การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่

แทนไทย ทองเทศ

วิทยานิพนธ์เสนอบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ
ปีการศึกษา 2564

การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่

แทนไทย ทองเทศ

วิทยานิพนธ์เสนอบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ
ปีการศึกษา 2564

วิทยานิพนธ์ เรื่อง "การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่"

ของ แทนไทย ทองเทศ

ได้รับการพิจารณาให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติ

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

(ศาสตราจารย์ ดร.ยุพาภรณ์ อารีพงษ์)

.... ประธานที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

(รองศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี)

.... กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

(ดร.สวพร หิญชีระนันทน์)

อนุมัติ

....

(รองศาสตราจารย์ ดร.กรองกาญจน์ ชูทิพย์)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ชื่อเรื่อง	การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่
ผู้วิจัย	แทนไทย ทองเทศ
ประธานที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี
ประเภทสารนิพนธ์	วิทยานิพนธ์ วท.ม. สาขาวิชาสถิติ, มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2564
คำสำคัญ	ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่, การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ, วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก, วิธีบูตสแทร็ป, วิธีแบบเบส์

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ โดยผสมวิธีบูตสแทร็ปกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber (BH) วิธีของ Tukey (BT) และวิธีของ Noor-Ul-Amin (BN) และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีประมาณดังกล่าวกับวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยอีก 6 วิธี ได้แก่ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber (WLSH) วิธีของ Tukey (WLST) และวิธีของ Noor-Ul-Amin (WLSN) วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก (Bay-Non) และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ (Bay-In) โดยใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ทำการจำลองข้อมูล กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 15, 50, 70 และ100 จำนวนตัวแปรอิสระ 2 และ 3 ตัว ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ 2 ระดับ คือ ระดับน้อย และระดับมาก ทำการทดลองซ้ำ 5,000 รอบ ในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด ผลการวิจัยพบว่า ที่ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่และอยู่ในระดับน้อย เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก (n=15) วิธี Bay-In ให้ค่า AMSE ต่ำที่สุด แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 50 ขึ้นไป วิธี WLSH ให้ค่า AMSE ต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ ที่ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่และอยู่ในระดับมาก เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก (n=15) วิธี BN และ วิธี WLSH ให้ค่า AMSE ต่ำที่สุด แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 50 ขึ้นไป วิธี BT ให้ค่า AMSE ต่ำที่สุดในทุกสถานการณ์

Title	A COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATION METHODS IN MULTIPLE LINEAR REGRESSION ANALYSIS WITH HETEROGENEITY PROBLEM
Author	TANTHAI THONGTED
Advisor	Associate Professor Katechan Jampachaisri, Ph.D.
Academic Paper	M.S. Thesis in Statistics - (Type A 2), Naresuan University, 2021
Keywords	Heterogeneity, Multiple Linear Regression Analysis, Weighted Least Square Method, Bootstrap Method, Bayesian Method

ABSTRACT

The objective of this research is to develop regression coefficient estimation methods in multiple linear regression analysis with heterogeneity problem by in integrating bootstrap method with the weighted least squares method base on Huber's (BH), Tukey's (BT) and Noor-UI-Amin's (BN) and compare to the other 6 regression coefficient estimation methods : Ordinary Least Squares (OLS), Weighted Least Squares with Huber (WLSH), Tukey (WLST) and Noor-UI-Amin (WLSN) methods, Bayesian method with noninformative prior distribution (Bay-Non) and Informative prior distribution (Bay-In). The criterion for comparison is the average mean squared error (AMSE). Data are simulated with the sample sizes of 15, 50, 70 and 100; 2 and 3 independent variables; low and high degrees of heterogeneity problem. Each situation is repeated 5,000 times. The results reveal that, for low degrees of heterogeneity problem, the Bay-In yields the least AMSE as the sample size is small (n=15) while the WLSH results in the least AMSE in most cases as the sample size is at least 50. For high degrees of heterogeneity problem, the BN and WLSH yield the least AMSE as the sample size is small (n=15) while the BT results in the least AMSE in all cases as the sample size is at least 50.

