รูป 5.6 ภาคตัดขวางรวมของนิวตรอนเป็นฟังก์ชันของอนุภาคตกกระทบในแต่ละค่าของ  $K_0 R$  ( $X_0 = K_0 R$ ),  $K_0 R = \infty$  สัมพันธ์กับการกระเจิงทรงกลมสะท้อนบริบูรณ์ (จาก J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, New York: John Wiley & Sons, 1958, p. 356)

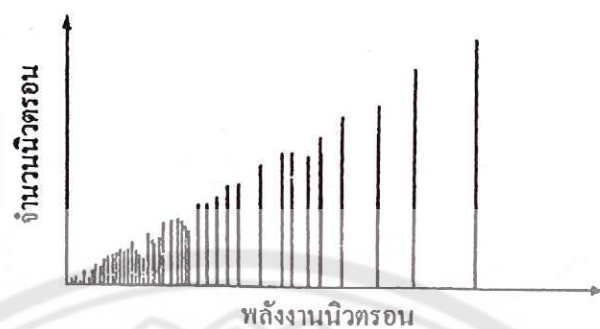




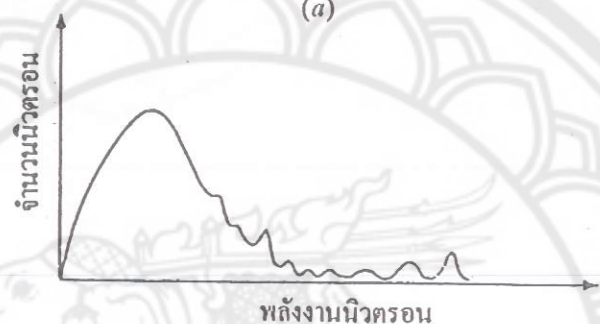
รูป 5.7 ภาคตัดขวางรวม  $\sigma_T$  ของอิริเดียมสำหรับนิวตรอนช้า เป็นหลักฐาน  
ให้เห็นว่า  $\sigma_T \propto 1/v$  (จาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*,  
Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 422)

ผกผันกับความเร็ว ดังจะเห็นในรูป 5.7 ซึ่งแสดงภาคตัดขวางรวมของอิริเดียม (iridium) ของ  
นิวตรอนช้า การแปรผันของ  $\sigma_{r,0}$  ตาม  $1/v$  จะเห็นได้ชัดเจนที่พลังงานต่ำๆ

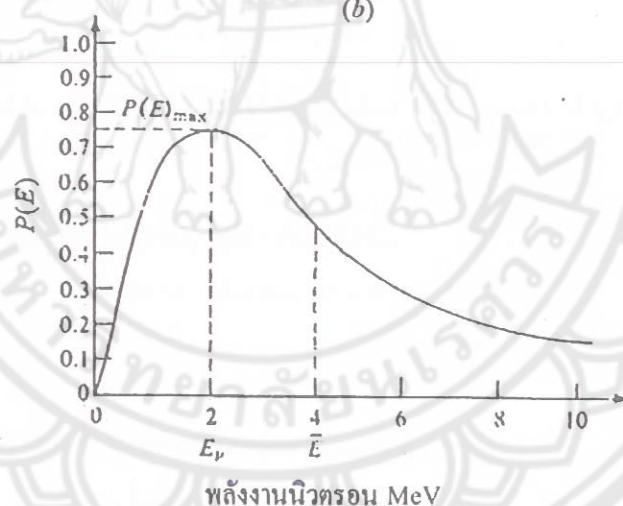
ในตอนท้ายนี้เราอภิปรายการคายนิวตรอนจากนิวเคลียสประกอบได้ว่า เหมือนกับว่าเป็น  
กระบวนการระเหย ที่อุปมาได้กับการระเหยของโมเลกุลจากพื้นผิวของของเหลว โดยพลังงาน  
ยึดเหนี่ยวของนิวคลีออนคล้ายกับเป็นความร้อนแฝงของการระเหย ซึ่งการอธิบายในเชิง  
แบบจำลองอุณหพลศาสตร์ (thermodynamics model) นี้ จะอธิบายสเปกตรัมพลังงานได้ในทำนองนี้  
คือ เนื่องจากการยากที่จะผนวกพลังงานจำนวนมากๆ ให้กับนิวคลีออนเดี่ยวได้ ดังนั้น  
นิวคลีออนที่ระเหยออกมาจากนิวเคลียสประกอบส่วนใหญ่จึงมีพลังงานจลน์ต่ำ และหลังจากได้  
ตรวจสอบกับการทดลองก็พบว่าถูกต้อง การแจกแจงพลังงาน (energy distribution) ของอนุภาคที่  
ถูกคายออกมาเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ (ในหน่วย MeV) ของนิวเคลียสประกอบที่อยู่ในสถานะถูก



(a)



(b)



(c)

รูป 5.8 (a) การแจกแจงพลังงานของนิวตรอนที่ถูกคายออกมา สำหรับการแยกอนันต์ (infinite resolution), (b) การแจกแจงพลังงานของนิวตรอนที่ถูกคายออกมา สำหรับการแยกจำกัด, (c) สเปกตรัมพลังงานของนิวตรอนระเหย สำหรับอุณหภูมินิวเคลียร์ของ 2 MeV,  $E$  = พลังงานเฉลี่ย,  $E_p$  = พลังงานที่เป็นไปได้มากที่สุด (คัดแปลงจาก A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 423)

กระตุ้น แสดงดังในรูป 5.8(a), (b) และ (c) สเปกตรัมพลังงานของนิวตรอนจะสามารถเขียนได้เป็น

$$P(E) = Ee^{-E/T}$$

เมื่อ  $P(E)$  เป็นโอกาสของการคายนิวตรอนพลังงาน  $E$  แล้วปล่อยทิ้งนิวเคลียสหลงเหลือไว้ที่อุณหภูมินิวเคลียร์ (nuclear temperature)  $T$  ในรูป 5.8(c) เป็นกรณีของอุณหภูมินิวเคลียร์  $T = 2$  MeV ขณะที่อุณหภูมิเฉลี่ยเป็น  $2T$  MeV

เราอาจจะบอกมาได้อีกว่า ที่พลังงานต่ำๆ โอกาสของการคายอนุภาคมีประจุจะมีโอกาสน้อยกว่าการคายนิวตรอนมาก อันเนื่องมาจากว่ามีศักย์คูลอมบ์ขวางกั้นอยู่นั่นเอง

### เอกสารอ้างอิง

1. A. P. Arya, *Elementary Modern Physics*, Addison-Wesley, Phillippines, 1970.
2. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
3. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
4. W.E. Burcham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
5. V. Devanathan, *Nuclear Physics*, Narosha Publishing House, New Delhi, 2006
6. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
7. R.D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, New York, 1955.
8. E.S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955.
9. K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*, 2nd edit, Institute of Physics, Brista, 1999.
10. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.



11. I. Kaplan, *Nuclear Physics*, Addison-Wesley, London, 1958.
12. K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
13. B.R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, Wiley, West Sussex, 2006.
14. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
15. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.

### แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า ภาคตัดขวางปฏิกิริยาของเทอร์มัลนิวตรอนเป็นปฏิภาคผกผันกับพลังงานจลน์ ยกกำลังสอง และให้หาค่าคงตัวของปฏิภาคด้วย
2. อะไรเป็นพลังงานของอนุภาคตกกระทบ ซึ่งจะให้นิวเคลียสประกอบถูกยกไว้ที่สถานะถูกกระตุ้น  $E_c$
3. นิวเคลียสประกอบ  $Y^*$  ก่อรูปขึ้นมาโดยการจับนิวตรอนของนิวเคลียส  ${}_Z^AX$  ถ้านิวเคลียสประกอบสลายตัวโดยการคายอนุภาคแอลฟา อะไรเป็นพลังงานของอนุภาคแอลฟา และท่านจะตัดสินใจได้อย่างไรว่าในกรณีนี้ จะมีการคายรังสีแกมมาเกิดแข่งกับการคายแอลฟาหรือไม่
4. จงคำนวณหาพลังงานการกระตุ้นของนิวเคลียสประกอบ ที่ก่อรูปขึ้นมาโดยการจับอนุภาคแอลฟาพลังงาน 8 MeV ของ  ${}^{27}\text{Al}$
5. ในปฏิกิริยา  ${}^{63}\text{Cu}(p,n){}^{63}\text{Zn}$  ให้บอกว่าอะไรเป็นนิวเคลียสประกอบ, อะไรเป็นนิวคลีไอลหลงเหลือ และให้คำนวณพลังงานการกระตุ้นสำหรับนิวเคลียสประกอบถ้าพลังงานตกกระทบของโปรตอนมีค่า 20 MeV (ในระบบห้องปฏิบัติการ)
6. สำหรับภาคตัดขวาง  $(n,\gamma)$ , เรโซแนนซ์ที่ 5.12 eV มี  $\Gamma_n = 1.34 \times 10^{-2}$  eV และ  $\Gamma_\gamma = 0.136$  eV ขณะที่สปินของ  ${}^{109}\text{Ag}$  และนิวเคลียสประกอบมีค่า  $\frac{1}{2}^-$  และ  $6^-$  ตามลำดับ  
จงใช้ข้อมูลดังกล่าวคำนวณหาภาคตัดขวาง  $(n,\gamma)$  ของ  ${}^{109}\text{Ag}$  สำหรับนิวตรอน 1.10 eV, 0.15 eV, และ 0.02 eV

7.  $^{129}\text{Te}$  ก่อรูปขึ้นมาโดยการจับเทอร์มัลนิวตรอน (พลังงานเกือบเป็นศูนย์) ของ  $^{128}\text{Te}$  อะไรเป็นอุณหภูมินิวเคลียร์ที่สมนัยกับนิวเคลียสกระตุ้น  $^{129}\text{Te}$
8. อะไรเป็นอุณหภูมิของนิวเคลียสกระตุ้น  $^{109}\text{Ag}$  ในโจทย์ข้อ 6.



## บทที่ 6

# ปฏิกิริยานิวเคลียร์ตรง

### (DIRECT NUCLEAR REACTION)

#### 6.1 กระบวนการของปฏิกิริยาตรง (Process of Direct Reaction)

ในบทที่ผ่านมาเราจะเห็นได้ว่า ทฤษฎีนิวเคลียสประกอบอธิบายปฏิกิริยานิวเคลียร์ที่เกิดจากอนุภาคตกกระทบพลังงานต่ำๆ ได้ดี แต่เมื่อพลังงานของอนุภาคตกกระทบมีค่าสูงขึ้น การอธิบายยิ่งลำบากมากขึ้น รวมทั้งการอธิบายการแปรผันของภาคตัดขวางเชิงอนุพันธ์ด้วย ที่พลังงานสูงๆ ของอนุภาคตกกระทบ ในช่วงระหว่าง 10 ถึง 20 MeV ดูเหมือนว่าการอธิบายการแจกแจงเชิงมุม (angular distribution) ของอนุภาคที่ถูกคายออกมาจากนิวเคลียส จำเป็นจะต้องใช้กระบวนการอื่นมาอธิบาย ซึ่งกระบวนการที่นำมาใช้อธิบายนี้ก็คือ อันตรกิริยานิวเคลียร์ตรง (direct nuclear interaction) หรือเรียกสั้นๆ ว่าอันตรกิริยาตรง ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของนิวเคลียสเนื่องจากกระบวนการนี้จะเรียกว่า ปฏิกิริยานิวเคลียร์ตรง (direct nuclear reaction) หรือปฏิกิริยาตรง (direct reaction)

ปฏิกิริยาตรงตรงข้ามกันอย่างสิ้นเชิงกับปฏิกิริยานิวเคลียสประกอบ กล่าวคือในปฏิกิริยาตรง อันตรกิริยาของอนุภาคตกกระทบกับนิวเคลียสเป้าหมายมีเฉพาะที่ผิวของนิวเคลียสเป้าหมายเป็นส่วนใหญ่ ขณะที่ปฏิกิริยานิวเคลียสประกอบอันตรกิริยามีทั่วทั้งนิวเคลียส ด้วยเหตุนี้กระบวนการของปฏิกิริยาตรงเช่นนี้จึงมีชื่อเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า กระบวนการผิวรอบนอก (peripheral process) เราอาจทำความเข้าใจเกี่ยวกับปรากฏการณ์นี้ได้โดยการพิจารณาในเชิงคลื่น กล่าวคือ ถ้ายังพลังงานของอนุภาคตกกระทบมีค่ามากขึ้น ความยาวคลื่นเดอบรอยล์ของอนุภาคตกกระทบก็จะยิ่งลดลง อนุภาคตกกระทบที่เป็นนิวคลีออนมีพลังงาน 1 MeV จะมีความยาวคลื่นเดอบรอยล์ประมาณ 4 fm ซึ่งความยาวคลื่นขนาดนี้จะมากกว่ามิติ (dimension) ของนิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียส (โปรตอนมีรัศมีรากของกำลังสองเฉลี่ย  $\approx 0.8$  fm) แต่พอๆ กับมิติของนิวเคลียส (รัศมีนิวเคลียส  $\approx 1.4A^{1/3} \approx A^{1/3}$  fm) จึงกล่าวได้ว่าอนุภาคตกกระทบจะ "มองไม่เห็น" นิวคลีออนใดนิวคลีออนหนึ่ง (ปัจเจกนิวคลีออน) ของนิวเคลียสเพียงนิวคลีออนเดียว แต่จะ "มองเห็น" รวมๆ



ทั้งนิวเคลียส ดังนั้นอนุภาคตกกระทบจึงชอบที่จะมีอันตรกิริยากับทั่วทั้งนิวเคลียสเป่าผ่านทางนิวเคลียสประกอบมากกว่าที่จะเลือกมีอันตรกิริยากับเพียงหนึ่งหรือสองนิวคลีออน แต่สำหรับอนุภาคตกกระทบ (เป็นนิวคลีออน) ที่มีพลังงานสูง 20 MeV แล้ว ความยาวคลื่นเดอบรอยล์จะมีค่าประมาณ 1 fm ซึ่งพอ ๆ กับมิติของนิวคลีออน แต่น้อยกว่ามิติของนิวเคลียส อนุภาคตกกระทบจะมองเห็นนิวคลีออนแต่ละนิวคลีออน (ปัจเจกนิวคลีออน) ของนิวเคลียสได้ดี แต่จะมองไม่เห็นทั่วทั้งนิวเคลียส ดังนั้นอนุภาคตกกระทบจึงชอบที่จะมีอันตรกิริยากับนิวคลีออนเพียงหนึ่งหรือสองสามนิวคลีออนที่อยู่ใกล้พื้นผิวของนิวเคลียสผ่านทางอันตรกิริยาตรง มากกว่าที่จะมีอันตรกิริยากับทั่วทั้งนิวเคลียสผ่านทางนิวเคลียสประกอบ ซึ่งตามแบบจำลองอันตรกิริยาตรงนี้การย้ายแกนผลตกกระทบไปสู่แกนเนลปฏิกิริยามีเพียงหนึ่งขั้นตอน โดยไม่ต้องมีขั้นตอนของการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบ

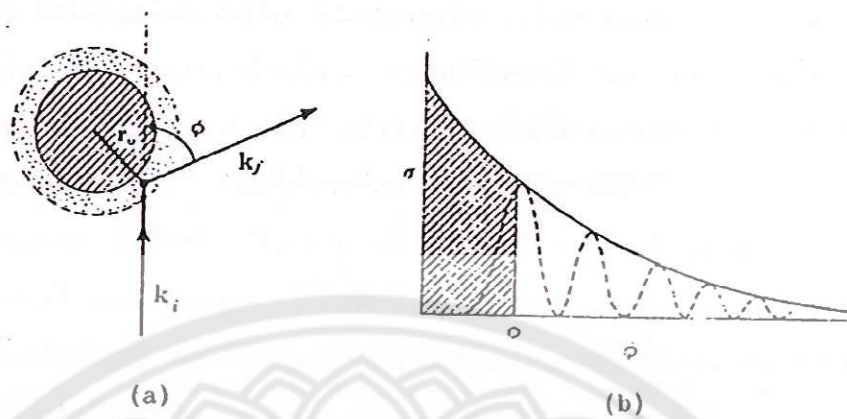
มีทางเป็นไปได้ที่กระบวนการแบบอันตรกิริยาตรง และกระบวนการแบบนิวเคลียสประกอบอาจจะให้ปฏิกิริยาออกมาเหมือนกัน ดังนั้นการจะจำแนกว่าปฏิกิริยาที่ได้มานั้นเกิดจากกระบวนการแบบใด มีหลักในการพิจารณาอยู่ 2 ประการ คือ

(1) กระบวนการแบบอันตรกิริยาตรงจะใช้เวลารวดเร็วมากภายในเวลาที่เป็นอันดับขนาดของ  $10^{-22}$  s ในขณะที่โดยทั่วไป กระบวนการแบบนิวเคลียสประกอบจะใช้เวลานานกว่ามาก บางที่อยู่ระหว่าง  $10^{-16}$  ถึง  $10^{-18}$  s โดยเวลาเพิ่มขึ้นมานี้เป็นค่าใช้จ่ายในการแจกแจงและการผนวกพลังงานตกกระทบแบบช้าแล้วช้าอีกให้กับบรรดานิวคลีออนทั้งหลายที่อยู่ภายในนิวเคลียส

(2) การแจกแจงเชิงมุมของอนุภาคที่กระเด็นออกมาจากกระบวนการแบบอันตรกิริยาตรงมีแนวโน้มที่จะมีขอคมกว่าในกรณีของนิวเคลียสประกอบ

ผู้ที่พัฒนาทฤษฎีอันตรกิริยาตรงได้แก่ เอส. บัตเลอร์ (S. Butler) กับผู้ร่วมงานคนอื่น โดยคณิตศาสตร์ที่ใช้ไม่สูงนัก ส่วนใหญ่ของการอธิบายจะอยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีเชิงแบบฉบับ กระบวนการของอันตรกิริยาตามแนวทางของบัตเลอร์แสดงดังในรูป 6.1 คือการชนของอนุภาคตกกระทบเกิดที่พื้นผิวของนิวเคลียสเท่านั้น ในขณะที่แกนของนิวเคลียส (ส่วนแฉงา) ไม่ได้ถูกทำให้เกิดกระบวนการของอันตรกิริยาตรงเลย เมื่อปฏิกิริยาไม่ได้เกิดภายในนิวเคลียสจึงไม่มีการก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบใด ๆ เกิดขึ้น จากในรูป 6.1 (a) ให้  $k_i$  และ  $k_f$  เป็นเวกเตอร์คลื่น (wave vector) ของอนุภาคตกกระทบและอนุภาคที่ถูกคายออก ตามทฤษฎีอันตรกิริยาตรง การชนจะเกิดขึ้นที่จุด P ซึ่งเป็นตำแหน่งใด ๆ ในพื้นผิวของนิวเคลียสซึ่งมีรัศมี  $R$ ,  $r$  เป็นระยะห่างของจุด P จากศูนย์กลางของนิวเคลียส จากการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้น โมเมนตัมดอยหลัง (recoil momentum) ของนิวเคลียสจะเขียนได้เป็น

$$q\hbar = (k_i - k_f)\hbar \quad (6.1)$$



รูป 6.1 ภาพแสดงให้เห็นอันตรกิริยาตรงในเชิงทฤษฎีที่แบบฉบับ  
ทฤษฎีเชิงแบบฉบับแสดงด้วยเส้นทึบ วิธีการเกิดอันตรกิริยาตรงแสดง  
ด้วยเส้นประ รูป (a) เป็นอันตรกิริยาที่ผิว รูป (b) เป็นภาคตัดขวางเชิง  
อนุพันธ์ที่มุมต่าง ๆ พื้นที่เงาเป็นพื้นที่ที่ต้องห้ามเนื่องจากการอนุรักษ์  
ของโมเมนตัมเชิงมุม (จาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*,  
Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 425)

หรือ

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \quad (6.2)$$

สำหรับปฏิกิริยาชนิด  $(n, p)$  โมเมนตัมเชิงมุม  $ih$  ที่เพิ่มให้แก่นิวเคลียสจะถูกจำกัดค่าโดยเงื่อนไข

$$l_n + l_p \geq l \geq |l_n - l_p| \quad (6.3)$$

เมื่อ  $l_n$  เป็นเลขควอนตัมวงโคจรของนิวตรอนในสถานะสุดท้ายภายหลังจากที่ถูกจับแล้ว และ  
 $l_p$  เป็นเลขควอนตัมวงโคจรของโปรตอนที่สถานะเริ่มต้นก่อนการเกิดปฏิกิริยา  
เพราะฉะนั้นเมื่อใช้สมการ (6.2) กับรูป 6.1 (a) เราจะได้

$$\begin{aligned} q^2 &= k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \phi \\ &= (k_i - k_f)^2 + 4k_i k_f \sin^2 \phi / 2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

และ

$$\mathbf{l} = \mathbf{q} \times \mathbf{r} \hbar$$

$$l = qr \sin \beta \quad (6.5)$$



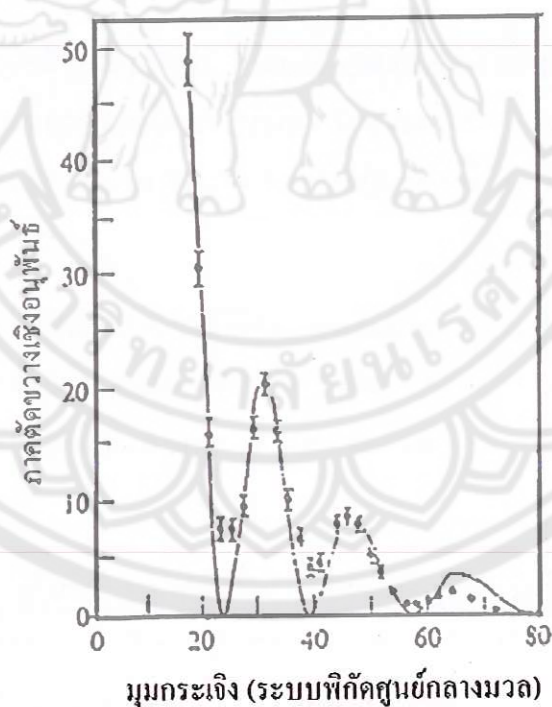
ตามสมการ (6.5) อันตรกิริยาตรงจะถูกจำกัดอยู่ที่ผิวของทรงกระบอกรัศมี  $l/q$  เนื่องจากแก่นของนิวเคลียสไม่มีส่วนต่อกระบวนการของปฏิกิริยาตรง ด้วยเหตุนี้จุดที่อยู่บนผิวด้านปลายหัวท้ายของทรงกระบอกเท่านั้นที่มีผลต่อกระบวนการ โดยคลื่นที่เกิดจากปลายหัวท้ายจะไม่มีส่วนต่อการทำให้เกิดค่าสูงสุดและต่ำสุดของการแจกแจงเชิงมุม ซึ่งชนิดของการแจกแจงเชิงมุมเช่นนี้แสดงดังรูป 6.1(b)

จากการใช้กลศาสตร์ควอนตัม กระบวนการของอันตรกิริยาตรงจะให้นิพจน์ของการแจกแจงเชิงมุมเป็น

$$d\sigma = [j_l(qR)]^2 d\Omega \quad (6.6)$$

เมื่อ  $j_l$  เป็นฟังก์ชันเบสเซลทรงกลม ค่าสูงสุดค่าแรกของภาคตัดขวางซึ่งหาได้โดย  $qR$  จะกำหนดให้โดยสมการ

$$qR = l \quad (6.7)$$



รูป 6.2 การแจกแจงเชิงมุมในการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นของอนุภาคแอลฟาพลังงาน 31.5 MeV จาก  $^{24}\text{Mg}$  ในปฏิกิริยา  $^{24}\text{Mg}(\alpha, \alpha')^{24}\text{Mg}$  (ดัดแปลงจาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 427)



ในรูป 6.2 แสดงการแจกแจงเชิงมุมของการกระเจิงยืดหยุ่นของอนุภาคแอลฟาพลังงาน 31.5 MeV จาก  $^{24}\text{Mg}$

มีปฏิกิริยานิวเคลียร์อยู่สี่ชนิดที่อธิบายได้โดยกระบวนการอันตรกิริยาตรง ได้แก่

(ก) การกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic scattering) ในการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น อนุภาคตกกระทบจะสูญเสียพลังงานจลน์ส่วนหนึ่งให้กับนิวเคลียส ดังนั้นภายหลังจากรับพลังงานจลน์มาแล้วนิวเคลียสจะอยู่ในสถานะกระตุ้น ดังแสดงให้เห็นเป็นแบบแผนในรูป 6.3 (a) เมื่อ C แทนแก่นของนิวเคลียส, N แทนนิวคลีออนที่อยู่บนพื้นผิวของนิวเคลียส ซึ่งเรียกว่านิวคลีออนพื้นผิว, และ P แทนอนุภาคตกกระทบ ตัวอย่างได้แก่ปฏิกิริยา  $(\alpha, \alpha')$ ,  $(p, p')$  เป็นต้น

(ข) ปฏิกิริยากระแทกออก (knock-out reactions) ปฏิกิริยาแบบนี้เปรียบเสมือนอนุภาคที่ตกกระทบชนกระแทกกับนิวคลีออนที่อยู่บนพื้นผิวของนิวเคลียสหลุดออกไป โดยหลังจากชนแล้วอนุภาคตกกระทบจะอยู่ในพื้นผิวของนิวเคลียสแทน ตัวอย่างเช่นปฏิกิริยา  $(n, p)$ ,  $(p, n)$  เป็นต้น แบบแผนของปฏิกิริยาแสดงในรูป 6.3(b)

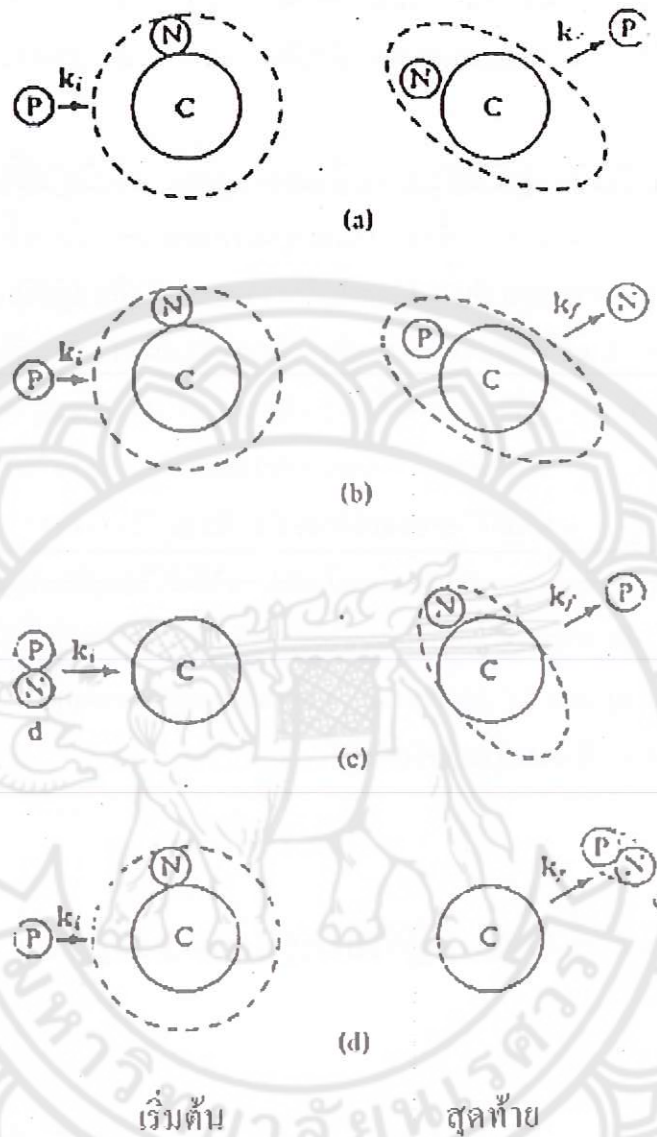
(ค) ปฏิกิริยาปลดเปลื้อง (stripping reaction) ปฏิกิริยาแบบนี้อนุภาคตกกระทบจะปลดปล่อยนิวคลีออนทิ้งไว้บนพื้นผิวของนิวเคลียสก่อนที่จะเคลื่อนที่ออกจากนิวเคลียสไปตามวิถีของมัน ตัวอย่างของปฏิกิริยาเช่นนี้ได้แก่ปฏิกิริยา  $(d, p)$ ,  $(d, n)$ ,  $(\alpha, p)$  เป็นต้น แบบแผนของปฏิกิริยาแสดงดังในรูป 6.3(c)

(ง) ปฏิกิริยาหอบหิ้ว (pick-up reaction) ปฏิกิริยาแบบนี้กลับกันกับปฏิกิริยาปลดเปลื้อง กล่าวคืออนุภาคตกกระทบจะหอบหิ้วเอานิวคลีออนที่พื้นผิวของนิวเคลียสติดออกไปด้วย ตัวอย่างของปฏิกิริยาแบบนี้ได้แก่ปฏิกิริยา  $(p, d)$  และ  $(p, \alpha)$  แบบแผนของปฏิกิริยาแสดงดังในรูป 6.3(d)

การศึกษารายละเอียดของปฏิกิริยาเหล่านี้ในเชิงทฤษฎีมักทำกันในช่วงพลังงานปานกลางกับพลังงานสูง ปฏิกิริยาหอบหิ้วที่ได้รับความสนใจที่สุดได้แก่ปฏิกิริยาหอบหิ้วชนิด  $(d, p)$  และ  $(d, n)$  ซึ่งบัตเลอร์ได้เริ่มต้นศึกษาปฏิกิริยานี้เป็นครั้งแรกใน ค. ศ. 1951 ในปฏิกิริยาหอบหิ้วการอนุรักษ์โมเมนตัมของปฏิกิริยาหอบหิ้วจะเขียนได้เป็น

$$I_i + I_f + \frac{1}{2} \geq I \geq \left| I_i + I_f + \frac{1}{2} \right|_{\min} \quad (6.8)$$

เมื่อ  $I_i$  และ  $I_f$  เป็นสปินของนิวคลีไอเริ่มต้นและนิวคลีไอสุดท้ายตามลำดับ,  $\left| I_i + I_f + \frac{1}{2} \right|_{\min}$



รูป 6.3 แบบแผนของ (a) การกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น

(b) ปฏิกิริยากระแทกออก (c) ปฏิกิริยาปลดปล่อย

(d) ปฏิกิริยาหอบหิ้ว (ดัดแปลงจาก A. P. Arya,

*Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and

Bacon, 1968, p. 428)

เป็นผลบวกเวกเตอร์ที่เป็นไปในทางที่ให้ค่าน้อยที่สุด ถ้าแบริติของสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้ายของนิวเคลียสเหมือนกัน  $I$  จะต้องเป็นเลขคู่ แต่ถ้าต่างกัน  $I$  จะต้องเป็นเลขคี่ ดังตัวอย่างในปฏิกิริยา  $^{12}\text{C}(d,p)^{13}\text{C}$  ซึ่ง  $I_i = 0^+$  และ  $I_f = \frac{1}{2}^-$  ซึ่งมีการเปลี่ยนแบริติ ดังนั้น  $I$  จะเป็น



เลขที่ ซึ่งถ้าแทน  $I_i$  และ  $I_f$  ลงในสมการ (6.8) จะได้  $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq I \geq 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  หรือ  $I = 0, 1$  ค่าที่เป็นไปได้ของ  $I$  จะต้องเป็นเลขที่ ซึ่งก็คือ  $I = 1$  และนิวตรอนตัวสุดท้ายใน  $^{13}\text{C}$  จะต้องอยู่ที่สถานะ  $p_{\frac{1}{2}}$

การกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นเป็นตัวอย่างหนึ่งของกระบวนการที่เป็นได้ทั้งแบบอันตรกิริยาตรง หรือไม่ก็แบบนิวเคลียสประกอบ ซึ่งกระบวนการจะผ่านออกมาทางไหนขึ้นอยู่กับพลังงานของอนุภาคตกกระทบ ส่วนปฏิกิริยาอื่นๆ ได้แก่ปฏิกิริยา  $(d, n)$  ซึ่งเป็นปฏิกิริยาปลดปล่อย (stripping reaction) กระบวนการเป็นได้ทั้งแบบอันตรกิริยาตรงและแบบนิวเคลียสประกอบ ขณะที่ปฏิกิริยา  $(d, p)$  ซึ่งเป็นปฏิกิริยาปลดปล่อยเช่นเดียวกันกระบวนการชอบที่จะเป็นแบบอันตรกิริยาตรงมากกว่าเพราะการระเหยของโปรตอนจากนิวเคลียสประกอบเป็นไปได้ยากเนื่องจากมีศักย์คู่อ้อมบ่งขวางกันอยู่ และอีกปฏิกิริยาปลดปล่อยหนึ่ง คือปฏิกิริยา  $(\alpha, n)$  ดูเหมือนชอบที่จะเป็นอันตรกิริยาตรงน้อยเนื่องจากการปลดปล่อยนิวคลีออนให้เข้าไปอยู่ในสถานะเวเลนซ์ (valence state) ของนิวเคลียสเป้าถึงสามนิวคลีออนในคราวเดียวนั้นมีความเป็นไปได้สูงมาก ปฏิกิริยาปลดปล่อย  $(d, n)$  และ  $(d, p)$  มักจะถูกยกขึ้นมาเป็นปฏิกิริยาตัวอย่างในการศึกษาทางทฤษฎีของอันตรกิริยาตรง ดังจะพบในหัวข้อถัดไป

## 6.2 ปฏิกิริยาปลดปล่อยและปฏิกิริยาหอบหิ้ว (Stripping and Pickup Reactions)

ในการศึกษาทางทฤษฎีเกี่ยวกับปฏิกิริยาตรง ตัวอย่างที่ดีของปฏิกิริยาที่เรานำมาพิจารณา ได้แก่ปฏิกิริยา  $(d, p)$  ซึ่งหลังจากคิวเทอรอนพลังงานมากกว่าสองสาม MeV ตกกระทบนิวเคลียสเป้าแล้วสังเกตพบว่ามีโปรตอนเกิดขึ้น กระบวนการของปฏิกิริยาอาจพิจารณาได้ดังนี้ กล่าวคือ คิวเทอรอนซึ่งประกอบไปด้วยโปรตอนและนิวตรอนยึดกันอยู่เป็นระบบอย่างหลวมๆ เมื่อตกกระทบนิวเคลียสเป้า จะถูกนิวเคลียสเป้าจับเอานิวตรอนไปไว้ในวงโคจรอนุภาคเชิงเดี่ยว (single particle orbit) (เป็นวงโคจรของนิวคลีออนในนิวเคลียสตามแบบจำลองอนุภาคเชิงเดี่ยว) ของนิวเคลียสเป้า โดยไม่ได้รับกวนโครงสร้างส่วนที่เหลืออยู่เลย ส่วนโปรตอนของคิวเทอรอนที่เหลืออยู่ก็ยังคงเคลื่อนที่ต่อไป และกลายเป็นอนุภาคกระเจิงออกไปในเวลาต่อมา กระบวนการของปฏิกิริยาอาจมองได้อีกภาพหนึ่งคือ เมื่อคิวเทอรอนโพรงไทล์ (คำที่ใช้กับการเคลื่อนที่) เข้าไปยังนิวเคลียสเป้า คิวเทอรอนได้ปลดปล่อยนิวตรอนให้กับนิวเคลียสเป้า ส่วนโปรตอนที่เหลือก็



ยังคงโพรงไทล์ต่อไป ปฏิกิริยานี้จึงมีชื่อเรียกว่า ปฏิกิริยาปลดปล่อย (stripping reaction) และถือว่าเป็นพวกปฏิกิริยาดำยโอน (transfer reaction) เพราะเป็นการถ่ายโอนนิวคลีออนจากอนุภาคโพรงไทล์ให้แก่นิวเคลียสเป้า สถานะของนิวเคลียสสุดท้ายที่ถูกกระตุ้นอย่างรุนแรงหลังจากรับนิวคลีออนไว้แล้วนั้นก่อรูปจากการควมกันระหว่างนิวคลีออนที่เข้ามา กับสถานะพื้นของนิวเคลียสเป้า ปฏิกิริยาปลดปล่อยอื่นได้แก่ปฏิกิริยา  $(t, p)$  ซึ่งเป็นการถ่ายโอนนิวคลีออนแบบเป็นกลุ่มก้อน (cluster) (กลุ่มก้อนของสองนิวตรอน) จากอนุภาคโพรงไทล์ที่เป็นทริเทียม (tritium) ไปสู่นิวเคลียสเป้า ถึงแม้การถ่ายโอนนั้นจะยุ่งยากขึ้น แต่ก็ยังพอจะเป็นปฏิกิริยาตรงได้ หนึ่งเนื่องจากการถ่ายโอนนิวคลีออนเป็นกลุ่มก้อนให้แก่นิวเคลียสเป้าที่จัดว่าเป็นปฏิกิริยาตรงนั้น โครงสร้างการเรียงตัวของนิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียสเป้าและที่อยู่ภายในกลุ่มก้อนจะต้องไม่ถูกรบกวนเลย การถ่ายโอนแบบนี้จึงเป็นไปได้ยาก ดังนั้นโดยส่วนใหญ่ของการถ่ายโอนนิวคลีออนแบบเป็นกลุ่มก้อนจำนวนมากจะเป็นพวกปฏิกิริยานิวเคลียสประกอบ

ปฏิกิริยาหนึ่งที่คู่กับปฏิกิริยาปลดปล่อย แต่เป็นไปในทางตรงกันข้ามก็คือ ปฏิกิริยาหอบหิ้ว (pickup reaction) ในกรณีของปฏิกิริยาหอบหิ้วนี้ นิวเคลียสเป้าจะสูญเสียนิวคลีออนไป โดยมีนิวคลีออนหนึ่งหรือสองสามนิวคลีออนถูกอนุภาคโพรงไทล์นำพาออกไปจากนิวเคลียส โดยที่โครงสร้างการเรียงตัวของนิวคลีออนภายในนิวเคลียสเป้าไม่ถูกรบกวนเลย ตัวอย่างที่ดีของปฏิกิริยาหอบหิ้วได้แก่ปฏิกิริยา  $^{40}\text{Ca}(p, d)^{39}\text{Ca}$  ซึ่งนิวเคลียส  $^{40}\text{Ca}$  จะถูกโปรตอนหอบหิ้วเอานิวตรอนออกไปหนึ่งตัว แล้วกลายเป็นนิวเคลียสตกค้าง  $^{39}\text{Ca}$  ซึ่งมีสถานะเป็นสถานะถูกกระตุ้น การเกิดมีสถานะกระตุ้นของ  $^{40}\text{Ca}$  ขึ้นเช่นนี้ไม่ได้เกิดจากการเปลี่ยนแปลงการเรียงตัวของนิวคลีออนภายในนิวเคลียสอันเนื่องจากการถูกรบกวน แต่เนื่องมาจากการเกิดโฮล (hole) หรือที่ว่างของนิวตรอนในนิวเคลียส ภายหลังจากที่นิวตรอนถูกหอบหิ้วออกไปนิวเคลียสเป้านั้นเอง

ภาคตัดขวางการกระเจิงของปฏิกิริยาตรง (ปฏิกิริยาปลดปล่อยหรือหอบหิ้ว) อาจหาได้ในทางตรงไปตรงมาโดยใช้การประมาณเบอร์น (Born approximation) ทั้งนี้เพราะกลไกของปฏิกิริยาตรงเป็นไปอย่างตรงไปตรงมาอันเนื่องมาจากความสัมพันธ์ระหว่างสถานะเริ่มต้นและสุดท้ายของนิวเคลียสตามข้อสมมุติของปฏิกิริยาตรงเป็นไปอย่างง่าย ๆ นั่นเอง ซึ่งการหาภาคตัดขวางการกระเจิงจะดำเนินการต่อไปนี้ สมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองอาจเขียนได้เป็น

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (6.9)$$

เมื่อ  $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$  ผลเฉลยเชิงรูปแบบ (formal solution) ของสมการ (6.9) สำหรับคลื่นออก (หมายถึงคลื่นกระเจิงออกจากนิวเคลียส) อาจเขียนได้โดยให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันกรีน

(Green's function),  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , ดังนี้

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_f \cdot \mathbf{r}} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (6.10)$$

เมื่อเราเลือกทิศทางของ  $\mathbf{k}_f$  ให้อยู่ในทิศทางเดียวกับอนุภาคตกกระทบ พจน์  $\exp i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}$  ที่อยู่ทางขวามือของสมการ (6.10) เป็นผลเฉลยส่วนที่เป็นเอกพันธ์ (homogeneous part) ในบริเวณที่มีศักย์  $V(\mathbf{r}) = 0$

เราจะให้ฟังก์ชันของกรีนนี้มีรูปแบบที่ชัดเจน คือ

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (6.11)$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

เราอาจกล่าวสรุปในนัยทั่วไปยิ่งขึ้นว่า สมการนิยามของ  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  ที่เป็นส่วนหนึ่งของ  $V(\mathbf{r})$  เป็นส่วนที่แทนผลโดยเฉลี่ย (average effect) ของนิวเคลียสเป้าที่มีต่ออนุภาคตกกระทบ

จากการแทนสมการ (6.11) ลงใน (6.10) จะได้สมการผลเฉลยเชิงรูปแบบเป็น

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_f \cdot \mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (6.12)$$

เนื่องจากศักย์  $V(\mathbf{r}')$  มีพิสัยสั้น เว้นแต่จะนำอันตรกิริยาถูกล้อมรอบมาคิดด้วย ซึ่งเราจะกล่าวในบทถัดไป โดยให้เป็นส่วนหนึ่งของศักย์แบบจำลองทัศน (optical model potential) เราจึงอาจประมาณฟังก์ชันซึ่งกำลังในบริเวณเชิงเส้นกำกับโดยการขยายฟังก์ชัน และคิดเฉพาะสองพจน์แรกดังต่อไปนี้

$$ik(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = k\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} = kr - \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}' + O(r'^2) \approx kr - \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'$$

เมื่อ  $\mathbf{k}_f = k\mathbf{r}/r$  ถูกเลือกให้มีทิศทางอยู่ในทิศทางของอนุภาคที่เกิดขึ้นจากปฏิกริยา หรืออนุภาคกระเด็นออก เมื่อแทนพจน์ในสมการข้างบนลงในสมการ (6.12) จะได้ผลเฉลยเชิงรูปแบบใหม่เป็น

$$\psi(\mathbf{r}) \approx e^{ik_f \cdot \mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (6.13)$$



โดยที่เราให้  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$  ด้วย เพราะการสังเกตอนุภาคกระเจิงของเราสังเกตในบริเวณเชิงเส้นกำกับ

เปรียบเทียบสมการ (6.13) กับฟังก์ชันคลื่นกระเจิง ที่อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นกำกับ เช่นเดียวกัน เพียงแต่ทิศทางของอนุภาคตกกระทบกำหนดอยู่แนวแกน  $z$  คือ

$$\psi(r, \theta) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (6.14)$$

สำหรับ  $r \rightarrow \infty$

จะได้แอมพลิจูดของคลื่นกระเจิง หรือเรียกสั้น ๆ ว่า แอมพลิจูดการกระเจิง (scattering amplitude) เป็น

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik_f \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (6.15)$$

สมการ 6.15 นี้เป็นส่วนที่เป็นแอมพลิจูดการกระเจิงของผลเฉลยเชิงรูปแบบของสมการ (6.9) โดยนิพจน์เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไม่รู้รูปแบบ (unknown function)  $\psi(\mathbf{r}')$  ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการใช้เป็นจุดเริ่มต้นในการขยายภาคตัดขวางการกระเจิงให้อยู่ในพจน์ของอนุกรมบอร์น (Born series)