ประกาศคุณูปการ

การวิจัยเรื่องการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี โดยได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากอาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี ที่ได้เสียสละเวลา อีกทั้งให้คำปรึกษา แนะนำ ตรวจสอบ และแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพื่อให้งานวิจัยฉบับนี้มีความสมบูรณ์ ซึ่งผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ ศ.ดร.ยุพาภรณ์ อารีพงษ์ และ ดร.สวพร หิญชีระนันทน์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่ให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในงานวิจัย เพื่อนำมาปรับปรุงและแก้ไขให้งานวิจัยฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผลของการศึกษาจะเป็นประโยชน์ไม่มากก็น้อยสำหรับหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนผู้สนใจ หากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้วิจัยขออภัยเป็นอย่างสูง

แทนไทย ทองเทศ

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันงานวิจัยด้านต่าง ๆ อาทิ ด้านวิทยาศาสตร์ สังคม และการแพทย์ จำเป็นต้องอาศัยระเบียบวิจัยทางสถิติเข้ามาช่วยในการศึกษา เพื่อให้ผลการศึกษามีความถูกต้องและน่าเชื่อถือ การวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis) เป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ (Independent Variable) กับตัวแปรตาม (Dependent Variable) เพื่อใช้พยากรณ์หรือประมาณค่าตัวแปรตามผ่านสมการถดถอยเชิงเส้น ซึ่งข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption) ของการวิเคราะห์การถดถอยประกอบด้วย ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปรกติ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ ความคลาดเคลื่อนไม่สัมพันธ์กัน ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระมีลักษณะเชิงเส้นตรง และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่ แต่หากความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ (Heteroscedasticity) มีผลต่อการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยอย่างมาก ทำให้ความคลาดเคลื่อนมีความผันแปรสูง ส่งผลให้ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยมีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสูงกว่าที่ควรจะเป็น ถึงแม้ว่าตัวประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดยังคงมีคุณสมบัติไม่เอนเอียง (Unbiased) คงเส้นคงวา (Consistency) แต่จะขาดประสิทธิภาพ หรือไม่เป็นตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (Best Linear Unbiased Estimator: BLUE) (พีรวัฒน์ เสรีวัฒนนุกุล, 2555) วิธีการแก้ไขเมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ทำได้หลายวิธี เช่น แปลงค่าของตัวแปรตาม y หรือการประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี, 2549)

Noor-Ul-Amin และคณะ (2008) ได้ทำการศึกษาพัฒนาฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักแบบเอ็มด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักในตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย กรณีที่มีค่าผิดปรกติในข้อมูลซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ โดยทำการเปรียบเทียบกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักวิธีอื่น 6 วิธี ได้แก่ ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักของ Andrews, Tukey, Qadir, Asad, Insha และ Uk ใช้ผลบวกกำลังสองของส่วนเหลือ (RSS) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ผลการศึกษาพบว่า วิธีที่พัฒนาโดย Noor-Ul-Amin และคณะ มีผลบวกกำลังสองของส่วนเหลือน้อยที่สุดในทุกสถานการณ์ที่ศึกษา Oseni, Olubusoye, และ Adepoju (2009) ศึกษาวิธีประมาณแบบเบส์ในตัว

แบบการถดถอยเชิงเส้นเมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ พบว่า วิธีประมาณแบบเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง และให้ค่าประมาณพารามิเตอร์สอดคล้องกับค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริง ผู้วิจัยจึงสรุปว่าวิธีประมาณแบบเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์เป็นทางเลือกที่เชื่อถือได้สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ Rasheed และ Adnan (2014) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อมีข้อมูลผิดปรกติและความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ จาก 4 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Huber, Tukey และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักที่มีความแกร่ง เกณฑ์ในการตัดสินใจ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าสถิติที ข้อมูลที่ใช้ศึกษาคือ ข้อมูลอาชญากรรมของสหรัฐอเมริกาปี 2556 ประกอบด้วย จำนวนตัวอย่าง 51 ตัวอย่าง ตัวแปรอิสระ 6 ตัว ข้อมูลมีค่าผิดปรกติและเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ ผลการศึกษาพบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Tukey มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานน้อยที่สุดและค่าสถิติทีมากที่สุด นิธิภัทร กมลสุข (2563) ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการถดถอยที่แกร่งด้วยวิธีประมาณค่าแบบเอ็ม และวิธีประมาณค่าแบบเอส เมื่อมีข้อมูลผิดปรกติ จาก 2 วิธี คือ วิธีประมาณค่าแบบเอ็มหรือวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Huber และวิธีประมาณค่าแบบเอส เกณฑ์ในการตัดสินใจคือ ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) และค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ภายใต้เงื่อนไขของขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 50 100 และ 150 ร้อยละของค่าผิดปรกติ 10 15 และ 30 ผลการศึกษาพบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Huber มีประสิทธิภาพดีที่สุดในกรณีเกิดค่าผิดปรกติในระดับน้อย แต่เมื่อเกิดค่าผิดปรกติระดับสูงวิธีประมาณค่าแบบเอสจะมีประสิทธิภาพดีที่สุด วิโรจน์ มงคลเทพ (2545) ศึกษาประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในสมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ในกรณีความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่และมีสหสัมพันธ์ในตัว โดยทำการเปรียบเทียบ 2 วิธี ได้แก่ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด และวิธีบูตสแทร็ป ใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ภายใต้เงื่อนไขของขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15, 30 และ 50 ค่าสหสัมพันธ์ในตัวเท่ากับ 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9 และรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนผันแปรไปตามค่าของตัวแปรอิสระ 2 รูปแบบ ได้แก่ รูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสูงขึ้นเมื่อ X เพิ่มขึ้น และรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลงเมื่อ X เพิ่มขึ้น พบว่า วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดในทุกขนาดตัวอย่าง ทุกระดับสหสัมพันธ์ในตัว และทุกรูปแบบความแปรปรวน และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของทั้งสองวิธีมีแนวโน้มลดลงและมีค่าใกล้เคียงกัน แต่เมื่อค่าสหสัมพันธ์ในตัวเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มสูงขึ้น

จากการทบทวนวรรณกรรมพบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Noor-UI-Amin และคณะมีประสิทธิภาพดีในกรณีข้อมูลมีค่าผิดปรกติ ซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ วิธีประมาณแบบเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ มีประสิทธิภาพดีในกรณีเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Tukey มีประสิทธิภาพดีในกรณีที่ข้อมูลมีค่าผิดปรกติและเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Huber มีประสิทธิภาพดีในกรณีที่ข้อมูลมีค่าผิดปรกติระดับน้อย วิธีบูตสแทร็ปมีประสิทธิภาพดีในกรณีความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่และสหสัมพันธ์ในตัว ผู้วิจัยจึงเกิดแนวคิดที่จะนำเอาวิธีบูตสแทร็ปมาใช้ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Bootstrap Base On WLS) แล้วนำมาเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Squares Method) ซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่คล้ายคลึงกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด แต่จะมีประสิทธิภาพดีกว่าในกรณีที่ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ หากค่าสังเกตที่มีความแปรปรวนมาก จะถูกถ่วงน้ำหนักค่าสังเกตให้น้อยลง แต่ถ้าค่าสังเกตมีความแปรปรวนน้อยจะถูกถ่วงน้ำหนักค่าสังเกตให้มากขึ้น วิธีบูตสแทร็ป (Bootstrap Method) เป็นวิธีการประมาณค่าโดยใช้การสุ่มตัวอย่างจากประชากรแบบใส่คืน นั่นคือ เป็นการสุ่มตัวอย่างที่ยอมให้หน่วยตัวอย่างซ้ำกันได้ โดยแต่ละหน่วยมีโอกาสในการถูกสุ่มเท่ากัน และวิธีแบบเบส์ (Bayesian Method) เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์บนพื้นฐานความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ซึ่งอาศัยหลักการที่การแจกแจงภายหลังแปรผันตามผลคูณของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นและการแจกแจงก่อนหน้า โดยพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE) ค่าเอนเอียง (Bias) และค่าความแปรปรวน (Variance) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแต่ละวิธี