ในการประมาณบอร์นอันดับแรก (first Born approximate) เราจะทำการแทนฟังก์ชันที่ไม่รู้รูปแบบ  $\psi(\mathbf{r}')$  ที่อยู่ในแอมพลิจูดการกระเจิง, สมการ (6.15) ด้วยคลื่นระนาบ หรือไม่กี่คลื่นที่บิดเบี้ยว (distort) ไปน้อยที่สุด [หมายเหตุ : ในการประมาณบอร์น (อันดับแรก) จะเป็นการแทนฟังก์ชันคลื่นไม่รู้รูปแบบที่อยู่ในแอมพลิจูดการกระเจิงด้วยฟังก์ชันคลื่นระนาบ หรือไม่กี่บิดเบี้ยวไปน้อยที่สุด ซึ่งฟังก์ชันคลื่นเช่นนี้จะเป็นฟังก์ชันคลื่นที่อยู่ในบริเวณที่มีศักย์อ่อน (weak) และอนุภาคตกกระทบต้องมีพลังงานสูง ซึ่งก็เป็นเงื่อนไขของการประมาณบอร์นว่าศักย์ต้องอ่อนและพลังงานอนุภาคตกกระทบต้องสูง สอดคล้องกับกรณีกระบวนการอันตรกิริยาตรงของเรา ซึ่งอนุภาคตกกระทบมีพลังงานสูง และบริเวณที่เราสังเกตการกระเจิงเป็นบริเวณเชิงเส้นกำกับซึ่งเป็นบริเวณที่มีศักย์อ่อน] ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นระนาบที่นำมาแทน  $\psi(\mathbf{r}')$  ก็คือฟังก์ชันคลื่นที่เหมือนกับฟังก์ชันคลื่นเดมตอตกกระทบ  $\exp(ik_i \cdot \mathbf{r})$  ที่อยู่ในพจน์แรกของผลเฉลยเชิงรูปแบบ, สมการ (6.14), นั่นเอง ซึ่งภายหลังจากการแทน  $\psi(\mathbf{r}') = \exp(ik_i \cdot \mathbf{r}')$  ดังกล่าวแล้ว เราจะได้แอมพลิจูดการกระเจิงในรูปแบบใหม่เป็น

$$f(\theta) \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik_f \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') e^{ik_i \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \quad (6.16)$$

เราจะนำผลลัพธ์ที่ได้มานี้ไปคำนวณหาภาคตัดขวางการกระเจิงเชิงอนุพันธ์ของปฏิกิริยาปลดปล่อย



และปฏิกริยาหอบหิ้วได้จาก

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = f^*(\theta)f(\theta) \quad (6.17)$$

สมการ (6.16) นี้เราอาจทำให้ง่ายขึ้นอีก โดยการกำหนดให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์การถ่ายโอนโมเมนตัม (momentum transfer vector),

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \quad (6.18)$$

และขยายคลื่นระนาบให้อยู่ในพจน์ของฮาร์มอนิกทรงกลม

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} = \sum_l i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qr') Y_{l0}(\theta') \quad (6.19)$$

มุม  $\theta'$  อยู่ระหว่างเวกเตอร์  $\mathbf{q}$  และ  $\mathbf{r}'$  เพราะฉะนั้นจึงเป็นตัวแปรตัวหนึ่งของการหาปริพันธ์ในสมการ (6.16) : ในทางกลับกัน  $\theta$  เป็นมุมระหว่าง  $\mathbf{k}_f$  และ  $\mathbf{k}_i$

### 6.3 การแจกแจงเชิงมุม (Angular Distribution)

การอภิปรายในหัวข้อที่ผ่านมาเราไม่นำเอาโครงสร้างภายในของอนุภาคที่มีส่วนร่วมกับการกระเจิงมาเกี่ยวข้อง แต่สำหรับในเรื่องของปฏิกริยาปลดปล่อยและหอบหิ้วแล้ว การพิจารณาของเราต้องนำเอาโครงสร้างภายในของอนุภาคที่เกี่ยวข้องกับปฏิกริยามาเกี่ยวข้องด้วย ดังนั้นในนิพจน์ของแอมพลิจูดการกระเจิงจึงต้องมีทั้งฟังก์ชันคลื่นของทั้งนิวคลีไอเริ่มต้นและนิวคลีโอสุดท้ายที่เกี่ยวข้องกับปฏิกริยาอยู่ภายในนิพจน์ด้วย รูปแบบเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชันคลื่นเริ่มต้นและสุดท้ายของระบบการกระเจิงในกรณีเช่นนี้จะกำหนดได้เป็น

$$\Psi_i \rightarrow e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} \Phi_i \quad \Psi_f \rightarrow e^{i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}} \Phi_f \quad (6.20)$$

เมื่อ  $\Phi_i$  และ  $\Phi_f$  เป็นผลคูณของฟังก์ชันคลื่นภายในของอนุภาคตกกระทบกับของนิวเคลียสเป้า และผลคูณของฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคกระเจิงกับของนิวเคลียสตกค้าง ตามลำดับ สำหรับตัวอย่างเชิงรูปธรรม ให้เราพิจารณากรณีของปฏิกริยา  $^{40}\text{Ca}(d,p)^{41}\text{Ca}$  ปฏิกริยานี้เรามี

$$\Phi_i = \{\phi(d) \times \phi(^{40}\text{Ca})\} \quad \Phi_f = \{\phi(p) \times \phi(^{41}\text{Ca})\}$$

เมื่อ  $\phi(d)$ ,  $\phi(p)$ ,  $\phi(^{40}\text{Ca})$  และ  $\phi(^{41}\text{Ca})$  เป็นฟังก์ชันคลื่นที่อธิบายโครงสร้างภายในของ นิวเคลียส โปรตอน  $^{40}\text{Ca}$  และ  $^{41}\text{Ca}$  ตามลำดับ เครื่องหมายคูณมีนัยว่าฟังก์ชันคลื่นคู่ควบซึ่ง กันและกันด้วยค่ากำหนดแนวของโมเมนตัมเชิงมุมและไอโซสปิน (isospin)

เพื่อให้เป็นไปตามเจตนารมณ์ของปฏิกิริยาตรง เราจะให้ฟังก์ชันคลื่นนิวเคลียสเป็นสถานะ คู่ควบ (coupled state) (อย่างอ่อน ๆ) ของฟังก์ชันคลื่น โปรตอนและนิวตรอน คือ

$$\phi(d) = (\phi(p) \times \phi(n)) \quad (6.21)$$

เพื่อให้การอธิบายของเราในเรื่องนี้ง่ายขึ้น และหลีกเลี่ยงความยุ่งยากเนื่องจากการคู่ควบซ้อน (recoupling) เราจะปฏิบัติให้โปรตอนเป็นผู้ดูเหตุการณ์ (spectator) ในกระบวนการของการกระเจิง ทั้งหมด ถ้านิวตรอนถูกจับเข้าไปอยู่ในสถานะอนุภาคเชิงเดี่ยวของนิวเคลียสเป้าหมายที่มีโมเมนตัม เชิงมุมวงโคจร  $l$ , ฟังก์ชันคลื่นของนิวเคลียสตกค้างก็อาจจะถูกกำหนดให้อยู่ในรูปแบบ

$$\phi_l(^{41}\text{Ca}) \sim (\phi(n)\phi(^{40}\text{Ca})Y_{l,m_l}(\theta',\phi')) \quad (6.22)$$

จากการใช้ฟังก์ชันคลื่นเหล่านี้ จะได้แอมพลิจูดการกระเจิงสำหรับปฏิกิริยา  $^{40}\text{Ca}(d,p)^{41}\text{Ca}$  ในรูปแบบเป็น

$$f(\theta) \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-iq\cdot r'} \left\langle \phi(p) \times (\phi(n)\phi(^{40}\text{Ca})Y_{l,m_l}(\theta',\phi')) \right\rangle V(r') \left\langle \phi(^{40}\text{Ca}) \times (\phi(p) \times \phi(n)) \right\rangle d^3r' \quad (6.23)$$

บทบาทของศักย์  $V(r')$  ในที่นี้คือปลดนิวตรอนออกจากนิวเคลียส และใส่ไว้ในนิวเคลียส ตกค้าง สำหรับจุดประสงค์ของเรา เพื่อให้ง่ายต่ออนุพันธ์ (derivation) เราอาจประมาณศักย์  $V(r')$  โดยฟังก์ชันเดลตา (delta function) ที่ผิวของนิวเคลียส คือ

$$V(r') = V_0 \delta(r' - R) \quad (6.24)$$

$R$  ในที่นี้คือรัศมีของนิวเคลียสตกค้าง ความหมายของการประมาณนี้คือนิวตรอนถูกปลดปล่อย ออกจากนิวเคลียสตกกระทบและถูกจับไว้โดย  $^{40}\text{Ca}$  ตรงผิวสัมผัส ความแรง  $V_0$  แทนโอกาสที่ กระบวนการเช่นนั้นจะเกิดขึ้น และอาจได้รับการปฏิบัติให้เป็นพารามิเตอร์ที่สัมพันธ์กับขนาด สัมบูรณ์ (absolute magnitude) ของภาคตัดขวางการกระเจิง เมื่อเราหาปริพันธ์สมการ (6.23) ทั่ว พิกัดของทั้งนิวคลีออนและ  $^{40}\text{Ca}$  ฟังก์ชันคลื่นก็จะหลุดออกไป และขยายตัวประกอบชี้กำลัง (exponential factor) ให้อยู่ในพจน์ของฮาร์มอนิกทรงกลมโดยใช้สมการ (6.19) แอมพลิจูดการ กระเจิงก็จะลดรูปแบบลงเหลือดังนี้



$$\begin{aligned}
f(\theta) &\approx -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \sum_l i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} j_l(qR) \int Y_{l0}(\theta') Y_{l,m_l}^*(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&= -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \sum_l i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} j_l(qR) \delta_{ll} \delta_{m_l,0} \\
&= -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} j_l(qR)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

ในการหาปริพันธ์ทั่วทุกตัวแปรมุมที่อยู่ในนิพจน์ของบรรทัดแรกของสมการ (6.25) นั้น เราใช้เงื่อนไขเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal condition) ของฮาร์มอนิกทรงกลมเข้าช่วย คือ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

เฉพาะส่วนที่ขึ้นกับมุมในสมการ (6.23) จะอยู่ในฟังก์ชันเบสเชลทรงกลม โดยผ่านทางความสัมพันธ์ระหว่างการถ่ายโอนโมเมนตัม  $q$  กับมุมกระเจิง  $\theta$  เนื่องจากว่าเราใช้คลื่นระนาบมาประมาณผลเฉลยของสมการการกระเจิง เราจึงเรียกผลลัพธ์ที่ได้ว่า เป็นผลลัพธ์จากการประมาณบอร์นคลื่นระนาบ (Plane Wave Born Approximate) หรือนิยมเรียกกันอย่างย่อ ๆ ว่า PWBA ซึ่งรายละเอียดที่เข้มงวดกว่านี้อาจหาอ่านได้จากหนังสือที่เขียนเรื่องปฏิกริยาตรงโดยตรง เช่นที่เขียนโดยโทบอคแมน (Tobocman) (*Theory of Direct Nuclear reaction*, Oxford University Press, London, 1961) หรือที่เขียนโดยแซตซ์เลอร์ (Satchler) (*Direct Nuclear Reaction*, Oxford University Press, Oxford, 1983)

จากสมการ (6.25) ภาคตัดขวางเชิงอนุพันธ์สำหรับปฏิกริยาตรงจะกำหนดให้โดย

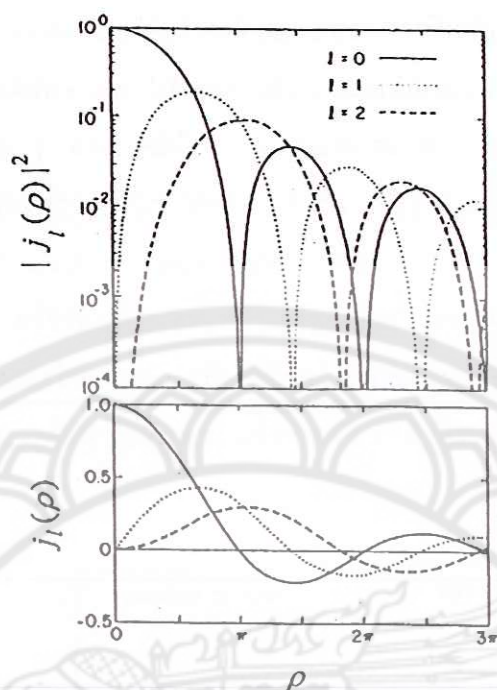
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |j_l(qR)|^2 \tag{6.26}$$

การถ่ายโอนโมเมนตัมขึ้นกับมุมการกระเจิง คือ

$$q = \sqrt{k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \theta} \approx 2k \sin(\frac{1}{2}\theta) \tag{6.27}$$

เมื่อเราทำให้  $k \approx k_i \approx k_f$  ซึ่งเป็นไปได้ถ้าหากอนุภาคตกกระทบมีพลังงานสูงพอ สำหรับลักษณะของการแจกแจงเชิงมุม ซึ่งกำหนดให้โดยตัวประกอบ  $|j_l(2kR \sin(\frac{1}{2}\theta))|^2$  ที่ถูกกำหนดโดยการถ่ายโอนโมเมนตัมเชิงมุม แสดงให้เห็นในรูป (6.4) ถ้าพิจารณาตัวอย่างจากในรูปจะเห็นว่า ในกรณีของการถ่ายโอนโมเมนตัมที่มีค่า  $l_r = 0$  เนื่องจาก  $j_0(\rho) \sim \sin \rho / \rho$  (เมื่อให้





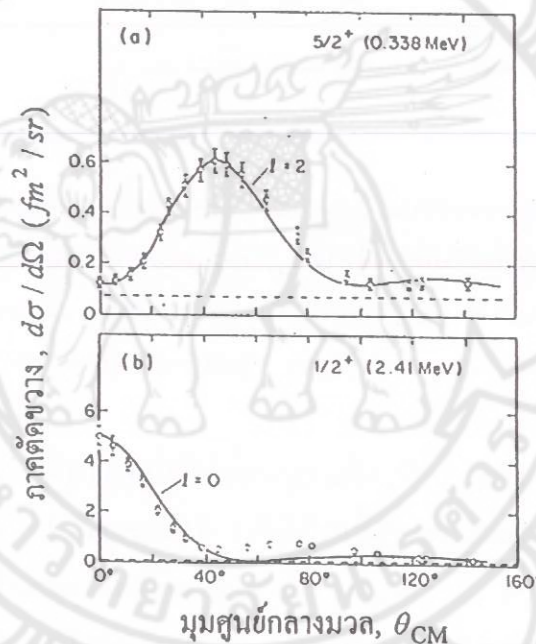
รูป 6.4 ฟังก์ชันเบสเซลทรงกลม  $j_l(\rho)$  และการแจกแจงเชิงมุมลักษณะต่อของปฏิริยาปลดปล่อยซึ่งกำหนดให้โดย  $j_l^2(\rho)$  ลงจุดให้เป็นฟังก์ชันของ  $\rho$  สัมพันธ์กับมุมกระเจิง  $\theta$  และการถ่ายโอนโมเมนตัม  $q$  โดยสมการ 6.18 (จาก S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics.*, New Jersey: Plentice-Hall, 1990, p. 338)

$\rho = 2kR\sin(\frac{1}{2}\theta)$ ) ดังนั้นยอดของเส้นโค้งการแจกแจงเชิงมุมจะอยู่ที่  $0^\circ$  สำหรับกรณีของการถ่ายโอนที่มีค่า  $l$ , สูงขึ้น จะไม่มีค่าสูงสุดที่  $0^\circ$  ให้เห็น ดังเช่นกรณีที่  $l_1 = 1$  ค่าสูงสุดอันดับแรกของการแจกแจงเชิงมุม  $j_1(\rho) \sim \sin \rho / \rho^2 - \cos \rho / \rho$  จะเลื่อนห่างออกไปในทางที่มุมโตขึ้น และยิ่งค่า  $l$ , สูงขึ้นอีก ค่าสูงสุดอันดับแรกก็ยิ่งเลื่อนห่างออกไปอีกเป็นลำดับเช่นเดียวกัน สำหรับรายละเอียดของปฏิริยาตรงเหล่านี้ สามารถสังเกตเห็นได้จากการแจกแจงเชิงมุมของนิวตรอนในปฏิริยาตรง  $^{20}\text{Ne}(d,n)^{21}\text{Ne}$  ที่เราได้ยกมาเป็นตัวอย่างในรูป 6.5 เช่นเดียวกัน

การแจกแจงเชิงมุมโปรตอนในปฏิริยา  $^{56}\text{Fe}(d,n)^{57}\text{Fe}$  โดยมีพลังงานตกกระทบของนิวตรอนมีค่า 15 MeV ที่แสดงในรูป 6.6 เป็นอีกตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นรายละเอียดว่า หากการถ่ายโอนโมเมนตัมเป็นไปในทางที่  $l$  เพิ่มขึ้น ยอดแรกของการแจกแจงเชิงมุมก็จะเลื่อนออกไปในทางที่มุมกระเจิงโตขึ้น และปรากฏอยู่ที่มุมซึ่งให้ค่า  $qR \approx 1$  ส่วนยอดถัดไปจะอยู่ที่มุมซึ่งค่า  $qR$  เพิ่มขึ้นอีก  $\pi$

แม้ว่าผลลัพธ์ของ PWBA จะให้รายละเอียดในส่วนที่จำเป็นถูกต้องกับการแจกแจงเชิงมุมสำหรับปฏิริยาตรง แต่มันก็ยังขาดพลังการทำนาย สาเหตุเนื่องมาจากส่วนที่บิดเบี้ยวไปของ

คลื่นตกกระทบและคลื่นกระเจิงอันเนื่องมาจากศักย์เฉลี่ยหรือศักย์เชิงทัศนที่อนุภาคตกกระทบและอนุภาคกระเจิงได้รับนั่นเอง ซึ่งเรื่องนี้เราจะกล่าวในบทถัดไป ยิ่งกว่านั้นยังมองไม่เห็นทางที่จะอนุพัทธ์หาความแรงอันตรกิริยา  $V_0$  ของสมการ (6.24) มาได้อย่างง่าย ๆ เป็นผลให้การแจกแจงเชิงมุมไม่สามารถสรุปหามาได้จาก PWBA ภาพของการกระเจิงที่ถูกต้องยิ่งขึ้นกว่านี้ได้จากการประมาณบอร์นคลื่นบิดเบี้ยว (Distorted Wave Born Approximation), DWBA, เมื่อเราใช้ฟังก์ชันคลื่นที่สมจริงมากขึ้นแทนการใช้คลื่นระนาบ ฟังก์ชันคลื่นที่ใช้ใน DWBA เป็นฟังก์ชันคลื่นสัมผัสพัทธ์ระหว่างอนุภาคโปรเจกไทล์และนิวเคลียสเป้า และระหว่างอนุภาคกระเจิงและนิวเคลียสตกค้าง ซึ่งเป็นฟังก์ชันคลื่นที่สมจริงมากขึ้น แทนการใช้คลื่นระนาบ



รูป 6.5 การสังเกตการแจกแจงเชิงมุมของนิวตรอนในปฏิกิริยา

$^{20}\text{Ne}(d,n)^{21}\text{Ne}$  (a) เป็นการแจกแจงที่ระดับ 0.338 MeV  $J^\pi = \frac{5}{2}^+$

ใน  $^{21}\text{Ne}$  และเป็นการถ่ายโอนที่ค่า  $l=2$  (b) เป็นการแจกแจงที่ระดับ

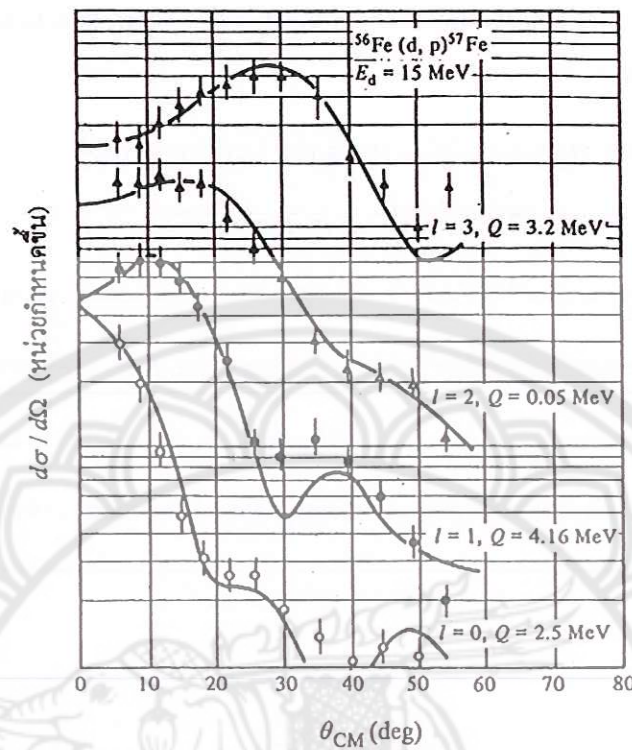
2.41 MeV  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ , เป็นการถ่ายโอนที่ค่า  $l=0$  เส้นทึบเป็นผลมา

จากการคำนวณโดยใช้ DWBA สำหรับปฏิกิริยาตรง และเส้นประเป็นผล

มาจากการคำนวณแฮสเซอร์-เฟชแบค (Hauser-Feshback Calculation)

สำหรับปฏิกิริยานิวเคลียสประกอบ (ดัดแปลงจาก S.M. Wong,

*Introductory Nuclear Physics.*, New Jersey: Plentice-Hall, 1990, p.341)



รูป 6.6 การแจกแจงเชิงมุมของโปรตอน ที่สังเกตได้จากปฏิกิริยา  $^{56}\text{Fe}(d, n)^{57}\text{Fe}$  ในแต่ละการถ่ายโอนโมเมนตัมที่มีค่า  $l$  ต่าง ๆ กัน เมื่อพลังงานตกกระทบของนิวตรอนมีค่า 15 MeV (คัดแปลงจาก N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge: Cambridge University, 1990, p. 204)

### เอกสารอ้างอิง

1. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
2. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
3. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
4. R.D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, New York, 1955.



5. E. Gadioli and P.E. Hodgson, *Pre-Equilibrium Nuclear Reactions*, Oxford University Press, New York, 1992.
6. K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, New York, 1966.
7. E.S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955.
8. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.
9. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
10. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1970.
11. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.

### แบบฝึกหัด

1. ในปฏิกิริยา  $^{20}\text{Ne}(d,n)^{21}\text{Na}$  การถ่ายโอนโมเมนตัมที่ค่า  $l=2$  เมื่อตัวเทอรอนตกกระทบ มีพลังงานในระบบศูนย์กลางมวล 6.0 MeV จะทำให้ได้  $^{21}\text{Na}$  ที่มีสถานะ  $J^\pi = \frac{5}{2}^+$  และพลังงาน 2.14 MeV ปรากฏว่าการแจกแจงเชิงมุมของนิวตรอนที่ได้จากปฏิกิริยานี้มีขั้วอยู่ที่มุมกระเจิง  $36^\circ$  จากข้อมูลเหล่านี้ จงใช้การประมาณบอร์นเชิงคลื่นระนาบสรุปหารัศมีของ  $^{21}\text{Na}$  และเปรียบเทียบค่าที่หาได้กับค่าที่กำหนดให้โดย  $R = 1.2A^{1/3} \text{ fm}$
2. สำหรับปฏิกิริยาตรงที่อยู่ในรูปการประมาณบอร์นคลื่นระนาบ จงแสดงว่าการถ่ายโอนโมเมนตัม ที่มีค่า  $l=0$  เท่านั้น ที่ให้ค่าสูงสุดของภาคตัดขวางการกระเจิงเชิงอนุพันธ์อยู่ที่มุมกระเจิง  $\theta = 0^\circ$  ส่วนการถ่ายโอนที่มีค่า  $l > 0$  ค่าต่ำสุดจะอยู่ในทิศทางการกระเจิงไปข้างหน้า และสำหรับการถ่ายโอนที่มีค่า  $l$  สูงขึ้น ค่าสูงสุดแรกของภาคตัดขวางเชิงอนุพันธ์จะเลื่อนไปอยู่ที่มุมกระเจิงโตขึ้น
3. จากภาคตัดขวางการกระเจิงเชิงอนุพันธ์สำหรับปฏิกิริยา  $^{56}\text{Fe}(d,n)^{57}\text{Fe}$  ที่แสดงอยู่ในรูป 6.6 จงแสดงการคำนวณให้เห็นว่า ค่าสูงสุดหรือยอดแรกของภาคตัดขวางจะอยู่ตรงที่ความสัมพันธ์โดยประมาณ  $qR = 1$  เมื่อ  $\hbar q$  เป็นโมเมนตัมถ่ายโอน และค่า  $\hbar q R$  เป็นการถ่ายโอนโมเมนตัมเชิงมุมที่มีค่ามากที่สุด

4. ปฏิกริยา  $(d, p)$  บน  $^{49}\text{Ti}$  (สถานะพื้นอยู่ที่  $\frac{7}{2}^-$ ) ก่อให้เกิดสถานะ  $0^-$ ,  $2^-$  และ  $4^-$  ที่ 0.000, 1.555 และ 2.675 MeV ตามลำดับขึ้นใน  $^{50}\text{Ti}$  ให้หาค่าโมเมนตัมเชิงมุมที่ถ่ายโอนในปฏิกริยาตรง



## บทที่ 7

### แบบจำลองทัศน

### (THE OPTICAL MODEL)

แม้ว่าแบบจำลองนิวเคลียสประกอบและกระบวนการอันตรกิริยาตรงจะอธิบายปฏิกิริยานิวเคลียร์ได้เป็นจำนวนมาก แต่ก็มีข้อเสียคือตั้งอยู่บนข้อสมมุติที่ต่างกัน โดยในแบบจำลองนิวเคลียสประกอบ วิธีอิสระเฉลี่ยมีค่าน้อยมาก ส่วนในกระบวนการอันตรกิริยาตรง วิธีอิสระเฉลี่ยมีค่ามากเป็นอันดับของเส้นผ่าศูนย์กลางของนิวเคลียส นอกจากนี้ยังมีลักษณะของปฏิกิริยานิวเคลียร์อีกหลายลักษณะที่ไม่อาจนำแบบจำลองทั้งสองมาอธิบายได้ ตัวอย่างเช่นในภาวะต่อเนื่อง ตามทฤษฎีภาวะต่อเนื่อง ภาคตัดขวางจะลดลงเรื่อย ๆ อย่างสม่ำเสมอ ตามการเพิ่มพลังงานของนิวตรอนตกกระทบ แต่จากการตรวจสอบรายละเอียดให้มากขึ้นพบว่าการมีค่าสูงสุดและต่ำสุดของภาคตัดขวางแบบแผ่กว้างนั้น ไม่ได้เป็นฟังก์ชันของพลังงานนิวตรอนตกกระทบแต่เพียงอย่างเดียว แต่เป็นฟังก์ชันของเลขมวลของนิวเคลียสด้วย ซึ่งแบบจำลองนิวเคลียสประกอบและกระบวนการอันตรกิริยาตรงไม่สามารถอธิบายลักษณะดังกล่าวได้ แบบจำลองทัศนจึงถูกพัฒนาขึ้นเพื่ออธิบายลักษณะของภาคตัดขวางที่พลังงานและเลขมวลต่าง ๆ นี้

ตามแบบจำลองทัศนจะกำหนดให้นิวเคลียสเป็นเสมือน ผลึกหมอก (cloudy crystal) และลำอนุภาคเสมือนเป็นลำแสงตกกระทบ ซึ่งถ้าหากลำแสงตกกระทบยังผลึกหมอก แสงส่วนหนึ่งจะทะลุผ่านผลึกหมอกหรือบ่อบน (diffraction) ออกไป และอีกส่วนหนึ่งจะถูกดูดกลืนอยู่ในผลึกหมอก ลำอนุภาคก็เป็นเช่นเดียวกันกับแสงกล่าวคือเมื่อตกกระทบยังนิวเคลียส อนุภาคส่วนหนึ่งจะถูกดูดกลืนโดยนิวเคลียส อีกส่วนหนึ่งจะกระเจิงออกไป ศักย์อันตรกิริยา (potential interaction) ของทั้งการดูดกลืนและการกระเจิงจะเขียนได้ในรูปผลบวกของศักย์จริง (real potential)  $V_0$  และศักย์จินตภาพ (imaginary potential)  $i\zeta V_0$  เมื่อศักย์จริงเป็นศักย์ส่วนที่อธิบายการกระเจิง และศักย์จินตภาพเป็นศักย์ส่วนที่อธิบายการดูดกลืน คือ

$$V = -V_0(1 + i\zeta), r \leq R \leq r_0 A^{1/3} \\ = 0, \quad r > R$$

เมื่อ  $V_0 \approx 42 \text{ MeV}$  และ  $\zeta$  กำหนดให้โดย  $0 < \zeta \leq 1$ ,  $R$  เป็นรัศมีของนิวเคลียส



ผลลัพธ์ที่ได้มาออกมาจากแบบจำลองทัศนเป็นผลลัพธ์แบบเฉลี่ย เนื่องจากว่าแบบจำลองนี้อยู่บนพื้นฐานของทัศนศาสตร์ จึงมีชื่อเรียกว่า แบบจำลองทัศน (optical model) หรือบางที่อาจเรียกในอีกชื่อหนึ่งว่า แบบจำลองลูกบอลผลึกขุ่น (cloudy crystal ball model)

เป้าหมายของแบบจำลองทัศนนี้ก็คือ เพื่อหาศักย์ที่จะมาอธิบายการแปรผันของภาคตัดขวางการกระเจิง ที่แปรผันอย่างค่อยเป็นค่อยไป เป็นฟังก์ชันของพลังงาน  $E$  และจำนวนนิวคลีออน  $A$  ของนิวเคลียสเป้า ในสถานะการณืทั่วๆ ไป การกระเจิงอาจมีความซับซ้อน แต่ถ้าเราเลือกสนใจเฉพาะสมบัติโดยเฉลี่ยของมันแทน โดยพยายามเลี่ยงห่างจากเรื่องเรโซแนนซ์และการกระตุ้นอย่างแรงของในปฏิกิริยาตรง ก็จะทำให้การกระเจิงของเราง่ายขึ้น ซึ่งแนวคิดบนพื้นฐานเช่นนี้คล้ายคลึงกับแนวคิดของการให้สนามที่ใช้ในการศึกษาโครงสร้างของนิวเคลียสเป็นสนามเฉลี่ย (mean field)

เพื่อให้่ายต่อการอภิปราย การพิจารณาโดยส่วนใหญ่ของเราจะอยู่ที่การกระเจิงแบบยืดหยุ่น แหล่งที่มาของของภาคตัดขวางปรกติมีสองแหล่งใหญ่ แหล่งแรกคือการกระเจิงโดยศักย์ ซึ่งจะได้ภาคตัดขวางออกมาดังเช่นสมการ (A.54) หรือ (5.32) ส่วนแหล่งที่สองมาจากการกระเจิงหลายเชิงกับสถานะมัธยันตร์ (intermediate state) ที่เกี่ยวข้องกับสถานะกระตุ้นของนิวคลีไอยูที่ร่วมอยู่ในการกระเจิง ซึ่งในการกระเจิงหลายเชิง ระบบไม่ได้คืนกลับไปสู่สถานะเดิมตกกระทบไปเสียทั้งหมด ระบบส่วนที่ไม่ยอมคืนกลับสู่สถานะเดิมก็มี และระบบส่วนนี้จะเป็เหตุที่ทำให้ฟลักซ์ตกกระทบส่วนหนึ่งสูญหายไปสู่สถานะปฏิกิริยาอื่น ๆ ซึ่งเราจะพยายามแทนส่วนของศักย์แบบจำลองทัศนที่หนุ่ให้เกิดการดูดกลืนฟลักซ์เช่นนี้ด้วยส่วนที่เป็นส่วนจินตภาพ

ในบทนี้เราจะอภิปรายถึงศักย์แบบจำลองทัศนในสามประการ ประการแรก เราจะให้อนุพันธ์เชิงรูปแบบ (formal derivative) ที่ทำการเชื่อมโยงระหว่างศักย์แบบจำลองทัศนที่ได้มาจำนวนมากจากทัวสถานะมัธยันตร์ ซึ่งเป็นการเฉลี่ยศักย์ย่อยๆ เข้าด้วยกัน ประการที่สอง เราจะกล่าวถึงรูปแบบกึ่งการทดลองของศักย์ทัศนที่ใช้กันมาเป็นระยะเวลาหลายปีแล้ว โดยประสบความสำเร็จอย่างมากเมื่อใช้กับการกระเจิงพลังงานต่ำ ( $< 200$  MeV) และจะให้ตัวอย่างไว้ด้วยเพื่อจะได้อรับรู้ถึงการขึ้นกับพลังงานตกกระทบ รวมทั้งการขึ้นกับตัวแปรอื่น ๆ ด้วย ประการที่สาม เราจะพิจารณาการกระเจิงในระดับนิวคลีออน-นิวคลีออน ซึ่งเป็นตัวให้ “รากฐานเชิงจุลภาค” (“microscopic” foundation) แก่ศักย์แบบจำลองทัศน

## 7.1 อนุพันธ์เชิงรูปแบบของศักย์แบบจำลองทัศน (Formal Derivation of the Optical Model Potential)

พิจารณาในกรณีของอนุภาคอิสระกระเจิงออกจากนิวเคลียสที่ประกอบไปด้วยนิวคลีออน  $A$  นิวคลีออน ให้  $\mathbf{r}_0$  แทนพิกัดของโปรเจกไทล์ และ  $\mathbf{r}_i, i = 1$  ถึง  $A$ , แทนพิกัดของนิวคลีออน  $A$  ที่อยู่ในนิวเคลียสเป้า เพื่อให้ง่ายต่อการใส่สัญกรณ์ เราจะพรางการอ้างอิงกับสปินและระดับชั้นความเสรีเอาไว้ เป้าหมายที่เราจะกระทำในตอนนี้คือการหาผลเฉลยของสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์

$$H(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \Psi(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = E \Psi(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (7.1)$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบที่เหมาะสม เนื่องจากสมการ (7.1) นี้เป็นปัญหามหาลักษณะ การหาผลเฉลยโดยตรงไปตรงมาจึงไม่อาจทำได้ ดังนั้นผลเฉลยที่เราจะหาในตอนนี้คือผลเฉลยแบบประมาณ ที่เอาแค่เพียงพอที่จะทำให้เราเข้าใจผลลัพธ์โดยเฉลี่ยของการกระเจิงได้ก็พอ

แฮมิลตันเนียนของระบบบริบูรณ์ซึ่งประกอบด้วยอนุภาคโปรเจกไทล์และนิวเคลียสเป้า อาจแยกออกเป็นสามส่วน คือ

$$H(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = T_0 + \sum_{i=1}^A V(\mathbf{r}_{0i}) + H_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (7.2)$$

เมื่อ  $\mathbf{r}_{0i} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i$  สำหรับ  $i \neq 0$  คือพิกัดสัมพัทธ์ระหว่างโปรเจกไทล์และนิวคลีออนตัวที่  $i$  ที่อยู่ในนิวเคลียสเป้า ตัวดำเนินการ  $T_0$  อธิบายพลังงานจลน์ของโปรเจกไทล์ และตัวดำเนินการ  $H_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A)$  เป็นแฮมิลตันเนียนที่ดำเนินการเฉพาะกับนิวคลีออนที่อยู่ในนิวเคลียสเป้าเท่านั้น อันตรกิริยาระหว่างโปรเจกไทล์และนิวคลีออนของนิวเคลียสเป้ากำหนดให้โดยศักย์  $V_r(\mathbf{r}_{0i})$

สมมติว่าปัญหาค่าเฉพาะ (eigenvalue problem) สำหรับนิวเคลียสเป้า พร้อมทั้งจะถูกหาผลเฉลยแล้ว และเซตบริบูรณ์ของผลเฉลย (complete set of solution)  $\{\Phi_i\}$  ถูกนำมาใช้กับสมการชเรอดิงเงอร์:

$$H_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \Phi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \varepsilon_i \Phi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (7.3)$$

ยิ่งกว่านั้นเรายังให้  $\Phi_i$  ผ่านการทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalise) กับ 1 แล้ว และเป็นส่วนหนึ่งของเซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set) ของฟังก์ชันเฉพาะ (eigenfunction) ผลเฉลยของทั่วไปสำหรับระบบบริบูรณ์ที่รวมเอาทั้งอนุภาคโปรเจกไทล์และนิวเคลียสเป้าเอาไว้ อาจกำหนดให้มีนิพจน์อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยของ  $\chi_i(\mathbf{r}_0)$  และ  $\Phi_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A)$  คือ



$$\Psi(r_0; r_1, r_2, \dots, r_A) = \sum_{ij} \chi_i(r_0) \Phi_j(r_1, r_2, \dots, r_A) \quad (7.4)$$

เมื่อ  $\chi_i(r_0)$  เป็นฟังก์ชันคลื่นของโปรเจกไทล์ เพราะว่าในขั้นแรกนี้เราให้ความสนใจกับการกระเจิงแบบยืดหยุ่น ส่วนของ  $\Psi$  ที่เราสนใจจึงเป็น  $\chi_0 \Phi_0$  ซึ่งทั้งนิวเคลียสเป้าและโปรเจกไทล์ต่างก็อยู่ในสถานะต่ำสุด ปัญหาของเราที่นี้อยู่ที่การได้มาของ  $\chi_0$  (ส่วน  $\Phi_0$  นั้นสมมุติว่ารู้อยู่แล้ว)

เราจะสร้างสมการแรกสำหรับ  $\chi_0$  โดยใช้ระเบียบวิธีของตัวดำเนินการโปรเจกชัน (method of projection operator) ให้  $P$  เป็นตัวดำเนินการโปรเจกชันสำหรับสถานะพื้นของนิวเคลียสเป้า เราอาจเขียน  $P$  ให้อยู่ในรูปแบบ

$$P = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| \quad (7.5)$$

พร้อมกับให้เข้าใจด้วยว่า หากมีการหาปริพันธ์ใด ๆ จะต้องดำเนินการเฉพาะกับตัวพิกัดของนิวคลีออนของนิวเคลียสเป้าเท่านั้น เมื่อดำเนินการ  $P$  กับบนฟังก์ชันคลื่นของ (7.4) เราจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$P\Psi = \chi_0 \Phi_0$$

เราอาจจะนิยามตัวดำเนินการ  $Q$  ซึ่งโปรเจกเอาสถานะที่เหลืออยู่ออกมา ให้เป็น

$$Q = 1 - P \quad (7.6)$$

มันง่ายที่จะเห็นว่า

$$P^2\Psi = P\Psi \quad Q^2\Psi = Q\Psi \quad PQ\Psi = QP\Psi = 0 \quad (7.7)$$

จากความจริงที่ว่า  $P$  และ  $Q$  เป็นตัวดำเนินการที่โปรเจกแต่ละส่วนของปริภูมิบริบูรณ์ (complete space) ออกมา

เพราะว่า  $P + Q = 1$ , สมการชเรอดิงเงอร์ (7.1) อาจจะเขียนในรูปแบบ

$$(E - H)(P + Q)\Psi = 0 \quad (7.8)$$

คุณทางด้านซ้ายมือด้วย  $P$  และใช้ความสัมพันธ์ที่กำหนดไว้ในสมการ (7.7) เราจะได้  $P\Psi$  ในพจน์ของ  $Q\Psi$ ,

$$(E - PHP)P\Psi = (PHQ)Q\Psi \quad (7.9)$$



ทำนองเดียวกัน เมื่อคูณทางด้านซ้ายมือของสมการ (7.8) ด้วย  $Q$  เราจะได้

$$(E - QHQ)Q\Psi = (QHP)P\Psi \quad (7.10)$$

ผลลัพธ์ที่ได้นี้จะให้นิพจน์อย่างมีรูปแบบของ  $Q\Psi$  ในพจน์ของ  $P\Psi$  เป็น

$$Q\Psi = \frac{1}{E - QHQ} QHP P\Psi \quad (7.11)$$

และเมื่อแทน  $Q\Psi$  ที่อยู่ในรูปแบบนี้ลงในสมการ (7.10) จะได้

$$\left\{ E - PHP - PHQ \frac{1}{E - QHQ} QHP \right\} P\Psi = 0 \quad (7.12)$$

คุณนิพจน์นี้จากทางด้านซ้ายมือด้วย  $\langle \Phi_0 |$  และหาปริพันธ์ทั่วพิคัดของนิวเคลียสของนิวเคลียสเป้าพร้อมกับใช้รูปแบบของ  $P$  ในสมการ (7.5) เข้าช่วยจะได้สมการของ  $\chi_0$  เป็น

$$\left\{ E - \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle - \left\langle \Phi_0 \left| HQ \frac{1}{E - QHQ} QH \right| \Phi_0 \right\rangle \right\} \chi_0 = 0 \quad (7.13)$$

ซึ่งเป็นสมการที่จะนำมาหาผลเฉลยเพื่อหาฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $\chi_0$

ความจริงสมการ (7.13) นี้ยังไม่ได้อยู่ที่จุดศูนย์ของสเกลพลังงาน แต่เพื่อให้รูปแบบของสมการง่ายเข้าเราอาจจัด (set) ให้อยู่ที่สถานะพื้นของนิวเคลียสเป้าได้ โดยกำหนดให้  $\varepsilon_0$  ที่อยู่ในสมการ (7.3) มีค่าเท่ากับ 0 จากนั้นนี้มีผลให้

$$H_A \Phi_0 = \varepsilon_0 \Phi_0 = 0$$

จากการใช้สมการที่อยู่ข้างบนนี้ และใช้สมการ (7.2) เข้าช่วย รูปแบบของสมการ (7.13) ที่สถานะพื้นก็สามารถเขียนได้เป็น

$$\left\{ E - T_0 - \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle - \left\langle \Phi_0 \left| VQ \frac{1}{E - QHQ} QV \right| \Phi_0 \right\rangle \right\} \chi_0 = 0 \quad (7.14)$$

ซึ่งในการได้มาโดยใช้สมการ (7.2) เข้าช่วยนี้ เราต้องอย่าลืมว่า  $V$  เป็นศักย์ที่กระทำระหว่างโปรเจกไทล์และนิวเคลียสของนิวเคลียสเป้า และตัวดำเนินการ  $T_0$  ดำเนินการได้เฉพาะกับพิคัดของโปรเจกไทล์เท่านั้น ไม่สามารถดำเนินการกับ  $\Phi_0$  ได้ ซึ่งได้ให้ความสัมพันธ์แก่เราในที่นี้คือ

$$QT_0|\Phi_0\rangle = T_0Q|\Phi_0\rangle = 0$$

ตัวดำเนินการ  $(E - QHQ)^{-1}$  ใน (7.14) จะมีความหมายทางฟิสิกส์หากขยายให้อยู่ในรูปแบบอนุกรมอนันต์

$$\frac{1}{E - QHQ} = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \frac{1}{E} QHQ + \frac{1}{E} QHQ \frac{1}{E} QHQ + \dots \right\} \quad (7.15)$$