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

1.2.1 เพื่อพัฒนาวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ โดยผสมวิธีบูตสแทร็ปกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Bootstrap Base On WLS) โดยวิธีของ Huber (BH) วิธีของ Tukey (BT) และวิธีของ Noor-UI-Amin (BN)

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบวิธีที่พัฒนากับวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ จำนวน 6 วิธี ได้แก่

- วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Squares Method : OLS)

- วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Squares Method : WLS) โดยวิธีของ Huber (WLSH) วิธีของ Tukey (WLST) และวิธีของ Noor-Ul-Amin (WLSN)

- วิธีแบบเบส์ (Bayesian Method) โดยกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก (Noninformative Prior : Bay-Non) และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ (Informative Prior : Bay-In)

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1.3.1 กำหนดจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 2 และ 3

1.3.2 กำหนดให้ตัวแปรอิสระ X_1 และ X_3 มีการแจกแจงแบบปรกติ และเป็นอิสระต่อกัน $X_1 \sim N(0,1)$, X_2 เรียงลำดับจากน้อยไปมาก และ $X_3 \sim N(0,1)$

1.3.3 กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15, 50, 70 และ 100

1.3.4 กำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบเป็น 0.05

1.3.5 กำหนดให้ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น เมื่อ X_2 เพิ่มขึ้น 2 ระดับ

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย $\varepsilon \sim N\left(0,\sqrt{eps}\right)$

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก $\varepsilon \sim N(0,eps)$

เมื่อกำหนดให้ eps มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ X_2 เพิ่มขึ้น โดย $eps = \dfrac{u}{n} \times (X_2 + u)$ เมื่อ u แทน ค่าคงที่

1.3.6 กำหนดค่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ มีค่าเท่ากับ $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 4$ และ $\beta_3 = 1$

1.3.7 กำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก $\beta \sim uniform(0,1)$, $f\left(\sigma^2\right) \propto \dfrac{1}{\sigma^2}$ และกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์แบบคอนจุเกต $\beta \sim N\left(A,\sigma^2 I_p\right)$, $\sigma^2 \sim Gamma(a,c)$ กำหนด A เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกทั้งหมดเป็น 3 $\sigma^2 = 2,\ a = 2$ และ $c = 1$

1.3.8 กำหนดจำนวนรอบบูตสแทร็ป เท่ากับ 100 รอบ

1.3.9 การศึกษานี้ได้ทำการจำลองค่าตัวแปรสุ่มตามการแจกแจงของประชากรที่กำหนด ทำซ้ำ 5000 รอบ ในแต่ละสถานการณ์ โดยใช้โปรแกรม R studio ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1.4 คำสำคัญของการวิจัย

การแจกแจงก่อน (Prior Distribution) หมายถึง ข้อมูลเพิ่มเติมในอดีตเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม

การแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) หมายถึง ข้อมูลในอนาคตที่เป็นผลจากการทราบข้อมูลปัจจุบันและอดีต

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) หมายถึง ค่าคาดหมายกำลังสองของผลต่างระหว่างตัวประมาณ $\hat{\theta}$ กับพารามิเตอร์ θ หาได้จาก $E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$ ซึ่งเท่ากับผลรวมของความแปรปรวนกับกำลังสองของความเอนเอียงของตัวประมาณ ใช้วัดความแม่นของตัวประมาณ

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ (Heteroscedasticity) หมายถึง ลักษณะที่ชุดของตัวแปรสุ่มมีความแปรปรวนแตกต่างกัน