ความหมายของแต่ละพจน์ในส่วนขยายจะเป็นดังนี้ แต่ละครั้งที่แฮมิลตันเนียนกระทำบนแต่ละคู่ของนิวคลีออน จะมีอันตรกิริยาหรือ "การกระเจิง" ระหว่างคู่ของนิวคลีออน ผลคูณ  $(QHQ)$  มีนัยว่าอันตรกิริยาเกิดขึ้นกับนิวเคลียสเป้าในหนึ่งสถานะกระตุ้น (หนึ่งของหลาย ๆ สถานะกระตุ้นของนิวเคลียสเป้า) พจน์ที่มีเลขยกกำลังสูงขึ้นเช่น  $(E^{-1}QHQ)^n$  หมายถึงเป็นอันตรกิริยาหลายเชิงอันดับ  $n$  เพราะฉะนั้นพจน์สุดท้ายของสมการ (7.14) จึงบรรจุการกระเจิงหลายเชิงทุกอันดับไว้ โดยมีตัวประกอบพลังงาน  $E^{-1}$  เป็นตัวถ่วงน้ำหนัก

สมการ (7.13) อาจจะทำให้อยู่ในรูปแบบธรรมดาของสมการค่าเฉพาะที่เราคุ้นเคยกันดี คือ

$$(E - T_0 - v(r_0))\chi_0 = 0 \quad (7.16)$$

เมื่อศักย์สมมูล (equivalent potential)  $v(r_0)$  มีรูปแบบ

$$v(r_0) = \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | VQ \frac{1}{E - QHQ} QV | \Phi_0 \rangle \quad (7.17)$$

เป้าหมายของแบบจำลองทัศน ก็คือ แทนศักย์สมมูล  $v(r_0)$  ด้วยศักย์แบบจำลองทัศน (optical model potential)  $U_{opt}$  เมื่อกระทำเช่นนั้นกับสมการ (7.16) ก็จะได้

$$(E - T_0 - U_{opt})\chi_0 = 0 \quad (7.18)$$

ซึ่งง่ายต่อการถอดสมการ

โดยทั่วไป  $v(r_0)$  เป็น ไม่เฉพาะที่ (nonlocal); นั่นคือ การกระทำของศักย์ ณ จุดจุดหนึ่งของปริภูมิอาจจะขึ้นกับค่าของฟังก์ชันคลื่น ณ จุดอื่น สมการค่าเฉพาะรับได้กับรูปแบบ

$$(E - T_0)\chi_0(r_0) = v(r_0)\chi_0(r_0) + \int f(r_0, r'_0)\chi_0(r'_0)dr'_0 \quad (7.19)$$

เมื่อ  $f(r_0, r'_0)$  เป็นฟังก์ชันของทั้ง  $r_0$  และ  $r'_0$  ปัญหานี้อย่างยากมาก ในทางปฏิบัติที่กระทำ



กันบ่อย ๆ ก็คือการประมาณโดยใช้ศักย์เฉพาะที่ (local) แทน

## 7.2 ศักย์แบบจำลองทัศนเชิงปรากฏการณ์วิทยา (Phenomenological Optical Model Potential)

เนื่องจากศักย์แบบจำลองทัศนกำเนิดมาจากอันตรกิริยาระหว่างนิวคลีออนที่อยู่ในอนุภาคโปรเจกไทล์กับนิวคลีออนที่อยู่ในนิวเคลียสเป้า การคำนวณหาศักย์จึงจำเป็นต้องยึดอันตรกิริยานิวคลีออน-นิวคลีออนอันนี้เป็นหลัก แต่ก่อนที่จะลงมือคำนวณหาศักย์ดังกล่าว เราทำการปูพื้นความรู้เสียก่อนเพื่อให้ทางเข้าสู่ปัญหาของเรามีเหตุมีผลตามปรากฏการณ์ที่เป็นจริง (หรืออยู่ในเชิงปรากฏการณ์วิทยา) มากขึ้น

บนพื้นฐานของความจริงที่ว่าแรงนิวเคลียร์มีพิสัยสั้น เราจึงคาดคะเนว่ารูปแบบการขึ้นกับรัศมีของศักย์แบบจำลองทัศน  $U_{opt}(\mathbf{r})$  มีลักษณะใกล้เคียงกับรูปแบบการแจกแจงของนิวคลีออนที่อยู่ภายในนิวเคลียส เพื่อให้ปัญหาง่ายเข้า เราอาจอธิบายการแจกแจงของนิวคลีออนภายในนิวเคลียสดังกล่าวด้วยรูปแบบเฟอร์มิสองพารามิเตอร์ (two parameter Fermi form)

$$f(r, r_0, a) = \frac{1}{1 + \exp\{(r - r_0 A^{1/3})/a\}} \quad (7.20)$$

ซึ่งเวลาศึกษาแบบจำลองทัศน รูปแบบนี้รู้จักกันในชื่อ รูปแบบวูดส์-แซกซอน (Woods-Saxon form) ศักย์แบบจำลองทัศนเขียนในรูปทั่วไปเป็นเชิงซ้อน คือ

$$U_{vol}(\mathbf{r}) = -\{V_0 f(r, r_v, a_v) + iW_0 f(r, r_w, a_w)\} \quad (7.21)$$

ในทางเข้าสู่ปัญหาเชิงปรากฏการณ์วิทยา เราอาจกระทำให้ความลึกของส่วนจริง  $V_0$  และความลึกของส่วนจินตภาพ  $W_0$  ของหลุมศักย์เป็นพารามิเตอร์อิสระที่หาค่าได้จากข้อมูลการทดลอง ถ้าสมมุติว่าการขึ้นกับรัศมีของทั้งส่วน  $f(r, r_v, a_v)$  และส่วน  $f(r, r_w, a_w)$  เป็นไปตามรูปแบบที่กำหนดให้โดยในสมการ (7.20) เราอาจให้รัศมี  $r_v$  และ  $r_w$  และส่วนแพร่ (diffuseness) (หรือพรมัว)  $a_v$  และ  $a_w$  ของพื้นผิว เป็นพารามิเตอร์ที่ปรับแก้ค่าได้ด้วย

ศักย์ที่กำหนดให้ในสมการ (7.21) มักถูกอ้างว่าเป็นพจน์ปริมาตร (volume term) ของ  $U_{opt}(\mathbf{r})$  เพราะอันตรกิริยาเป็นไปตามการแจกแจงเชิงปริมาตรของนิวคลีออน นอกจากนี้ยังเป็นที่น่าทึ่งที่ทราบกันดีดีกว่าศักย์ทัศนขึ้นกับสปินด้วย ตัวอย่างเช่น เมื่อนิวคลีออนกระเจิงออกจากนิวเคลียส



เป้า ผลลัพธ์ที่ได้จะขึ้นกับการวางทิศทางสปินสัมพัทธ์ของนิวคลีออน วิธีทางหนึ่งที่จะวัดการขึ้นกับสปินเช่นนั้นได้ก็คือ ผ่านทางพารามิเตอร์ กำลังวิเคราะห์ (analyzing power)  $A_y$  มาถึงตอนนี้เราอาจจะนิยามให้โพลาไรเซชันตามขวาง (transverse polarization) ของนิวคลีออนตกกระทบและนิวคลีออนกระเจิงเป็นบวก (หรือสปินชี้ขึ้น) ถ้าหากการวางทิศทางสปินของนิวคลีออนเหล่านั้นอยู่ในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์หน่วย  $\hat{n}$  ที่กำหนดให้โดย

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}| |\mathbf{k}'|}$$

และจะนิยามให้เป็นลบ (หรือชี้ลง) ถ้าหากการวางทิศทางสปินอยู่ในทิศตรงข้าม การเขียนภาคตัดขวางสำหรับการกระเจิงจากโพลาไรเซชันเริ่มต้นที่เป็นบวกไปสู่โพลาไรเซชันสุดท้ายที่เป็นทั้งบวกและลบจะเขียนเป็น  $\sigma_+$  และจากโพลาไรเซชันเริ่มต้นที่เป็นลบไปสู่โพลาไรเซชันสุดท้ายที่เป็นทั้งบวกและลบจะเขียนเป็น  $\sigma_-$  กำลังวิเคราะห์ถูกกำหนดให้เป็นอัตราส่วนของผลต่างและผลรวมของภาคตัดขวางทั้งสองคือ

$$A_y = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-} \quad (7.22)$$

สำหรับการกระเจิงแบบยืดหยุ่น สารนิเทศเดียวกันอาจหาได้โดยการเริ่มต้นจากถ่านอนุภาคตกกระทบที่ไม่โพลาไรซ์ และการวัดผลต่างระหว่างภาคตัดขวางนำไปสู่การโพลาไรซ์แบบบวกและลบของอนุภาคกระเจิง ผลลัพธ์สำหรับกำลังวิเคราะห์ที่ได้จากทำให้บรรทัดฐานในทำนองสมการ (7.22) จะเรียกว่า โพลาไรเซชัน (polarization)

จากความจริงที่ว่า การกระเจิงนิวคลีออน-นิวเคลียส โดยทั่ว ๆ ไป  $A_y$  มีค่าไม่เป็นศูนย์ เป็นหลักฐานที่ยืนยันแข็งขันว่าศักย์ที่ขึ้นกับสปิน ซึ่งเราจะแทนผลเช่นนั้นด้วยพจน์สปิน-ออร์บิต (spin-orbit term) คือ

$$U_{s.o.} = \sigma \cdot \mathbf{l} \left( \frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \left\{ V_s \frac{d}{dr} f(r, r_{sv}, a_{sv}) + i W_s \frac{d}{dr} f(r, r_{sw}, a_{sw}) \right\} \quad (7.23)$$

ซึ่งพารามิเตอร์ทั้งหก คือ  $V_s$ ,  $r_{sv}$ ,  $a_{sv}$ ,  $W_s$ ,  $r_{sw}$  และ  $a_{sw}$  อาจปรับค่าให้ฟิตกับข้อมูลของการกระเจิง หมายเหตุ: ค่า  $(\hbar/m_\pi c)^2$  มีค่าหยาบ ๆ เท่ากับ 2 ซึ่งเป็นค่าเชิงตัวเลขโดยประมาณที่ใช้แทนความยาวคลื่นคอมพัตันของไพออนยกกำลังสองกันอยู่บ่อย ๆ

เหตุผลที่พจน์ สปิน-ออร์บิต ขึ้นกับรัศมีในทางที่เป็นสัดส่วนกับอนุพันธ์ของการแจกแจงความหนาแน่นของนิวคลีออนในเชิงปริมาตรนี้ คล้ายคลึงกับศักย์สปิน-ออร์บิตโทมัส (Thomas

spin-orbit potential) สำหรับอิเล็กตรอนของอะตอมที่อยู่ในสนามคูลอมบ์ของนิวเคลียส ซึ่งในกรณีของอิเล็กตรอนของอะตอมนั้น พจน์สปิน-ออร์บิตมาจากอันตรกิริยาของไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กประจำตัว (intrinsic magnetic dipole moment)  $\mu_e$  ของอิเล็กตรอนกับสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  ที่ตัวอิเล็กตรอนรับรู้ขึ้นเนื่องมาจากการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรรอบนิวเคลียส (มีความเร็วแนวสัมผัส  $v$ ) ผ่านบริเวณที่มีสนามไฟฟ้าสถิต  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ของนิวเคลียสของตัวอิเล็กตรอนเอง [หมายเหตุ: ขณะที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่รอบนิวเคลียส ตัวอิเล็กตรอนเองจะรู้สึกว่ามันอยู่นิ่ง แต่มีนิวเคลียสซึ่งมีประจุ  $Ze$  เคลื่อนที่เป็นวงโคจรรอบตัวมัน ซึ่งการเคลื่อนที่ของประจุ  $Ze$  รอบตัวอิเล็กตรอนจะก่อให้เกิดสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  ขึ้นตรงที่อยู่ของอิเล็กตรอน] ที่มาของพจน์สปิน-ออร์บิตในกรณีของอิเล็กตรอนของอะตอมนั้น จะแสดงให้เห็นดังต่อไปนี้

พลังงานอันตรกิริยาสปิน-ออร์บิต (spin-orbit interaction energy) สำหรับอิเล็กตรอนของอะตอมกำหนดได้โดย

$$W(\mathbf{r}) = -\mu_e \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

สนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  หาได้โดยใช้การแปลงโลเรนตซ์ (Lorentz transformation) ของสนามไฟฟ้าสถิต  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ของนิวเคลียสที่อยู่นิ่ง (stationary) ในห้องปฏิบัติการไปสู่กรอบอ้างอิง (frame of reference) ที่เป็นที่อยู่ของอิเล็กตรอน ซึ่งผลลัพธ์จะเป็น

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

ปริมาณที่อยู่ในวงเล็บสี่เหลี่ยมต้องการการเปลี่ยนหน่วยจากหน่วย cgs ไปเป็น SI จากการใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  กับศักย์ไฟฟ้าสถิต  $V(\mathbf{r})$  คือ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

แทนลงไปในสมการของ  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  และใช้นิยามของโมเมนต์เชิงมุมวงโคจรกำหนดให้โดย

$$\mathbf{l} \hbar = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m_e (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

จะได้สนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  เป็น

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{m_e^2 c^2 r} \frac{dV}{dr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงไปในสมการของ  $W(\mathbf{r})$  พร้อมกับให้  $\mu_e = (e\hbar/c)/m_e c \boldsymbol{\sigma}$  เราก็จะได้พลังงาน



อันตรกิริยาสปิน-ออร์บิต เป็น

$$W(r) = -\mu_c \cdot B(r) = \frac{e\hbar^2}{m_e^2 c^2 r} \frac{dV}{dr} \sigma \cdot l$$

รูปแบบของสมการ (7.23) จะเหมือนกับสมการที่ได้นี้

ตาราง 7.1 พารามิเตอร์สำคัญของสมการกระเจิงโปรตอน-นิวเคลียส  
สำหรับ  $40 \leq A \leq 208$  และพลังงานของโปรตอนในระบบห้องปฏิบัติการ  
 $80 \leq T_p \leq 180$  MeV (ดัดแปลงจาก S.M. Wong, Introductory Nuclear  
Physics., New Jersey: Prentice-Hall, 1990, p. 346)

$$\begin{aligned} V_0 &= 105.5(1 - 0.1625 \ln T_p) + 16.5 \frac{N-Z}{A} \\ r_v &= \begin{cases} 1.125 + 0.001 T_p & \text{สำหรับ } T_p \leq 130 \text{ MeV} \\ \text{ยกเว้น } T_p \leq 180 \text{ MeV} \text{ สำหรับ Ca} \\ 1.255 & \text{สำหรับ } T_p > 130 \text{ MeV. (ยกเว้น Ca)} \end{cases} \\ a_v &= 0.675 + 3.1 \times 10^{-4} T_p \\ W_0 &= 6.6 + 0.0273(T_p - 80) + 3.87 \times 10^{-6}(T_p - 80)^3 \\ r_w &= 1.65 - 0.0024 T_p \\ a_w &= 0.32 + 0.0025 T_p \\ V_{s.o.} &= 19.0(1 - 0.166 \ln T_p) - 3.75 \frac{N-Z}{A} \\ r_{sv} &= 0.920 + 0.0305 A^{1/3} \\ a_{sv} &= \begin{cases} 0.768 - 0.0012 T_p & \text{สำหรับ } T_p \leq 140 \text{ MeV} \\ 0.60 & \text{สำหรับ } T_p > 140 \text{ MeV} \end{cases} \\ W_{s.o.} &= 7.5(1 - 0.248 \ln T_p) \\ r_{sw} &= 0.877 + 0.0360 A^{1/3} \\ a_{sw} &= 0.62 \end{aligned}$$

$V_0, W_0, V_{s.o.}, W_{s.o.}$  และ  $T_p$  อยู่ในหน่วย MeV

$r_v, a_v, r_w, a_w, r_{sv}, r_{sw}$  และ  $a_{sw}$  อยู่ในหน่วย fm



สำหรับการกระเจิงของอนุภาคมีประจุ อาจต้องมีพจน์คูลอมบ์รวมไว้ในศักย์แบบจำลองทัศนด้วย รูปแบบของศักย์คูลอมบ์ที่ได้มาอย่างประมาณด้วยการให้นิวเคลียสเป้าเป็นทรงกลมประจุเอกรูป ได้แก่

$$U_C(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{2R_c} \left( 3 - \frac{r^2}{R_c^2} \right) & \text{สำหรับ } r < R_c \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r} & \text{สำหรับ } r \geq R_c \end{cases} \quad (7.24)$$

เมื่อ  $R_c$  เป็นรัศมีคูลอมบ์ (Coulomb radius) ส่วนปริมาณ  $z$  และ  $Z$  เป็นจำนวนประจุของโปรเจกไทล์และนิวเคลียสเป้าตามลำดับ สำหรับ  $R_c$  นำที่จะต้องทำให้เป็นพารามิเตอร์อิสระด้วย แต่ว่าในทางปฏิบัติ ผลลัพธ์ของการกระเจิงไม่ไว (sensitive) ต่อรายละเอียดของศักย์คูลอมบ์ จึงเป็นการสมควรไม่น้อยที่จะใช้ค่า  $R_c = 1.2A^{1/3} \text{ fm}$

จากที่กล่าวมานี้ ศักย์แบบจำลองทัศนที่บริบูรณ์จะเขียนอยู่ในรูปผลบวกของพจน์ทั้งสามคือพจน์ปริมาตร พจน์สปิน-ออร์บิต และพจน์คูลอมบ์ ดังนี้

$$U_{opt}(\mathbf{r}) = U_{vol}(\mathbf{r}) + U_{s.o.}(\mathbf{r}) + U_C(\mathbf{r}) \quad (7.25)$$

จำนวนรวมของพารามิเตอร์ทั้งหมดมีสิบสองพารามิเตอร์ (ถ้าไม่นับว่า  $R_c$  เป็นพารามิเตอร์อีกตัวหนึ่ง) ในการทดลองการกระเจิงโดยทั่วๆ ไปจะเป็นการสังเกตภาคตัดขวางการกระเจิงเชิงอนุพันธ์รวมทั้งกำลังวิเคราะห์ด้วย จำนวนข้อมูลที่ต่างเป็นอิสระไม่ขึ้นต่อกันมักจะมีมากกว่าสิบสองรายการ และชุดบริบูรณ์ของพารามิเตอร์ได้มาจากการพิจารณาให้ลงตัวกับปริมาณการวัด มีสารนิเทศจำนวนมากที่หาไม่ได้และสังสมไว้ด้วยวิธีทางเช่นนี้บนศักย์แบบจำลองทัศนเชิงปรากฏการณ์วิทยา และปัจจุบันเราได้ภาพของการขึ้นกับพลังงานและมวลของพารามิเตอร์เหล่านี้ได้ชัดเจนมากกับกรณีของการกระเจิงของโปรตอนกับนิวเคลียสที่พลังงานของโปรตอนในระบบห้องปฏิบัติการสูงถึง 200 MeV ชุดที่เป็นไปได้ของพารามิเตอร์ชุดหนึ่งที่ได้มาจากการพิจารณาการกระเจิงของโปรตอนกับนิวคลีไอด์ต่างๆ ที่มีมวลจาก  $A = 40$  ถึง  $A = 208$  และพลังงานของโปรตอนในระบบห้องปฏิบัติการมีค่าจาก 80 ถึง 180 MeV กำหนดอยู่ในตาราง 7.1

อย่างไรก็ดี การใช้แนวทางเข้าสู่ปัญหาในเชิงปรากฏการณ์วิทยานี้ยังมีปัญหาอีกหลายประการ ประการแรกคือ ถึงแม้ว่าเราจะรู้รายละเอียดของการกระเจิงของโปรตอนเป็นอย่างดี แต่เราไม่อาจขยายความรู้ไปใช้กับการกระเจิงของอนุภาคอื่นได้ ยกตัวอย่าง เช่นขณะนี้เรายังไม่รู้จักศักย์ทัศนของนิวตรอนกันดีเพราะยังขาดข้อมูลทางการทดลองของการกระเจิงนิวตรอน-นิวเคลียสอีกมาก และเราก็ไม่อาจประมาณค่านอกช่วงจากกรณีของการกระเจิงโปรตอนเข้ามาใช้

อย่างง่าย ๆ ได้ เพราะว่าแต่ละกรณีจะมีธรรมชาติของตัวเอง ประการที่สอง รูปแบบการขึ้นกับรัศมีที่ใช้อยู่ในสมการ (7.21) และ (7.23) นั้น พบว่าไม่เพียงพอที่จะนำไปใช้กับกรณีที่พลังงานการระดมยี่มีค่าสูงขึ้นได้ ซึ่งวิธีแก้ไขวิธีหนึ่งก็คือเพิ่มจำนวนพารามิเตอร์ให้มากขึ้นอีก แต่ก็ทำให้นิพจน์ยุ่งยากเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน ดังนั้นถ้าหากต้องการนิพจน์ที่มีรูปแบบที่สวยงามแต่เพียงอย่างเดียวแล้ว วิธีการเช่นนี้ก็ไม่ใช่ ประการสุดท้ายก็คือ พารามิเตอร์ไม่เป็นได้อย่างเดียว (unique) (ศักย์เป็นได้อย่างเดียวในที่นี้หมายถึง ในช่วงมวลนิวเคลียส หรือในช่วงพลังงานโปรเจกไทล์อื่น ๆ ลักษณะของศักย์ก็ยังคงที่ติดกับข้อมูลการทดลอง) โดยพารามิเตอร์ของศักย์ชุดหนึ่งก็จะให้ลักษณะของศักย์ที่ติดกับข้อมูลการทดลองในช่วงของมวลนิวเคลียสและช่วงของพลังงานโปรเจกไทล์ช่วงหนึ่งเท่านั้น ไม่ทั่วไป นอกเหนือจากนี้พารามิเตอร์ทั้งสิบสองตัวยังขึ้นต่อกันและกันในทางที่ยากมาก ในปัจจุบันมีชุดของพารามิเตอร์อื่น ๆ ซึ่งหามาได้จากข้อมูลที่มีรายละเอียดและมีคุณภาพดี ๆ เพิ่มขึ้นอยู่อีกเรื่อย ๆ

### 7.3 ศักย์แบบจำลองทัศนจุลภาค (Microscopic Optical Model Potential)

บนแนวคิดที่ว่าศักย์แบบจำลองทัศนสำหรับการกระเจิงนิวคลีออน-นิวคลีออนเป็นผลมาจากอันตรกิริยาเฉลี่ยระหว่างนิวคลีออนตกกระทบกับนิวคลีออนของนิวเคลียสเป้า จึงเป็นฟังก์ชันของอันตรกิริยานิวคลีออน-นิวคลีออน ที่ถ่วงน้ำหนักโดยการแจกแจงนิวคลีออนภายในนิวเคลียส บนแนวคิดเช่นนี้ แบบจำลองทัศนจุลภาค (microscopic optical model) ของศักย์จึงถูกสร้างขึ้นโดยการประสานอันตรกิริยานิวคลีออน-นิวคลีออนเข้ากับความหนาแน่นนิวเคลียส ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าแบบจำลอง "การทบ" ("folding" model) เช่นนี้ประสบความสำเร็จอย่างมากในการใช้อธิบายข้อมูลการกระเจิง ถ้าการเริ่มต้นเริ่มจากอันตรกิริยานิวคลีออน-นิวคลีออนที่เหมาะสม

เพื่อให้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาอนุภาคตกกระทบที่เป็นนิวคลีออน และไม่นำเอาโครงสร้างภายในของอนุภาคตกกระทบซึ่งอาจมีมาเกี่ยวข้องด้วย พจน์แรกของ (7.17) บ่งชี้ว่าเราอาจจะประมาณศักย์แบบจำลองทัศนนิวคลีออน-นิวเคลียส โดยการรวมให้เป็นอันหนึ่งอันเดียวกันดังนี้

$$U_{opt}(\mathbf{r}_0) \approx \langle \Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) | \sum_{i=1}^A V(\mathbf{r}_{0i}) | \Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \rangle \quad (7.26)$$



เมื่อการรวมกระทำเฉพาะตัวพิกัดของนิวเคลียสเป่าเท่านั้น

หนึ่งจะต้องระวังเกี่ยวกับการปฏิสมมาตร (antisymmetrization) ระหว่างนิวคลีออนตกกระทบกับนิวคลีออนของนิวเคลียสเป่าที่มันมีอันตรกิริยาคู่ด้วย กรณีง่ายที่สุดที่เราจะต้องพิจารณาคือกรณีที่นิวคลีออนตกกระทบมีอันตรกิริยาเพียงหนึ่งครั้งกับหนึ่งนิวคลีออนของนิวเคลียสเป่า เมื่อมีนิวคลีออนกระเจิงออกมาจากอันตรกิริยา เราไม่มีทางบอกได้ว่านิวคลีออนที่กระเจิงออกมานั้นเป็นนิวคลีออนตัวที่ตกกระทบหรือเป็นนิวคลีออนของนิวเคลียสเป่า ดังนั้นเราจะต้องนำความเป็นไปได้ทั้งสองกรณีนี้มาผสมผสานกัน ด้วยเหตุผลนี้สมาชิกเมทริกซ์ทางด้านขวามือของสมการ (7.26) จะต้องอยู่ในรูปผลบวกของสองพจน์ คือ

$$\langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | t_D | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | t_E | \Phi_0 \rangle \quad (7.27)$$

เมื่อ  $t_D$  เป็นตัวดำเนินการสำหรับส่วนตรง (direct part) ของอันตรกิริยาซึ่งนิวคลีออนที่กระเจิงออกมาเป็นนิวคลีออนตัวเดียวกับนิวคลีออนตกกระทบ และ  $t_E$  เป็นตัวดำเนินการสำหรับส่วนแลกเปลี่ยน (exchange part) ซึ่งนิวคลีออนตกกระทบถูกดูกลืนด้วยนิวเคลียสเป่า และอนุภาคกระเจิงเป็นหนึ่งในนิวคลีออนที่อยู่ในนิวเคลียสเป่าในตอนเริ่มต้น เราจะเห็นได้ต่อมาถึงการใช้สองพจน์นี้ว่าให้ความแตกต่างที่สำคัญมากต่อการอธิบายรูปร่างเชิงรัศมีของศักย์แบบจำลองทัศนที่พลังงานการกระเจิงสูง ๆ

สำหรับศักย์นิวคลีออน-นิวคลีออน  $V(r_{ij})$  การประมาณอย่างง่าย ๆ ตรง ๆ ทางหนึ่งที่สามารถทำได้ก็คือแทนมันด้วยอันตรกิริยา นิวคลีออน-นิวคลีออนอิสระ ตัวอย่างเช่นแทนมันด้วยศักย์จากการกระเจิง นิวคลีออน-นิวคลีออน เป็นต้น การประมาณเช่นนี้เป็นที่รู้จักกันว่าเป็นการประมาณอิมพัลส์ (impulse approximation) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า IA และในทางปฏิบัติพบว่าเป็นการประมาณเพื่อฟิตกับข้อมูลการทดลองของการกระเจิง นิวคลีออน-นิวเคลียส ที่หายาก ๆ แต่กระนั้นในการคำนวณแบบจำลองชั้นของนิวเคลียส อันตรกิริยานิวคลีออน-นิวคลีออนยังผล (effective nucleon-nucleon interaction) ที่ใช้ในการคำนวณก็ยังกำหนดจากวิธีการเช่นนี้ โดยถือว่าหนึ่งของสองนิวคลีออนจะฝังจมอยู่ในนิวเคลียส เพียงแต่ว่าในกรณีแบบจำลองทัศน ในบางครั้งอันตรกิริยายังผลจะถูกกวัดข้นมากกว่ากรณีแบบจำลองชั้น การประมาณที่เป็นไปได้ก็เหมือนเคยก็คือ การประมาณวัตถุนิวเคลียส (nuclear medium) ให้เป็นสสารนิวเคลียสขนาดอนันต์ (infinity nuclear matter); อันนี้ทำให้การคำนวณง่ายขึ้นมาก แต่อย่างไรก็ตาม เนื่องจากภายในนิวเคลียสขนาดจำกัด (finite nucleus) ส่วนที่เป็นบริเวณพื้นผิว ซึ่งเป็นบริเวณที่ความหนาแน่นของนิวเคลียสค่อย ๆ แปรผันเพิ่มขึ้นจากที่มีค่าความหนาแน่นน้อยมากไปจนถึงค่าอิมพัลส์ (เท่ากับค่าความหนาแน่นในสสารนิวเคลียสขนาดอนันต์) จะกินบริเวณมาก เมื่อคำนึงถึงการแปรผันของ



ความหนาแน่นเช่นนี้ด้วยศักย์ยังผลที่นำมาใช้ก็เลยต้องเป็นศักย์ยังผลที่ ขึ้นกับความหนาแน่น (density dependence) อยู่บ่อย ๆ หรือพูดอีกอย่างหนึ่งว่า ตัวดำเนินการ  $t_D$  และ  $t_E$  ในสมการ (7.27) เป็นฟังก์ชันของความหนาแน่นของนิวเคลียสด้วย ศักย์ยังผลในบริเวณที่มีความหนาแน่นต่าง ๆ คำนวณหาได้จากการใช้วัตถุนิวเคลียสที่มีความหนาแน่น  $\rho$  เหมือนกัน นอกจากนั้นอันตรกิริยา นิวคลีออน-นิวคลีออน อิสระยังขึ้นกับพลังงานของตัวนิวคลีออนเองด้วย เป็นผลให้  $t_E$  และ  $t_D$  เป็นฟังก์ชันของพลังงานการระดมยิง

นิพจน์ของความหนาแน่นของนิวเคลียสเป้าอาจถูกกำหนดในพจน์ของฟังก์ชันคลื่นอนุภาคเชิงเดี่ยวของนิวคลีออนเป้า (คือนิวคลีออนของนิวเคลียสเป้า)  $\phi_i(\mathbf{r})$  โดยให้มีนิพจน์อยู่ในรูปแบบของตัวดำเนินการดังนี้

$$\rho(\mathbf{r}) = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| \approx \sum_{i=1}^A \phi_i^*(\mathbf{r})\phi_i(\mathbf{r}) \quad (7.28)$$

จากการใช้นิพจน์ข้างบนนี้ ศักย์แบบจำลองที่ศูนย์จุดจะสัมพันธ์กับปริพันธ์ทั่วฟังก์ชัน

$$f(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \phi_i^*(\mathbf{r}) t_D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \rho, E) \phi_i(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^A \phi_i^*(\mathbf{r}) t_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \rho, E) \phi_i(\mathbf{r}_0) \quad (7.29)$$

ที่สร้างขึ้นมาโดยการผสมผสานหรือ "การทบ" อันตรกิริยานิวคลีออน-นิวคลีออน ระหว่างนิวคลีออนตกกระทบและนิวคลีออนเป้าเข้ากับความหนาแน่นของนิวเคลียส

พจน์ตรง (direct term) ของศักย์แบบจำลองที่ศูนย์จุดหาได้ง่าย หากว่าปริพันธ์สำหรับพจน์แรกของสมการ (7.29) กำหนดให้มีรูปแบบเป็น

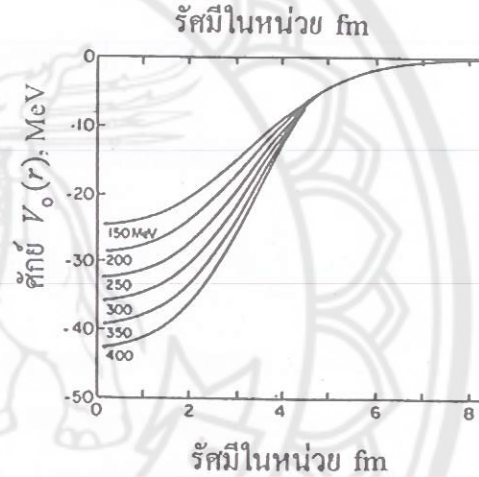
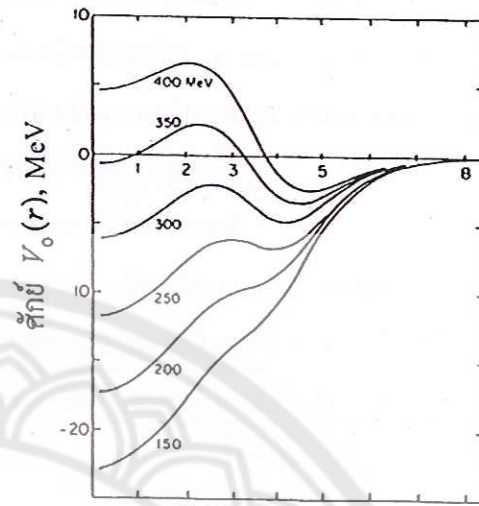
$$U_{opt}^D(\mathbf{r}_0, E) = \int \rho(\mathbf{r}) t_D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \rho, E) d^3r \quad (7.30)$$

โดย  $\rho(\mathbf{r})$  ที่อยู่ในสมการมีรูปแบบโดยประมาณตามสมการ (7.28) การแปลงแบบเดียวกันนี้ไม่สามารถใช้ได้กับพจน์แลกเปลี่ยน (exchange term) เนื่องจากสองฟังก์ชันคลื่นอนุภาคเชิงเดี่ยวที่อยู่ในพจน์ที่สองของ (7.29) เป็นฟังก์ชันของพิกัดต่างกันคือ  $\mathbf{r}$  และ  $\mathbf{r}_0$  ซึ่งเป็นผลให้ได้พจน์แลกเปลี่ยนที่น้อยทั่วไปเป็นแบบไม่เฉพาะที่ พจน์แลกเปลี่ยนที่ถูกลดทอนให้มีรูปแบบอย่างง่ายโดยการประมาณ "โมเมนตัมเฉพาะที่" ("local momentum" approximation) คือ

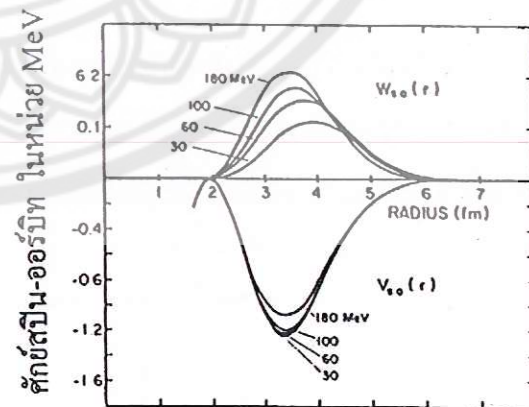
$$U_{opt}^E(\mathbf{r}_0, E) \approx \int \rho(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) t_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \rho, E) j_0(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) d^3r \quad (7.31)$$

เมื่อ

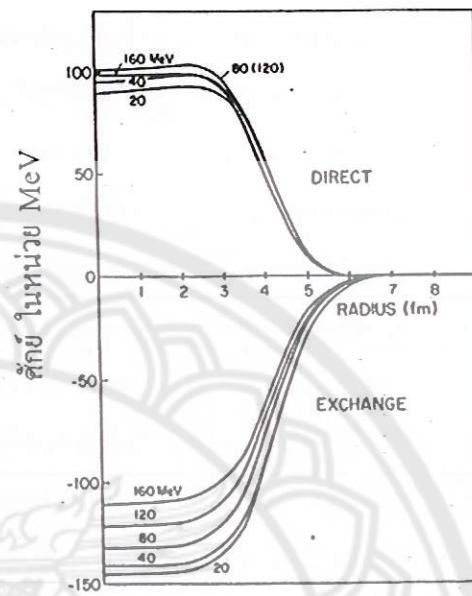
รูป 7.1 รูปร่างเชิงรัศมีของพจน์ปริมาตรของศักย์ทัศนโปรตอน-นิวเคลียส ที่แต่ละค่าพลังงานการกระเจิง โดยเส้นโค้งบน (upper curve) เป็นของส่วนจริง และเส้นโค้งล่าง (lower curve) จะเป็นของส่วนจินตภาพ ผลการคำนวณได้มาจากการใช้กรรมวิธีการทบ (folding procedure) กับศักย์แฟริส (Paris potential) ซึ่งแทนอันตรกิริยาระหว่างนิวคลีออน (คัดแปลงจาก S.M. Wong, Introductory Nuclear Physics., New Jersey: Prentice-Hall, 1990, p. 349)



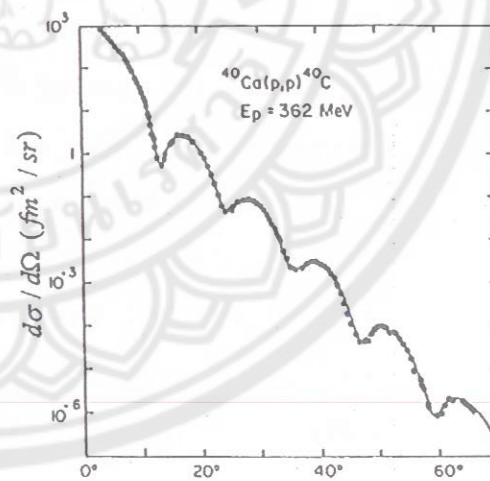
รูป 7.2 รูปร่างเชิงรัศมีของส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ของพจน์สปีน-ออร์บิตของศักย์ทัศน สำหรับการกระเจิงโปรตอน-นิวเคลียส ที่แต่ละพลังงานการกระเจิง การคำนวณอยู่บนพื้นฐานของกรรมวิธีการทบ โดยใช้ศักย์แฟริสแทนอันตรกิริยาระหว่างนิวคลีออน (คัดแปลงจาก S.M. Wong, Introductory Nuclear Physics., New Jersey: Prentice-Hall, 1990, p. 350)



รูป 7.3 เส้นโค้งที่ได้จากพจน์ตรงและพจน์  
แลกเปลี่ยนที่ส่วนจริง  $V_0(r)$  ของพจน์ปริมาตร  
ของศักย์ทัศนโปรตอน-นิวเคลียส ที่แต่ละ  
พลังงานการกระเจิง เส้นโค้งบนเป็นผลลัพธ์  
ของส่วนตรงของศักย์จุลภาคที่กำหนดให้โดย  
สมการ (7.30) เส้นโค้งล่างเป็นผลลัพธ์ของ  
ส่วนแลกเปลี่ยนที่กำหนดให้โดยสมการ (7.31)  
อันตรกิริยานิวเคลียส-นิวเคลียส ที่ใช้ในการ  
คำนวณในเชิงจุลภาคนี้นำมาจากศักย์แฟรต  
(จาก S.M. Wong, Introductory Nuclear  
Physics., New Jersey: Prentice-Hall, 1990,  
p. 352)



รูป 7.4 ภาควัดขวางเชิงอนุพันธ์สำหรับการ  
กระเจิงแบบยืดหยุ่นของโปรตอน 326 MeV  
ออกจาก  $^{40}\text{Ca}$  เส้นโค้งต่อเนื่องเป็นผลลัพธ์  
ของการคำนวณโดยใช้ศักย์แบบจำลองทัศน  
จุลภาค กระสวนคล้าย-การเลี้ยวเบน  
(diffraction-like pattern) เกิดจากการกระเจิง  
ที่มุมน้อย ๆ หลายชนิด (คัดแปลงจาก S.M.  
Wong, Introductory Nuclear Physics., New  
Jersey: Prentice-Hall, 1990, p. 353)



มุมกระเจิง CM



$$\rho(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \phi_i^*(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}_0)$$

ซึ่งคล้ายคลึงกับสมการ (7.28),  $j_0(\xi)$  ในที่นี้เป็นฟังก์ชันเบสเชลทรงกลมอันดับศูนย์

ที่พลังงานในระบบห้องปฏิบัติการต่ำกว่า 200 MeV สก๊attering ทำให้ผลลัพธ์คล้ายคลึงกับผลลัพธ์ที่หาได้จากสก๊attering ปกติ อย่างไรก็ตามที่พลังงานสูงกว่า 200 MeV เป็นที่ทราบกันว่ารูปร่างเชิงรัศมีวูดส์-แซกซอนที่ใช้กันอยู่ในแนวทางเข้าสู่ปัญหาการทดลองนั้นจะไม่เพียงพอ จากการคำนวณสก๊attering เราพบว่าเมื่อพลังงานการกระเจิงเพิ่มขึ้น รูปร่างเชิงรัศมีของพจน์ปริมาตรของสก๊attering จะเปลี่ยนแปลงตรงรูปร่าง "ขวดไวน์" (wine-bottle) เหมือนที่แสดงในรูป 7.1 [แต่อย่างไรก็ตาม รูปร่างเชิงรัศมีสำหรับสก๊attering สปิน-ออร์บิตที่แสดงอยู่ในรูป 7.2 ยังคงรักษาสัดส่วนสำคัญของรูปแบบเหมือนกับที่กำหนดให้โดยสมการ (7.23)] การเปลี่ยนแปลงรูปร่างมาจากการขึ้นกับพลังงานที่แตกต่างกันของส่วนตรงและส่วนแฉกเปลี่ยนของสก๊attering ทบ ในรูป 7.3 แสดงให้เห็นส่วนตรงเป็นแรงผลัก และส่วนแฉกเปลี่ยนเป็นแรงดูด เนื่องจากส่วนแฉกเปลี่ยนจะขึ้นกับพลังงานอย่างคม (sharp) หรือชัดกว่าส่วนตรง เมื่อเอาสองพจน์นี้มาบวกกันเพื่อให้เป็นสก๊attering  $U_{opt}$  ส่วนที่เหลือจากการหักล้างกันระหว่างสก๊attering แรงผลักและสก๊attering แรงดูดจะให้การขึ้นกับพลังงานที่ไม่สามารถแทนได้ด้วยรูปแบบวูดส์-แซกซอน ง่าย ๆ ได้ ในรูป 7.4 เป็นผลลัพธ์สำหรับการกระเจิงแบบยืดหยุ่นของโปรตอน 362 MeV จาก  $^{40}\text{Ca}$  ที่ยกมาเป็นตัวอย่างก็เพื่อแสดงให้เห็นว่าสก๊attering ที่จุดภาคมีวิสัยสามารถที่จะอธิบายการกระเจิงโปรตอน-นิวเคลียสพลังงานมัธยัม (intermediate energy proton-nucleus scattering) ที่มีการถ่ายโอนโมเมนตัมที่มาก ๆ ได้ดี

นอกเหนือจากการกระเจิงแบบยืดหยุ่นแล้ว สก๊attering ยังมีความสำคัญต่อการเข้าใจภาคตัดขวางของปฏิกิริยานิวเคลียสอื่น ๆ ได้อีกด้วย ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีของการกระเจิงที่มีปฏิกิริยาตรงเกิดแทรกอยู่ด้วย ในกรณีเช่นนี้เราจะแทนการกระเจิงสก๊attering และการกระเจิงหลายเชิงที่มีสถานะสุดท้ายเหมือนเดิม (ซึ่งก่อรูปภูมิหลังหรือแบคกราวนด์ขึ้น) ด้วยสก๊attering แบบจำลองทัศน ส่วนการลดลงของฟลักซ์ตกกระทบเนื่องจากไปหนุนให้เกิดปฏิกิริยาตรง ก็จะแทนด้วยส่วนจินตภาพของสก๊attering ทั้งนี้ก็เพราะว่าจำนวนสุทธิของฟลักซ์ตกกระทบที่ลดลงไปเนื่องมาจากการเปิดของแชนเนลปฏิกิริยาอื่น ๆ นั่นเอง

จากการมองในแบบกลศาสตร์คลื่น เราสามารถกล่าวได้ว่าสก๊attering เป็นสก๊attering เล็กที่ "บิดเบี้ยว" ทั้งคลื่นตกกระทบและคลื่นกระเจิงให้เปลี่ยนไปจากสถานะคลื่นระนาบของมัน และผลของปฏิกิริยาตรงที่สถานะจำเพาะหนึ่ง ๆ เราอาจพิจารณาให้เป็นพจน์ที่บวกเพิ่มเข้ามาพจน์ของการกระเจิงในสก๊attering โดยจะใช้ได้กับที่สถานะสุดท้ายจำเพาะหนึ่ง ๆ เท่านั้น สารสำคัญของประมาณบอร์นคลื่นบิดเบี้ยว (DWBA) ที่มีต่อปฏิกิริยาตรงก็คือ เพื่อแยกการกระเจิงออกเป็น

สองส่วน คือส่วนที่เป็นภูมิภาค (หรือแบคกราวนด์) ที่ถูกกำหนดโดยศักย์แบบจำลองทัศน และส่วนที่ไปหนุนให้เกิดปฏิกิริยาตรงกันเนื่องมาจากโครงสร้างพิเศษของสถานะสุดท้ายที่เกี่ยวข้อง ซึ่งผลลัพธ์ของการคำนวณโดยวิธีนี้พบว่าใช้พหุนามกัณฑ์ที่สังเกตจากการทดลองได้ครบถ้วนดีมากดังจะพบได้ในบทถัดไป

## เอกสารอ้างอิง

1. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
2. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
3. W.E. Burcham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
4. V. Devanathan, *Nuclear Physics*, Narosha Publishing House, New Delhi, 2006
5. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
6. E. Gadioli and P.E. Hodgson, *Pre-Equilibrium Nuclear Reactions*, Oxford University Press, New York, 1992.
7. E.S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955.
8. K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*, 2nd edit, Institute of Physics, Brista, 1999.
9. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.
10. K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Willey & Sons, Singapore, 1988.
11. B.R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, Wiley, West Sussex, 2006.
12. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
13. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.



## แบบฝึกหัด

1. จากศักย์แบบจำลองทัศนที่เขียนในรูปแบบสมการ (7.21) คือ

$$U_{vol}(\mathbf{r}) = -\{V_0 f(r, r_v, a_v) + iW_0 f(r, r_w, a_w)\}$$

ส่วนลึก  $V_0$  ของส่วนจริง และส่วนลึก  $W_0$  ของส่วนจินตภาพ ที่อยู่ในสมการนี้ มีผลต่อภาคตัดขวางการกระเจิงและภาคตัดขวางปฏิกิริยาในภาคตัดขวางรวมอย่างไร ?

2. จากการที่เขียนศักย์แบบจำลองทัศนในรูปแบบสมการ (7.25) คือ

$$U_{opt}(\mathbf{r}) = U_{vol}(\mathbf{r}) + U_{s.o.}(\mathbf{r}) + U_C(\mathbf{r})$$

แสดงว่าศักย์แบบจำลองทัศนขึ้นกับอะไรบ้าง ? ให้อธิบาย

3. จากศักย์แบบจำลองทัศนในข้อ 2. มีพจน์ใดที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงของนิวคลีออนภายในนิวเคลียส, โพลาริเซชัน, และประจุของอนุภาคกระเจิง
4. พารามิเตอร์ในศักย์ทัศนเชิงปรากฏการณ์วิทยามีข้อจำกัดของการใช้อย่างไรบ้าง ?
5. การประมาณบอร์นคตินบิดเบี้ยว (DWBA), แยกการกระเจิงออกในลักษณะเช่นไร ?



ภาคผนวก ก

การปฏิบัติกับการกระเจิง  
ในแบบกลศาสตร์คลื่น  
(WAVE-MECHANICAL TREATMENT  
OF SCATTERING)

**ก.1 กลศาสตร์คลื่นของการกระเจิง (Wave Mechanics of Scattering)**

ในการศึกษาเพื่อหาสารนิเทศ (information) เกี่ยวกับนิวเคลียส วิธีการที่สำคัญวิธีการหนึ่งก็คืออาศัยการแปลผลจากข้อมูลการทดลองในเรื่องการกระเจิง ซึ่งจำเป็นต้องใช้ทฤษฎีที่มีพื้นฐานอยู่บนกลศาสตร์คลื่น (wave mechanics) มาช่วย วิธีวิเคราะห์คลื่นย่อย (partial wave analysis) เป็นวิธีที่สำคัญวิธีหนึ่งที่ทำให้ผลเฉลย (solution) ในปัญหาการกระเจิงได้แน่ชัดที่ทุกค่าพลังงาน แต่จะใช้กับการกระเจิงที่พลังงานต่ำและปานกลางเป็นส่วนใหญ่

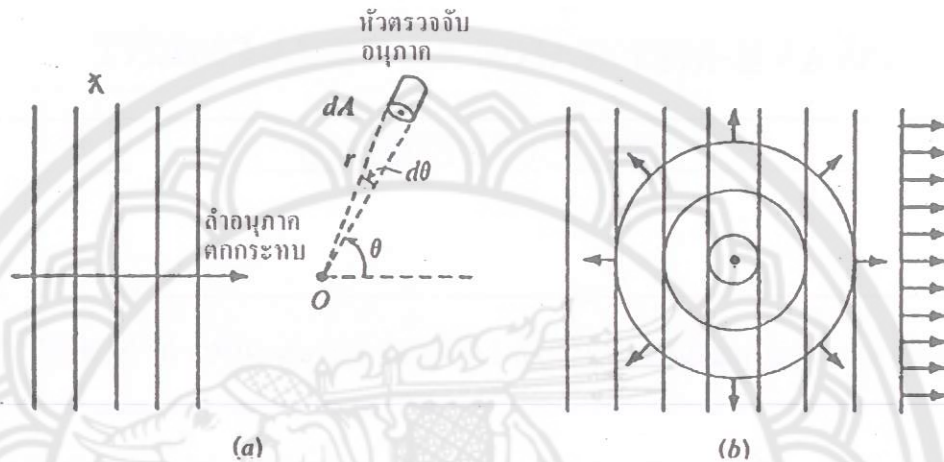
ต่อไปนี้จะพิจารณาการกระเจิงของอนุภาคอันเนื่องมาจากอิทธิพลของศักย์ศูนย์กลาง (central potential),  $V(r)$ , ในแง่ของกลศาสตร์คลื่น โดยศักย์ศูนย์กลางนี้กำหนดว่าเป็นศักย์พิสัย (range) สั้น (ศักย์นิวเคลียร์) และเพื่อให้ปัญหาที่เราศึกษาง่ายเข้า เราจะกำหนดให้นิวเคลียสเป้าไม่มีสปิน (spin) และอนุภาคตกกระทบไม่มีทั้งประจุและสปิน

พิจารณาให้ลำของอนุภาคมีทิศอยู่ในแนวแกน  $z$  และอนุภาคมีความเร็ว  $v$  ตกกระทบบนนิวเคลียสเป้าที่วางอยู่ ณ ตำแหน่ง  $O$  ดังรูป A.1a ถ้ากำหนดให้ในปริภูมิหนึ่งหน่วยปริมาตร มีอนุภาคอยู่ได้เพียงหนึ่งอนุภาค จำนวนอนุภาคที่พุ่งผ่านพื้นที่หนึ่งหน่วยในเวลาหนึ่งวินาทีจึงมีได้  $v$  อนุภาค เราจะแทนอนุภาคตกกระทบนี้ด้วยฟังก์ชันคลื่นตกกระทบที่มีแอมพลิจูดหนึ่งหน่วย ดังนี้

$$\psi_{inc} = e^{ikz} \quad (A.1)$$

เมื่อ  $k$  เป็นเลขคลื่นเทียบกับระบบพิกัดศูนย์กลางมวล,  $k = 1/\lambda = p/\hbar = \sqrt{2ME}/\hbar$  เมื่อ  $\lambda$

เป็นความยาวคลื่นเดอบรอยล์หารด้วย  $2\pi$ ,  $M$  เป็นมวลลดทอน,  $E$  เป็นพลังงานของอนุภาคตกกระทบในพิกัดศูนย์กลางมวล และ  $\hbar$  เป็นค่าคงตัวของพลังค์หารด้วย  $2\pi$  หลังจากคลื่นตกกระทบนี้ตกกระทบกับศักย์  $V(r)$  มันจะกระเจิงออกไปเป็นคลื่นทรงกลม (spherical wave) อย่างมีสมมาตรรอบแกน ฟังก์ชันคลื่นกระเจิงจะเขียนได้ในรูปแบบเป็น



รูป A.1 (a) แผนภาพการกระเจิง (b) ล้ออนุภาคตกกระทบและอนุภาคกระเจิง ที่ระยะห่างจากศูนย์กลางการกระเจิงมาก ๆ (ดัดแปลงจาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 390)

$$\psi_{scatt} = f(\theta)(e^{ikr} / r) \quad (A.2)$$

เมื่อ  $f(\theta)$  เป็นแอมพลิจูดของคลื่นกระเจิงที่ไม่ขึ้นกับมุม  $\phi$  ทั้งนี้เพราะมีสมมาตรรอบแกน ตัวประกอบ  $1/r$  แสดงถึงการลดลงตามกฎส่วนกลับยกกำลังสอง (inverse-square law) ของความเข้มของคลื่นกระเจิง

ถ้าเรามองดูฟังก์ชันคลื่นที่บริเวณใกล้ศักย์กระเจิงมาก ๆ เราจะมีทั้งฟังก์ชันคลื่นตกกระทบและฟังก์ชันคลื่นกระเจิงบิดเบื้อวจนจำแนกออกจากกันได้ยาก แต่ที่ระยะห่างออกไปมาก ๆ จนกระทั่งศักย์มีค่าลดลงใกล้ศูนย์ จะมองเห็นฟังก์ชันคลื่นทั้งสองได้ง่ายดังรูป A.1b ฟังก์ชันคลื่นของระบบที่ระยะห่างมาก ๆ นี้เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \psi &\sim \psi_{inc} + \psi_{scatt} \\ &= e^{ikz} + f(\theta)(e^{ikr} / r) \end{aligned} \quad \text{เมื่อ } r \rightarrow \infty \quad (A.3)$$

จำนวนอนุภาคในคลื่นตกกระทบที่พุ่งข้ามพื้นที่หนึ่งหน่วยในเวลาหนึ่งหน่วย เขียนได้เป็น

$$I = v |\psi_{inc}|^2 = v (e^{ikz})(e^{ikz})^* = v \quad (\text{A.4})$$

ในทำนองเดียวกัน อนุภาคที่กระเจิงออกมาภายในมุม  $\theta$  ถึง  $\theta + d\theta$  และมาถึงพื้นที่  $dA$  ภายในหนึ่งหน่วยเวลา จะมีจำนวน

$$\begin{aligned} v |\psi_{scat}|^2 dA &= v |f(\theta)(e^{ikr}/r)|^2 dA \\ &= v |f(\theta)|^2 dA/r^2 \end{aligned}$$

แต่  $dA/r^2$  คือ มุมตัน (solid angle),  $d\Omega$ , ดังนั้นเราจะได้จำนวนอนุภาคกระเจิงต่อหนึ่งหน่วยมุมตันต่อหนึ่งหน่วยเวลา,  $S(\theta)$ , เป็น

$$S(\theta) = v |f(\theta)|^2 \quad (\text{A.5})$$

มาถึงตรงนี้ หากเราให้นิยาม ภาคตัดขวางจุลภาคของการกระเจิง (microscopic scattering cross section),  $\sigma$ , ขึ้นมาว่า เป็นโอกาสของการเกิดการกระเจิงเมื่ออนุภาคหนึ่งอนุภาคชนกับนิวเคลียสหนึ่งนิวเคลียส และ  $\sigma(\theta)$  เป็นภาคตัดขวางของการกระเจิงออกมาในแนวมุม  $\theta$  แล้วภาคตัดขวางการกระเจิงเชิงอนุพันธ์ (differential scattering cross section),  $d\sigma/d\Omega$ , ซึ่งเป็นโอกาสที่อนุภาคจะกระเจิงออกมาภายในหนึ่งหน่วยมุมตันก็จะกำหนดให้โดย

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{S(\theta)}{I} = |f(\theta)|^2 = f^*(\theta)f(\theta) \quad (\text{A.6})$$

และภาคตัดขวางการกระเจิงก็จะกำหนดให้โดย

$$\sigma = \int \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \quad (\text{A.7})$$

ซึ่งการจะหา  $\sigma$  ออกมาได้จำเป็นต้องรู้นิพจน์  $f(\theta)$  เสียก่อน ซึ่งขั้นตอนของการดำเนินการหาค่าภาคตัดขวาง  $\sigma$  จะเริ่มต้นในต่อไป

อนุภาคตกกระทบที่มีโมเมนตัมเชิงเส้น  $\hbar k$  เป็นค่ากำหนดแน่ อาจมีโมเมนตัมเชิงมุม  $\hbar l$  รอบนิวเคลียสเป็นค่าใดค่าหนึ่งก็ได้เพราะพารามิเตอร์กระทบไม่เป็นค่ากำหนดแน่ เพราะฉะนั้นเพื่อความสะดวก เราจะเปลี่ยนคลื่นระนาบ  $e^{ikz}$  ของอนุภาคตกกระทบให้เป็นอนุกรมของคลื่น



ทรงกลม และแทนอนุภาคแต่ละอนุภาคด้วยโมเมนตัมเชิงมุมวงโคจร (orbital angular momentum) ที่มีค่ากำหนดแนวรอบนิวเคลียส ฟังก์ชันคลื่น  $e^{ikz}$  จะเป็นผลเฉลยที่สมมาตรรอบแกนของสมการคลื่น

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (\text{A.8})$$

$\psi$  สมมาตรรอบแกน และไม่ขึ้นกับมุม  $\phi$  ( $m=0$ ) ผลเฉลยของสมการข้างบนจึงอยู่ในรูปแบบ

$$\psi_l = j_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.9})$$

เมื่อ  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  เป็นเลขจำนวนเต็ม,  $P_l(\cos \theta)$  เป็นพหุนามเลจองด์ (Legendre polynomial) และ  $j_l(r)$  เป็นผลเฉลยของสมการคลื่นรัศมี

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dj}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] j = 0 \quad (\text{A.10})$$

$j_l(r)$  เป็นฟังก์ชันเบสเซลทรงกลม (spherical Bessel function) อันดับ  $l$  ซึ่งสัมพันธ์กับอันดับ  $(l + \frac{1}{2})$  โดยสมการ

$$j_l(r) = \left( \frac{\pi}{2r} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(r) \quad (\text{A.11})$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (A.8) ก็คือ

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.12})$$

เนื่องจาก  $\psi$  ยังเป็นฟังก์ชันคลื่นอันเดียวกับฟังก์ชันคลื่นระนาบของอนุภาคอิสระ  $e^{ikz}$  เราจะได้

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.13})$$

สัมประสิทธิ์คงตัว (constant coefficient)  $a_l$  อาจหาได้โดยการคูณทั้งสองข้างของสมการ (A.13) ด้วย  $P_l(\cos \theta)$  แล้วหาปริพันธ์จาก 0 ถึง  $\pi$  ซึ่งจะได้ (หลังจากแทน  $\mu = \cos \theta$  แล้ว)

$$\int_{-1}^1 e^{ikr\mu} P_l(\mu) d\mu = \left( \frac{2}{2l+1} \right) a_l j_l(r) \quad (\text{A.14})$$

ซึ่งผลการหาปริพันธ์ที่อยู่ทางด้านขวามือของสมการ (A.14) นั้น ได้จากการใช้สูตรที่เราจะรู้จักกันดี

เข้ามาช่วย คือ

$$\int_0^\pi P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \quad \text{เมื่อ } l' = l$$

$$= 0 \quad \text{เมื่อ } l' \neq l$$

ในการหาปริพันธ์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (A.14) จะใช้วิธีการแยกส่วนออกเป็นสองส่วน และใช้ขีดจำกัด  $r \rightarrow \infty$  พจน์ที่มี  $r^{-2}$  จะไม่นำมาคิดเมื่อเทียบกับพจน์ที่มี  $r^{-1}$  รวมทั้งอาศัยสมบัติที่ว่า  $P_l(\cos\theta) = 1$  เมื่อ  $\cos\theta = 1$ , และ  $P_l(\cos\theta) = (-1)^l = e^{il\pi}$  เมื่อ  $\cos\theta = -1$  ซึ่งเมื่อหาปริพันธ์แล้วแทนลงในสมการ (A.14) เราจะได้

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{2l+1}\right)a_l j_l(r) &\sim \frac{1}{ikr} [e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}] \\ &= \frac{1}{ikr} e^{\frac{1}{2}il\pi} [e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}] \\ &= \left(\frac{2i^l}{kr}\right) \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi) \end{aligned}$$

หรือ

$$a_l j_l(r) \sim (2l+1)i^l \frac{\sin[kr - (l\pi/2)]}{kr}$$

เปรียบเทียบกับซ้ายมือกับขวามือของสมการ แล้วจำแนกค่าคงตัว  $a_l$  และฟังก์ชันเบสเชล  $j_l(r)$  หรือ  $j_l(kr)$  ออกมา จะได้

$$a_l = (2l+1)i^l \quad (\text{A.15})$$

และ

$$j_l(kr) \sim \frac{\sin[kr - (l\pi/2)]}{kr} \quad (\text{A.16})$$

ดังนั้นผลเฉลยเชิงเส้นกำกับบริบูรณ์ (complete asymptotic solution),  $r \rightarrow \infty$ , จะอยู่ในรูป

$$e^{ikr \cos\theta} \doteq \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l \left\{ \frac{\sin[kr - (l\pi/2)]}{kr} \right\} P_l(\cos\theta) \quad (\text{A.17})$$

ต่อไปเราจะดำเนินการหาผลเฉลยของสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ ที่อยู่ในบริเวณพิสัยของ

แรงนิวเคลียร์ คือ

$$\nabla^2 \psi + \left[ k^2 - \frac{2M}{\hbar^2} V(r) \right] \psi = 0 \quad (\text{A.18})$$

( $M$  เป็นมวลลดทอน) ผลเฉลย  $\psi$  จะสอดคล้องกับฟังก์ชันคลื่นของระบบที่เคยกำหนดไว้ใน (A.3) คือ

$$\psi(r, \theta) \sim e^{ikz} + f(\theta)(e^{ikr}/r) \quad (\text{A.3})$$

สำหรับ  $r \rightarrow \infty$

ผลของศักย์ศูนย์กลางจะทำให้เกิดการเปลี่ยนเฟส (phase) (ในกรณีของการกระเจิงแบบยืดหยุ่น) หรือเปลี่ยนทั้งเฟสและแอมพลิจูด (ในกรณีของการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น) แต่ที่จะกล่าวถึงในตอนนี้จะจำกัควงไว้เฉพาะกรณีของการเปลี่ยนเฟส (หรือในกรณีของการกระเจิงแบบยืดหยุ่น) เท่านั้น ผลเฉลยของสมการคลื่น (A.18) จะมีรูปแบบเช่นเดียวกับที่ผ่าน ๆ มาคือ

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.19})$$

ซึ่งมีสมมาตรรอบแกน (ไม่ขึ้นกับมุม  $\phi$ ) ขณะที่  $R_l(kr)$  เป็นผลเฉลยคลื่นรัศมีของสมการ

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{2M}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (\text{A.20})$$

ถ้าพิจารณาฟังก์ชัน  $R_l(kr)$  และ  $j_l(kr)$  จะเห็นว่าฟังก์ชันทั้งสองเหมือนกันที่ทุกแห่ง ยกเว้นบริเวณที่  $r$  มีค่าน้อย ๆ ซึ่ง  $V(r) \neq 0$  ดังนั้นหากเราจะไม่มองฟังก์ชันคลื่นที่อยู่ในบริเวณศักย์  $V(r)$  แต่มองเฉพาะที่อยู่ในบริเวณที่ห่างออกไปมาก ๆ ซึ่ง  $r \rightarrow \infty$  และ  $V(r) = 0$ ,  $R_l(kr)$  จะเหมือนกับ  $j_l(kr)$  เว้นแต่มีการเลื่อนเฟส  $\delta_l$  เล็กน้อย อันเป็นผลมาจากการขึ้นกับ  $r$  ในทางที่แตกต่างกันของ  $R_l(kr)$  ในบริเวณที่  $V(r) \neq 0$  และความนี้จะเป็นจริงเสมอตราบที่  $V(r)$  ยังคงลดลงเป็นศูนย์อย่างรวดเร็วกว่าการลดลงตาม  $r^{-1}$  ดังนั้น

$$R_l(kr) \doteq \frac{\sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)}{kr} \quad \text{เมื่อ } r \rightarrow \infty \quad (\text{A.21})$$

และ



$$\psi \doteq \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)}{kr} P_l(\cos\theta) \quad (\text{A.22})$$

แทน  $e^{ikz}$  และ  $\psi$  จากสมการ (A.17) และ (A.22) ลงในสมการ (A.2) แล้วจัดสมการเทียบหาสัมประสิทธิ์  $A_l$  และ  $f(\theta)$  ของ  $e^{ikr}$  และ  $e^{-ikr}$  จะได้

$$A_l = i^l (2l+1) e^{i\delta_l} \quad (\text{A.23})$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (A.19) จะได้

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\delta_l} R_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (\text{A.24})$$

และได้

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta) \quad (\text{A.25})$$

เมื่อทราบ  $f(\theta)$  แล้ว ภาดตัดขวางรวมก็หาได้จากสมการ (A.7) ซึ่งสมการเป็นแบบ

$$\sigma = \int \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \quad (\text{A.7})$$

ซึ่งเมื่อแทน  $f(\theta)$  ที่ได้จากสมการ (A.25) แล้วหาปริพันธ์ (ไม่คิดพจน์ที่มีการคูณแบบ  $P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta)$  เพราะพจน์เหล่านี้จะหายไป) จะได้ภาดตัดขวางรวมของการกระเจิงแบบยืดหยุ่นเป็น

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \int_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 (2 - 2\cos 2\delta_l) [P_l(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta$$

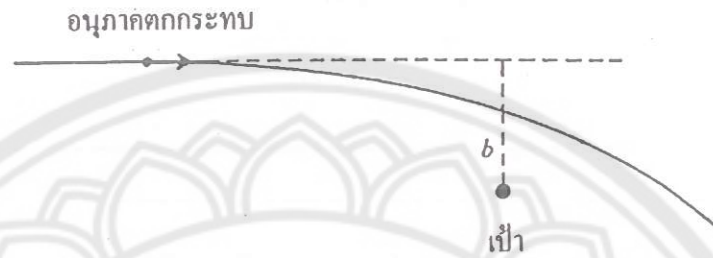
หรือ

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (\text{A.27})$$

ดังนั้นเราจะเห็นว่าภาดตัดขวางรวมของการกระเจิงแบบยืดหยุ่นเป็นฟังก์ชันของเลขคลื่น  $k$  และการเลื่อนเฟส  $\delta_l$

ต่อไปเราจะปฏิบัติกับการกระเจิงในเชิงฟิสิกส์กึ่งแบบฉบับ (semiclassical physics) เพื่อแสดงว่า ถ้าพิสัยของศักย์กระเจิงมีค่าจำกัดแล้ว การเลื่อนเฟส  $\delta_l$  ที่จะนำมาใช้เพื่อการบวกกันใน

สมการ (A.27) จะต้องเป็นจำนวนจำกัดด้วย โดยจะเริ่มต้นจากการแปลความคลื่นย่อยในเชิงฟิสิกส์ กึ่งแบบฉบับก่อน แล้วต่อไปขยายความปัญหาการกระเจิงของเราให้ครอบคลุมไปถึงปัญหาการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น (หรือการดูดกลืน) ด้วย



รูป A.2 อันตรกิริยาระหว่างอนุภาคตกกระทบกับนิวเคลียสเป้า  $b$  เป็นพารามิเตอร์กระแทก (คัดแปลงจาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 395)

ให้อนุภาคในลำอนุภาคมีโมเมนตัมเชิงเส้น  $p = mv$  และมีพารามิเตอร์กระแทก  $b$  ดังในรูป (A.2) โมเมนตัมเชิงมุมตามฟิสิกส์แบบฉบับ  $L = mvb$  จะต้องเท่ากับค่าในเชิงกลศาสตร์ควอนตัม  $L = [l(l+1)]^{1/2} \hbar$

$$mvb = [l(l+1)]^{1/2} \hbar \quad (\text{A.28})$$

ค่า  $l$  ที่ได้จากสมการ (A.28) นี้ จะเป็นจำนวนพจน์ของสมการ (A.27) การกระเจิงจะเกิดขึ้นถ้าหากพารามิเตอร์กระแทก  $b$  น้อยกว่าพิสัย  $R_0$  ของศักย์ หรืออีกนัยหนึ่งการกระเจิงจะเกิดขึ้นต่อเมื่อ

$$[l(l+1)]^{1/2} < kR_0 \quad (\text{A.29})$$

สมการ (A.29) นี้จะมีผลกระทบต่อคลื่นย่อยของอนุภาค (ที่มีพลังงาน หรือ  $\epsilon$  ตามกำหนดให้) สำหรับในกรณีที่ค่า  $l$  เป็นไปในทางที่ทำให้  $[l(l+1)]^{1/2} > kR_0$ ,  $\delta_l = 0$

ถ้าย้อนกลับไปดูสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ทั้งภายในและภายนอกพิสัยศักย์ ที่กำหนดให้ด้วยสมการ (A.18) และ (A.8) ผลเฉลยเชิงเส้นกำกับบริบูรณ์ (หรือฟังก์ชันคลื่นรัศมี) ของสมการคลื่นทั้งสองกำหนดให้โดยสมการ (A.16) และ (A.21) ตามลำดับ ดังนี้

$$j_l(kr) \sim \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr} \quad (\text{A.16})$$

และ

$$R_l(kr) = \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)}{kr} \quad \text{เมื่อ } r \rightarrow \infty \quad (\text{A.21})$$

จากสมการทั้งสองนี้แสดงให้เห็นว่าสมการคลื่นที่ถูกรบกวน (A.21) จะแตกต่างกันไปจากสมการคลื่นที่ไม่ถูกรบกวนตรงที่มีเฟสเปลี่ยนไป  $\delta_l$  เท่านั้น โดยเมื่อคลื่นเข้าไปอยู่ในบริเวณที่อยู่ในพิสัยของศักย์ ความยาวคลื่นก็จะเปลี่ยนจากที่มีค่า  $\lambda = 2\pi/k$  ไปเป็นมีค่า  $\lambda' = 2\pi/\sqrt{k^2 - 2MV/\hbar^2}$  ดังนั้นถ้า  $V(r) < 0$  (ศักย์แรงดูด) แล้ว,  $\lambda' < \lambda$ , คลื่นจะถูกดึงเข้า (pull in) และการเลื่อนเฟส  $\delta_l$  จะเป็นบวก ถ้า  $V(r) > 0$  (แรงผลัก) แล้ว,  $\lambda' > \lambda$ , คลื่นจะถูกดันออก (push out) และการเลื่อนเฟส  $\delta_l$  จะเป็นลบ ส่วนที่บริเวณภายนอกพิสัยศักย์ฟังก์ชันคลื่นจะไม่ถูกรบกวน ภาพของฟังก์ชันคลื่นทั้งสามกรณีแสดงดังในรูป A.3

ที่กล่าวมาข้างต้นเราพิจารณาในแง่การกระเจิงแบบยืดหยุ่นเพียงอย่างเดียว แต่ในปฏิกิริยานิวเคลียร์จะมีชนิดที่อนุภาคตกกระทบถูกดูดกลืนด้วย ซึ่งต่อไปนี้จะเป็นการคำนวณหาภาคตัดขวางการดูดกลืนในแต่ละค่า  $l$  โดยได้รวมเอาภาคตัดขวางของการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นอยู่ไว้ในภาคตัดขวางการดูดกลืนนี้ด้วย ดังนั้นนับตั้งแต่นี้ไปเมื่อกล่าวถึงภาคตัดขวางการกระเจิงจะหมายถึงการกระเจิงแบบยืดหยุ่นเท่านั้น

ภาคตัดขวางการดูดกลืนรวม  $\sigma_t$  จะมีนิพจน์อยู่ในรูปแบบภาคตัดขวางย่อย ที่สอดคล้องกับค่า  $l$  ดังต่อไปนี้

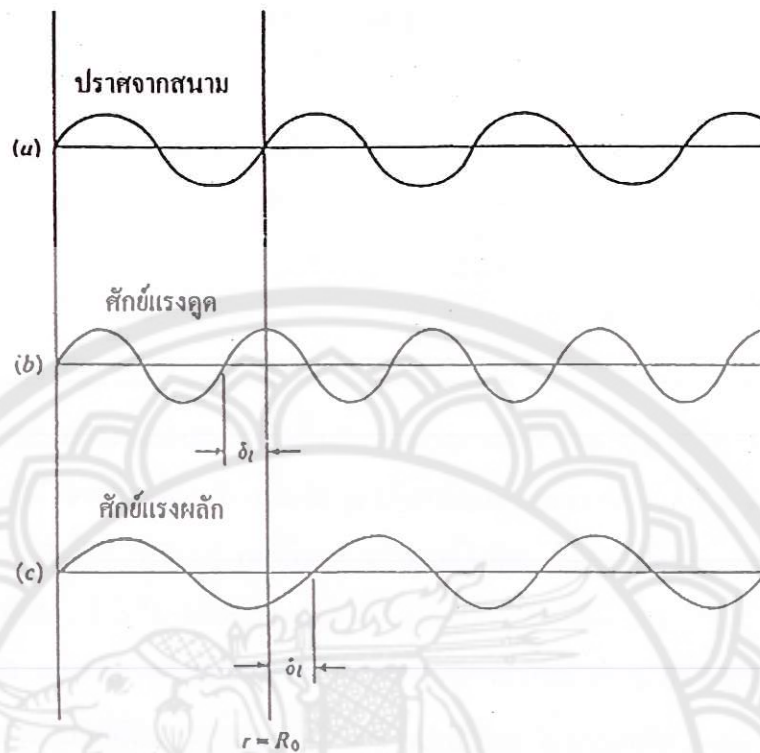
$$\sigma_t = \sigma_r + \sigma_s \quad (\text{A.30})$$

$$\sigma_r = \sum_i \sigma_{r,i} \quad (\text{A.31})$$

$$\sigma_s = \sum_l \sigma_{s,l} \quad (\text{A.32})$$

$\sigma_r$  เป็นภาคตัดขวางการดูดกลืน หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ภาคตัดขวางปฏิกิริยา (reaction cross section) ส่วน  $\sigma_s$  เป็นภาคตัดขวางการกระเจิง ดังนั้นสิ่งจำเป็นที่ต้องคำนวณหาจะมีเฉพาะ  $\sigma_{r,i}$  และ  $\sigma_{s,l}$  เท่านั้น ซึ่งเราจะดำเนินการหาต่อไป





รูป A.3 ฟังก์ชันคลื่นรัศมี ในสามกรณีคือ (a) กรณี  $V(r) = 0$ ; ไม่มีสนาม (b) กรณี  $V(r) < 0$ ; ศักย์แรงดูด, และ (c) กรณี  $V(r) > 0$ ; ศักย์แรงผลัก (ดัดแปลงจาก A. P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics.*, Boston: Allyn and Bacon, 1968, p. 396)

ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคตกกระทบอาจเขียนได้เช่นเดียวกับที่เคยเขียนผ่านมา คือเขียนได้เป็น

$$\psi_{inc} = e^{ikr \cos \theta} \sim \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \sin(kr - \frac{1}{2} l \pi) P_l(\cos \theta) \quad (A.33)$$

$$= \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \{ e^{i[kr - (l\pi/2)]} - e^{-i[kr - (l\pi/2)]} \} P_l(\cos \theta)$$

เมื่อ  $e^{-i[kr - (l\pi/2)]}$  เป็นอนุกรมของคลื่นทรงกลมที่ลู่เข้า (converging) ศูนย์กำเนิด 0 และ  $e^{i[kr - (l\pi/2)]}$  เป็นอนุกรมของคลื่นทรงกลมที่ลู่ออก (diverging) กำหนดให้สนามของศักย์มีผลกระทบเฉพาะต่อคลื่นที่เคลื่อนที่ออกเท่านั้น ดังนั้นถ้า  $\eta_l$  เป็นตัวประกอบที่แทนการเปลี่ยนเฟส หรือเปลี่ยนทั้งเฟสและแอมพลิจูด ฟังก์ชันคลื่น  $\psi = \psi_{inc} + \psi_{scat}$  จะเขียนได้เป็น

$$\psi_{inc} = \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \{ \eta_l e^{i[kr - (l\pi/2)]} - e^{-i[kr - (l\pi/2)]} \} P_l(\cos\theta) \quad (A.34)$$

ขั้นต่อไปเป็นขั้นตอนการหาค่า  $f(\theta)$  ซึ่งจะกระทำโดยวิธีการเดียวกับการได้มาของสมการ (A.25) หรือเราเขียนเลียนแบบสมการ (A.25) ได้เลยเป็น

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\eta_l - 1) P_l(\cos\theta) \quad (A.35)$$

เมื่อ  $\eta_l$  กำหนดให้โดย

$$\eta_l = A_l e^{2i\delta_l} \quad (A.36)$$

เมื่อ  $0 \leq A_l \leq 10$

ในกรณีที่เป็นการกระเจิงบริสุทธิ์ (pure scattering) ซึ่งไม่มีการดูดกลืนเลย ค่า  $A_l$  จะเท่ากับ 1 และ  $\eta_l = e^{2i\delta_l}$  ในกรณีที่มีการดูดกลืน ค่า  $A_l$  จะน้อยกว่า 1 [หมายเหตุ :  $A_l = 1$  และ  $\eta_l = e^{2i\delta_l} = 1$  คลื่นกระเจิงจะเหมือนกับคลื่นตกกระทบ นั่นคือไม่มีอันตรกิริยา] เพราะฉะนั้นจึงกล่าวสรุปได้ว่า ในการกระเจิง  $\eta_l = e^{2i\delta_l} \neq 1$  ขณะที่ในการดูดกลืน  $A_l \neq 1$  และแอมพลิจูดของคลื่นกระเจิงจะน้อยกว่าคลื่นตกกระทบ

การคำนวณหาภาคตัดขวางของการกระเจิงทำได้โดยการแทน  $f(\theta)$  จากสมการ (A.35) ลงในสมการ (A.7) ซึ่งมีรูปแบบ

$$\sigma = \int \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \quad (A.7)$$

แล้วหาปริพันธ์เช่นเดียวกับที่เคยทำกับสมการ (A.7) ที่ผ่านมา จะได้ภาคตัดขวางการกระเจิงออกมาเป็น

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2 \\ &= \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2 \end{aligned} \quad (A.37)$$

การคำนวณหาภาคตัดขวางของการดูดกลืนจะเริ่มต้นด้วยการนิยามให้ภาคตัดขวางของการดูดกลืนเท่ากับจำนวนอนุภาคที่หายออกไปจากลำอนุภาคต่อหนึ่งหน่วยอนุภาคตกกระทบ (อนุภาคหายออกไปจากลำอนุภาคเนื่องจากถูกดูดกลืน) ซึ่งก็คือ

$$\sigma_r = \frac{\text{จำนวนอนุภาคที่หายออกไปจากลำอนุภาคต่อวินาที}}{\text{ฟลักซ์ตกกระทบ}} \quad (\text{A.38a})$$

ฟลักซ์ตกกระทบ (incident flux) เท่ากับความเร็ว  $v$  (เช่นเดียวกับที่เคยกำหนดในตอนแรก) และจำนวนอนุภาคที่หลุดหายออกไปจากลำอนุภาคต่อวินาที คือฟลักซ์ดูดกลืน (absorbed flux)

$$\begin{aligned} N_a &= \text{ฟลักซ์ดูดกลืน} \\ &= \text{จำนวนอนุภาคที่ผ่านทรงกลมรัศมี } R \text{ ที่ห่อหุ้มนิวเคลียสเป้าไว้ต่อวินาที} \end{aligned}$$

หรือ

$$N_a = \int I ds = \int IR^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{A.38b})$$

เมื่อ  $I$  คือความหนาแน่นกระแสโอกาส (probability current density) ซึ่งนิยามให้เป็น

$$I = \frac{\hbar}{2iM} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \psi \right) \quad (\text{A.38c})$$

$M$  เป็นมวลลดทอน  $\psi$  เป็นฟังก์ชันคลื่นตามสมการ (A.34) ซึ่งเมื่อแทน  $\psi$  นี้ลงไปในสมการ (A.38c) แล้วคำนวณหา  $\sigma_r$  โดยใช้สมการ (A.38a), (A.38b), และ (A.38c) จะได้

$$\sigma_r = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) \quad (\text{A.39})$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (A.37) และ (A.39) เราจะได้ว่า

$$\sigma_{s,l} = \pi \lambda^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2 \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma_{r,l} = \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) \quad (\text{A.41})$$

เมื่อ

$$\eta_l = A_l e^{2i\delta_l} = U_l + iW_l \quad (\text{A.42})$$

ส่วนจริง (real part) ในนิพจน์ของ  $\eta_l$  สัมพันธ์กับการเปลี่ยนแอมพลิจูด และส่วนจินตภาพ (imaginary part) สัมพันธ์กับการเปลี่ยนเฟส สมการ (A.40) และ (A.41) แสดงให้เห็นว่าการกระเจิงและการดูดกลืนไม่ใช่จะไม่ขึ้นต่อกัน เมื่อใดที่มีการดูดกลืนเกิดขึ้น,  $|\eta_l|^2 \neq 1$ , จะต้องมีการกระเจิงเกิดขึ้นด้วย,  $\eta_l \neq 1$ , แต่ถ้ามีการกระเจิงเกิดขึ้น,  $\eta_l \neq 1$ ,  $\eta_l^* \neq 1$ , การดูดกลืนอาจจะไม่เกิดขึ้นก็ได้



คือเป็นไปได้ที่  $|\eta_l|^2 = 1$ , จึงสรุปได้ว่า เมื่อมีการดูดกลืนต้องมีการกระเจิง แต่ถ้ามีการกระเจิงไม่จำเป็นต้องมีการดูดกลืนเสมอไป

เพราะว่า  $|\eta_l| \leq 1$  จึงเป็นไปได้ที่จะกล่าวว่า

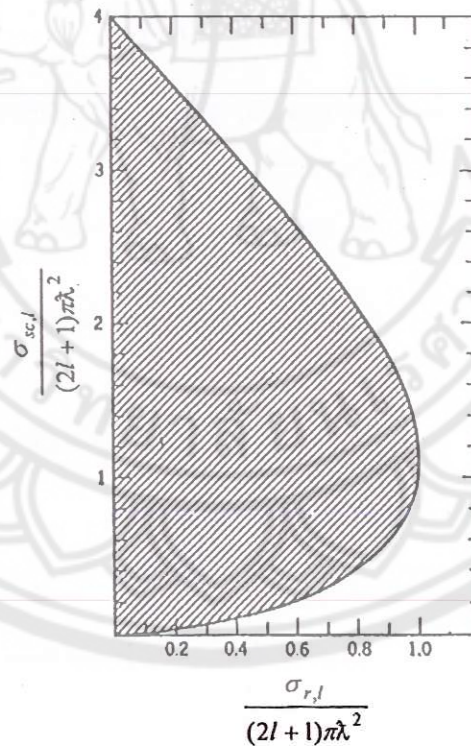
$$\sigma_{s,l} \leq 4\pi\lambda^2(2l+1)$$

$$\sigma_{r,l} \leq \pi\lambda^2(2l+1) \quad (\text{A.43})$$

$$\sigma_{t,l} \leq 4\pi\lambda^2(2l+1)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\sigma_{s,l}$  และ  $\sigma_{r,l}$  แสดงดังในรูป A.4

พิจารณากรณีการกระเจิงของอนุภาคที่มีพลังงานสูงมาก ๆ ซึ่ง  $\lambda$  ของอนุภาคตกกระทบจะน้อยกว่ารัศมี  $R$  ของนิวเคลียสมาก ๆ ในกรณีเช่นนี้นิวเคลียสจะเป็นทรงกลมที่มีการดูดกลืนอย่างบริบูรณ์ (perfectly absorption sphere) เราจะเรียกนิวเคลียสในกรณีเช่นนี้ว่าเป็น นิวเคลียสดำ



รูป A.4 ค่าที่เป็นไปได้ของภาคตัดขวางการกระเจิงย่อยในแต่ละภาคตัดขวางการดูดกลืนย่อย พื้นที่แสดงแทนค่าที่เอื้ออำนวยกันของภาคตัดขวางทั้งสองนี้ (จาก J.M. Blatt และ V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, New York: John Wiley & Sons, 1952, p. 326)

(black nucleus) หรือ ทรงกลมดำ (black sphere) การพิจารณาจะเริ่มต้นด้วยการให้อนุภาคมีโมเมนตัมเชิงเส้น  $p$  โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคในเชิงกลศาสตร์แบบฉบับ จะเป็น  $pb$  และเท่ากับโมเมนตัมเชิงมุมในเชิงกลศาสตร์ควอนตัม ซึ่งเป็น  $l\hbar (= \sqrt{l(l+1)}\hbar)$  ดังนั้น

$$l = bp / \hbar = b / \lambda$$

หรือ

$$b = \lambda l$$

นั่นคือปฏิกิริยาจะเกิดขึ้นต่อเมื่อ

$$b = \lambda l \leq R$$

หรือ

$$l \leq R / \lambda (= Rk)$$

ถ้า  $l \leq R / \lambda$  ปฏิกิริยาจะเกิดขึ้นทุกขณะ, เมื่อ  $\eta_l = 0$  ภาคตัดขวางปฏิกิริยาจะมีค่ามากที่สุด, ถ้า  $l > R / \lambda$  และ  $\eta_l = 1$  ปฏิกิริยาจะไม่เกิดขึ้น

เพราะฉะนั้น เมื่อพิจารณาภาคตัดขวางย่อยที่  $l$  แรก เมื่อ  $l \leq R / \lambda (= Rk)$  เราจะได้

$$\sigma_s = \sum_{l=0}^{R/\lambda} \sigma_{s,l} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l+1) \approx \pi R^2 \quad (\text{A.44a})$$

$$\sigma_r = \sum_{l=0}^{R/\lambda} \sigma_{r,l} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l+1) \approx \pi R^2 \quad (\text{A.44b})$$

นั่นคือ

$$\sigma_s = \sigma_r = \pi R^2$$

และ

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_r = 2\pi R^2 = 2 \times \text{ภาคตัดขวางเชิงเรขาคณิต} \quad (\text{A.44c})$$

ซึ่งผลนี้ได้รับการตรวจสอบในทางการทดลองมาแล้ว เราจะสังเกตเห็นอย่างหนึ่งว่าที่พลังงานสูงมาก ๆ,  $\lambda \ll R$ , ภาคตัดขวางรวมจะเท่ากับภาคตัดขวางปฏิกิริยาเท่านั้น โดยไม่มีการกระเจิง



เลย และเท่ากับภาคตัดขวางเชิงเรขาคณิต,  $\pi R^2$ , แต่ก็ไม่ได้หมายความว่าจะถูกต้องนัก เพราะการเลี้ยวเบนที่เกิดขึ้นยังทำให้มีการคงค่า  $\sigma_s (= \pi R^2)$  ไว้ในภาคตัดขวางรวมอยู่