1.5 เกณฑ์ในการตัดสินใจ

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีประมาณพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ถดถอยจะพิจารณาความแตกต่างระหว่างค่าประมาณและค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริง ทั้งนี้ถ้าค่าประมาณส่วนใหญ่แตกต่างจากพารามิเตอร์ที่แท้จริงน้อย แสดงว่าโอกาสที่ค่าประมาณจะเข้าใกล้ค่าจริงของพารามิเตอร์ที่แท้จริงมีมาก ดังนั้นเกณฑ์ที่จะใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณประกอบด้วย ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE) ความเอนเอียง (Bias) ความแปรปรวน (Variance) และค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Average Mean Squared Error: AMSE) โดยวิธีที่ให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่าจะพิจารณาว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากกว่า

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 ทราบประสิทธิภาพของวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

1.6.2 เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ในสถานการณ์อื่น

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาพัฒนาวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ โดยผสมวิธีบูตสแทร็ปกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin และเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ จำนวน 6 วิธี ได้แก่ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และ Noor-Ul-Amin และวิธีแบบเบส์โดยกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ การนำเสนอจะแบ่งออกเป็น 6 ส่วน ดังนี้

2.1 ข้อตกลงเบื้องต้นในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ

2.2 ตัวแบบถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

2.3 ตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ

2.4 ปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

2.5 วิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย

2.6 เกณฑ์การตัดสินใจ

2.1 ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumptions) ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ

การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เป็นการวิธีการทางสถิติที่ใช้ศึกษาความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรตาม และตัวแปรอิสระตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไป ซึ่งมีข้อตกลงเบื้องต้น ดังนี้

- ความคลาดเคลื่อน ε_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปรกติ
- ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ นั่นคือ $E(\varepsilon_i) = 0$
- ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่ $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$
- ε_i และ ε_j เป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ โดยที่ $i \neq j$

- X_i และ X_j เป็นอิสระต่อกัน เมื่อ $i, j = 1, 2, ..., k$

หากข้อมูลมีลักษณะไม่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้น ตัวประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยยังคงมีคุณสมบัติไม่เอนเอียง (Unbiased) คงเส้นคงวา (Consistency) แต่จะขาดประสิทธิภาพ หรือไม่เป็นตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (Best Linear Unbiased Estimator: BLUE)

2.2 ตัวแบบถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ประกอบด้วยตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว โดยมีตัวแบบของการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression Model) ของประชากร ดังนี้

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{2.1}$$

โดยที่

y_i แทน ค่าสังเกตของตัวแปรตาม

β_0 และ β_1 แทน สัมประสิทธิ์ถดถอยเป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

X_i แทน ค่าสังเกตของตัวแปรอิสระ

ε_i แทน ความคลาดเคลื่อนสุ่ม

2.3 ตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ (Multiple Linear Regression)

การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ประกอบด้วยตัวแปรอิสระตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป โดยมีตัวแบบของการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ (Multiple Linear Regression Model) ของประชากร เมื่อมีตัวแปรอิสระ k ตัว สามารถแสดงได้ดังนี้

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \qquad i = 1, ..., n \tag{2.2}$$

โดยที่

y_i แทน ค่าสังเกตของตัวแปรตาม

$\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ แทน สัมประสิทธิ์ถดถอยเป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

$X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ik}$ แทน ค่าสังเกตของตัวแปรอิสระ

ε_i แทน ความคลาดเคลื่อนสุ่ม

หรือเขียนในรูปแบบเมทริกซ์ ได้ดังนี้ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ โดย

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2. \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

2.4 ปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ (Heteroscedasticity)

ผลกระทบจากการเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

ปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ จะส่งผลกระทบต่อการวิเคราะห์การถดถอย ดังนี้