## ก.2 ปฏิกริยานิวเคลียร์กับนิวเคลียสที่มีพื้นผิวแฉะชัด (Nuclear Reactions with a Nucleus of Well-Defined Surface)

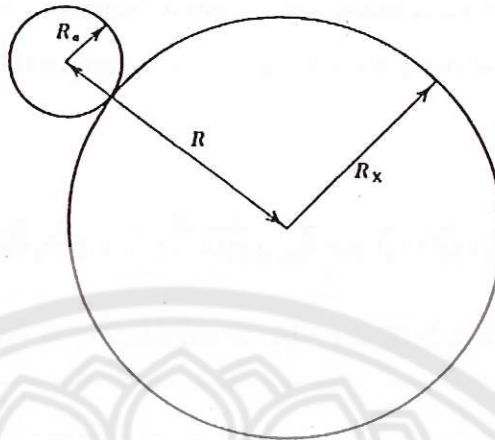
การคำนวณหาภาคตัดขวางของปฏิกริยานิวเคลียร์ ควรจะคำนวณจากโครงสร้างภายในนิวเคลียส แต่เนื่องจากขณะนี้เรายังไม่รู้จักโครงสร้างภายในนิวเคลียสดีพอ ในการคำนวณหาภาคตัดขวางที่ทำกันอยู่ในเวลานี้ จึงคำนวณจากการใช้เงื่อนไขขอบ (boundary condition) ที่พื้นผิวของนิวเคลียสแทน ซึ่งเงื่อนไขขอบที่ใช้ในที่นี้คือความต่อเนื่อง (continuity) ของอนุพันธ์ลอการิทึม (logarithmic derivative) ของฟังก์ชันคลื่นที่พื้นผิวของนิวเคลียส เมื่อเป็นเช่นนี้นิวเคลียสจะต้องมีพื้นผิวแฉะชัด (well-defined surface) ซึ่งหมายถึงอนุภาคโพรงเจกไทล์ (ใช้เรียกอนุภาคที่เคลื่อนที่เข้ามายังนิวเคลียสเป้า)  $\alpha$  และนิวเคลียส  $X$  จะไม่มีอันตรกิริยาต่อกันถ้าระยะห่าง จากกัน  $r$  มากกว่ารัศมีแชนเนล (channel radius)  $R$ , นิยามของรัศมีแชนเนลคือ  $R = R_X + R_\alpha$  (ดูรูป A.5), บริเวณ  $r > R$  ถือเป็นภายนอกนิวเคลียส และบริเวณ  $r < R$  ถือเป็นภายในนิวเคลียส (หมายเหตุ: ตำราบางเล่มอาจประมาณค่ารัศมีแชนเนล  $R$  ให้เป็นรัศมีของนิวเคลียสเป้า  $R_X$ )

ในการคำนวณหาภาคตัดขวางกับนิวเคลียสพื้นผิวแฉะชัด ข้อสมมุติที่ใช้กันเพื่อให้นิวเคลียสมีสมบัติเป็นนิวเคลียสแฉะชัดจึงมักเป็นข้อสมมุติต่อไปนี้

(ก) ให้อนุภาคตกกระทบมีพลังงานต่ำ ถ้าอนุภาคมีพลังงานต่ำ ความยาวคลื่นของอนุภาคตกกระทบจะยาวมากเมื่อเทียบกับรัศมีแชนเนล  $R$  (หรือรัศมีนิวเคลียสเป้า  $R_X$ ) กรณีเช่นนี้ อันตรกิริยาระหว่างอนุภาคตกกระทบกับนิวเคลียสเป้าจะยังไม่เกิดขึ้นถ้าระยะห่าง  $r$  ระหว่างอนุภาคตกกระทบกับนิวเคลียสเป้ามกกว่ารัศมีแชนเนล จึงถือว่านิวเคลียสมีพื้นผิวแฉะชัด

(ข) ให้อนุภาคตกกระทบเป็นนิวตรอนที่มี  $l=0$  การไม่มีประจุของนิวตรอนจะทำให้ปราศจากศักย์คูลอมบ์ซึ่งเป็นศักย์พิสัยยาว ดังนั้นที่ระยะห่าง  $r$  มากกว่ารัศมีแชนเนล อันตรกิริยาอันเนื่องมาจากศักย์คูลอมบ์จึงไม่มี และการที่มี  $l=0$  จะทำให้ปราศจากศักย์  $l(l+1)\hbar^2 / 2Mr^2$  ซึ่งเป็นศักย์หนีศูนย์กลางและมีพิสัยยาวมาเกี่ยวข้องด้วยเช่นกัน ที่ระยะห่างมากกว่ารัศมีแชนเนลจึงไม่มีอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคตกกระทบกับนิวเคลียสเป้า และจะถือได้ว่านิวเคลียสเป้ามมีพื้นผิวแฉะชัด





รูป A.5 นิยามของรัศมีแชนเนล รัศมีแชนเนล  $R = R_x + R_a$  เมื่อ  $R_a$  เป็นรัศมีของอนุภาคโพรงไทล์  $R_x$  เป็นรัศมีของนิวเคลียสเป้า (จาก J.M. Blatt และ V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, New York: John Wiley & Sons, 1952, p. 326)

(ค) ให้สปินของนิวเคลียสเป้าเป็นศูนย์

ดังนั้นในการคำนวณหาภาคตัดขวางด้วยการให้นิวเคลียสมีพื้นผิวแฉ่งชัดนี้ เราจะทำให้นิวเคลียสเป้ามีพื้นผิวแฉ่งชัดโดยกำหนดให้อนุภาคโพรงไทล์เป็นนิวตรอนพลังงานต่ำ และมี  $l=0$  เพื่อให้ปราศจากอันตรกิริยาใด ๆ ระหว่างอนุภาคโพรงไทล์กับนิวเคลียสเป้า ที่ระยะห่าง  $r$  มากกว่ารัศมีแชนเนลโดยสิ้นเชิง แม้กระทั่งอันตรกิริยาเนื่องจากศักย์พิสัยยาวเช่นศักย์คูอมบ์หรือศักย์หนึ่ศูนย์กลางก็ตาม

เราสามารถอธิบายการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (relative motion) อย่างไม่มีอันตรกิริยาต่อกันของอนุภาค  $\alpha$  ซึ่งเป็นนิวตรอน กับนิวเคลียสเป้า  $X$  ที่ระยะ  $r > R$  ได้โดยฟังก์ชันคลื่น  $\psi(r)$  ซึ่งสมนัยกับสมการคลื่นในบริเวณนี้คือ

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + k^2 \psi = 0 \quad (r > R) \quad (\text{A.45})$$

เมื่อ  $k$  เป็นเลขคลื่นของแชนเนลเข้า นิพจน์ในสมการ (A.45) นี้ใช้ได้เฉพาะบริเวณภายนอกนิวเคลียส  $r > R$  จะนำไปใช้กับบริเวณภายในนิวเคลียส  $r < R$  ไม่ได้ เพราะการเคลื่อนที่ภายในนิวเคลียสไม่สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันคลื่นที่มีพิกัดเพียงพิกัดเดียว

ฟังก์ชันคลื่น  $\psi$  ที่ระยะห่างจากนิวเคลียสมาก ๆ จะประกอบไปด้วยคลื่นตกกระทบซึ่งเป็นคลื่นระนาบ (plane wave)  $\exp(ikz)$  กับคลื่นออกซึ่งเป็นคลื่นทรงกลมซ้อนทับ (superposition)

กันอยู่เหมือนดังที่เคยเห็นในสมการ (A.34) แต่ความสนใจในฟังก์ชันคลื่น  $\psi$  ของเรานั้นจะไม่สนใจเฉพาะแต่ในรูปแบบเชิงเส้นกำกับที่  $kr$  มีค่ามาก ๆ อีกแล้ว หากแต่จะสนใจในกรณีที่  $r$  มีค่าน้อยลงจนกระทั่ง  $r > R$  ด้วย

ฟังก์ชันคลื่น  $\psi$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของคลื่นย่อยที่มีโมเมนตัมเชิงมุม  $l$  กำกับด้วยคือ

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{u_l}{r} \right) Y_{l,0}(\theta) \quad (\text{A.46})$$

เมื่อ  $Y_{l,0}$  เป็นฮาร์โมนิกทรงกลม (spherical harmonic) คลื่นย่อยที่รวมกันอยู่มีเฉพาะคลื่นย่อยที่มี  $m=0$  เท่านั้น ทั้งนี้เพราะคลื่นตกกระทบเป็นคลื่นระนาบจึงไม่ขึ้นกับมุม  $\phi$

ในกรณีที่กำลังกล่าวถึงอยู่นี้ อนุภาคโพรงเกลไกโกลมี  $l=0$  ดังนั้นเรากำหนดพจน์ในสมการ (A.46) มีเฉพาะพจน์ที่มี  $l=0$  แล้วแทนลงในสมการ (A.45) จะได้สมการชเรอดิงเงอร์ของคลื่นรัศมีเป็น

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + k^2 u_0 = 0 \quad \text{สำหรับ } (r > R) \quad (\text{A.47})$$

เมื่อ  $u_0$  เป็นฟังก์ชันคลื่นรัศมีที่มี  $l=0$  ผลเฉลยของสมการ (A.47) จะมีรูปแบบเป็น

$$u_0(r) = C \sin(kr + \delta_0) \quad \text{สำหรับ } r > R \quad (\text{A.48})$$

เมื่อ  $\delta_0$  เป็นการเลื่อนเฟส

เรานำเงื่อนไขขอบมาใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของฟังก์ชันคลื่นรัศมีภายนอกพื้นผิวซึ่งจะทำให้สามารถหาคัดขวางได้ โดยเงื่อนไขขอบที่ใช้คือเงื่อนไขที่เป็นความต่อเนื่องของอนุพันธ์ลอการิทึมของ  $u_0$  ที่ขอบ (หรือพื้นผิวนิวเคลียส) และนิยามความต่อเนื่องของอนุพันธ์ลอการิทึม  $f_0$  นี้ได้เป็น

$$f_0(r) = R \left( \frac{du_0/dr}{u_0} \right)_{r=R} = R \left( \frac{d(\ln u_0)}{dr} \right) \quad (\text{A.49})$$

ซึ่งเมื่อแทน  $u_0$  จากสมการ (A.48) ลงไปแล้วจะมีรูปแบบเป็น

$$f_0 = kR \cot(kR + \delta_0) \quad (\text{A.50})$$

สมการนี้อาจเขียนได้ใหม่ในรูปแบบ

$$f_0 = -ikR \left\{ \frac{e^{-2ikR} + \eta_0}{e^{-2ikR} - \eta_0} \right\}$$

เมื่อ  $\eta_0 = e^{2i\delta_0}$  หรือจัดเรียงเสียใหม่เป็น

$$\eta_0 = e^{2i\delta_0} = \frac{f_0 + ikR}{f_0 - ikR} e^{-2ikR} \quad (\text{A.51})$$

ถึงตรงนี้เราสามารถคำนวณหาภาคตัดขวางการกระเจิงและภาคตัดขวางปฏิกิริยาโดยใช้สมการ (A.40) และ (A.41) เข้าช่วย ซึ่งรูปแบบของสมการทั้งสองที่มี  $l=0$  จะเป็น

$$\sigma_{s,0} = \pi \lambda^2 |1 - \eta_0|^2 \quad (\text{A.52})$$

และ

$$\sigma_{r,0} = \pi \lambda^2 \left( 1 - |\eta_0|^2 \right) \quad (\text{A.53})$$

เมื่อแทน  $\eta_0$  ตามสมการ (A.51) ลงใน (A.52) จะได้ภาคตัดขวางการกระเจิงที่มี  $l=0$  เป็น

$$\begin{aligned} \sigma_{s,0} &= \pi \lambda^2 \left| 1 - \frac{f_0 + ikR}{f_0 - ikR} e^{-2ikR} \right|^2 \\ &= \pi \lambda^2 \left| e^{2ikR} - \frac{f_0 + ikR}{f_0 - ikR} \right|^2 \\ &= \pi \lambda^2 \left| e^{2ikR} - 1 - \frac{f_0 + ikR}{f_0 - ikR} + 1 \right|^2 \\ &= \pi \lambda^2 \left| \frac{-2ikR}{f_0 - ikR} + e^{2ikR} - 1 \right|^2 \\ &= \pi \lambda^2 |A_{res} + A_{pot}|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

เมื่อ

$$A_{res} = \frac{-2ikR}{f_0 - ikR} \quad (\text{A.55})$$

และ

$$A_{pot} = e^{2ikR} - 1 \quad (\text{A.56})$$

จะเรียก  $A_{res}$  ว่าเป็น แอมพลิจูดการกระเจิงเรโซแนนซ์ (resonance scattering-amplitude) หรือ



แอมพลิจูดการกระเจิงภายใน (internal scattering-amplitude) เพราะการกระเจิงเรโซแนนซ์เกิดขึ้นภายในนิวเคลียส และจะเรียก  $A_{pot}$  ว่าเป็นแอมพลิจูดการกระเจิงศักย์ทรงกลมแข็ง (hard-sphere potential scattering-amplitude)

ดังตรงนี้เราจะพิจารณาการกระเจิงโดยศักย์ทรงกลมแข็งหรือการกระเจิงแบบยืดหยุ่นลักษณะ (shape-elastic scattering) แทรกเข้ามา การกระเจิงแบบนี้อนุภาคทั้งหมดจะกระเจิงที่ภายนอกนิวเคลียส ด้วยเหตุที่ว่าไม่มีอนุภาคทะลุเข้าไปในนิวเคลียสได้เลย ที่พื้นผิวหรือขอบของนิวเคลียสจึงมี  $u_0(r) = 0$  และ  $f_0 = \infty$  มีผลให้  $A_{res} = 0$  ดังนั้นภาคตัดขวางการกระเจิง  $\sigma_{s,0}$  ขึ้นอยู่เฉพาะกับ  $A_{pot}$  แต่เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

สำหรับภาคตัดขวางปฏิกิริยาก็คงหาได้โดยวิธีเดียวกันคือแทน  $\eta_0$  จากสมการ (A.51) ลงใน (A.53) ซึ่งจะได้

$$\sigma_{r,0} = \pi k^2 \frac{-4kR \operatorname{Im} f_0}{(\operatorname{Re} f_0)^2 + (\operatorname{Im} f_0 - kR)^2} \quad (\text{A.57})$$

เมื่อ  $\operatorname{Re} f_0$  และ  $\operatorname{Im} f_0$  เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ  $f_0$  ตามลำดับ (หมายเหตุ: ถ้า  $f_0$  เป็นจำนวนจริงแล้ว  $\delta_0$  จะเป็นจำนวนจริง และจะมีเฉพาะการกระเจิงเท่านั้นโดยไม่มีปฏิกิริยา (หรือการดูดกลืน) หรือในทางกลับกันถ้า  $\sigma_{r,0} \neq 0$  แล้ว  $f_0$  จะต้องมีส่วนจินตภาพ)

เพราะว่าภาคตัดขวางปฏิกิริยาเป็นปริมาณที่ต้องเป็นบวกเสมอ,  $\sigma_{r,0} \geq 0$ , ดังนั้นส่วนจินตภาพของอนุพันธ์ลอการิทึม  $f_0$  จะต้องเป็นลบ

$$\operatorname{Im} f_0 \leq 0 \quad (\text{A.58})$$

ซึ่งจะเห็นได้จากสมการ (A.53) เมื่อกำหนดให้  $|\eta_0|^2 \leq 1$

### ก.3 การหาภาคตัดขวางจากการใช้เงื่อนไขที่พื้นผิวนิวเคลียส, กรณีทั่วไป (The Determination of Cross Sections from the Conditions at the Nuclear Surface., General Case.)

ที่กล่าวมาในหัวข้อ A.2 เป็นเพียงกรณีพิเศษกรณีหนึ่งเท่านั้น ซึ่งอนุภาคตกกระทบเป็นนิวตรอนที่ไม่มีประจุและมีโมเมนตัมเชิงมุม  $l=0$  จึงไม่มีศักย์ดูลอมบ์และศักย์หนึ่ศูนย์กลางมา

เกี่ยวข้อง สำหรับกรณีทั่วไป ซึ่งอนุภาคมีโมเมนตัมเชิงมุม  $l$  และ (หรือ) มีประจุ การหาภาคตัดขวางจะกระทำดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันคลื่น  $\psi(r)$  ที่สมนัยกับการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของอนุภาค  $\alpha$  และนิวเคลียสเป้า  $X$  จะอยู่ในรูปสมการคลื่นเต็มรูปคือ

$$\nabla^2 \psi + \left[ k^2 - \frac{2M}{\hbar^2} V(r) \right] \psi = 0 \quad (\text{A.59})$$

เมื่อ  $M$  เป็นมวลลดทอนในเซนแนล และ  $V(r)$  เป็นพลังงานศักย์ของ  $\alpha$  และ  $X$  ที่อยู่ห่างกัน  $r > R$  ฟังก์ชันคลื่นรัศมี  $u(r)$  ของสมการ (A.59) นี้จะยังคงเป็นไปตามนิยามในสมการ (A.46) ซึ่งเมื่อแทนสมการ (A.46) ลงใน (A.59) จะได้

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2M}{\hbar^2} V(r) \right] u_l(r) = 0 \quad (\text{A.60})$$

พลังงานศักย์  $V(r)$  ที่ปรากฏในสมการนั้นเป็นพลังงานศักย์คูลอมบ์

$$V(r) = \frac{Z_a Z_x e^2}{r} \quad (\text{A.61})$$

เมื่อ  $Z_a$  และ  $Z_x$  เป็นประจุของอนุภาค  $\alpha$  และนิวเคลียสเป้า  $X$  ตามลำดับ ผลเฉลยของสมการ (A.60) นี้ จะจัดระเบียบให้อยู่ในรูปแบบผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของผลเฉลยสม่ำเสมอ (regular solution)  $F_l(r)$  และผลเฉลยไม่สม่ำเสมอ (irregular solution)  $G_l(r)$  ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้  $F_l(r)$  เป็นฟังก์ชันจริง (real function) ที่สมนัยกับสมการ (A.60) และจะหายไปเมื่อ  $r = 0$ ,  $F_l(r)$  สำหรับนิวตรอนในพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับจะเป็น

$$F_l(r) \cong \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi) \quad \text{สำหรับนิวตรอน } kr \gg l \quad (\text{A.62})$$

และสำหรับอนุภาคมีประจุ

$$F_l(r) \cong \sin\left[kr - \frac{1}{2}l\pi - \gamma \ln(2kr) + \sigma_l\right] \quad \text{สำหรับอนุภาคมีประจุ } kr \gg l \quad (\text{A.63})$$

เมื่อ  $\gamma$  เป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดความสำคัญของผลคูลอมบ์ (Coulomb effect) มีนิยามเป็น

$$\gamma = \frac{Z_a Z_x e^2}{\hbar v} \quad (\text{A.64})$$

$v$  เป็นความเร็วในแกนแนล และ  $\sigma_l$  เป็นการเลื่อนเฟสคูลอมบ์ (Coulomb phase shift) ซึ่งเป็นตัวกำหนดการกระเจิงทางไฟฟ้าสถิต (การกระเจิงรัทเทอร์ฟอร์ด)  $\sigma_l$  มีนิยามเป็น

$$e^{2i\sigma_l} = \frac{(l+i\gamma)!}{(l-i\gamma)!} = \frac{(l+i\gamma)(l-1+i\gamma)\dots(1+i\gamma)}{(l-i\gamma)(l-1-i\gamma)\dots(1-i\gamma)} e^{2i\sigma_0} \quad (\text{A.65})$$

ส่วนผลเฉลยไม่สม่ำเสมอ  $G_l(r)$  ของสมการ (A.60) สำหรับนิวตรอนและอนุภาคมีประจุในพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับจะเป็น

$$G_l(r) = \cos(kr - \frac{1}{2}l\pi) \quad \text{สำหรับนิวตรอน } kr \gg l \quad (\text{A.66})$$

$$G_l(r) \cong \cos[kr - \frac{1}{2}l\pi - \gamma \ln(2kr) + \sigma_l] \quad \text{สำหรับอนุภาคมีประจุ } kr \gg l \quad (\text{A.67})$$

ผลบวกวронสกี (Wronskian combination) ของ  $G_l(r)$  และ  $F_l(r)$  ในรูปแบบเชิงเส้นกำกับที่  $r$  มีค่ามาก ๆ คือ

$$G_l \left( \frac{dF_l}{dr} \right) - F_l \left( \frac{dG_l}{dr} \right) = k \quad (\text{A.68})$$

สำหรับนิวตรอน [ $V(r)=0$ ] ผลเฉลย  $F_l(r)$  และ  $G_l(r)$  สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) ได้คือ

$$F_l(r) = \left( \frac{\pi kr}{2} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(kr) \quad (\text{A.69})$$

$$G_l(r) = - \left( \frac{\pi kr}{2} \right)^{1/2} N_{l+1/2}(kr) \quad (\text{A.70})$$

ในทฤษฎีปฏิกิริยานิวเคลียร์ เราต้องการผลบวกเชิงเส้นของ  $F_l(r)$  และ  $G_l(r)$  ที่สอดคล้องกับคลื่นทรงกลมออกและคลื่นทรงกลมเข้า เราจึงนิยาม  $u_l^{(+)}(r)$  และ  $u_l^{(-)}(r)$  ให้เป็น

$$\begin{aligned} u_l^{(+)}(r) &\equiv G_l(r) + iF_l(r) && \text{สำหรับนิวตรอน} \\ u_l^{(+)} &\equiv e^{-i\sigma_l} [G_l(r) + iF_l(r)] && \text{สำหรับอนุภาคมีประจุ} \\ u_l^{(-)}(r) &= \text{complex conjugate of } u_l^{(+)}(r) \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$



สำหรับนิวตรอนที่มี  $l=0$

$$u_0^{(+)}(r) = e^{+ikr}$$

และในกรณีทั่วไป (ในพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับ)

$$u_l^{(+)}(r) \cong e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}, \quad kr \gg l \quad (\text{A.72})$$

ฟังก์ชันคลื่นรัศมี  $u_l(r)$  สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$u_l(r) \equiv Au_l^{(-)}(r) + Bu_l^{(+)}(r) \quad (\text{A.73})$$

ค่าคงตัว  $A$  และ  $B$  หาได้จากการเปรียบเทียบกับสมการ (A.33) ซึ่งเป็นฟังก์ชันคลื่นที่ระยะห่าง  $r$  มากๆ จะได้ค่าเป็น

$$A = i^{l+1} (2l+1)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{k}, \quad B = -\eta_l A \quad (\text{A.74})$$

ปริมาณ  $\eta_l$  จะต้องต่อเนื่องที่ผิวของนิวเคลียส เพราะฉะนั้นอนุพันธ์ลอการิทึมของฟังก์ชันคลื่น  $u_l(r)$ ,  $f_l$  ที่ขอบของนิวเคลียสจะเป็น

$$f_l \equiv R \left[ \frac{du_l/dr}{u_l} \right]_{r=R} \quad (\text{A.75})$$

เพื่อให้นิพจน์  $\eta_l$  อยู่ในพจน์ของ  $f_l$  เราจะแนะนำปริมาณ  $\Delta_l$  และ  $s_l$  ซึ่งเป็นจำนวนจริง และ นิยามปริมาณทั้งสองโดยต่อไปนี้

$$R \left[ \frac{du_l^{(+)} / dr}{u_l^{(+)}} \right]_{r=R} \equiv \Delta_l + is_l \quad (\text{A.76})$$

$\Delta_l$  และ  $s_l$  ขึ้นกับเลขคลื่น  $k$ , รัศมีแกนเนล  $R$ , โมเมนตัมเชิงมุม  $l$ , และพารามิเตอร์ประจุ  $\gamma$  ตามสมการ (A.64) เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (A.71) และ (A.76) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta_l$  และ  $s_l$  กับ  $F_l(r)$  และ  $G_l(r)$  เป็น

$$\Delta_l = R \left[ \frac{G_l(dG_l/dr) + F_l(dF_l/dr)}{G_l^2 + F_l^2} \right]_{r=R} \quad (\text{A.77})$$

$$s_l = R \left[ \frac{G_l(dF_l/dr) - F_l(dG_l/dr)}{G_l^2 + F_l^2} \right]_{r=R} \quad (A.78)$$

นิพจน์ที่เป็นตัวเศษทางด้านขวามือของสมการ (A.78) เท่ากับ  $k$  ตามสมการ (A.68) ส่วนนิพจน์  $G_l^2 + F_l^2$  ที่เป็นตัวส่วนจะมีค่าเป็น 1 ถ้าอนุภาคตกกระทบเป็นนิวตรอนที่มี  $l=0$  และจะมีค่ามากกว่า 1 ถ้า  $l \neq 0$  และ (หรือ) เป็นอนุภาคมีประจุ เนื่องจากนิพจน์นี้จำเป็นต้องใช้อยู่บ่อย ๆ เพื่อความสะดวกเราจึงกำหนดปริมาณ  $v_l$  ขึ้นมาใหม่

$$v_l \equiv \frac{1}{G_l^2(R) + F_l^2(R)} \quad (A.79)$$

ถ้า  $v_l \ll 1$  จะมีนัยว่าอนุภาค  $a$  ไม่สามารถทะลุพื้นผิวเข้าไปในนิวเคลียสได้ และจะเป็นการเข้าไปสู่ อันตรกิริยานิวเคลียร์อย่างอ่อน ๆ (weak nuclear interaction) ด้วยเหตุนี้เราจึงเรียก  $v_l$  ว่าเป็น ตัวประกอบการทะลุผ่าน (penetration factor)

ปริมาณ  $s_l$  ในสมการ (A.78) เมื่อเขียนให้อยู่ในพจน์ของตัวประกอบการทะลุผ่าน  $v_l$  และเลขคลื่น  $k$  จะได้เป็น

$$s_l = kRv_l \quad (A.80)$$

เราต้องการทราบเฟสของ  $u_l^{(-)}(r)$  ที่  $r=R$  ด้วย เราจึงนิยามค่าคงตัวเฟส (phase constant)  $\xi_l$  ขึ้นมาเป็น

$$e^{2i\xi_l} = \frac{u_l^{(-)}(R)}{u_l^{(+)}(R)} = \frac{G_l(R) - iF_l(R)}{G_l(R) + iF_l(R)} e^{2i\sigma_l} \quad (A.81)$$

เมื่อ  $\sigma_l = 0$  สำหรับกรณีที่เป็นนิวตรอน และมีค่าตามที่กำหนดไว้ในสมการ (A.65) ในกรณีของอนุภาคมีประจุ

สำหรับกรณีกับนิวตรอน  $\xi_l$  จะมีค่าสัมบูรณ์ลดลงตาม  $v_l$  และมีค่าใกล้เคียงศูนย์เมื่อ  $v_l$  มีค่าต่ำมาก ๆ ค่าจำกัดของ  $\xi_l$  ในกรณีพลังงานสูง ( $v_l$  ใกล้ 1,  $kr \gg l$ ) และในกรณีพลังงานต่ำ ( $v_l$  ใกล้ 0,  $kR \ll l$ ) คือ [เราให้สัญลักษณ์  $(2l+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2l+1)$ ]

$$\begin{aligned} kR \gg l; & \quad \xi_l \cong -(kR - \frac{1}{2}l\pi) \\ kR \ll l; & \quad \xi_l \cong \frac{(kR)^{2l+1}}{(2l-1)!!(2l+1)!!} \end{aligned} \quad \text{สำหรับนิวตรอน} \quad (A.82)$$

แต่สำหรับกรณีอนุภาคมีประจุ ค่าจำกัดของ  $v_l$  ที่พลังงานสูง ( $v_l$  ใกล้ 1,  $kR \gg 1$ ) จะมีค่าเช่นเดียวกับสมการ (A.82) แต่ที่พลังงานต่ำ ( $v_l$  ใกล้ 0,  $kR \ll R$ ) ค่า  $\xi_l$  จะมีค่าใกล้เคียงกับการเลื่อนเฟสกลอมบ์  $\sigma_l$  ในสมการ (A.65)

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\eta_l$  และค่าอนุพันธ์ลอการิทึม (logarithmic derivative)  $f_l$  ที่ขอบของนิวเคลียสหาได้โดยการแทนสมการ (A.73) และค่าคงตัวในสมการ (A.74) ลงในสมการ (A.75) ที่เป็นนิยามของ  $f_l$  และจัดสมการที่ได้เสียใหม่ จะได้ความสัมพันธ์เป็นแบบ

$$\eta_l = \frac{f_l - \Delta_l + is_l}{f_l - \Delta_l - is_l} e^{2i\xi_l} \quad (\text{A.83})$$

ในกรณีที่อนุภาคนิวตรอนและมี  $l=0$  สมการ (A.83) จะลดรูปเป็นสมการ (A.51)

เพราะว่า  $|\eta_l|^2 \leq 1$  และตามสมการ (A.40) ภาคตัดขวางการกระเจิงจะมีค่าสูงสุดต่อเมื่อ  $\eta_l = -1$  เงื่อนไขเหล่านี้จะบังคับให้  $f_l$  ในสมการ (A.83) มีค่าเป็น

$$f_l = \Delta_l + s_l \tan \xi_l \quad (\text{สำหรับ } \eta_l = -1) \quad (\text{A.84})$$

เราอาจคำนวณหาภาคตัดขวางการกระเจิงและภาคตัดขวางปฏิกิริยาได้จากการแทน  $\eta_l$  จากสมการ (A.83) ลงไปในสมการ (A.40) และ (A.41) ตามลำดับ ภาคตัดขวางการกระเจิงที่ได้จะเป็น

$$\sigma_{s,l} = (2l+1)\pi\lambda^2 |A_{res}^l + A_{pol}^l|^2 \quad (\text{A.85})$$

เมื่อแอมพลิจูดการกระเจิงเรโซแนนซ์ และแอมพลิจูดการกระเจิงศักย์ทรงกลมแข็ง เป็น

$$A_{res}^l = \frac{-2is_l}{(\text{Re } f_l - \Delta_l) + i(\text{Im } f_l - s_l)} \quad (\text{A.86})$$

$$A_{pol}^l = e^{-2i\xi_l} - 1 \quad (\text{A.87})$$

เมื่อ  $\text{Re } f_l$  และ  $\text{Im } f_l$  เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ  $f_l$  ตามลำดับ ถ้าหากว่าอนุภาคที่ตกกระทบเป็นนิวตรอนที่มี  $l=0$  สมการทั้งสองนี้จะลดรูปเป็นสมการ (A.55) และ (A.56) ส่วนภาคตัดขวางปฏิกิริยาที่ได้จะเป็น

$$\sigma_{r,l} = (2l+1)\pi\lambda^2 \frac{-4s_l \text{Im } f_l}{(\text{Re } f_l - \Delta_l)^2 + (\text{Im } f_l - s_l)^2} \quad (\text{A.88})$$

เราอาจสรุปได้จากสมการ (A.88) นี้ว่าส่วนจินตภาพของ  $f_l$  จะต้องเป็นลบหรือศูนย์ ยิ่งกว่านั้น  $s_l$



ที่อยู่ในตัวเศษของเศษส่วนในสมการนั้นเป็นข้อพิสูจน์ได้อย่างดีว่าการมีค่าต่ำลงของตัวประกอบ การทะลุผ่าน  $\nu$ , (ทำให้ค่า  $s$ , ตามสมการ (A.80) มีค่าต่ำลง) จะทำให้ภาคตัดขวางปฏิกิริยามีค่าต่ำลงด้วย

#### ก.4 การแจกแจงเชิงมุมของอนุภาคที่กระเจิงแบบยืดหยุ่น (The Angular Distribution of Elastically Scattered Particles.)

ถ้าหากเราใช้  $\eta_l$  จากสมการ (A.83) กับสมการ (A.35) และ (A.7) จะได้ภาคตัดขวางการกระเจิงที่ขึ้นกับมุม อยู่ในพจน์ของ  $A'_{res}$  และ  $A'_{pot}$  เป็น

$$d\sigma_s(\theta) = \pi\lambda^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} e^{2i\delta_l} (A'_{res} + A'_{pot}) Y_{l,0}(\theta) \right|^2 d\Omega \quad (A.89)$$

ถ้า  $A'_{res} = 0$  สมการ (A.89) จะให้ภาคตัดขวางการกระเจิงที่ขึ้นกับมุมแบบเป็นการสะท้อนออกมาจากศักย์ทรงกลมที่ห่อหุ้มนิวเคลียสอยู่ (หรือการกระเจิงศักย์ทรงกลมแข็ง) ภาคตัดขวางของการกระเจิงที่เป็นผลจากภายในนิวเคลียสจะแบ่งอยู่ในพจน์ของ  $A'_{res}$  และที่เป็นผลจากภายนอกนิวเคลียสจะแบ่งอยู่ในพจน์ของ  $A'_{pot}$  โดยพจน์ทั้งสองนี้รวมกันอยู่อย่างอาพันธ์ ดังนั้นจึงมีพจน์ของการแทรกสอดระหว่างกันอยู่ด้วย (หมายเหตุ: คลื่นที่กระเจิงออกมาจากนิวเคลียสจะแทรกสอดกับคลื่นที่กระเจิงออกมาจากภายในนิวเคลียส)

ในกรณีอนุภาคตกกระทบเป็นอนุภาคมีประจุ สมการ (A.89) จะบรรจุการกระเจิงอันเนื่องมาจากสนามคูลอมบ์ของนิวเคลียสอยู่ด้วย การกระเจิงเฉพาะกับศักย์คูลอมบ์แต่เพียงอย่างเดียวนี้มีลักษณะเหมือนกับการกระเจิงโดยศักย์ทรงกลมแข็งที่สนามห่อหุ้มเป็นสนามคูลอมบ์ และการกระเจิงที่บริเวณห่างนิวเคลียสซึ่งมุมกระเจิงแคบจะมีลักษณะสอดคล้องกับการกระเจิงแบบรัทเทอร์ฟอร์ด และจะแตกต่างไปเมื่อการกระเจิงเกิดในบริเวณใกล้นิวเคลียส ซึ่งมุมกระเจิงกว้าง

ในกรณีของการกระเจิงของอนุภาคมีประจุนี้ อนุกรมในสมการ (A.89) จะมีลักษณะดูเข้า เพราะทุกพจน์ได้มาจากการกระเจิงคูลอมบ์ ดังนั้นนิพจน์ของภาคตัดขวางจึงใช้นิพจน์สมมูลย์ (equivalent expression) ซึ่งมีส่วนหลักของแอมพลิจูดของการกระเจิงเป็นการกระเจิงแบบรัทเทอร์ฟอร์ดอย่างบริสุทธิ์ (pure Rutherford scattering) และนิพจน์ที่ยังไม่แยกแต่ละค่า  $l$  ออกมาจะเป็น

$$d\sigma_s(\theta) = \left| \frac{Z_a Z_x e^2}{2Mv^2} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) e^{-2i\gamma \ln \sin(\frac{1}{2}\theta)} - i\lambda \sqrt{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} e^{2i\sigma_l - 2i\sigma_0} \right. \\ \left. \times \left\{ 1 - e^{2i\xi_l - 2i\sigma_l} [1 - A'_{res}] \right\} Y_{l,0}(\theta) \right|^2 d\Omega \quad (\text{A.90})$$

พร้อมกับสูตรสำรองคือ

$$e^{2i\sigma_l - 2i\sigma_0} = \frac{(l+i\gamma)(l-1+i\gamma)\dots(1+i\gamma)}{(l-i\gamma)(l-1-i\gamma)\dots(1-i\gamma)} \quad (\text{A.91a})$$

และ

$$e^{2i\xi_l - 2i\sigma_l} = \frac{G_l(R) - iF_l(R)}{G_l(R) + iF_l(R)} \quad (\text{A.91b})$$

เมื่อ  $F_l$  และ  $G_l$  เป็นฟังก์ชันคลื่นลูตอมบ์สม่ำเสมอ และไม่สม่ำเสมอ ตามลำดับ

## ก.5 ทฤษฎีบทส่วนกลับของปฏิกิริยานิวเคลียร์ (The Reciprocity Theorem for Nuclear Reaction)

ได้เคยกล่าวมาแล้วในตอนต้นว่า แชนเนล  $\alpha$  เพียงแชนเนลเดียวอาจให้แชนเนลออกได้หลายแชนเนล ต่าง ๆ กัน โดยโอกาสที่จะเป็นแชนเนลใด ๆ นั้นถูกรวมอยู่ในภาคตัดขวางปฏิกิริยา  $\sigma_r(\alpha)$  เราจะทำให้รายละเอียดบางประการในเรื่องนี้เป็นการเพิ่มเติมในต่อไปนี้

ถ้าพิจารณาให้แชนเนลเข้า  $\alpha$  ทำให้เกิดแชนเนลออก  $\beta$  และให้  $\sigma(\alpha, \beta)$  เป็นภาคตัดขวางของการมีแชนเนลเข้าเป็น  $\alpha$  และมีแชนเนลออกเป็น  $\beta$  แล้ว ภาคตัดขวางปฏิกิริยา  $\sigma_r(\alpha)$  ในแชนเนล  $\alpha$  จะกำหนดให้โดย

$$\sigma_r(\alpha) = \sum_{\beta \neq \alpha} \sigma(\alpha, \beta) + \sigma_c(\alpha) \quad (\text{A.92})$$

ในนิพจน์ทางขวามือของสมการ พจน์แรกเป็นการรวมแต่ละภาคตัดขวางที่ให้แชนเนลออก  $\beta$  ต่าง ๆ กัน ส่วนพจน์ที่สอง  $\sigma_c(\alpha)$  เป็นภาคตัดขวางของการถูกจับไว้ในนิวเคลียสของอนุภาค  $\alpha$  โดยนิวเคลียสมิได้มีการคายอนุภาคอื่นใดออกมา

พิจารณาปฏิกิริยาสองปฏิกิริยา ที่เป็นไปในทางตรงข้ามกันหรือกลับกัน ดังนี้



$$a_{\alpha'} + X_{\alpha'} = Y_{\beta'} + b_{\beta'}$$

$$b_{\beta'} + Y_{\beta'} = X_{\alpha'} + a_{\alpha'}$$

โดยที่  $\sigma(\alpha, \beta)$  เป็นภาคตัดขวางของสมการแรก และ  $\sigma(\beta, \alpha)$  เป็นของสมการที่สอง ซึ่งภาคตัดขวางทั้งสองนี้ตรงข้ามกัน หรือกลับกันเช่นเดียวกับสมการทั้งสอง ความสัมพันธ์อย่างกว้าง ๆ ของสองภาคตัดขวางนี้จะขึ้นกับความยาวคลื่น  $\lambda_\alpha$  ของเชนเนล  $\alpha$  และ  $\lambda_\beta$  ของเชนเนล  $\beta$  จะเป็นดังต่อไปนี้

$$\frac{\sigma(\alpha, \beta)}{\lambda_\alpha^2} = \frac{\sigma(\beta, \alpha)}{\lambda_\beta^2} \quad (\text{A.93})$$

$\lambda_\alpha$  และ  $\lambda_\beta$  มีนิยามตามสมการ  $1/\lambda_\alpha = k_\alpha = (2M_\alpha \varepsilon_\alpha)^{1/2} / \hbar$  และ  $1/\lambda_\beta = k_\beta = (2M_\beta \varepsilon_\beta)^{1/2} / \hbar$  ที่เคยผ่านมาแล้วในบทนี้

ถ้าการพิจารณาปฏิกริยาจะลงไปถึงทิศทางสัมพัทธ์ของอนุภาคตกกระทบและอนุภาคกระเด็นออกด้วย เราจะกำหนดภาคตัดขวางเชิงอนุพันธ์  $\sigma(A, B)$  ขึ้นมา และมีนิยามตามสมการ

$$\sigma(A, B) = \sigma(\alpha; \beta, \theta, \phi) d\Omega \quad (\text{A.94})$$

ซึ่งนิยามให้เป็นภาคตัดขวางของปฏิกริยาที่อนุภาคตกกระทบ  $a$  เคลื่อนที่เข้ามาในทิศทางขนานกับแกน  $z$  และอนุภาคกระเด็นออก  $b$  เคลื่อนที่ออกไปภายในมุมตันย่อย  $d\Omega$  ซึ่งทิศทางของ  $b$  จะกำหนดโดยมุมเชิงขั้ว (polar angle)  $\theta$  และ  $\phi$  เมื่อ  $\sigma(A, B)$  มีนิยามดังสมการ (A.94) ส่วนกลับของ  $\sigma(A, B)$  ก็จะเป็น

$$\sigma(-A, -B) = \sigma(\beta, \theta, \phi; \alpha) d\Omega \quad (\text{A.95})$$

ซึ่งเป็นภาคตัดขวางของปฏิกริยาตรงข้าม หรือปฏิกริยากลับกัน โดยอนุภาคตกกระทบ  $b$  จะเข้ามาในทิศทาง  $\theta, \phi$  และอนุภาคกระเด็นออก  $a$  กระเด็นออกไปในทิศทางขนานกับแกน  $-z$  ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\sigma(A, B)$  และ  $\sigma(-A, -B)$  จะคล้ายกับสมการ (A.93) คือ

$$\frac{\sigma(A, B)}{\lambda_\alpha^2} = \frac{\sigma(-B, -A)}{\lambda_\beta^2} \quad (\text{A.96})$$

หมายเหตุ:  $\int \sigma(\alpha; \beta, \theta, \phi) d\Omega = \sigma(\alpha, \beta)$  และ  $\int \sigma(\beta, \theta, \phi; \alpha) d\Omega = \sigma(\beta, \alpha)$

ความสัมพันธ์ในสมการ (A.93) และ (A.96) นี้เรียกว่า ทฤษฎีบทส่วนกลับ (reciprocity) ของปฏิกริยานิวเคลียร์ ทฤษฎีบทนี้ได้แสดงให้เห็นการเชื่อมโยงกันระหว่างภาคตัดขวางของ



ปฏิกิริยาที่ตรงข้ามกัน

### บรรณานุกรม

1. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
2. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
3. B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Introduction to Quantum Mechanics*, Longman, Hong Kong, 1990.
4. W.E. Burcham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
5. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
6. R.D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, New York, 1955.
7. E.S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955.
8. S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
9. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.
10. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
11. D. Park, *Introduction to Quantum Theory* (third edition), Mc Graw-Hill, Inc., Singapore, 1992.
12. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.

## ภาคผนวก ข

### ตารางแสดงสมบัติของนิวเคลียส

### (TABLE OF NUCLEAR PROPERTIES)

ตารางต่อไปนี้ แสดงสมบัติบางประการของแต่ละไอโซโทปที่เลือกสรรมาเฉพาะพวกที่เสถียรและพวกที่มีอายุยาว มวลอะตอม (atomic mass) และสปิน-ภาวะคู่หรือคี่ (spin-parity) ที่ปรากฏในตารางเป็นค่าที่สถานะพื้น ในไอโซโทปเสถียรจะแสดงเฉพาะค่าความอุดมสมบูรณ์ (abundance) ส่วนไอโซโทปกัมมันตรังสีจะแสดงค่าครึ่งชีวิต (half-life) และวิธีการสลายตัว (decay-mode) แบบหลัก ๆ [ $\epsilon$  - การจับอิเล็กตรอน (electron capture);  $\beta^-$  - การสลายตัวให้บีตาลบ (beta decay);  $\alpha$  - การสลายตัวให้แอลฟา (alpha decay);  $f$  - การแบ่งแยกตัวแบบเกิดเอง (spontaneous fission)] มวลของแต่ละไอโซโทปเป็นมวลของอะตอมที่เป็นกลางทางประจุที่ประมาณหามาใน ค.ศ. 1983 : A.H. Wapstra and G. Audi, *Nucl. Phys. A*432, 1(1985). ความไม่แน่นอนของค่ามวลโดยทั่วไปอยู่ที่  $10^{-5}$  u (หรือ  $10^{-4}$  u สำหรับบางกรณีที่น่าสงสัยจากเสถียรภาพ) ส่วนค่าความไม่แน่นอนของความอุดมสมบูรณ์และครึ่งชีวิตโดยทั่วไปอยู่ที่ระดับของความแปรปรวนของตัวเลขตัวสุดท้ายหรือต่ำกว่า (ตารางคัดลอกมาจาก K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Singapore, 1988, p. 822-833)

|    |   |                    |           |                   | Abundance<br>or<br>Half-life |    |           |                    |                   |                         | Abundance<br>or<br>Half-life |  |
|----|---|--------------------|-----------|-------------------|------------------------------|----|-----------|--------------------|-------------------|-------------------------|------------------------------|--|
| Z  | A | Atomic<br>mass (u) |           | I <sup>o</sup>    |                              | Z  | A         | Atomic<br>mass (u) |                   | I <sup>o</sup>          |                              |  |
| H  | 1 | 1                  | 1.007825  | $\frac{1}{2}^{+}$ | 99.985%                      | 10 | 10.012937 | $3^{+}$            |                   | 19.8%                   |                              |  |
|    |   | 2                  | 2.014102  | $1^{+}$           | 0.015%                       | 11 | 11.009305 | $\frac{3}{2}^{-}$  |                   | 80.2%                   |                              |  |
|    |   | 3                  | 3.016049  | $\frac{1}{2}^{+}$ | 12.3 y ( $\beta^{-}$ )       | 12 | 12.014353 | $1^{+}$            |                   | 20.4 ms ( $\beta^{-}$ ) |                              |  |
| He | 2 | 3                  | 3.016029  | $\frac{1}{2}^{+}$ | $1.38 \times 10^{-4}\%$      | C  | 6         | 9                  | 9.031039          | $\frac{3}{2}^{-}$       | 0.13 s ( $\epsilon$ )        |  |
|    |   | 4                  | 4.002603  | $0^{+}$           | 99.99986%                    |    | 10        | 10.016856          | $0^{+}$           |                         | 19.2 s ( $\epsilon$ )        |  |
| Li | 3 | 6                  | 6.015121  | $1^{+}$           | 7.5%                         | 11 | 11.011433 | $\frac{3}{2}^{-}$  |                   | 20.4 m ( $\epsilon$ )   |                              |  |
|    |   | 7                  | 7.016003  | $\frac{3}{2}^{-}$ | 92.5%                        | 12 | 12.000000 | $0^{+}$            |                   | 98.89%                  |                              |  |
|    |   | 8                  | 8.022486  | $2^{+}$           | 0.84 s ( $\beta^{-}$ )       | 13 | 13.003355 | $\frac{1}{2}^{-}$  |                   | 1.1%                    |                              |  |
| Be | 4 | 7                  | 7.016928  | $\frac{3}{2}^{-}$ | 53.3 d ( $\epsilon$ )        | 14 | 14.003242 | $0^{+}$            |                   | 5730 y ( $\beta^{-}$ )  |                              |  |
|    |   | 8                  | 8.005305  | $0^{+}$           | 0.07 fs ( $\alpha$ )         | 15 | 15.010599 | $\frac{1}{2}^{+}$  |                   | 2.45 s ( $\beta^{-}$ )  |                              |  |
|    |   | 9                  | 9.012182  | $\frac{3}{2}^{-}$ | 100%                         | N  | 7         | 12                 | 12.018613         | $1^{+}$                 | 11 ms ( $\epsilon$ )         |  |
|    |   | 10                 | 10.013534 | $0^{+}$           | 1.6 My ( $\beta^{-}$ )       |    | 13        | 13.005739          | $\frac{1}{2}^{-}$ |                         | 9.96 m ( $\epsilon$ )        |  |
|    |   | 11                 | 11.021658 | $\frac{1}{2}^{+}$ | 13.8 s ( $\beta^{-}$ )       |    | 14        | 14.003074          | $1^{+}$           |                         | 99.63%                       |  |
| B  | 5 | 8                  | 8.024606  | $2^{+}$           | 0.77 s ( $\epsilon$ )        | 15 | 15.000109 | $\frac{1}{2}^{-}$  |                   | 0.366%                  |                              |  |
|    |   | 9                  | 9.013329  | $\frac{3}{2}^{-}$ | 0.85 as ( $\alpha$ )         | 16 | 16.006100 | $2^{-}$            |                   | 7.13 s ( $\beta^{-}$ )  |                              |  |

| Abundance<br>or<br>Half-life |           |                                             |                          |                                             | Abundance<br>or<br>Half-life |                 |                    |                                             |                          |                           |                |
|------------------------------|-----------|---------------------------------------------|--------------------------|---------------------------------------------|------------------------------|-----------------|--------------------|---------------------------------------------|--------------------------|---------------------------|----------------|
| Z                            | A         | Atomic<br>mass (u)                          | I <sup>π</sup>           | Half-life                                   | Z                            | A               | Atomic<br>mass (u) | I <sup>π</sup>                              | Half-life                |                           |                |
| O                            | 8         | 17                                          | 17.008450                | $\frac{1}{2}^-$                             | 4.17 s (β <sup>-</sup> )     | 26              | 25.986892          | 5 <sup>+</sup>                              | 0.72 My (ε)              |                           |                |
|                              |           | 18                                          | 18.014081                | 1 <sup>-</sup>                              | 0.63 s (β <sup>-</sup> )     | 27              | 26.981539          | $\frac{3}{2}^+$                             | 100 %                    |                           |                |
|                              |           | 14                                          | 14.008595                | 0 <sup>+</sup>                              | 71 s (ε)                     | 28              | 27.981910          | 3 <sup>+</sup>                              | 2.24 m (β <sup>-</sup> ) |                           |                |
|                              |           | 15                                          | 15.003065                | $\frac{1}{2}^-$                             | 122 s (ε)                    | 29              | 28.980446          | $\frac{5}{2}^+$                             | 6.6 m (β <sup>-</sup> )  |                           |                |
|                              |           | 16                                          | 15.994915                | 0 <sup>+</sup>                              | 99.76 %                      | 30              | 29.982940          | 3 <sup>+</sup>                              | 3.7 s (β <sup>-</sup> )  |                           |                |
|                              |           | 17                                          | 16.999131                | $\frac{3}{2}^+$                             | 0.038 %                      | Si              | 14                 | 26.992330                                   | 0 <sup>+</sup>           | 2.21 s (ε)                |                |
|                              |           | 18                                          | 17.999160                | 0 <sup>+</sup>                              | 0.204 %                      |                 | 27                 | 26.986704                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 4.13 s (ε)                |                |
|                              |           | 19                                          | 19.003577                | $\frac{5}{2}^+$                             | 26.9 s (β <sup>-</sup> )     |                 | 28                 | 27.976927                                   | 0 <sup>+</sup>           | 92.23 %                   |                |
| 20                           | 20.004076 | 0 <sup>+</sup>                              | 13.5 s (β <sup>-</sup> ) | 29                                          | 28.976495                    |                 | $\frac{1}{2}^+$    | 4.67 %                                      |                          |                           |                |
| F                            | 9         | 17                                          | 17.002095                | $\frac{5}{2}^+$                             | 64.5 s (ε)                   |                 | 30                 | 29.973770                                   | 0 <sup>+</sup>           | 3.10 %                    |                |
|                              |           | 18                                          | 18.000937                | 1 <sup>+</sup>                              | 110 m (ε)                    |                 | 31                 | 30.975362                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 2.62 h (β <sup>-</sup> )  |                |
|                              |           | 19                                          | 18.998403                | $\frac{1}{2}^+$                             | 100 %                        |                 | 32                 | 31.974148                                   | 0 <sup>+</sup>           | 105 y (β <sup>-</sup> )   |                |
|                              |           | 20                                          | 19.999981                | 2 <sup>+</sup>                              | 11 s (β <sup>-</sup> )       |                 | 33                 | 32.997920                                   | ( $\frac{3}{2}^+$ )      | 6.2 s (β <sup>-</sup> )   |                |
|                              |           | 21                                          | 20.999948                | $\frac{5}{2}^+$                             | 4.3 s (β <sup>-</sup> )      | P               | 15                 | 28.981803                                   | $\frac{1}{2}^+$          | 4.1 s (ε)                 |                |
|                              |           | 22                                          | 22.003030                | (3,4) <sup>+</sup>                          | 4.2 s (β <sup>-</sup> )      |                 | 30                 | 29.978307                                   | 1 <sup>+</sup>           | 2.50 m (ε)                |                |
|                              |           | 23                                          | 23.003600                | ( $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ) <sup>+</sup> | 2.2 s (β <sup>-</sup> )      |                 | 31                 | 30.973762                                   | $\frac{1}{2}^+$          | 100 %                     |                |
|                              |           | Ne                                          | 10                       | 17                                          | 17.017690                    |                 | $\frac{1}{2}^-$    | 0.11 s (ε)                                  | 32                       | 31.973907                 | 1 <sup>+</sup> |
| 18                           | 18.005710 |                                             |                          | 0 <sup>+</sup>                              | 1.7 s (ε)                    |                 | 33                 | 32.971725                                   | $\frac{1}{2}^+$          | 25.3 d (β <sup>-</sup> )  |                |
| 19                           | 19.001880 |                                             |                          | $\frac{1}{2}^+$                             | 17.3 s (ε)                   |                 | 34                 | 33.973636                                   | 1 <sup>+</sup>           | 12.4 s (β <sup>-</sup> )  |                |
| 20                           | 19.992436 |                                             |                          | 0 <sup>+</sup>                              | 90.51 %                      |                 | S                  | 16                                          | 30.984903                | 0 <sup>+</sup>            | 1.2 s (ε)      |
| 21                           | 20.993843 |                                             |                          | $\frac{3}{2}^+$                             | 0.27 %                       |                 |                    | 31                                          | 30.979554                | $\frac{1}{2}^+$           | 2.6 s (ε)      |
| 22                           | 21.991383 |                                             |                          | 0 <sup>+</sup>                              | 9.22 %                       | 32              |                    | 31.972071                                   | 0 <sup>+</sup>           | 95.02 %                   |                |
| 23                           | 22.994465 |                                             |                          | $\frac{5}{2}^+$                             | 37.6 s (β <sup>-</sup> )     | 33              |                    | 32.971458                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 0.75 %                    |                |
| 24                           | 23.993613 |                                             |                          | 0 <sup>+</sup>                              | 3.4 m (β <sup>-</sup> )      | 34              |                    | 33.967867                                   | 0 <sup>+</sup>           | 4.21 %                    |                |
| 25                           | 24.997690 | ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ) <sup>+</sup> | 0.60 s (β <sup>-</sup> ) | 35                                          | 34.969032                    | $\frac{3}{2}^+$ |                    | 87.4 d (β <sup>-</sup> )                    |                          |                           |                |
| Na                           | 11        | 20                                          | 20.007344                | 2 <sup>+</sup>                              | 0.45 s (ε)                   | 36              |                    | 35.967081                                   | 0 <sup>+</sup>           | 0.017 %                   |                |
|                              |           | 21                                          | 20.997651                | $\frac{3}{2}^+$                             | 22.5 s (ε)                   | 37              |                    | 36.971126                                   | $\frac{7}{2}^-$          | 5.0 m (β <sup>-</sup> )   |                |
|                              |           | 22                                          | 21.994434                | 3 <sup>+</sup>                              | 2.60 y (ε)                   | 38              | 37.971162          | 0 <sup>+</sup>                              | 170 m (β <sup>-</sup> )  |                           |                |
|                              |           | 23                                          | 22.989768                | $\frac{1}{2}^+$                             | 100 %                        | Cl              | 17                 | 32.977452                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 2.51 s (ε)                |                |
|                              |           | 24                                          | 23.990961                | 4 <sup>+</sup>                              | 15.0 h (β <sup>-</sup> )     |                 | 34                 | 33.973763                                   | 0 <sup>+</sup>           | 1.53 s (ε)                |                |
|                              |           | 25                                          | 24.989953                | $\frac{3}{2}^+$                             | 60 s (β <sup>-</sup> )       |                 | 35                 | 34.968853                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 75.77 %                   |                |
|                              |           | 26                                          | 25.992586                | 3 <sup>+</sup>                              | 1.1 s (β <sup>-</sup> )      |                 | 36                 | 35.968307                                   | 2 <sup>+</sup>           | 0.30 My (β <sup>-</sup> ) |                |
|                              |           | 27                                          | 26.993940                | $\frac{5}{2}^+$                             | 0.30 s (β <sup>-</sup> )     |                 | 37                 | 36.965903                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 24.23 %                   |                |
| Mg                           | 12        | 21                                          | 21.011716                | ( $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ) <sup>+</sup> | 0.123 s (ε)                  |                 | 38                 | 37.968011                                   | 2 <sup>-</sup>           | 37.3 m (β <sup>-</sup> )  |                |
|                              |           | 22                                          | 21.999574                | 0 <sup>+</sup>                              | 3.86 s (ε)                   |                 | 39                 | 38.968005                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 56 m (β <sup>-</sup> )    |                |
|                              |           | 23                                          | 22.994124                | $\frac{3}{2}^+$                             | 11.3 s (ε)                   |                 | 40                 | 39.970440                                   | 2 <sup>-</sup>           | 1.35 m (β <sup>-</sup> )  |                |
|                              |           | 24                                          | 23.985042                | 0 <sup>+</sup>                              | 78.99 %                      | 41              | 40.970590          | ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ) <sup>+</sup> | 31 s (β <sup>-</sup> )   |                           |                |
|                              |           | 25                                          | 24.985837                | $\frac{5}{2}^+$                             | 10.00 %                      | Ar              | 18                 | 33.980269                                   | 0 <sup>+</sup>           | 0.844 s (ε)               |                |
|                              |           | 26                                          | 25.982594                | 0 <sup>+</sup>                              | 11.01 %                      |                 | 35                 | 34.975256                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 1.78 s (ε)                |                |
|                              |           | 27                                          | 26.984341                | $\frac{1}{2}^+$                             | 9.46 m (β <sup>-</sup> )     |                 | 36                 | 35.967546                                   | 0 <sup>+</sup>           | 0.337 %                   |                |
|                              |           | 28                                          | 27.983877                | 0 <sup>+</sup>                              | 21.0 h (β <sup>-</sup> )     |                 | 37                 | 36.966776                                   | $\frac{3}{2}^+$          | 35.0 d (ε)                |                |
| 29                           | 28.988480 | $\frac{1}{2}^+$                             | 1.4 s (β <sup>-</sup> )  | 38                                          | 37.962732                    |                 | 0 <sup>+</sup>     | 0.063 %                                     |                          |                           |                |
| Al                           | 13        | 24                                          | 23.999941                | 4 <sup>+</sup>                              | 2.07 s (ε)                   |                 | 39                 | 38.964314                                   | $\frac{7}{2}^-$          | 269 y (β <sup>-</sup> )   |                |
|                              |           | 25                                          | 24.990429                | $\frac{5}{2}^+$                             | 7.18 s (ε)                   |                 | 40                 | 39.962384                                   | 0 <sup>+</sup>           | 99.60 %                   |                |
|                              |           |                                             |                          |                                             |                              |                 | 41                 | 40.964501                                   | $\frac{1}{2}^-$          | 1.83 h (β <sup>-</sup> )  |                |



| Abundance or Half-life |    |                 |                |                            | Abundance or Half-life |    |                 |                                |                                                |                                |            |
|------------------------|----|-----------------|----------------|----------------------------|------------------------|----|-----------------|--------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------|------------|
| Z                      | A  | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup> | Half-life                  | Z                      | A  | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>                 | Half-life                                      |                                |            |
|                        |    | 42              | 41.963050      | 0 <sup>+</sup>             |                        | 52 | 51.946898       | 0 <sup>+</sup>                 | 1.7 m (β <sup>-</sup> )                        |                                |            |
|                        |    | 43              | 42.965670      |                            |                        | 53 | 52.949730       | ( $\frac{1}{2}$ ) <sup>-</sup> | 33 s (β <sup>-</sup> )                         |                                |            |
|                        |    | 44              | 43.965365      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    |                 |                                |                                                |                                |            |
| K                      | 19 | 37              | 36.973377      | $\frac{3}{2}$ <sup>+</sup> |                        | V  | 23              | 46                             | 45.960198                                      | 0 <sup>+</sup>                 | 0.42 s (ε) |
|                        |    | 38              | 37.969080      | 3 <sup>+</sup>             |                        |    | 47              | 46.954906                      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup>                     | 32.6 m (ε)                     |            |
|                        |    | 39              | 38.963707      | $\frac{3}{2}$ <sup>+</sup> |                        |    | 48              | 47.952257                      | 4 <sup>+</sup>                                 | 16.0 d (ε)                     |            |
|                        |    | 40              | 39.963999      | 4 <sup>-</sup>             |                        |    | 49              | 48.948517                      | $\frac{7}{2}$ <sup>-</sup>                     | 330 d (ε)                      |            |
|                        |    | 41              | 40.961825      | $\frac{3}{2}$ <sup>+</sup> |                        |    | 50              | 49.947161                      | 6 <sup>+</sup>                                 | 0.250%                         |            |
|                        |    | 42              | 41.962402      | 2 <sup>-</sup>             |                        |    | 51              | 50.943962                      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup>                     | 99.750%                        |            |
|                        |    | 43              | 42.960717      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 52              | 51.944778                      | 3 <sup>+</sup>                                 | 3.76 m (β <sup>-</sup> )       |            |
|                        |    | 44              | 43.961560      | 2 <sup>-</sup>             |                        |    | 53              | 52.944340                      | $\frac{7}{2}$ <sup>-</sup>                     | 1.6 m (β <sup>-</sup> )        |            |
|                        |    | 45              | 44.960695      | $\frac{7}{2}$ <sup>+</sup> |                        |    | 54              | 53.946442                      | (3,4,5) <sup>+</sup>                           | 50 s (β <sup>-</sup> )         |            |
|                        |    | 46              | 45.961976      | (2 <sup>-</sup> )          |                        | Cr | 24              | 46                             | 45.968360                                      | 0 <sup>+</sup>                 | 0.26 s (ε) |
|                        |    | 47              | 46.961677      | $\frac{1}{2}$ <sup>+</sup> |                        |    | 47              | 46.962905                      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup>                     | 0.51 s (ε)                     |            |
| Ca                     | 20 | 38              | 37.976318      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 48              | 47.954033                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 21.6 h (ε)                     |            |
|                        |    | 39              | 38.970718      | $\frac{3}{2}$ <sup>+</sup> |                        |    | 49              | 48.951338                      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup>                     | 41.9 m (ε)                     |            |
|                        |    | 40              | 39.962591      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 50              | 49.946046                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 4.35%                          |            |
|                        |    | 41              | 40.962278      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 51              | 50.944768                      | $\frac{7}{2}$ <sup>-</sup>                     | 27.7 d (ε)                     |            |
|                        |    | 42              | 41.958618      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 52              | 51.940510                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 83.79%                         |            |
|                        |    | 43              | 42.958766      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 53              | 52.940651                      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup>                     | 9.50%                          |            |
|                        |    | 44              | 43.955481      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 54              | 53.938882                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 2.36%                          |            |
|                        |    | 45              | 44.956185      | $\frac{7}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 55              | 54.940842                      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup>                     | 3.50 m (β <sup>-</sup> )       |            |
|                        |    | 46              | 45.953689      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 56              | 55.940643                      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup>                     | 5.9 m (β <sup>-</sup> )        |            |
|                        |    | 47              | 46.954543      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        | Mn | 25              | 50                             | 49.954240                                      | 0 <sup>+</sup>                 | 0.28 s (ε) |
|                        |    | 48              | 47.952533      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 51              | 50.948213                      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup>                     | 46.2 m (ε)                     |            |
|                        |    | 49              | 48.955672      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 52              | 51.945568                      | 6 <sup>+</sup>                                 | 5.59 d (ε)                     |            |
|                        |    | 50              | 49.957519      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 53              | 52.941291                      | $\frac{7}{2}$ <sup>-</sup>                     | 3.7 My (ε)                     |            |
| Sc                     | 21 | 42              | 41.965514      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 54              | 53.940361                      | 3 <sup>+</sup>                                 | 312 d (ε)                      |            |
|                        |    | 43              | 42.961150      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 55              | 54.938047                      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup>                     | 100%                           |            |
|                        |    | 44              | 43.959404      | 2 <sup>+</sup>             |                        |    | 56              | 55.938907                      | 3 <sup>+</sup>                                 | 2.58 h (β <sup>-</sup> )       |            |
|                        |    | 45              | 44.955910      | $\frac{7}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 57              | 56.938285                      | $\frac{5}{2}$ <sup>-</sup>                     | 1.6 m (β <sup>-</sup> )        |            |
|                        |    | 46              | 45.955170      | 4 <sup>+</sup>             |                        |    | 58              | 57.940060                      | 3 <sup>+</sup>                                 | 65 s (β <sup>-</sup> )         |            |
|                        |    | 47              | 46.952409      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        | Fe | 26              | 51                             | 50.956825                                      | ( $\frac{5}{2}$ ) <sup>-</sup> | 0.25 s (ε) |
|                        |    | 48              | 47.952235      | 6 <sup>+</sup>             |                        |    | 52              | 51.948114                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 8.27 h (ε)                     |            |
|                        |    | 49              | 48.950022      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 53              | 52.945310                      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup>                     | 8.51 m (ε)                     |            |
|                        |    | 50              | 49.952186      | 5 <sup>+</sup>             |                        |    | 54              | 53.939613                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 5.8%                           |            |
|                        |    |                 |                |                            |                        |    | 55              | 54.938296                      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup>                     | 2.7 y (ε)                      |            |
| Ti                     | 22 | 43              | 42.968523      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 56              | 55.934939                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 91.8%                          |            |
|                        |    | 44              | 43.959690      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 57              | 56.935396                      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup>                     | 2.15%                          |            |
|                        |    | 45              | 44.958124      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 58              | 57.933277                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 0.29%                          |            |
|                        |    | 46              | 45.952629      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 59              | 58.934877                      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup>                     | 44.6 d (β <sup>-</sup> )       |            |
|                        |    | 47              | 46.951764      | $\frac{3}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 60              | 59.934078                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 1.5 My (β <sup>-</sup> )       |            |
|                        |    | 48              | 47.947947      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    | 61              | 60.936748                      | ( $\frac{1}{2}$ , $\frac{3}{2}$ ) <sup>-</sup> | 6.0 m (β <sup>-</sup> )        |            |
|                        |    | 49              | 48.947871      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        |    | 62              | 61.936773                      | 0 <sup>+</sup>                                 | 68 s (β <sup>-</sup> )         |            |
|                        |    | 50              | 49.944792      | 0 <sup>+</sup>             |                        |    |                 |                                |                                                |                                |            |
|                        |    | 51              | 50.946616      | $\frac{1}{2}$ <sup>-</sup> |                        | Co | 27              | 54                             | 53.948460                                      | 0 <sup>+</sup>                 | 0.19 s (ε) |

|    |    |                    |                     |                          | Abundance<br>or<br>Half-life |                   |                     |                   |                          |                              |                        |                |
|----|----|--------------------|---------------------|--------------------------|------------------------------|-------------------|---------------------|-------------------|--------------------------|------------------------------|------------------------|----------------|
| Z  | A  | Atomic<br>mass (u) | I <sup>π</sup>      | Half-life                | Z                            | A                 | Atomic<br>mass (u)  | I <sup>π</sup>    | Half-life                |                              |                        |                |
|    | 55 | 54.942001          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 17.5 h (ε)               | Ga                           | 31                | 64                  | 63.936836         | 0 <sup>+</sup>           | 2.6 m (ε)                    |                        |                |
|    | 56 | 55.939841          | 4 <sup>+</sup>      | 78.8 d (ε)               |                              | 65                | 64.932738           | $\frac{1}{2}^{-}$ | 15.2 m (ε)               |                              |                        |                |
|    | 57 | 56.936294          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 271 d (ε)                |                              | 66                | 65.931590           | 0 <sup>+</sup>    | 9.4 h (ε)                |                              |                        |                |
|    | 58 | 57.935755          | 2 <sup>+</sup>      | 70.8 d (ε)               |                              | 67                | 66.928204           | $\frac{1}{2}^{-}$ | 78.3 h (ε)               |                              |                        |                |
|    | 59 | 58.933198          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 100 %                    |                              | 68                | 67.927982           | 1 <sup>+</sup>    | 68.1 m (ε)               |                              |                        |                |
|    | 60 | 59.933820          | 5 <sup>+</sup>      | 5.27 y (β <sup>-</sup> ) |                              | 69                | 68.925580           | $\frac{1}{2}^{-}$ | 60.1 %                   |                              |                        |                |
|    | 61 | 60.932478          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 1.65 h (β <sup>-</sup> ) |                              | 70                | 69.926028           | 1 <sup>+</sup>    | 21.1 m (β <sup>-</sup> ) |                              |                        |                |
|    | 62 | 61.934060          | 2 <sup>+</sup>      | 1.5 m (β <sup>-</sup> )  |                              | 71                | 70.924701           | $\frac{1}{2}^{-}$ | 39.9 %                   |                              |                        |                |
|    | 63 | 62.933614          | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 27.5 s (β <sup>-</sup> ) |                              | 72                | 71.926365           | 3 <sup>-</sup>    | 14.1 h (β <sup>-</sup> ) |                              |                        |                |
|    | Ni | 28                 | 55                  | 54.951336                |                              | $\frac{1}{2}^{-}$ | 0.19 s (ε)          | Ge                | 32                       | 66                           | 65.933847              | 0 <sup>+</sup> |
| 56 |    | 55.942134          | 0 <sup>+</sup>      | 6.10 d (ε)               | 67                           | 66.932737         | $(\frac{1}{2})^{-}$ |                   | 19.0 m (ε)               |                              |                        |                |
| 57 |    | 56.939799          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 36.0 h (ε)               | 68                           | 67.928096         | 0 <sup>+</sup>      |                   | 271 d (ε)                |                              |                        |                |
| 58 |    | 57.935346          | 0 <sup>+</sup>      | 68.3 %                   | 69                           | 68.927969         | $\frac{1}{2}^{-}$   |                   | 39.0 h (ε)               |                              |                        |                |
| 59 |    | 58.934349          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 0.075 My (ε)             | 70                           | 69.924250         | 0 <sup>+</sup>      |                   | 20.5 %                   |                              |                        |                |
| 60 |    | 59.930788          | 0 <sup>+</sup>      | 26.1 %                   | 71                           | 70.924954         | $\frac{1}{2}^{-}$   |                   | 11.2 d (ε)               |                              |                        |                |
| 61 |    | 60.931058          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 1.13 %                   | 72                           | 71.922079         | 0 <sup>+</sup>      |                   | 27.4 %                   |                              |                        |                |
| 62 |    | 61.928346          | 0 <sup>+</sup>      | 3.59 %                   | 73                           | 72.923463         | $\frac{1}{2}^{+}$   |                   | 7.8 %                    |                              |                        |                |
| 63 |    | 62.929670          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 100 y (β <sup>-</sup> )  | 74                           | 73.921177         | 0 <sup>+</sup>      |                   | 36.5 %                   |                              |                        |                |
| 64 |    | 63.927968          | 0 <sup>+</sup>      | 0.91 %                   | 75                           | 74.922858         | $\frac{1}{2}^{-}$   |                   | 82.8 m (β <sup>-</sup> ) |                              |                        |                |
|    | 65 | 64.930086          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 2.52 h (β <sup>-</sup> ) |                              | 76                | 75.921402           | 0 <sup>+</sup>    | 7.8 %                    |                              |                        |                |
|    | 66 | 65.929116          | 0 <sup>+</sup>      | 54.8 h (β <sup>-</sup> ) |                              | 77                | 76.923548           | $\frac{1}{2}^{+}$ | 11.3 h (β <sup>-</sup> ) |                              |                        |                |
|    | 67 | 66.931570          | ?                   | 21 s (β <sup>-</sup> )   |                              | 78                | 77.922853           | 0 <sup>+</sup>    | 1.45 h (β <sup>-</sup> ) |                              |                        |                |
|    | Cu | 29                 | 59                  | 58.939503                |                              | $\frac{1}{2}^{-}$ | 82 s (ε)            | 79                | 78.925360                | $(\frac{1}{2})^{-}$          | 19 s (β <sup>-</sup> ) |                |
|    |    | 60                 | 59.937366           | 2 <sup>+</sup>           |                              | 23.4 m (ε)        | As                  | 33                | 70                       | 69.930929                    | 4 <sup>+</sup>         | 53 m (ε)       |
|    |    | 61                 | 60.933461           | $\frac{1}{2}^{-}$        |                              | 3.41 h (ε)        |                     | 71                | 70.927114                | $\frac{1}{2}^{-}$            | 61 h (ε)               |                |
|    |    | 62                 | 61.932586           | 1 <sup>+</sup>           |                              | 9.73 m (ε)        |                     | 72                | 71.926755                | 2 <sup>-</sup>               | 26.0 h (ε)             |                |
|    |    | 63                 | 62.929599           | $\frac{1}{2}^{-}$        |                              | 69.2 %            |                     | 73                | 72.923827                | $\frac{1}{2}^{-}$            | 80.3 d (ε)             |                |
|    |    | 64                 | 63.292766           | 1 <sup>+</sup>           |                              | 12.7 h (ε)        |                     | 74                | 73.923928                | 2 <sup>-</sup>               | 17.8 d (ε)             |                |
|    |    | 65                 | 64.927793           | $\frac{1}{2}^{-}$        |                              | 30.8 %            |                     | 75                | 74.921594                | $\frac{1}{2}^{-}$            | 100 %                  |                |
| 66 |    | 65.928872          | 1 <sup>+</sup>      | 5.10 m (β <sup>-</sup> ) | 76                           | 75.922393         |                     | 2 <sup>-</sup>    | 26.3 h (β <sup>-</sup> ) |                              |                        |                |
| 67 |    | 66.927747          | $\frac{1}{2}^{-}$   | 61.9 h (β <sup>-</sup> ) | 77                           | 76.920646         |                     | $\frac{1}{2}^{-}$ | 38.8 h (β <sup>-</sup> ) |                              |                        |                |
| 68 |    | 67.929620          | 1 <sup>+</sup>      | 31 s (β <sup>-</sup> )   | 78                           | 77.921830         |                     | (2 <sup>-</sup> ) | 91 m (β <sup>-</sup> )   |                              |                        |                |
|    |    |                    |                     |                          | 79                           | 78.920946         |                     | $\frac{1}{2}^{-}$ | 9.0 m (β <sup>-</sup> )  |                              |                        |                |
|    | Zn | 30                 | 61                  | 60.939514                | $\frac{1}{2}^{-}$            | 89 s (ε)          | Se                  | 34                | 71                       | 70.932270                    | $\frac{1}{2}^{-}$      | 4.7 m (ε)      |
|    |    | 62                 | 61.934332           | 0 <sup>+</sup>           | 9.2 h (ε)                    | 72                |                     | 71.927110         | 0 <sup>+</sup>           | 8.4 d (ε)                    |                        |                |
|    |    | 63                 | 62.933214           | $\frac{1}{2}^{-}$        | 38.1 m (ε)                   | 73                |                     | 72.926768         | $\frac{1}{2}^{+}$        | 7.1 h (ε)                    |                        |                |
|    |    | 64                 | 63.929145           | 0 <sup>+</sup>           | 48.6 %                       | 74                |                     | 73.922475         | 0 <sup>+</sup>           | 0.87 %                       |                        |                |
|    |    | 65                 | 64.929243           | $\frac{1}{2}^{-}$        | 244 d (ε)                    | 75                |                     | 74.922522         | $\frac{1}{2}^{+}$        | 119.8 d (ε)                  |                        |                |
|    |    | 66                 | 65.926035           | 0 <sup>+</sup>           | 27.9 %                       | 76                |                     | 75.919212         | 0 <sup>+</sup>           | 9.0 %                        |                        |                |
|    |    | 67                 | 66.927129           | $\frac{1}{2}^{-}$        | 4.10 %                       | 77                |                     | 76.919913         | $\frac{1}{2}^{-}$        | 7.6 %                        |                        |                |
|    |    | 68                 | 67.924846           | 0 <sup>+</sup>           | 18.8 %                       | 78                |                     | 77.917308         | 0 <sup>+</sup>           | 23.5 %                       |                        |                |
|    |    | 69                 | 68.926552           | $\frac{1}{2}^{-}$        | 56 m (β <sup>-</sup> )       | 79                |                     | 78.918498         | $\frac{1}{2}^{+}$        | < 0.065 My (β <sup>-</sup> ) |                        |                |
| 70 |    | 69.925325          | 0 <sup>+</sup>      | 0.62 %                   |                              |                   |                     |                   |                          |                              |                        |                |
|    |    | 71                 | 70.927727           | $\frac{1}{2}^{-}$        | 2.4 m (β <sup>-</sup> )      |                   |                     |                   |                          |                              |                        |                |
|    |    | 72                 | 71.926856           | 0 <sup>+</sup>           | 46.5 h (β <sup>-</sup> )     |                   |                     |                   |                          |                              |                        |                |
|    |    | 73                 | 72.929780           | $(\frac{1}{2})^{-}$      | 24 s (β <sup>-</sup> )       |                   |                     |                   |                          |                              |                        |                |



| Abundance or Half-life |    |                 |                     |                        | Abundance or Half-life |    |                 |                     |                          |
|------------------------|----|-----------------|---------------------|------------------------|------------------------|----|-----------------|---------------------|--------------------------|
| Z                      | A  | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>      | Abundance or Half-life | Z                      | A  | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>      | Abundance or Half-life   |
|                        | 80 | 79.916520       | 0 <sup>+</sup>      | 49.8%                  |                        | 87 | 86.908884       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 7.0%                     |
|                        | 81 | 80.917991       | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 18.5 m ( $\beta^{-}$ ) |                        | 88 | 87.905619       | 0 <sup>+</sup>      | 82.6%                    |
|                        | 82 | 81.916698       | 0 <sup>+</sup>      | 9.2%                   |                        | 89 | 88.907450       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 50.5 d ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 83 | 82.919117       | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 22.5 m ( $\beta^{-}$ ) |                        | 90 | 89.907738       | 0 <sup>+</sup>      | 28.8 y ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 84 | 83.918463       | 0 <sup>+</sup>      | 3.3 m ( $\beta^{-}$ )  |                        | 91 | 90.910187       | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 9.5 h ( $\beta^{-}$ )    |
| Br 35                  | 76 | 75.924528       | 1 <sup>-</sup>      | 16.1 h ( $\epsilon$ )  |                        | 92 | 91.910944       | 0 <sup>+</sup>      | 2.7 h ( $\beta^{-}$ )    |
|                        | 77 | 76.921378       | $\frac{3}{2}^{-}$   | 57.0 h ( $\epsilon$ )  |                        | 93 | 92.913987       | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 7.4 m ( $\beta^{-}$ )    |
|                        | 78 | 77.921144       | 1 <sup>+</sup>      | 6.46 m ( $\epsilon$ )  | Y 39                   | 84 | 83.920310       | (5 <sup>-</sup> )   | 39 m ( $\epsilon$ )      |
|                        | 79 | 78.918336       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 50.69%                 |                        | 85 | 84.916437       | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 2.7 h ( $\epsilon$ )     |
|                        | 80 | 79.918528       | 1 <sup>+</sup>      | 17.6 m ( $\beta^{-}$ ) |                        | 86 | 85.914893       | 4 <sup>-</sup>      | 14.7 h ( $\epsilon$ )    |
|                        | 81 | 80.916289       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 49.31%                 |                        | 87 | 86.910882       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 80.3 h ( $\epsilon$ )    |
|                        | 82 | 81.916802       | 5 <sup>-</sup>      | 35.3 h ( $\beta^{-}$ ) |                        | 88 | 87.909508       | 4 <sup>-</sup>      | 106.6 d ( $\epsilon$ )   |
|                        | 83 | 82.915179       | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 2.39 h ( $\beta^{-}$ ) |                        | 89 | 88.905849       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 100%                     |
|                        | 84 | 83.916503       | 2 <sup>-</sup>      | 31.8 m ( $\beta^{-}$ ) |                        | 90 | 89.907152       | 2 <sup>-</sup>      | 64.1 h ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 85 | 84.915612       | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 2.9 m ( $\beta^{-}$ )  |                        | 91 | 90.907303       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 58.5 d ( $\beta^{-}$ )   |
| Kr 36                  | 75 | 74.931029       | ?                   | 4.3 m ( $\epsilon$ )   |                        | 92 | 91.908917       | 2 <sup>-</sup>      | 3.54 h ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 76 | 75.925959       | 0 <sup>+</sup>      | 14.8 h ( $\epsilon$ )  |                        | 93 | 92.909571       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 10.2 h ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 77 | 76.924610       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 75 m ( $\epsilon$ )    |                        | 94 | 93.911597       | 2 <sup>-</sup>      | 18.7 m ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 78 | 77.920396       | 0 <sup>+</sup>      | 0.356%                 | Zr 40                  | 87 | 86.914817       | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 1.6 h ( $\epsilon$ )     |
|                        | 79 | 78.920084       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 35.0 h ( $\epsilon$ )  |                        | 88 | 87.910225       | 0 <sup>+</sup>      | 83.4 d ( $\epsilon$ )    |
|                        | 80 | 79.916380       | 0 <sup>+</sup>      | 2.27%                  |                        | 89 | 88.908890       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 78.4 h ( $\epsilon$ )    |
|                        | 81 | 80.916590       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 0.21 My ( $\epsilon$ ) |                        | 90 | 89.904703       | 0 <sup>+</sup>      | 51.5%                    |
|                        | 82 | 81.913482       | 0 <sup>+</sup>      | 11.6%                  |                        | 91 | 90.905644       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 11.2%                    |
|                        | 83 | 82.914135       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 11.5%                  |                        | 92 | 91.905039       | 0 <sup>+</sup>      | 17.1%                    |
|                        | 84 | 83.911507       | 0 <sup>+</sup>      | 57.0%                  |                        | 93 | 92.906474       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 1.5 My ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 85 | 84.912531       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 10.7 y ( $\beta^{-}$ ) |                        | 94 | 93.906315       | 0 <sup>+</sup>      | 17.4%                    |
|                        | 86 | 85.910616       | 0 <sup>+</sup>      | 17.3%                  |                        | 95 | 94.908042       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 64.0 d ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 87 | 86.913360       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 76 m ( $\beta^{-}$ )   |                        | 96 | 95.908275       | 0 <sup>+</sup>      | 2.80%                    |
|                        | 88 | 87.914453       | 0 <sup>+</sup>      | 2.84 h ( $\beta^{-}$ ) |                        | 97 | 96.910950       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 16.9 h ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 89 | 88.917640       | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 3.18 m ( $\beta^{-}$ ) |                        | 98 | 97.912735       | 0 <sup>+</sup>      | 31 s ( $\beta^{-}$ )     |
| Rb 37                  | 82 | 81.918195       | 1 <sup>+</sup>      | 1.25 m ( $\epsilon$ )  | Nb 41                  | 89 | 88.913449       | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 2.0 h ( $\epsilon$ )     |
|                        | 83 | 82.915144       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 86.2 d ( $\epsilon$ )  |                        | 90 | 89.911263       | 8 <sup>+</sup>      | 14.6 h ( $\epsilon$ )    |
|                        | 84 | 83.914390       | 2 <sup>-</sup>      | 32.9 d ( $\epsilon$ )  |                        | 91 | 90.906991       | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 700 y ( $\epsilon$ )     |
|                        | 85 | 84.911794       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 72.17%                 |                        | 92 | 91.907192       | (7 <sup>+</sup> )   | 35 My ( $\epsilon$ )     |
|                        | 86 | 85.911172       | 2 <sup>-</sup>      | 18.8 d ( $\beta^{-}$ ) |                        | 93 | 92.906377       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 100%                     |
|                        | 87 | 86.909187       | $\frac{1}{2}^{-}$   | 27.83%                 |                        | 94 | 93.907281       | 6 <sup>+</sup>      | 0.020 My ( $\beta^{-}$ ) |
|                        | 88 | 87.911326       | 2 <sup>-</sup>      | 17.8 m ( $\beta^{-}$ ) |                        | 95 | 94.906835       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 35.0 d ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 89 | 88.912278       | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 15.2 m ( $\beta^{-}$ ) |                        | 96 | 95.908100       | 6 <sup>+</sup>      | 23.4 h ( $\beta^{-}$ )   |
|                        | 90 | 89.914811       | (1 <sup>-</sup> )   | 153 s ( $\beta^{-}$ )  |                        | 97 | 96.908097       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 72 m ( $\beta^{-}$ )     |
| Sr 38                  | 81 | 80.923270       | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 22 m ( $\epsilon$ )    | Mo 42                  | 90 | 89.913933       | 0 <sup>+</sup>      | 5.67 h ( $\epsilon$ )    |
|                        | 82 | 81.918414       | 0 <sup>+</sup>      | 25.0 d ( $\epsilon$ )  |                        | 91 | 90.911755       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 15.5 m ( $\epsilon$ )    |
|                        | 83 | 82.917566       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 32.4 d ( $\epsilon$ )  |                        | 92 | 91.906808       | 0 <sup>+</sup>      | 14.8%                    |
|                        | 84 | 83.913430       | 0 <sup>+</sup>      | 0.56%                  |                        | 93 | 92.906813       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 3500 y ( $\epsilon$ )    |
|                        | 85 | 84.912937       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 64.8 d ( $\epsilon$ )  |                        | 94 | 93.905085       | 0 <sup>+</sup>      | 9.3%                     |
|                        | 86 | 85.909267       | 0 <sup>+</sup>      | 9.8%                   |                        | 95 | 94.905841       | $\frac{1}{2}^{+}$   | 15.9%                    |



| Abundance or Half-life |     |                 |                 |                          | Abundance or Half-life     |     |                 |                 |                          |                 |                          |
|------------------------|-----|-----------------|-----------------|--------------------------|----------------------------|-----|-----------------|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|
| Z                      | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>  | Abundance or Half-life   | Z                          | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>  | Abundance or Half-life   |                 |                          |
|                        | 96  | 95.904679       | 0 <sup>+</sup>  | 16.7%                    |                            | 108 | 107.903895      | 0 <sup>+</sup>  | 26.7%                    |                 |                          |
|                        | 97  | 96.906021       | $\frac{1}{2}^+$ | 9.6%                     |                            | 109 | 108.905954      | $\frac{1}{2}^+$ | 13.4 h (β <sup>-</sup> ) |                 |                          |
|                        | 98  | 97.905407       | 0 <sup>+</sup>  | 24.1%                    |                            | 110 | 109.905167      | 0 <sup>+</sup>  | 11.8%                    |                 |                          |
|                        | 99  | 98.907711       | $\frac{1}{2}^+$ | 66.0 h (β <sup>-</sup> ) |                            | 111 | 110.907660      | $\frac{1}{2}^+$ | 23 m (β <sup>-</sup> )   |                 |                          |
|                        | 100 | 99.907477       | 0 <sup>+</sup>  | 9.6%                     |                            | 112 | 111.907323      | 0 <sup>+</sup>  | 21.0 h (β <sup>-</sup> ) |                 |                          |
|                        | 101 | 100.910345      | $\frac{1}{2}^+$ | 14.6 m (β <sup>-</sup> ) |                            |     |                 |                 |                          |                 |                          |
| Tc                     | 43  | 94              | 93.909654       | 7 <sup>+</sup>           | 293 m (ε)                  | Ag  | 47              | 103             | 102.908980               | $\frac{1}{2}^+$ | 65.7 m (ε)               |
|                        |     | 95              | 94.907657       | $\frac{3}{2}^+$          | 20.0 h (ε)                 |     |                 | 104             | 103.908623               | 5 <sup>+</sup>  | 69.2 m (ε)               |
|                        |     | 96              | 95.907870       | 7 <sup>+</sup>           | 4.3 d (ε)                  |     |                 | 105             | 104.906520               | 1 <sup>-</sup>  | 41.3 d (ε)               |
|                        |     | 97              | 96.906364       | $\frac{3}{2}^+$          | 2.6 My (ε)                 |     |                 | 106             | 105.906662               | 1 <sup>+</sup>  | 24.0 m (ε)               |
|                        |     | 98              | 97.907215       | (6) <sup>+</sup>         | 4.2 My (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 107             | 106.905092               | 1 <sup>-</sup>  | 51.83%                   |
|                        |     | 99              | 98.906254       | $\frac{3}{2}^+$          | 0.214 My (β <sup>-</sup> ) |     |                 | 108             | 107.905952               | 1 <sup>+</sup>  | 2.4 m (β <sup>-</sup> )  |
|                        |     | 100             | 99.907657       | 1 <sup>-</sup>           | 15.8 s (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 109             | 108.904756               | $\frac{1}{2}^+$ | 48.17%                   |
|                        |     |                 |                 |                          |                            |     |                 | 110             | 109.906111               | 1 <sup>+</sup>  | 24.4 s (β <sup>-</sup> ) |
| Ru                     | 44  | 94              | 93.911361       | 0 <sup>+</sup>           | 52 m (ε)                   |     |                 | 111             | 110.905295               | $\frac{1}{2}^+$ | 7.45 d (β <sup>-</sup> ) |
|                        |     | 95              | 94.910414       | $\frac{1}{2}^+$          | 1.65 h (ε)                 |     |                 | 112             | 111.907010               | 2 <sup>-</sup>  | 3.14 h (β <sup>-</sup> ) |
|                        |     | 96              | 95.907599       | 0 <sup>+</sup>           | 5.5%                       | Cd  | 48              | 104             | 103.909851               | 0 <sup>+</sup>  | 58 m (ε)                 |
|                        |     | 97              | 96.907556       | $\frac{3}{2}^+$          | 2.88 d (ε)                 |     |                 | 105             | 104.909459               | $\frac{3}{2}^+$ | 56.0 m (ε)               |
|                        |     | 98              | 97.905287       | 0 <sup>+</sup>           | 1.86%                      |     |                 | 106             | 105.906461               | 0 <sup>+</sup>  | 1.25%                    |
|                        |     | 99              | 98.905939       | $\frac{1}{2}^+$          | 12.7%                      |     |                 | 107             | 106.906613               | $\frac{1}{2}^+$ | 6.50 h (ε)               |
|                        |     | 100             | 99.904219       | 0 <sup>+</sup>           | 12.6%                      |     |                 | 108             | 107.904176               | 0 <sup>+</sup>  | 0.89%                    |
|                        |     | 101             | 100.905582      | $\frac{1}{2}^+$          | 17.0%                      |     |                 | 109             | 108.904953               | $\frac{1}{2}^+$ | 463 d (ε)                |
|                        |     | 102             | 101.904348      | 0 <sup>+</sup>           | 31.6%                      |     |                 | 110             | 109.903005               | 0 <sup>+</sup>  | 12.5%                    |
|                        |     | 103             | 102.906323      | $\frac{1}{2}^+$          | 39.4 d (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 111             | 110.904182               | 1 <sup>+</sup>  | 12.8%                    |
|                        |     | 104             | 103.905424      | 0 <sup>+</sup>           | 18.7%                      |     |                 | 112             | 111.902757               | 0 <sup>+</sup>  | 24.1%                    |
|                        |     | 105             | 104.907744      | $\frac{1}{2}^+$          | 4.44 h (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 113             | 112.904400               | 1 <sup>+</sup>  | 12.2%                    |
|                        |     | 106             | 105.907321      | 0 <sup>+</sup>           | 372 d (β <sup>-</sup> )    |     |                 | 114             | 113.903357               | 0 <sup>+</sup>  | 28.7%                    |
|                        |     | 107             | 106.910130      | ( $\frac{1}{2}^+$ )      | 3.8 m (β <sup>-</sup> )    |     |                 | 115             | 114.905430               | $\frac{1}{2}^+$ | 53.4 h (β <sup>-</sup> ) |
|                        |     |                 |                 |                          |                            |     |                 | 116             | 115.904755               | 0 <sup>+</sup>  | 7.5%                     |
| Rh                     | 45  | 98              | 97.910716       | (2) <sup>+</sup>         | 8.7 m (ε)                  |     |                 | 117             | 116.907228               | $\frac{1}{2}^+$ | 2.4 h (β <sup>-</sup> )  |
|                        |     | 99              | 98.908192       | ( $\frac{1}{2}^+$ )      | 16.1 d (ε)                 |     |                 | 118             | 117.911700               | 0 <sup>+</sup>  | 50.3 m (β <sup>-</sup> ) |
|                        |     | 100             | 99.908116       | 1 <sup>-</sup>           | 20.8 h (ε)                 |     |                 |                 |                          |                 |                          |
|                        |     | 101             | 100.906159      | $\frac{1}{2}^+$          | 3.3 y (ε)                  | In  | 49              | 110             | 109.907230               | 2 <sup>+</sup>  | 69.1 m (ε)               |
|                        |     | 102             | 101.906814      | 6 <sup>+</sup>           | 2.9 y (ε)                  |     |                 | 111             | 110.905109               | $\frac{3}{2}^+$ | 2.83 d (ε)               |
|                        |     | 103             | 102.905500      | $\frac{1}{2}^+$          | 100%                       |     |                 | 112             | 111.905536               | 1 <sup>+</sup>  | 14.4 m (ε)               |
|                        |     | 104             | 103.906651      | 1 <sup>+</sup>           | 42.3 s (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 113             | 112.904061               | $\frac{3}{2}^+$ | 4.3%                     |
|                        |     | 105             | 104.905686      | $\frac{1}{2}^+$          | 35.4 h (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 114             | 113.904916               | 1 <sup>+</sup>  | 71.9 s (β <sup>-</sup> ) |
|                        |     | 106             | 105.907279      | 1 <sup>+</sup>           | 29.8 s (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 115             | 114.903882               | $\frac{3}{2}^+$ | 95.7%                    |
|                        |     |                 |                 |                          |                            |     |                 | 116             | 115.905264               | 1 <sup>+</sup>  | 14.1 s (β <sup>-</sup> ) |
| Pd                     | 46  | 99              | 98.911763       | ( $\frac{1}{2}^+$ )      | 21.4 m (ε)                 |     |                 | 117             | 116.904517               | $\frac{3}{2}^+$ | 43.8 m (β <sup>-</sup> ) |
|                        |     | 100             | 99.908527       | 0 <sup>+</sup>           | 3.6 d (ε)                  |     |                 |                 |                          |                 |                          |
|                        |     | 101             | 100.908287      | $\frac{1}{2}^+$          | 8.5 h (ε)                  | Sn  | 50              | 109             | 108.911294               | $\frac{1}{2}^+$ | 18.0 m (ε)               |
|                        |     | 102             | 101.905634      | 0 <sup>+</sup>           | 1.0%                       |     |                 | 110             | 109.907858               | 0 <sup>+</sup>  | 4.1 h (ε)                |
|                        |     | 103             | 102.906114      | $\frac{1}{2}^+$          | 17.0 d (ε)                 |     |                 | 111             | 110.907741               | $\frac{1}{2}^+$ | 35 m (ε)                 |
|                        |     | 104             | 103.904029      | 0 <sup>+</sup>           | 11.0%                      |     |                 | 112             | 111.904826               | 0 <sup>+</sup>  | 1.01%                    |
|                        |     | 105             | 104.905079      | $\frac{1}{2}^+$          | 22.2%                      |     |                 | 113             | 112.905176               | $\frac{1}{2}^+$ | 115.1 d (ε)              |
|                        |     | 106             | 105.903478      | 0 <sup>+</sup>           | 27.3%                      |     |                 | 114             | 113.902784               | 0 <sup>+</sup>  | 0.67%                    |
|                        |     | 107             | 106.905127      | $\frac{1}{2}^+$          | 6.5 My (β <sup>-</sup> )   |     |                 | 115             | 114.903348               | $\frac{1}{2}^+$ | 0.38%                    |

| Z     | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>         | Abundance or Half-life   | Z     | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>        | Abundance or Half-life   |
|-------|-----|-----------------|------------------------|--------------------------|-------|-----|-----------------|-----------------------|--------------------------|
|       | 116 | 115.901747      | 0 <sup>+</sup>         | 14.6%                    |       | 129 | 128.904986      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 16 My (β <sup>-</sup> )  |
|       | 117 | 116.902956      | $\frac{1}{2}^{+}$      | 7.75%                    |       | 130 | 129.906713      | 5 <sup>+</sup>        | 12.4 h (β <sup>-</sup> ) |
|       | 118 | 117.901609      | 0 <sup>+</sup>         | 24.3%                    |       | 131 | 130.906114      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 8.04 d (β <sup>-</sup> ) |
|       | 119 | 118.903311      | $\frac{1}{2}^{+}$      | 8.6%                     |       | 132 | 131.907987      | 4 <sup>+</sup>        | 2.30 h (β <sup>-</sup> ) |
|       | 120 | 119.902199      | 0 <sup>+</sup>         | 32.4%                    |       |     |                 |                       |                          |
|       | 121 | 120.904239      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 27.1 h (β <sup>-</sup> ) | Xe 54 | 121 | 120.911450      | ( $\frac{3}{2}^{+}$ ) | 40.1 m (ε)               |
|       | 122 | 121.903440      | 0 <sup>+</sup>         | 4.56%                    |       | 122 | 121.908170      | 0 <sup>+</sup>        | 20.1 h (ε)               |
|       | 123 | 122.905722      | $\frac{11}{2}^{-}$     | 129 d (β <sup>-</sup> )  |       | 123 | 122.908469      | ( $\frac{1}{2}^{+}$ ) | 2.08 h (ε)               |
|       | 124 | 123.905274      | 0 <sup>+</sup>         | 5.64%                    |       | 124 | 123.905894      | 0 <sup>+</sup>        | 0.096%                   |
|       | 125 | 124.907785      | $\frac{11}{2}^{-}$     | 9.62 d (β <sup>-</sup> ) |       | 125 | 124.906397      | ( $\frac{1}{2}^{+}$ ) | 17 h (ε)                 |
|       | 126 | 125.907654      | 0 <sup>+</sup>         | 0.1 My (β <sup>-</sup> ) |       | 126 | 125.904281      | 0 <sup>+</sup>        | 0.090%                   |
|       | 127 | 126.910355      | ( $\frac{11}{2}^{-}$ ) | 2.1 h (β <sup>-</sup> )  |       | 127 | 126.905182      | ( $\frac{1}{2}^{+}$ ) | 36.4 d (ε)               |
|       |     |                 |                        |                          |       | 128 | 127.903531      | 0 <sup>+</sup>        | 1.92%                    |
| Sb 51 | 118 | 117.905534      | 1 <sup>+</sup>         | 3.6 m (ε)                |       | 129 | 128.904780      | $\frac{1}{2}^{+}$     | 26.4%                    |
|       | 119 | 118.903948      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 38.0 h (ε)               |       | 130 | 129.903509      | 0 <sup>+</sup>        | 4.1%                     |
|       | 120 | 119.905077      | 1 <sup>+</sup>         | 15.8 m (ε)               |       | 131 | 130.905072      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 21.2%                    |
|       | 121 | 120.903821      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 57.3%                    |       | 132 | 131.904144      | 0 <sup>+</sup>        | 26.9%                    |
|       | 122 | 121.905179      | 2 <sup>-</sup>         | 2.70 d (β <sup>-</sup> ) |       | 133 | 132.905888      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 5.25 d (β <sup>-</sup> ) |
|       | 123 | 122.904216      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 42.7%                    |       | 134 | 133.905395      | 0 <sup>+</sup>        | 10.4%                    |
|       | 124 | 123.905938      | 3 <sup>-</sup>         | 60.2 d (β <sup>-</sup> ) |       | 135 | 134.907130      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 9.1 h (β <sup>-</sup> )  |
|       | 125 | 124.905252      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 2.7 y (β <sup>-</sup> )  |       | 136 | 135.907214      | 0 <sup>+</sup>        | 8.9%                     |
|       | 126 | 125.907250      | 8 <sup>-</sup>         | 12.4 d (β <sup>-</sup> ) |       | 137 | 136.911557      | $\frac{7}{2}^{-}$     | 3.82 m (β <sup>-</sup> ) |
|       | 127 | 126.906919      | $\frac{7}{2}^{+}$      | 3.85 d (β <sup>-</sup> ) |       |     |                 |                       |                          |
|       |     |                 |                        |                          | Cs 55 | 130 | 129.906753      | 1 <sup>+</sup>        | 29.2 m (ε)               |
| Tc 52 | 117 | 116.908630      | $\frac{1}{2}^{+}$      | 62 m (ε)                 |       | 131 | 130.905444      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 9.69 d (ε)               |
|       | 118 | 117.905908      | 0 <sup>+</sup>         | 6.00 d (ε)               |       | 132 | 131.906431      | 2 <sup>-</sup>        | 6.47 d (ε)               |
|       | 119 | 118.906411      | $\frac{1}{2}^{+}$      | 16.0 h (ε)               |       | 133 | 132.905429      | $\frac{7}{2}^{+}$     | 100%                     |
|       | 120 | 119.904048      | 0 <sup>+</sup>         | 0.091%                   |       | 134 | 133.906696      | 4 <sup>+</sup>        | 2.06 y (β <sup>-</sup> ) |
|       | 121 | 120.904947      | $\frac{1}{2}^{+}$      | 16.8 d (ε)               |       | 135 | 134.905885      | $\frac{7}{2}^{+}$     | 3 My (β <sup>-</sup> )   |
|       | 122 | 121.903050      | 0 <sup>+</sup>         | 2.5%                     |       | 136 | 135.907289      | 5 <sup>+</sup>        | 13.1 d (β <sup>-</sup> ) |
|       | 123 | 122.904271      | $\frac{1}{2}^{+}$      | 0.89%                    |       | 137 | 136.907073      | $\frac{7}{2}^{+}$     | 30.2 y (β <sup>-</sup> ) |
|       | 124 | 123.902818      | 0 <sup>+</sup>         | 4.6%                     |       | 138 | 137.911004      | 3 <sup>-</sup>        | 32.2 m (β <sup>-</sup> ) |
|       | 125 | 124.904429      | $\frac{1}{2}^{+}$      | 7.0%                     |       |     |                 |                       |                          |
|       | 126 | 125.903310      | 0 <sup>+</sup>         | 18.7%                    | Ba 56 | 127 | 126.911130      | ( $\frac{1}{2}^{+}$ ) | 12.7 m (ε)               |
|       | 127 | 126.905221      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 9.4 h (β <sup>-</sup> )  |       | 128 | 127.908237      | 0 <sup>+</sup>        | 2.43 d (ε)               |
|       | 128 | 127.904463      | 0 <sup>+</sup>         | 31.7%                    |       | 129 | 128.908642      | $\frac{1}{2}^{+}$     | 2.2 h (ε)                |
|       | 129 | 128.906594      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 69 m (β <sup>-</sup> )   |       | 130 | 129.906282      | 0 <sup>+</sup>        | 0.106%                   |
|       | 130 | 129.906229      | 0 <sup>+</sup>         | 14.5%                    |       | 131 | 130.906902      | $\frac{1}{2}^{+}$     | 12.0 d (ε)               |
|       | 131 | 130.908528      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 25.0 m (β <sup>-</sup> ) |       | 132 | 131.905042      | 0 <sup>+</sup>        | 0.101%                   |
|       | 132 | 131.908517      | 0 <sup>+</sup>         | 78.2 h (β <sup>-</sup> ) |       | 133 | 132.905988      | $\frac{1}{2}^{+}$     | 10.7 y (ε)               |
|       | 133 | 132.910910      | ( $\frac{3}{2}^{+}$ )  | 12.5 m (β <sup>-</sup> ) |       | 134 | 133.904486      | 0 <sup>+</sup>        | 2.42%                    |
|       |     |                 |                        |                          |       | 135 | 134.905665      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 6.59%                    |
|       |     |                 |                        |                          |       | 136 | 135.904553      | 0 <sup>+</sup>        | 7.85%                    |
| 53    | 123 | 122.905594      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 13.2 h (ε)               |       | 137 | 136.905812      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 11.2%                    |
|       | 124 | 123.906207      | 2 <sup>-</sup>         | 4.18 d (ε)               |       | 138 | 137.905232      | 0 <sup>+</sup>        | 71.7%                    |
|       | 125 | 124.904620      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 60.2 d (ε)               |       | 139 | 138.908826      | $\frac{7}{2}^{-}$     | 82.9 m (β <sup>-</sup> ) |
|       | 126 | 125.905624      | 2 <sup>-</sup>         | 13.0 d (ε)               |       | 140 | 139.910581      | 0 <sup>+</sup>        | 12.7 d (β <sup>-</sup> ) |
|       | 127 | 126.904473      | $\frac{3}{2}^{+}$      | 100%                     |       | 141 | 140.914363      | $\frac{3}{2}^{-}$     | 18.3 m (β <sup>-</sup> ) |
|       | 128 | 127.905810      | 1 <sup>+</sup>         | 25.0 m (β <sup>-</sup> ) |       |     |                 |                       |                          |



|       | Z  | A   | Atomic mass (u) | Abundance or Half-life                 |       | Z  | A   | Atomic mass (u) | Abundance or Half-life                |
|-------|----|-----|-----------------|----------------------------------------|-------|----|-----|-----------------|---------------------------------------|
| La 57 | 57 | 135 | 134.906953      | $\frac{1}{2}^+$ 19.5 h ( $\epsilon$ )  | Sm 62 | 62 | 142 | 141.915206      | $0^+$ 72.5 m ( $\epsilon$ )           |
|       |    | 136 | 135.907630      | $1^+$ 9.87 m ( $\epsilon$ )            |       |    | 143 | 142.914626      | $\frac{1}{2}^+$ 8.83 m ( $\epsilon$ ) |
|       |    | 137 | 136.906460      | $\frac{1}{2}^+$ 0.06 My ( $\epsilon$ ) |       |    | 144 | 143.911998      | $0^+$ 3.1 y                           |
|       |    | 138 | 137.907105      | $5^+$ 0.089%                           |       |    | 145 | 144.913409      | $\frac{1}{2}^-$ 340 d ( $\epsilon$ )  |
|       |    | 139 | 138.906347      | $\frac{1}{2}^+$ 99.911%                |       |    | 146 | 145.913053      | $0^+$ 103 My ( $\alpha$ )             |
|       |    | 140 | 139.909471      | $3^-$ 40.3 h ( $\beta^-$ )             |       |    | 147 | 146.914894      | $\frac{1}{2}^-$ 15.1%                 |
|       |    | 141 | 140.910896      | $\frac{1}{2}^+$ 3.90 h ( $\beta^-$ )   |       |    | 148 | 147.914819      | $0^+$ 11.3%                           |
| Ce 58 | 58 | 142 | 141.914090      | $2^-$ 91.1 m ( $\beta^-$ )             |       |    | 149 | 148.917180      | $\frac{1}{2}^-$ 13.9%                 |
|       |    | 133 | 132.911360      | $\frac{1}{2}^+$ 5.4 h ( $\epsilon$ )   | Eu 63 | 63 | 150 | 149.917273      | $0^+$ 7.4%                            |
|       |    | 134 | 133.908890      | $0^+$ 76 h ( $\epsilon$ )              |       |    | 151 | 150.919929      | $\frac{1}{2}^-$ 90 y ( $\beta^-$ )    |
|       |    | 135 | 134.909117      | $\frac{1}{2}^+$ 17.6 h ( $\epsilon$ )  |       |    | 152 | 151.919728      | $0^+$ 26.6%                           |
|       |    | 136 | 135.907140      | $0^+$ 0.190%                           |       |    | 153 | 152.922094      | $\frac{1}{2}^+$ 46.8 h ( $\beta^-$ )  |
|       |    | 137 | 136.907780      | $\frac{1}{2}^+$ 9.0 h ( $\epsilon$ )   |       |    | 154 | 153.922205      | $0^+$ 22.6%                           |
|       |    | 138 | 137.905985      | $0^+$ 0.254%                           |       |    | 155 | 154.924636      | $\frac{1}{2}^-$ 22.4 m ( $\beta^-$ )  |
|       |    | 139 | 138.906631      | $\frac{1}{2}^+$ 137.2 d ( $\epsilon$ ) |       |    | 148 | 147.918125      | $5^-$ 54.5 d ( $\epsilon$ )           |
|       |    | 140 | 139.905433      | $0^+$ 88.5%                            |       |    | 149 | 148.917926      | $\frac{1}{2}^+$ 93.1 d ( $\epsilon$ ) |
|       |    | 141 | 140.908271      | $\frac{1}{2}^-$ 32.5 d ( $\beta^-$ )   |       |    | 150 | 149.919702      | $0^-$ 36 y ( $\epsilon$ )             |
|       |    | 142 | 141.909241      | $0^+$ 11.1%                            |       |    | 151 | 150.919847      | $\frac{1}{2}^+$ 47.9%                 |
|       |    | 143 | 142.912383      | $\frac{1}{2}^-$ 33.0 h ( $\beta^-$ )   |       |    | 152 | 151.921742      | $3^-$ 13 y ( $\epsilon$ )             |
| Pr 59 | 59 | 144 | 143.913643      | $0^+$ 284 d ( $\beta^-$ )              |       |    | 153 | 152.921225      | $\frac{1}{2}^+$ 52.1%                 |
|       |    | 145 | 144.917230      | $\frac{1}{2}^+$ 2.98 m ( $\beta^-$ )   |       |    | 154 | 153.922975      | $3^-$ 8.5 y ( $\beta^-$ )             |
|       |    | 138 | 137.910748      | $1^+$ 1.45 m ( $\epsilon$ )            |       |    | 155 | 154.922889      | $\frac{1}{2}^+$ 4.9 y ( $\beta^-$ )   |
|       |    | 139 | 138.908917      | $\frac{1}{2}^+$ 4.4 h ( $\epsilon$ )   |       |    | 156 | 155.924752      | $0^+$ 15 d ( $\beta^-$ )              |
|       |    | 140 | 139.909071      | $1^+$ 3.39 m ( $\epsilon$ )            |       |    | 157 | 156.925418      | $\frac{1}{2}^+$ 15 h ( $\beta^-$ )    |
|       |    | 141 | 140.907647      | $\frac{1}{2}^+$ 100%                   | Gd 64 | 64 | 149 | 148.919344      | $\frac{1}{2}^-$ 9.4 d ( $\epsilon$ )  |
|       |    | 142 | 141.910039      | $2^-$ 19.2 h ( $\beta^-$ )             |       |    | 150 | 149.918662      | $0^+$ 1.8 My ( $\alpha$ )             |
| Nd 60 | 60 | 143 | 142.910814      | $\frac{1}{2}^+$ 13.6 d ( $\beta^-$ )   |       |    | 151 | 150.920346      | $\frac{1}{2}^-$ 120 d ( $\epsilon$ )  |
|       |    | 144 | 143.913301      | $0^-$ 17.3 m ( $\beta^-$ )             |       |    | 152 | 151.919786      | $0^+$ 0.20%                           |
|       |    | 139 | 138.911920      | $\frac{1}{2}^+$ 29.7 m ( $\epsilon$ )  |       |    | 153 | 152.921745      | $\frac{1}{2}^-$ 242 d ( $\epsilon$ )  |
|       |    | 140 | 139.909306      | $0^+$ 3.37 d ( $\epsilon$ )            |       |    | 154 | 153.920861      | $0^+$ 2.1%                            |
|       |    | 141 | 140.909594      | $\frac{1}{2}^+$ 2.5 h ( $\epsilon$ )   |       |    | 155 | 154.922618      | $\frac{1}{2}^-$ 14.8%                 |
|       |    | 142 | 141.907719      | $0^+$ 27.2%                            |       |    | 156 | 155.922118      | $0^+$ 20.6%                           |
|       |    | 143 | 142.909810      | $\frac{1}{2}^-$ 12.2%                  |       |    | 157 | 156.923956      | $\frac{1}{2}^-$ 15.7%                 |
|       |    | 144 | 143.910083      | $0^+$ 23.8%                            |       |    | 158 | 157.924099      | $0^+$ 24.8%                           |
|       |    | 145 | 144.912570      | $\frac{1}{2}^-$ 8.3%                   |       |    | 159 | 158.926384      | $\frac{1}{2}^-$ 18.6 h ( $\beta^-$ )  |
|       |    | 146 | 145.913113      | $0^+$ 17.2%                            |       |    | 160 | 159.927049      | $0^+$ 21.8%                           |
|       |    | 147 | 146.916097      | $\frac{1}{2}^-$ 11.0 d ( $\beta^-$ )   | Tb 65 | 65 | 161 | 160.929664      | $\frac{1}{2}^-$ 3.7 m ( $\beta^-$ )   |
| Pm 61 | 61 | 148 | 147.916889      | $0^+$ 5.7%                             |       |    | 156 | 155.924742      | $3^-$ 5.34 d ( $\epsilon$ )           |
|       |    | 149 | 148.920145      | $\frac{1}{2}^-$ 1.73 h ( $\beta^-$ )   |       |    | 157 | 156.924023      | $\frac{1}{2}^+$ 150 y ( $\epsilon$ )  |
|       |    | 150 | 149.920887      | $0^+$ 5.6%                             |       |    |     |                 |                                       |
|       |    | 151 | 150.923825      | $(\frac{1}{2}^+)$ 12.4 m ( $\beta^-$ ) |       |    |     |                 |                                       |
|       |    | 152 | 151.924680      | $0^+$ 11.4 m ( $\beta^-$ )             |       |    |     |                 |                                       |
|       |    | 142 | 141.912970      | $1^+$ 40.5 s ( $\epsilon$ )            |       |    |     |                 |                                       |
|       |    | 143 | 142.910930      | $\frac{1}{2}^+$ 265 d ( $\epsilon$ )   |       |    |     |                 |                                       |
|       |    | 144 | 143.912588      | $5^-$ 349 d ( $\epsilon$ )             |       |    |     |                 |                                       |



| Abundance or Half-life |     |                 |                   |                           | Abundance or Half-life |     |                 |                   |                          |
|------------------------|-----|-----------------|-------------------|---------------------------|------------------------|-----|-----------------|-------------------|--------------------------|
| Z                      | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>    | Abundance or Half-life    | Z                      | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>    | Abundance or Half-life   |
| Dy 66                  | 158 | 157.925411      | 3 <sup>-</sup>    | 150 y (ε)                 | Yb 70                  | 166 | 165.933875      | 0 <sup>+</sup>    | 56.7 h (ε)               |
|                        | 159 | 158.925342      | 3 <sup>+</sup>    | 100 %                     |                        | 167 | 166.934946      | 1 <sup>-</sup>    | 17.5 m (ε)               |
|                        | 160 | 159.927163      | 3 <sup>-</sup>    | 72.1 d (β <sup>-</sup> )  |                        | 168 | 167.933894      | 0 <sup>+</sup>    | 0.135%                   |
|                        | 161 | 160.927566      | 3 <sup>+</sup>    | 6.90 d (β <sup>-</sup> )  |                        | 169 | 168.935186      | 2 <sup>+</sup>    | 32.0 d (ε)               |
|                        | 162 | 161.929510      | 1 <sup>-</sup>    | 7.76 m (β <sup>-</sup> )  |                        | 170 | 169.934759      | 0 <sup>+</sup>    | 3.1%                     |
|                        | 153 | 152.925769      | 2 <sup>-</sup>    | 6.4 h (ε)                 |                        | 171 | 170.936323      | 1 <sup>-</sup>    | 14.4%                    |
|                        | 154 | 153.924429      | 0 <sup>+</sup>    | 3 My (α)                  |                        | 172 | 171.936378      | 0 <sup>+</sup>    | 21.9%                    |
|                        | 155 | 154.925747      | 2 <sup>-</sup>    | 10.0 h (ε)                |                        | 173 | 172.938208      | 2 <sup>-</sup>    | 16.2%                    |
|                        | 156 | 155.924277      | 0 <sup>+</sup>    | 0.057%                    |                        | 174 | 173.938859      | 0 <sup>+</sup>    | 31.6%                    |
|                        | 157 | 156.925460      | 3 <sup>-</sup>    | 8.1 h (ε)                 |                        | 175 | 174.941273      | 3 <sup>-</sup>    | 4.19 d (β <sup>-</sup> ) |
| Ho 67                  | 158 | 157.924403      | 0 <sup>+</sup>    | 0.100%                    | Lu 71                  | 176 | 175.942564      | 0 <sup>+</sup>    | 12.6%                    |
|                        | 159 | 158.925735      | 2 <sup>-</sup>    | 144.4 d (ε)               |                        | 177 | 176.945253      | 3 <sup>+</sup>    | 1.9 h (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 160 | 159.925193      | 0 <sup>+</sup>    | 2.3%                      |                        | 178 | 177.946639      | 0 <sup>+</sup>    | 74 m (β <sup>-</sup> )   |
|                        | 161 | 160.926930      | 3 <sup>+</sup>    | 19.90%                    |                        | 172 | 171.939085      | (4 <sup>-</sup> ) | 6.70 d (ε)               |
|                        | 162 | 161.926795      | 0 <sup>+</sup>    | 25.5%                     |                        | 173 | 172.938929      | 3 <sup>+</sup>    | 1.37 y (ε)               |
|                        | 163 | 162.928728      | 1 <sup>-</sup>    | 24.9%                     |                        | 174 | 173.940336      | 1 <sup>-</sup>    | 3.3 y (ε)                |
|                        | 164 | 163.929171      | 0 <sup>+</sup>    | 28.1%                     |                        | 175 | 174.940770      | 2 <sup>+</sup>    | 97.39%                   |
|                        | 165 | 164.931700      | 2 <sup>+</sup>    | 2.33 h (β <sup>-</sup> )  |                        | 176 | 175.942679      | 7 <sup>-</sup>    | 2.61%                    |
|                        | 166 | 165.932803      | 0 <sup>+</sup>    | 81.6 h (β <sup>-</sup> )  |                        | 177 | 176.943752      | 2 <sup>+</sup>    | 6.71 d (β <sup>-</sup> ) |
|                        | 162 | 161.929092      | 1 <sup>+</sup>    | 15 m (ε)                  |                        | 178 | 177.945963      | 1 <sup>+</sup>    | 28.4 m (β <sup>-</sup> ) |
| Er 68                  | 163 | 162.928731      | (3 <sup>-</sup> ) | 33 y (ε)                  | Hf 72                  | 171 | 170.940490      | (3 <sup>+</sup> ) | 12.1 h (ε)               |
|                        | 164 | 163.930285      | 1 <sup>+</sup>    | 29.0 m (ε)                |                        | 172 | 171.939460      | 0 <sup>+</sup>    | 1.87 y (ε)               |
|                        | 165 | 164.930319      | 2 <sup>-</sup>    | 100 %                     |                        | 173 | 172.940650      | 1 <sup>-</sup>    | 24.0 h (ε)               |
|                        | 166 | 165.932281      | 0 <sup>-</sup>    | 26.8 h (β <sup>-</sup> )  |                        | 174 | 173.940044      | 0 <sup>+</sup>    | 0.16%                    |
|                        | 167 | 166.933127      | (2 <sup>-</sup> ) | 3.1 h (β <sup>-</sup> )   |                        | 175 | 174.941507      | 2 <sup>-</sup>    | 70 d (ε)                 |
|                        | 160 | 159.929080      | 0 <sup>+</sup>    | 28.6 h (ε)                |                        | 176 | 175.941406      | 0 <sup>+</sup>    | 5.2%                     |
|                        | 161 | 160.929996      | 3 <sup>-</sup>    | 3.24 h (ε)                |                        | 177 | 176.943217      | 2 <sup>-</sup>    | 18.6%                    |
|                        | 162 | 161.928775      | 0 <sup>+</sup>    | 0.14%                     |                        | 178 | 177.943696      | 0 <sup>+</sup>    | 27.1%                    |
|                        | 163 | 162.930030      | 1 <sup>-</sup>    | 75.1 m (ε)                |                        | 179 | 178.945812      | 3 <sup>+</sup>    | 13.7%                    |
|                        | 164 | 163.929198      | 0 <sup>+</sup>    | 1.56%                     |                        | 180 | 179.946546      | 0 <sup>+</sup>    | 35.2%                    |
| Tm 69                  | 165 | 164.930723      | 2 <sup>-</sup>    | 10.4 h (ε)                | Ta 73                  | 181 | 180.949096      | 1 <sup>-</sup>    | 42.4 d (β <sup>-</sup> ) |
|                        | 166 | 165.930290      | 0 <sup>+</sup>    | 33.4%                     |                        | 182 | 181.950550      | 0 <sup>+</sup>    | 9 My (β <sup>-</sup> )   |
|                        | 167 | 166.932046      | 2 <sup>+</sup>    | 22.9%                     |                        | 183 | 182.953530      | (2 <sup>-</sup> ) | 64 m (β <sup>-</sup> )   |
|                        | 168 | 167.932368      | 0 <sup>+</sup>    | 27.1%                     |                        | 178 | 177.945750      | 1 <sup>+</sup>    | 9.31 m (ε)               |
|                        | 169 | 168.934588      | 1 <sup>-</sup>    | 9.40 d (β <sup>-</sup> )  |                        | 179 | 178.945930      | (2 <sup>+</sup> ) | 665 d (ε)                |
|                        | 170 | 169.935461      | 0 <sup>+</sup>    | 14.9%                     |                        | 180 | 179.947462      | 1 <sup>+</sup>    | 0.0123%                  |
|                        | 171 | 170.938027      | 2 <sup>-</sup>    | 7.52 h (β <sup>-</sup> )  |                        | 181 | 180.947992      | 2 <sup>+</sup>    | 99.9877%                 |
|                        | 172 | 171.939353      | 0 <sup>+</sup>    | 49.3 h (β <sup>-</sup> )  |                        | 182 | 181.950149      | 3 <sup>-</sup>    | 115 d (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 166 | 165.933561      | 2 <sup>+</sup>    | 7.70 h (ε)                |                        | 183 | 182.951369      | 2 <sup>+</sup>    | 5.1 d (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 167 | 166.932848      | 1 <sup>-</sup>    | 9.25 d (ε)                | W 74                   | 178 | 177.945840      | 0 <sup>+</sup>    | 21.5 d (ε)               |
| Tm 69                  | 168 | 167.934170      | 3 <sup>+</sup>    | 93.1 d (ε)                |                        | 179 | 178.947067      | (3 <sup>-</sup> ) | 38 m (ε)                 |
|                        | 169 | 168.934212      | 1 <sup>+</sup>    | 100 %                     |                        | 180 | 179.946701      | 0 <sup>+</sup>    | 0.13%                    |
|                        | 170 | 169.935798      | 1 <sup>-</sup>    | 128.6 d (β <sup>-</sup> ) |                        | 181 | 180.948192      | 2 <sup>+</sup>    | 121. d (ε)               |
|                        | 171 | 170.936427      | 1 <sup>+</sup>    | 1.92 y (β <sup>-</sup> )  |                        | 182 | 181.948202      | 0 <sup>+</sup>    | 26.3%                    |
|                        | 172 | 171.938397      | 2 <sup>-</sup>    | 63.6 h (β <sup>-</sup> )  |                        | 183 | 182.950220      | 1 <sup>-</sup>    | 14.3%                    |

| Abundance or Half-life |     |                 |                     |                          | Abundance or Half-life |     |                 |                     |                           |
|------------------------|-----|-----------------|---------------------|--------------------------|------------------------|-----|-----------------|---------------------|---------------------------|
| Z                      | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>      | Abundance or Half-life   | Z                      | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>      | Abundance or Half-life    |
|                        | 184 | 183.950928      | 0 <sup>+</sup>      | 30.7%                    |                        | 198 | 197.967869      | 0 <sup>+</sup>      | 7.2%                      |
|                        | 185 | 184.953416      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 75.1% (α <sup>-</sup> )  |                        | 199 | 198.970552      | $(\frac{1}{2}^{-})$ | 30.8 m (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 186 | 185.954357      | 0 <sup>+</sup>      | 28.6%                    |                        | 200 | 199.971417      | 0 <sup>+</sup>      | 12.5 h (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 187 | 186.957153      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 23.9 h (β <sup>-</sup> ) | Au 79                  | 194 | 193.965348      | 1 <sup>-</sup>      | 39.5 h (ε)                |
|                        | 188 | 187.958480      | 0 <sup>+</sup>      | 69.4 d (β <sup>-</sup> ) |                        | 195 | 194.965013      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 186 d (ε)                 |
| Re 75                  | 182 | 181.951210      | 2 <sup>+</sup>      | 12.7 h (ε)               |                        | 196 | 195.966544      | 2 <sup>-</sup>      | 6.18 d (ε)                |
|                        | 183 | 182.950817      | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 71 d (ε)                 |                        | 197 | 196.966543      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 100%                      |
|                        | 184 | 183.952530      | 1 <sup>-</sup>      | 38 d (ε)                 |                        | 198 | 197.968217      | 2 <sup>-</sup>      | 2.696 d (β <sup>-</sup> ) |
|                        | 185 | 184.952951      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 37.40%                   | Hg 80                  | 199 | 198.968740      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 3.14 d (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 186 | 185.954984      | 1 <sup>-</sup>      | 90.6 h (β <sup>-</sup> ) |                        | 200 | 199.970670      | 1 <sup>-</sup>      | 48.4 m (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 187 | 186.955744      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 62.60%                   |                        | 193 | 192.966560      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 3.8 h (ε)                 |
|                        | 188 | 187.958106      | 1 <sup>-</sup>      | 16.9 h (β <sup>-</sup> ) |                        | 194 | 193.965391      | 0 <sup>+</sup>      | 520 y (ε)                 |
|                        | 189 | 188.959219      | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 24.3 h (β <sup>-</sup> ) |                        | 195 | 194.966640      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 9.5 h (ε)                 |
| Os 76                  | 182 | 181.952120      | 0                   | 21.5 h (ε)               |                        | 196 | 195.965807      | 0 <sup>+</sup>      | 0.15%                     |
|                        | 183 | 182.953290      | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 13.0 h (ε)               |                        | 197 | 196.967187      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 64.1 h (ε)                |
|                        | 184 | 183.952488      | 0 <sup>+</sup>      | 0.018%                   |                        | 198 | 197.966743      | 0 <sup>+</sup>      | 10.0%                     |
|                        | 185 | 184.954041      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 93.6 d (ε)               |                        | 199 | 198.968254      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 16.8%                     |
|                        | 186 | 185.953830      | 0 <sup>+</sup>      | 1.6%                     |                        | 200 | 199.968300      | 0 <sup>+</sup>      | 23.1%                     |
|                        | 187 | 186.955741      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 1.6%                     |                        | 201 | 200.970277      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 13.2%                     |
|                        | 188 | 187.955830      | 0 <sup>+</sup>      | 13.3%                    |                        | 202 | 201.970617      | 0 <sup>+</sup>      | 29.8%                     |
|                        | 189 | 188.958137      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 16.1%                    |                        | 203 | 202.972848      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 46.6 d (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 190 | 189.958436      | 0 <sup>+</sup>      | 26.4%                    |                        | 204 | 203.973467      | 0 <sup>+</sup>      | 6.9%                      |
|                        | 191 | 190.960920      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 15.4 d (β <sup>-</sup> ) | Tl 81                  | 205 | 204.976047      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 5.2 m (β <sup>-</sup> )   |
| Ir 77                  | 192 | 191.961467      | 0 <sup>+</sup>      | 41.0%                    |                        | 200 | 199.970934      | 2 <sup>-</sup>      | 26.1 h (ε)                |
|                        | 193 | 192.964138      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 30.6 h (β <sup>-</sup> ) |                        | 201 | 200.970794      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 73 h (ε)                  |
|                        | 194 | 193.965173      | 0 <sup>+</sup>      | 6.0 y (β <sup>-</sup> )  |                        | 202 | 201.972085      | 2 <sup>-</sup>      | 12.2 d (ε)                |
|                        | 188 | 187.958830      | (2 <sup>-</sup> )   | 41.5 h (ε)               |                        | 203 | 202.972320      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 29.5%                     |
|                        | 189 | 188.958712      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 13.1 d (ε)               |                        | 204 | 203.973839      | 2 <sup>-</sup>      | 3.77 y (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 190 | 189.960580      | (4 <sup>+</sup> )   | 11.8 d (ε)               |                        | 205 | 204.974401      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 70.5%                     |
|                        | 191 | 190.960584      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 37.3%                    |                        | 206 | 205.976084      | 0 <sup>-</sup>      | 4.20 m (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 192 | 191.962580      | 4 <sup>-</sup>      | 74.2 d (β <sup>-</sup> ) | Pb 82                  | 201 | 200.972830      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 9.3 h (ε)                 |
|                        | 193 | 192.962917      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 62.7%                    |                        | 202 | 201.972134      | 0 <sup>+</sup>      | 0.05 My (ε)               |
|                        | 194 | 193.965069      | 1 <sup>-</sup>      | 19.2 h (β <sup>-</sup> ) |                        | 203 | 202.973365      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 51.9 h (ε)                |
|                        | 195 | 194.965966      | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 2.8 h (β <sup>-</sup> )  |                        | 204 | 203.973020      | 0 <sup>+</sup>      | 1.42%                     |
| Pt 78                  | 187 | 186.960470      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 2.35 h (ε)               |                        | 205 | 204.974458      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 15 My (ε)                 |
|                        | 188 | 187.959386      | 0 <sup>+</sup>      | 10.2 d (ε)               |                        | 206 | 205.974440      | 0 <sup>+</sup>      | 24.1%                     |
|                        | 189 | 188.960817      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 10.9 h (ε)               |                        | 207 | 206.975872      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 22.1%                     |
|                        | 190 | 189.959917      | 0 <sup>+</sup>      | 0.013%                   |                        | 208 | 207.976627      | 0 <sup>+</sup>      | 52.3%                     |
|                        | 191 | 190.961665      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 2.9 d (ε)                |                        | 209 | 208.981065      | $\frac{1}{2}^{+}$   | 3.25 h (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 192 | 191.961019      | 0 <sup>+</sup>      | 0.78%                    |                        | 210 | 209.984163      | 0 <sup>+</sup>      | 22.3 y (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 193 | 192.962977      | $(\frac{1}{2})^{-}$ | 50 y (ε)                 |                        | 211 | 210.988735      | $(\frac{1}{2})^{+}$ | 36.1 m (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 194 | 193.962655      | 0 <sup>+</sup>      | 32.9%                    |                        | 212 | 211.991871      | 0 <sup>+</sup>      | 10.6 h (β <sup>-</sup> )  |
|                        | 195 | 194.964766      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 33.8%                    | Bi 83                  | 206 | 205.978478      | 6 <sup>+</sup>      | 6.24 d (ε)                |
|                        | 196 | 195.964926      | 0 <sup>+</sup>      | 25.3%                    |                        | 207 | 206.978446      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 32 y (ε)                  |
|                        | 197 | 196.967315      | $\frac{1}{2}^{-}$   | 18.3 h (β <sup>-</sup> ) |                        |     |                 |                     |                           |



| Z     | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>        | Abundance or Half-life    | Z     | A   | Atomic mass (u) | I <sup>π</sup>                     | Abundance or Half-life    |
|-------|-----|-----------------|-----------------------|---------------------------|-------|-----|-----------------|------------------------------------|---------------------------|
|       | 208 | 207.979717      | (5 <sup>+</sup> )     | 0.368 My (ε)              |       | 232 | 232.038051      | 0 <sup>+</sup>                     | 100 %                     |
|       | 209 | 208.980374      | $\frac{5}{2}^{-}$     | 100 %                     |       | 233 | 233.041577      | ( $\frac{1}{2}^{+}$ )              | 22.3 m (β <sup>-</sup> )  |
|       | 210 | 209.984095      | 1 <sup>-</sup>        | 5.01 d (β <sup>-</sup> )  |       |     |                 |                                    |                           |
|       | 211 | 210.987255      | $\frac{5}{2}^{-}$     | 2.15 m (α)                | Pa 91 | 229 | 229.032073      | ( $\frac{5}{2}^{+}$ )              | 1.4 d (ε)                 |
|       | 212 | 211.991255      | 1 <sup>-</sup>        | 60.6 m (β <sup>-</sup> )  |       | 230 | 230.034527      | (2 <sup>-</sup> )                  | 17.7 d (ε)                |
| Po 84 | 206 | 205.980456      | 0 <sup>+</sup>        | 8.8 d (ε)                 |       | 231 | 231.035880      | $\frac{1}{2}^{-}$                  | 32,800 y (α)              |
|       | 207 | 206.981570      | $\frac{1}{2}^{-}$     | 5.8 h (ε)                 |       | 232 | 232.038565      | (2 <sup>-</sup> )                  | 1.31 d (β <sup>-</sup> )  |
|       | 208 | 207.981222      | 0 <sup>+</sup>        | 2.90 y (α)                |       | 233 | 233.040243      | $\frac{1}{2}^{-}$                  | 27.0 d (β <sup>-</sup> )  |
|       | 209 | 208.982404      | $\frac{1}{2}^{-}$     | 102 y (α)                 |       |     |                 |                                    |                           |
|       | 210 | 209.982848      | 0 <sup>+</sup>        | 138.4 d (α)               | U 92  | 233 | 233.039628      | $\frac{1}{2}^{+}$                  | 0.1592 My (α)             |
|       | 211 | 210.986627      | $\frac{3}{2}^{+}$     | 0.52 s (α)                |       | 234 | 234.040947      | 0 <sup>+</sup>                     | 0.245 My (α)              |
| At 85 | 208 | 207.986510      | 6 <sup>+</sup>        | 1.63 h (ε)                |       | 235 | 235.043924      | $\frac{7}{2}^{-}$                  | 0.720 %                   |
|       | 209 | 208.986149      | $\frac{5}{2}^{-}$     | 5.4 h (ε)                 |       | 236 | 236.045563      | 0 <sup>+</sup>                     | 23.42 My (α)              |
|       | 210 | 209.987126      | 5 <sup>+</sup>        | 8.3 h (ε)                 |       | 237 | 237.048725      | $\frac{1}{2}^{+}$                  | 6.75 d (β <sup>-</sup> )  |
|       | 211 | 210.987469      | $\frac{3}{2}^{-}$     | 7.21 h (ε)                |       | 238 | 238.050785      | 0 <sup>+</sup>                     | 99.275 %                  |
|       | 212 | 211.990725      | (1 <sup>-</sup> )     | 0.31 s (α)                |       | 239 | 239.054290      | $\frac{5}{2}^{+}$                  | 23.5 m (β <sup>-</sup> )  |
|       | 213 | 212.992911      | $\frac{3}{2}^{-}$     | 0.11 μs (α)               | Np 93 | 236 | 236.046550      | (6 <sup>-</sup> )                  | 0.11 My (ε)               |
| Rn 86 | 207 | 206.990690      | $\frac{5}{2}^{-}$     | 9.3 m (ε)                 |       | 237 | 237.048168      | $\frac{5}{2}^{+}$                  | 2.14 My (α)               |
|       | 210 | 209.989669      | 0 <sup>+</sup>        | 2.4 h (α)                 |       | 238 | 238.050941      | 2 <sup>+</sup>                     | 2.117 d (β <sup>-</sup> ) |
|       | 211 | 210.990576      | $\frac{1}{2}^{-}$     | 14.6 h (ε)                |       | 239 | 239.052933      | $\frac{5}{2}^{+}$                  | 2.36 d (β <sup>-</sup> )  |
|       | 212 | 211.990697      | 0 <sup>+</sup>        | 24 m (α)                  |       |     |                 |                                    |                           |
|       | 218 | 218.005580      | 0 <sup>+</sup>        | 35 ms (α)                 | Pu 94 | 237 | 237.048401      | $\frac{1}{2}^{-}$                  | 45.3 d (ε)                |
|       | 222 | 222.017571      | 0 <sup>+</sup>        | 3.82 d (α)                |       | 238 | 238.049555      | 0 <sup>+</sup>                     | 87.74 y (α)               |
|       | 224 |                 | 0 <sup>+</sup>        | 107 m (β <sup>-</sup> )   |       | 239 | 239.052158      | $\frac{1}{2}^{+}$                  | 24,100 y (α)              |
| Fr 87 | 209 | 208.995870      | $\frac{3}{2}^{-}$     | 50 s (α)                  |       | 240 | 240.053808      | 0 <sup>+</sup>                     | 6570 y (α)                |
|       | 212 | 211.996130      | 5 <sup>+</sup>        | 20 m (ε)                  |       | 241 | 241.056846      | $\frac{5}{2}^{+}$                  | 14.4 y (β <sup>-</sup> )  |
|       | 215 | 215.000310      | $\frac{3}{2}^{-}$     | 0.12 μs (α)               |       | 242 | 242.058737      | 0 <sup>+</sup>                     | 0.376 My (α)              |
|       | 220 | 220.012293      | 1                     | 27.4 s (α)                |       | 243 | 243.061998      | $\frac{7}{2}^{+}$                  | 4.96 h (β <sup>-</sup> )  |
|       | 223 | 223.019733      | ( $\frac{1}{2}^{+}$ ) | 21.8 m (β <sup>-</sup> )  | Am 95 | 240 | 240.055278      | (3 <sup>-</sup> )                  | 50.9 h (ε)                |
| Ra 88 | 222 | 222.015353      | 0 <sup>+</sup>        | 38 s (α)                  |       | 241 | 241.056824      | $\frac{5}{2}^{-}$                  | 433 y (α)                 |
|       | 223 | 223.018501      | $\frac{1}{2}^{+}$     | 11.4 d (α)                |       | 242 | 242.059542      | 1 <sup>-</sup>                     | 16.0 h (β <sup>-</sup> )  |
|       | 224 | 224.020186      | 0 <sup>+</sup>        | 3.66 d (α)                |       | 243 | 243.061375      | $\frac{1}{2}^{-}$                  | 7370 y (α)                |
|       | 225 | 225.023604      | ( $\frac{3}{2}^{+}$ ) | 14.8 d (β <sup>-</sup> )  |       | 244 | 244.064279      | (6 <sup>-</sup> )                  | 10.1 h (β <sup>-</sup> )  |
|       | 226 | 226.025403      | 0 <sup>+</sup>        | 1602 y (α)                | Cm 96 | 246 | 246.067218      | 0 <sup>+</sup>                     | 4700 y (α)                |
|       | 227 | 227.029171      | ( $\frac{1}{2}^{+}$ ) | 42 m (β <sup>-</sup> )    |       | 247 | 247.070347      | $\frac{5}{2}^{-}$                  | 16 My (α)                 |
| Ac 89 | 224 | 224.021685      | (0 <sup>-</sup> )     | 2.9 h (ε)                 |       | 248 | 248.072343      | 0 <sup>+</sup>                     | 0.34 My (α)               |
|       | 225 | 225.023205      | ( $\frac{3}{2}^{-}$ ) | 10.0 d (α)                |       | 249 | 249.075948      | $\frac{1}{2}^{+}$                  | 64 m (β <sup>-</sup> )    |
|       | 226 | 226.026084      | (1 <sup>-</sup> )     | 29 h (β <sup>-</sup> )    | Bk 97 | 246 | 246.068720      | 2 <sup>-</sup>                     | 1.8 d (ε)                 |
|       | 227 | 227.027750      | $\frac{1}{2}^{-}$     | 21.77 y (β <sup>-</sup> ) |       | 247 | 247.070300      | ( $\frac{3}{2}^{-}$ )              | 1380 y (α)                |
|       | 228 | 228.031015      | (3 <sup>+</sup> )     | 6.1 h (β <sup>-</sup> )   |       |     |                 |                                    |                           |
| Th 90 | 228 | 228.028715      | 0 <sup>+</sup>        | 1.91 y (α)                | Cf 98 | 251 | 251.079580      | $\frac{1}{2}^{+}$                  | 898 y (α)                 |
|       | 229 | 229.031755      | $\frac{1}{2}^{+}$     | 7300 y (α)                |       | 252 | 252.081621      | 0 <sup>+</sup>                     | 2.64 y (α)                |
|       | 230 | 230.033128      | 0 <sup>+</sup>        | 75,400 y (α)              | Es 99 | 252 | 252.082944      | (4 <sup>+</sup> , 5 <sup>-</sup> ) | 472 d (α)                 |
|       | 231 | 231.036299      | $\frac{1}{2}^{+}$     | 25.52 h (β <sup>-</sup> ) |       | 253 | 253.084818      | $\frac{1}{2}^{+}$                  | 20.5 d (α)                |



|    | Z   | A   | Atomic<br>mass (u) | $I^\pi$           | or<br>Half-life    |    | Z   | A   | Atomic<br>mass (u) | $I^\pi$ | or<br>Half-life     |
|----|-----|-----|--------------------|-------------------|--------------------|----|-----|-----|--------------------|---------|---------------------|
| Fm | 100 | 256 | 256.091767         | $0^+$             | 2.63 h ( $\beta$ ) | Lr | 103 | 260 | 260.105320         |         | 180 s ( $\alpha$ )  |
|    |     | 257 | 257.095099         | $(\frac{5}{2}^+)$ | 100 d ( $\alpha$ ) | Rf | 104 | 261 | 261.108690         |         | 65 s ( $\alpha$ )   |
| Md | 101 | 257 | 257.095580         | $(\frac{7}{2}^-)$ | 5.2 h ( $\alpha$ ) | Ha | 105 | 261 | 261.111820         |         | 1.8 s ( $\alpha$ )  |
|    |     | 258 | 258.098570         | $(8^-)$           | 55 d ( $\alpha$ )  |    |     | 262 | 262.113760         |         | 34 s ( $\beta$ )    |
| No | 102 | 258 | 258.098150         | $0^+$             | 1.2 ms ( $\beta$ ) |    | 106 | 263 | 263.118220         |         | 0.8 s ( $\beta$ )   |
|    |     | 259 | 259.100931         | $(\frac{5}{2}^-)$ | 60 m ( $\alpha$ )  |    | 107 | 262 | 262.122930         |         | 115 ms ( $\alpha$ ) |



**ภาคผนวก ค**  
**ค่าคงตัวเชิงฟิสิกส์**  
**(PHYSICAL CONSTANTS)**

**ค่าคงตัวเชิงฟิสิกส์**

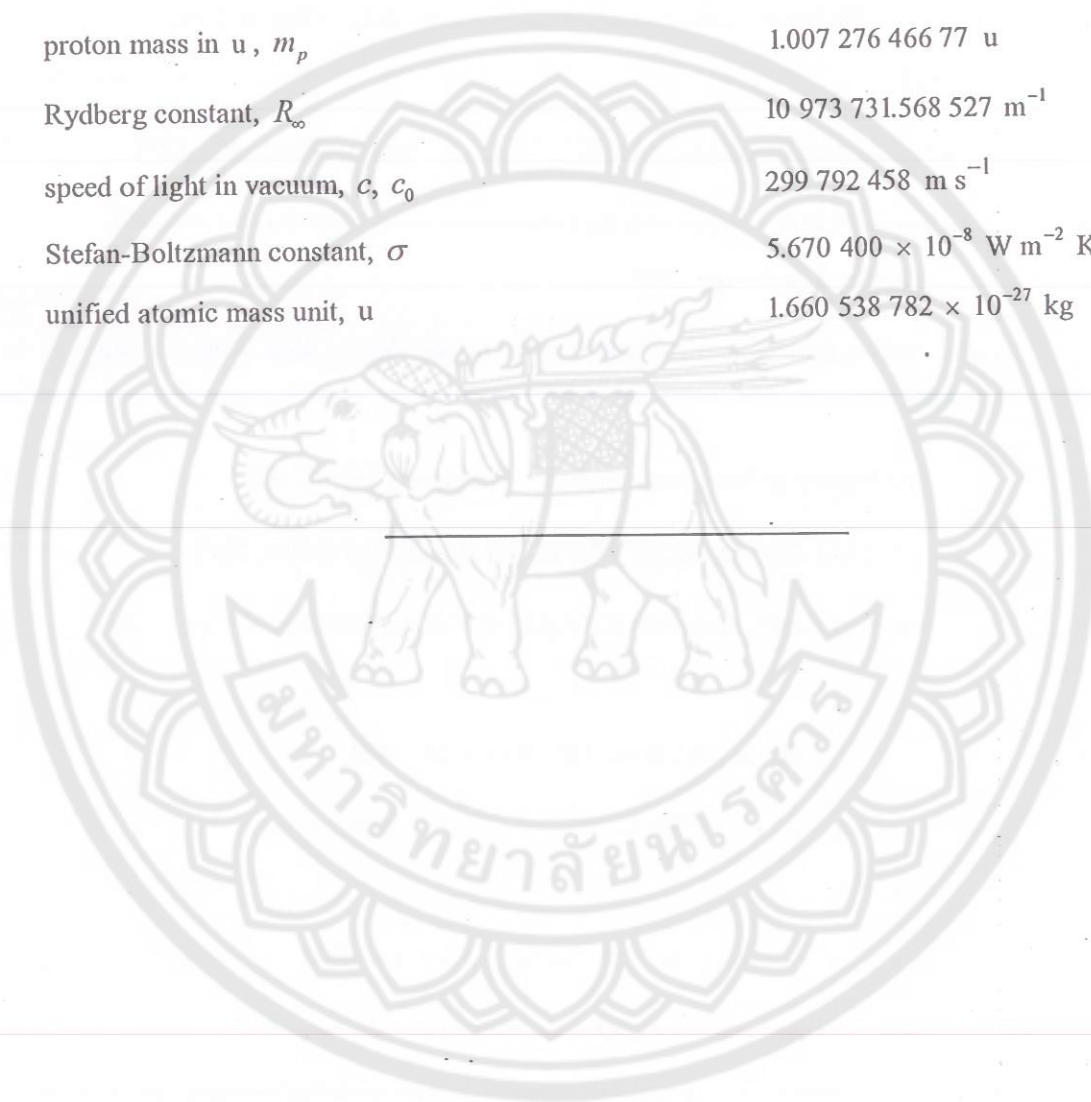
ค่าล่าสุด ค.ศ. 2006 จากเว็บไซต์ The National Institute of Standards  
and Technology (NIST), <http://physics.nist.gov/constants>

|                                                          |                                                     |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| alpha particle mass, $m_\alpha$                          | $6.644\,656\,20 \times 10^{-27} \text{ kg}$         |
| alpha particle mass in u, $m_\alpha$                     | 4.001 506 179 127 u                                 |
| atomic mass constant, $m_u$                              | $1.660\,538\,782 \times 10^{-27} \text{ kg}$        |
| atomic mass constant energy equivalent, $m_u c^2$        | $1.492\,417\,830 \times 10^{-10} \text{ J}$         |
| atomic mass constant energy equivalent in MeV, $m_u c^2$ | 931.494 028 MeV                                     |
| atomic unit of charge, $e$                               | $1.602\,176\,487 \times 10^{-19} \text{ C}$         |
| Avogadro constant, $N_A, L$                              | $6.022\,141\,79 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$    |
| Bohr magneton, $\mu_B$                                   | $927.400\,915 \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}$     |
| Bohr magneton in eV/T, $\mu_B$                           | $5.788\,381\,7555 \times 10^{-5} \text{ eV T}^{-1}$ |
| Bohr radius, $a_0$                                       | $0.529\,177\,208\,59 \times 10^{-10} \text{ m}$     |
| Boltzmann constant, $k$                                  | $1.380\,6504 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$      |
| Boltzmann constant in eV/K, $k$                          | $8.617\,343 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$       |
| Compton wavelength, $\lambda_C$                          | $2.426\,310\,2175 \times 10^{-12} \text{ m}$        |
| Compton wavelength / $2\pi$ , $\lambda_C$                | $386.159\,264\,59 \times 10^{-15} \text{ m}$        |
| deuteron mass, $m_d$                                     | $3.343\,583\,20 \times 10^{-27} \text{ kg}$         |
| deuteron mass in u, $m_d$                                | 2.013 553 212 724 u                                 |

|                                                                      |                                                     |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| electron magnetic moment, $\mu_d$                                    | $-928.476\,377 \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}$    |
| electron mass, $m_e$                                                 | $9.109\,382\,15 \times 10^{-31} \text{ kg}$         |
| electron mass energy equivalent, $m_e c^2$                           | $8.187\,104\,38 \times 10^{-14} \text{ J}$          |
| electron mass energy equivalent in MeV, $m_e c^2$                    | $0.510\,998\,910 \text{ MeV}$                       |
| electron mass in u, $m_e$                                            | $5.485\,799\,0943 \times 10^{-4} \text{ u}$         |
| electron volt, eV                                                    | $1.602\,176\,487 \times 10^{-19} \text{ J}$         |
| electron volt-atomic mass unit relationship, $(1 \text{ eV})/c^2$    | $1.073\,544\,188 \times 10^{-9} \text{ u}$          |
| electron volt-joule relationship, 1 eV                               | $1.602\,176\,487 \times 10^{-19} \text{ J}$         |
| electron volt-kelvin relationship, $(1 \text{ eV})/k$                | $1.160\,4505 \times 10^4 \text{ K}$                 |
| electron volt-kilogram relationship, $(1 \text{ eV})/c^2$            | $1.782\,661\,758 \times 10^{-36} \text{ kg}$        |
| elementary charge, $e$                                               | $1.602\,176\,487 \times 10^{-19} \text{ C}$         |
| fine-structure constant, $\alpha$                                    | $7.297\,352\,5376 \times 10^{-3}$                   |
| inverse fine-structure constant, $\alpha^{-1}$                       | $137.035\,999\,679$                                 |
| inverse meter-atomic mass unit relationship, $(1 \text{ m}^{-1})h/c$ | $1.331\,025\,0394 \times 10^{-15} \text{ u}$        |
| inverse meter-electron volt relationship, $(1 \text{ m}^{-1})/hc$    | $1.239\,841\,875 \times 10^{-6} \text{ eV}$         |
| joule-atomic mass unit relationship, $(1 \text{ J})/c^2$             | $6.700\,536\,41 \times 10^9 \text{ u}$              |
| joule-electron volt relationship, 1 J                                | $6.241\,509\,65 \times 10^{18} \text{ eV}$          |
| kilogram-atomic mass unit relationship, 1 kg                         | $6.022\,141\,79 \times 10^{26} \text{ u}$           |
| kilogram-electron volt relationship, $1 \text{ kg}/c^2$              | $5.609\,589\,12 \times 10^{35} \text{ eV}$          |
| neutron magnetic moment, $\mu_n$                                     | $-0.966\,236\,41 \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}$  |
| neutron mass, $m_n$                                                  | $1.674\,927\,211 \times 10^{-27} \text{ kg}$        |
| neutron mass energy equivalent, $m_n c^2$                            | $1.505\,349\,505 \times 10^{-10} \text{ J}$         |
| neutron mass in u, $m_n$                                             | $1.008\,664\,915\,97 \text{ u}$                     |
| nuclear magneton, $\mu_N$                                            | $5.050\,783\,24 \times 10^{-27} \text{ J T}^{-1}$   |
| nuclear magneton in eV/T, $\mu_N$                                    | $3.152\,451\,2326 \times 10^{-8} \text{ eV T}^{-1}$ |
| Planck constant, $h$                                                 | $6.626\,068\,96 \times 10^{-34} \text{ J s}$        |



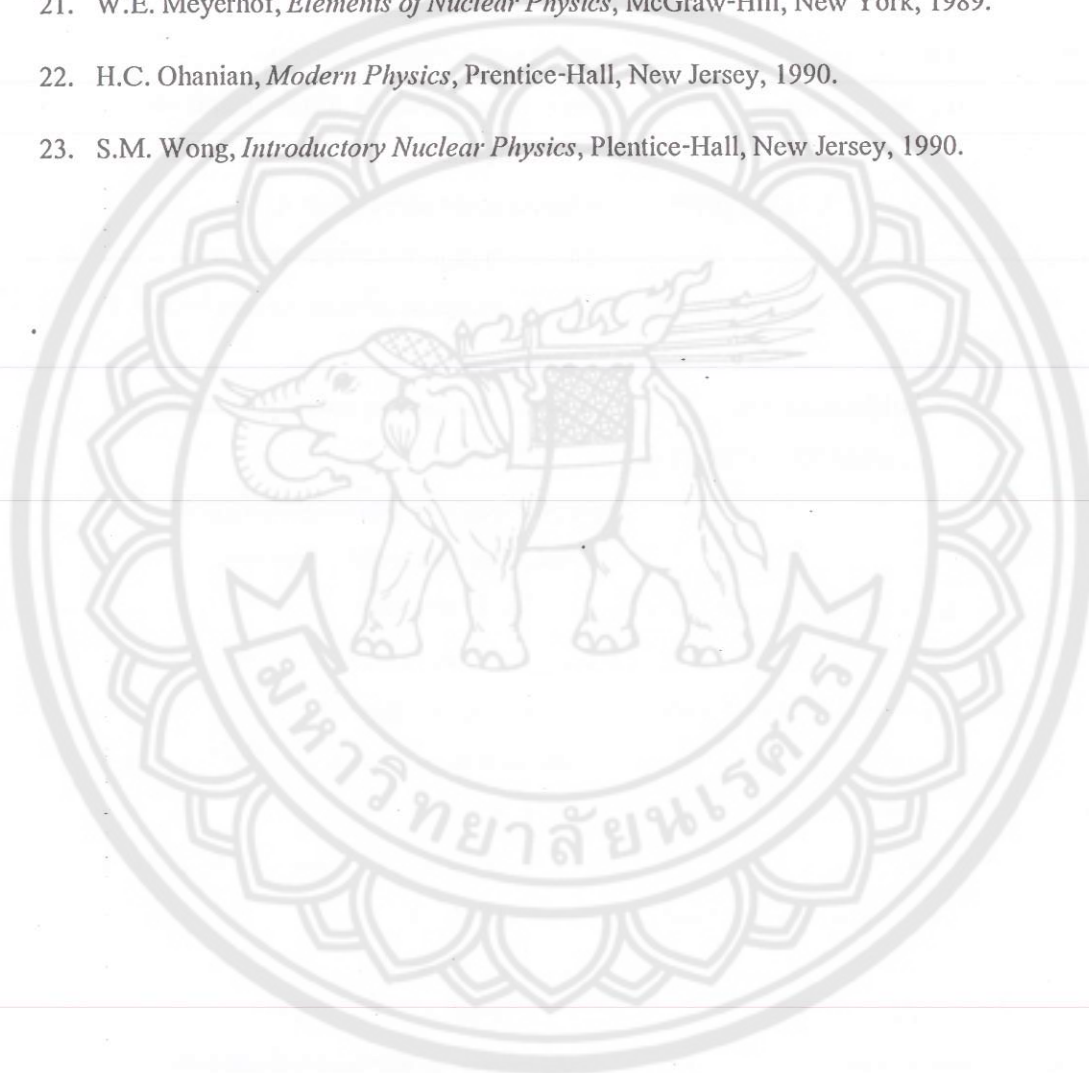
|                                           |                                                             |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Planck constant in eV s, $h$              | $4.135\,667\,33 \times 10^{-15} \text{ eV s}$               |
| Planck constant / $2\pi$ , $\hbar$        | $1.054\,571\,628 \times 10^{-34} \text{ J s}$               |
| Planck constant / $2\pi$ in eV s, $\hbar$ | $6.582\,118\,99 \times 10^{-16} \text{ eV s}$               |
| proton magnetic moment, $\mu_p$           | $1.410\,606\,662 \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}$          |
| proton mass, $m_p$                        | $1.672\,621\,637 \times 10^{-27} \text{ kg}$                |
| proton mass in u, $m_p$                   | $1.007\,276\,466\,77 \text{ u}$                             |
| Rydberg constant, $R_\infty$              | $10\,973\,731.568\,527 \text{ m}^{-1}$                      |
| speed of light in vacuum, $c$ , $c_0$     | $299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$                            |
| Stefan-Boltzmann constant, $\sigma$       | $5.670\,400 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ |
| unified atomic mass unit, u               | $1.660\,538\,782 \times 10^{-27} \text{ kg}$                |



## บรรณานุกรม

1. A. P. Arya, *Elementary Modern Physics*, Addison-Wesley, Phillippines, 1970.
2. A.P. Arya, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston, 1968.
3. J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.
4. W.E. Burcham and Jobs, *Nuclear and Particle Physics*, Longman, Singapore, 1995.
5. W. N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An Introduction to Nuclear Physics*. 2nd edit, Cambridge University, Cambridge, 2001.
6. A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
7. R.D. Dunlap, *The Physics of Nuclei and Particles*, Thomson, Canada, 2004.
8. V. Devanathan, *Nuclear Physics*, Narosha Publishing House, New Delhi, 2006
9. H.A. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
10. R.D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, New York, 1955.
11. E. Gadioli and P.E. Hodgson, *Pre-Equilibrium Nuclear Reactions*, Oxford University Press, New York, 1992.
12. K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, New York, 1966.
13. E.S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955.
14. E. M. Henley and A. Garcia, *Subatomic Physics*, 3rd edit, World Scientific, New Jersey 2007.
15. K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*, 2nd edit, Institute of Physics, Brista, 1999.
16. N.A. Jelley, *Fundamentals of Nuclear Physics*, Cambridge University, Cambridge, 1990.

17. I. Kaplan, *Nuclear Physics*, Addison-Wesley, London, 1958.
18. K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
19. B.R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, Wiley, West Sussex, 2006.
20. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1970.
21. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
22. H.C. Ohanian, *Modern Physics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1990.
23. S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Plentice-Hall, New Jersey, 1990.





# ดัชนี

- absorbed flux ฟลักซ์ดูดกลืน 148
- activation energy พลังงานการก่อกัมมันต์ 17, 18, 19
- amplitude of scattering wave แอมพลิจูดของคลื่นกระเจิง 138
- analyzing power กำลังวิเคราะห์ 125
- angular distribution การแจกแจงเชิงมุม 110  
of elastically scattered particles ของอนุภาคที่กระเจิงแบบยืดหยุ่น 161
- angular momentum quantum number เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุม 36
- antisymmetrization การปฏิสมมาตร 130
- asymmetric fission การแบ่งแยกตัวแบบอสมมาตร 19
- barrier penetration factor ตัวประกอบการทะลุผ่านศักย์ขวางกัน 92
- barrier transmission factor ตัวประกอบการส่งผ่านศักย์ขวางกัน 92
- Bessel function ฟังก์ชันเบสเซล 157
- binding energy พลังงานยึดเหนี่ยว 6  
of the last neutron or proton ของนิวตรอนหรือโปรตอนตัวสุดท้าย 31
- black nucleus นิวเคลียสดำ 149
- black sphere ทรงกลมดำ 150
- Bohr assumption ข้อสมมติของโบร์ 73, 75, 76
- Born approximation การประมาณบอร์น 107
- boundary condition เงื่อนไขขอบ 151  
at nuclear of nucleus เงื่อนไขขอบที่พื้นผิวของนิวเคลียส 151
- branching probability โอกาสแตกสาขา 77
- branching ratio สัดส่วนการแตกสาขา 76
- Briet-Wigner formulae สูตรไบรท์-วิกเนอร์ 85
- central potential ศักย์ศูนย์กลาง 137
- channel radius รัศมีแชนเนล 151
- cloudy crystal ball model แบบจำลองลูกบอลผลึกขุ่น 118, 119
- collective model แบบจำลองกลุ่ม 54
- collective motion การเคลื่อนที่กลุ่ม 54
- complete asymptotic solution ผลเฉลยเชิงเส้นกำกับบริบูรณ์ 141
- complete set of solution เซตบริบูรณ์ของผลเฉลย 120
- complex amplitude แอมพลิจูดเชิงซ้อน 83
- compound nucleus model แบบจำลองนิวเคลียสประกอบ 73
- compound nucleus formation การก่อรูปเป็นนิวเคลียสประกอบ 73
- conditions at the nuclear surface เงื่อนไขที่พื้นผิวนิวเคลียส 155
- configuration of nucleon โครงแบบการเรียงตัวของนิวคลีออน 5
- continuities of logarithm derivative ความต่อเนื่องของอนุพันธ์ลอการิทึม 153
- continuum region บริเวณภาวะต่อเนื่อง 78
- continuum theory ทฤษฎีภาวะต่อเนื่อง 86
- core แก่น 54
- Coulomb คูโลมบ์  
Coulomb effect ผลคูโลมบ์ 40, 156  
Coulomb energy พลังงานคูโลมบ์ 8  
Coulomb phase shift การเลื่อนเฟสคูโลมบ์

- 156, 160
- Coulomb potential energy พลังงานศักย์คูลอมบ์ 156
- Coulomb term พจน์คูลอมบ์ 8, 128
- coupling rule กฎการคู่ควบ 43
- cross sections ภาคตัดขวาง 76
- decay product ผลผลิตการสลาย 31
- of radioactive series ของอนุกรมกัมมันตรังสี 31
- definite state สถานะกำหนดแน่ 35
- deformation parameter พารามิเตอร์การบิดเบี้ยว 12, 55
- cross sections ภาคตัดขวาง
- determination of cross sections การหาภาคตัดขวาง 155
- differential scattering cross section ภาคตัดขวางการกระเจิงเชิงอนุพันธ์ 139
- direct nuclear interaction อันตรกิริยานิวเคลียร์ตรง 100
- direct nuclear reaction ปฏิกิริยานิวเคลียร์ตรง 100
- direct reaction ปฏิกิริยาตรง 100
- direct term พจน์ตรง 131
- dispersion formula สูตรการกระจาย 81
- distorted wave Born approximation การประมาณบอร์นคลื่นบิดเบี้ยว 114
- doubly magic number เลขกลคู่ 31
- DWBA ดี ดับเบิลยู บี เอ 114, 134
- dynamics property of nuclei สมบัติเชิงพลวัตของนิวเคลียส 30
- eccentricity ความเยื้องศูนย์กลาง 12
- effect of pairing ผลของการเข้าคู่ 69
- effective nucleon-nucleon interaction อันตรกิริยานิวคลีออน-นิวคลีออนยังผล 130
- eigenvalue problem ปัญหาค่าเฉพาะ 120
- elastic scattering การกระเจิงแบบยืดหยุ่น 145
- electric quadrupole moment of nucleus
- ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้าของนิวเคลียส 60
- electric quadrupole moments ควอดรูโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้า 34, 48
- electric quadrupole transition
- การย้ายควอดรูโพลทางไฟฟ้า 25
- emission rates อัตราการคาย 76
- energy distribution การแจกแจงพลังงาน 98
- energy eigenvalue ค่าเฉพาะพลังงาน 36
- energy level of neutron ระดับพลังงานของนิวตรอน 42
- energy level of proton ระดับพลังงานของโปรตอน 42
- entrance channel แชนเนลเข้า 162
- evidence for the shell structure หลักฐานสำหรับโครงสร้างชั้น 30
- exchange term พจน์แลกเปลี่ยน 131
- exit channel แชนเนลออก 162
- far from resonance ไกลจากเรโซแนนซ์ 81
- Fermi energy พลังงานเฟอร์มี 67
- Fermi Gas Model แบบจำลองแก๊สเฟอร์มี 64
- Fermi level ระดับเฟอร์มี 21
- Fermi particle อนุภาคเฟอร์มี 65
- Fermi surface พื้นผิวเฟอร์มี 21
- first Born approximate การประมาณบอร์นอันดับแรก 109
- fission barrier กำแพงการแบ่งแยกตัว 18, 20
- fission cross section ภาคตัดขวางการแบ่งแยกตัว 16
- fission fragment of  $^{252}\text{Cf}$
- ส่วนแบ่งแยกตัวของ  $^{252}\text{Cf}$  30
- fission isomer ไอโซเมอร์การแบ่งแยกตัว 20



- fission theory ทฤษฎีของการแบ่งแยกนิวเคลียส 12
- folding model แบบจำลองการทบ 129
- folding procedure กรรมวิธีการทบ 132
- formal derivative อนุพันธ์เชิงรูปแบบ 119
- of the optical model potential ของศักย์  
แบบจำลองทัศน 120
- half-width ครึ่งส่วนกว้าง 80
- hard sphere potential scattering amplitude  
แอมพลิจูดการกระเจิงศักย์ทรงกลมแข็ง 155,  
160
- harmonic-oscillator ศักย์ฮาร์มอนิก-ออสซิลเลเตอร์  
36, 37
- higher energy และระดับพลังงานบน 38
- higher oscillator state สถานะออสซิลเลเตอร์บน 51
- IA ไอ เอ 130
- imaginary potential ศักย์จินตภาพ 118
- impact parameter เป็นพารามิเตอร์กระทบ 144
- impulse approximation การประมาณอิมพัลส์ 130
- incident flux ฟลักซ์ตกกระทบ 148
- inelastic scattering การกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น 104
- intermediate region บริเวณมัธยฐาน 82
- internal scattering-amplitude  
แอมพลิจูดการกระเจิงภายใน 155
- intrinsic magnetic dipole moment  
ไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กประจำตัว 126
- island of isomerism เกาะไอโซเมอร์ซึม 49
- isomer ไอโซเมอร์ 19
- isomeric pair คู่ไอโซเมอร์ 49
- isomeric state สถานะไอโซเมอร์ 30
- isospin ไอโซสปิน 111
- knock-out reactions ปฏิกิริยากระแทกออก 104
- Legendre polynomial พหุนามเลจองด์ 140
- level density ความหนาแน่นระดับ 21
- level width ส่วนกว้างระดับ 77
- liquid drop model แบบจำลองหยดของเหลว 5
- local momentum approximation การประมาณ  
โมเมนตัมเฉพาะที่ 131
- local potential ศักย์เฉพาะที่ 124
- logarithm derivative อนุพันธ์ลอการิทึม  
of wave function ของฟังก์ชันคลื่น 157
- lower energy level ระดับพลังงานล่าง 38
- lower oscillator state สถานะออสซิลเลเตอร์ล่าง 51
- lower Schmidt limit ขีดจำกัดซคิมิตล่าง 46
- magic number เลขกล 30
- of neutron ของนิวตรอน 35
- of proton ของโปรตอน 35
- magnetic and electric moment โมเมนต์แม่เหล็ก  
และไฟฟ้า 59
- magnetic moment โมเมนต์แม่เหล็ก 46
- mass defect ส่วนพร่องมวล 6
- mass semiempirical formula  
สูตรกึ่งการทดลองของมวล 10
- mean field สนามเฉลี่ย 119
- mean free path วิถีอิสระเฉลี่ย 64, 74
- mean lifetime ชั่วชีวิตเฉลี่ย 77
- method of projection operator ระเบียบวิธีของ  
ตัวดำเนินการโปรเจกชัน 120
- microscopic optical model potential  
ศักย์แบบจำลองทัศนจุลภาค 129
- microscopic scattering cross section  
ภาคตัดขวางจุลภาคของการกระเจิง 139
- moment of inertia โมเมนต์ความเฉื่อย 57
- momentum transfer vector เวกเตอร์การถ่ายโอน  
โมเมนตัม 110
- near resonance ใกล้เรโซแนนซ์ 81



- neutron capture cross section ภาคตัดขวางการจับนิวตรอน 31
- neutron Fermi gas แก๊สเฟอร์มินิวตรอน 65
- neutron-induced fission การแบ่งแยกนิวเคลียสโดยการกระตุ้นด้วยนิวตรอน 12, 16
- Nilsson model แบบจำลองนิลส์สัน 21, 22, 23
- nuclear reaction ปฏิกิริยานิวเคลียร์ 76
- nuclear fission การแบ่งแยกนิวเคลียส 12
- nuclear isomerism ไอโซเมอร์ซีมของนิวเคลียส 49
- nuclear potential ศักย์นิวเคลียร์ 91
- nuclear reactions ปฏิกิริยานิวเคลียร์
- with a nucleus of well-defined surface กับนิวเคลียสที่มีพื้นผิวแจ่มชัด 151
- nuclear shell mode แบบจำลองชั้นของนิวเคลียส 35
- nuclear spins แพรติ 40
- nuclear temperature อุณหภูมินิวเคลียร์ 97
- number of stable isotone จำนวนของไอโซโทนเสถียร 31
- oblate รูปแบนขั้ว 60
- optical model แบบจำลองทัศน 118, 119
- optical model potential ศักย์แบบจำลองทัศน 123
- optical potential parameter พารามิเตอร์ศักย์ทัศน 127
- orbital angular momentum โมเมนตัมเชิงมุมวงโคจร 140
- orthonormal condition เงื่อนไขเชิงตั้งฉากปกติ 112
- pairing effect ผลการเข้าคู่ 40
- pairing energy พลังงานการเข้าคู่ 9
- pairing term พจน์ของการเข้าคู่ 9
- Paris potential ศักย์เพริส 132, 133
- parity แพรติ 40
- even parity แพรติคู่ 45
- negative parity แพรติคี่ 45
- odd parity แพรติคี่ 45
- parity operator ตัวดำเนินการแพรติ 58
- positive parity แพรติบวก 45
- partial wave analysis วิธีวิเคราะห์คลื่นย่อย 137
- partial width ส่วนกว้างย่อย 77
- penetration factor ตัวประกอบการทะลุผ่าน 159
- perfectly absorption sphere ทรงกลมที่มีการดูดกลืนอย่างบริบูรณ์ 149
- perfectly reflecting sphere ทรงกลมสะท้อนบริบูรณ์ 93
- peripheral process กระบวนการผิวนอก 100
- permanent deform การบิดเบี้ยวถาวร 55
- phase constant ค่าคงตัวเฟส 159
- phenomenological optical model potential ศักย์แบบจำลองทัศนเชิงปรากฏการณ์วิทยา 124
- pick-up reaction ปฏิกิริยาหอบหิ้ว 104, 106
- pick-up reaction ( $d, p$ ) ปฏิกิริยาหอบหิ้วชนิด ( $d, p$ ) 104, 106
- pick-up reaction ( $d, n$ ) ปฏิกิริยาหอบหิ้วชนิด ( $d, n$ ) 104, 106
- plane wave คลื่นระนาบ 152
- plane wave Born approximate การประมาณบอร์นคลื่นระนาบ 112
- polarization โพลาริเซชัน 125
- potential interaction ศักย์อันตรกิริยา 118
- probability current density ความหนาแน่นกระแสโอกาส 148
- process of direct reaction กระบวนการของปฏิกิริยาตรง 100
- projectile particle อนุภาคโปรเจกไทล์ 120, 152
- prolate รูปแบนข้าง 60
- proton Fermi gas แก๊สเฟอร์มิโปรตอน 64
- proton hole หลุมโปรตอน 61

- pure Rutherford scattering การกระเจิงแบบ  
รัทเทอร์ฟอร์ดอย่างบริสุทธิ์ 161
- pure scattering การกระเจิงบริสุทธิ์ 147
- PWBA ที่ คับเบิลยู บี เอ 112
- quantum mechanics tunnel อุโมงค์ทาง  
กลศาสตร์ควอนตัม 18
- quasi-stationary state สถานะคล้ายคงที่ 86
- radiative capture process กระบวนการจับและ  
แผ่รังสี 83
- reaction cross section ภาคตัดขวางปฏิกิริยา 145,  
154
- real potential ศักย์จริง 118
- reciprocity theorem ทฤษฎีบทส่วนกลับ 162  
for nuclear reaction สำหรับปฏิกิริยานิวเคลียร์  
162, 163
- resonance เรโซแนนซ์  
resonance energy พลังงานเรโซแนนซ์ 80  
resonance region บริเวณเรโซแนนซ์ 78, 79  
resonance scattering amplitude แอมพลิจูด  
การกระเจิงเรโซแนนซ์ 154, 160
- rotation wave function ฟังก์ชันคลื่นการหมุน 58
- rotational angular momentum โมเมนตัมเชิงมุม  
ของการหมุน 57, 58
- rotational band แถบการหมุน 24
- rotational kinetic energy พลังงานจลน์การหมุน 57
- rotational level ระดับการหมุน 56, 57
- rotational motion การเคลื่อนที่เชิงหมุน 55
- Rutherford scattering การกระเจิงรัทเทอร์ฟอร์ด  
157
- scattering amplitude แอมพลิจูดการกระเจิง 109
- scattering cross section ภาคตัดขวางการกระเจิง  
154
- of direct reaction ของปฏิกิริยาตรง 107
- Schmidt's limit ขีดจำกัดของชมิทท์ 46
- Schrödinger equation of nucleon คลื่นชเรอดิงเงอร์  
ของนิวคลีออน 65
- semiclassical physics ฟิสิกส์กึ่งแบบฉบับ 143
- semiempirical formula สูตรเชิงกึ่งการทดลอง  
5, 6, 8
- shape isomerism ไอโซเมอร์ชิมรูปร่าง 25
- shape-elastic scattering การกระเจิงแบบ  
ยืดหยุ่นสัณฐาน 155
- shell collections การเก็บค่าโครงสร้างชั้น 21
- shell model แบบจำลองชั้น 30
- single nucleon นิวคลีออนเดี่ยว 35
- single particle model แบบจำลองอนุภาคเชิงเดี่ยว  
35
- Specht experiment การทดลองของสเพชต์ 25
- spherical Bessel function ฟังก์ชันเบสเซลทรงกลม  
140
- spherical wave คลื่นทรงกลม 138
- spin-orbit coupling model แบบจำลองการคู่ควบ  
สปิน-ออร์บิต 38
- spin-orbit interaction อันตรกิริยาสปิน-ออร์บิต 38
- spin-orbit interaction energy พลังงานอันตรกิริยาสปิน-ออร์บิต 126
- spin-orbit term พจน์สปิน-ออร์บิต 125, 128, 132
- square well potential ศักย์หลุมสี่เหลี่ยม 36, 37
- stripping reaction ปฏิกิริยาปลดปล่อย 104, 106
- surface energy พลังงานผิว 9
- surface tension force แรงความตึงผิว 12
- surface term พจน์ผิว 8
- symmetry energy พลังงานสมมาตร 9
- symmetry term พจน์สมมาตร 9, 70
- theory of resonance scattering ทฤษฎีของการ  
กระเจิงเรโซแนนซ์ 79

- thermodynamic system ระบบอุณหพลวัต 91
- thermodynamics model แบบจำลองอุณหพลวัต 95
- Thomas spin-orbit potential ศักย์สปิน-ออร์บิต โทมัส 125
- total cross section ภาคตัดขวางรวม 143  
of elastic scattering ของการกระเจิงแบบยืดหยุ่น 143
- total decay rate อัตราการสลายตัวรวม 77
- total energy of all proton and neutron พลังงานจลน์รวมของทุกโปรตอนและนิวตรอน 68
- total width ส่วนกว้างรวม 77
- transition energy in ground state พลังงานการย้ายในแถบสถานะพื้น 26
- transition probability โอกาสการย้าย 51
- transverse polarization of nucleon โพลาไรเซชันตามขวางของนิวคลีออน 125
- two parameter Fermi form รูปแบบเฟอร์มีสองพารามิเตอร์ 124
- unit lattice-point จุดแลตทิซหน่วย 66
- upper Schmidt limit ขีดจำกัดชmidt บน 46
- vibrational motion การเคลื่อนที่เชิงสั่น 55
- volume energy พลังงานปริมาตร 8
- volume term พจน์ปริมาตร 8, 124, 128
- wave mechanics กลศาสตร์คลื่น
- of scattering ของการกระเจิง 137
- treatment of scattering การปฏิบัติกับการกระเจิง 137
- weak nuclear interaction อันตรกิริยานิวเคลียร์อย่างอ่อน ๆ 159
- Weizsacker formula สูตรไวซ์แซกเกอร์ 8
- Weizsacker semi-empirical mass formula สูตรมวลกึ่งการทดลองไวซ์แซกเกอร์ 12
- well-defined surface พื้นผิวแจ่มชัด 151
- Woods-Saxon form รูปแบบวูดส์-แซกซอน 124
- Wronskian combination ผลบวกวรองสกี 157