- ค่าพยากรณ์มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง และคงเส้นคงวา
- ตัวประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยและค่าพยากรณ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะไม่เป็นตัวประมาณการเชิงเส้นตรงที่ไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (BLUE) และเป็นตัวประมาณที่ไม่มีประสิทธิภาพ
- ค่าประมาณของความแปรปรวนของตัวประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย และค่าประมาณของความแปรปรวนร่วม (Covariance) ระหว่างสัมประสิทธิ์ความถดถอยจะเป็นค่าประมาณที่เอนเอียง และไม่คงเส้นคงวา (Inconsistent) ทำให้การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติไม่ถูกต้อง (Invalid)

การตรวจสอบการเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

ปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่สามารถตรวจสอบได้โดยใช้กราฟ และใช้สถิติทดสอบ ดังนี้

- สร้างกราฟคู่ลำดับ (Ordered Pairs) ของตัวแปรอิสระกับค่าความคลาดเคลื่อน
- สร้างกราฟระหว่างความคลาดเคลื่อนหรือความคลาดเคลื่อนกำลังสองกับค่าประมาณของตัวแปรตามหรือตัวแปรอิสระ ถ้าพบว่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่า

เพิ่มขึ้นหรือลดลงตามค่าประมาณของตัวแปรตามหรือค่าของตัวแปรอิสระที่เพิ่มขึ้น แสดงว่าเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

- ใช้วิธีการทดสอบทางสถิติ มีหลายวิธี ดังนี้ วิธีการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบของ Szroeter วิธีการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบของ Breusch และ Pagan และวิธีการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบของ White’s (W)

การแก้ไขปัญหาของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนคงที่เป็นข้อกำหนดพื้นฐานของการวิเคราะห์การถดถอย ดังนั้นการตรวจสอบและการแก้ไขปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่จึงสำคัญ หากไม่ได้แก้ไขปัญหาดังกล่าว ถึงแม้ตัวประมาณกำลังสองจะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง แต่จะขาดคุณสมบัติความแปรปรวนต่ำที่สุด และส่งผลให้ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยมีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสูงกว่าที่ควรจะเป็น วิธีการแก้ไขเมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ทำได้หลายวิธี ดังนี้ แปลงค่าของตัวแปรตาม Y แปลงค่าตัวแปรตาม Y ด้วยวิธี Box-cox และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก

2.5 วิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย

2.5.1 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square : OLS)

วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นการหาค่าประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum Squared Error : SSE) มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ $\underset{\hat{\beta}}{Minimise}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$ เมื่อ ε_i แทน ค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จากผลต่างระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ นั่นคือ $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$

ดังนั้น ตัวประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด คือ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y} \tag{2.3}$$

โดยพบว่า ตัวประมาณ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด นั่นคือ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ มีความแปรปรวนต่ำที่สุดในบรรดาตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงอื่น ๆ

ตัวประมาณ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดในบรรดาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้น แต่ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีข้อกำหนดที่สำคัญ คือ ข้อมูลต้องเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นซึ่งในทางปฏิบัติจะเป็นไปได้น้อยมาก เมื่อข้อตกลงเบื้องต้นไม่เป็นจริง อาจส่งผลให้การประมาณพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

2.5.2 วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Square : WLS)

การวิเคราะห์การถดถอยแบบถ่วงน้ำหนักเป็นเทคนิคในการสร้างสมการถดถอย เมื่อความคลาดเคลื่อนของข้อมูลมีความแปรปรวนไม่คงที่ นั่นคือ ค่าความคลาดเคลื่อนมากขึ้น เมื่อค่าของตัวแปรตามมีค่าเพิ่มขึ้น หรือค่าความคลาดเคลื่อนน้อยลง เมื่อค่าของตัวแปรตามเพิ่มขึ้น (Carroll, 1988)

ตัวแปรตามและตัวแปรอิสระที่นำมาวิเคราะห์ควรเป็นตัวแปรเชิงปริมาณ ถ้าตัวแปรอิสระเป็นตัวแปรเชิงกลุ่ม ต้องแปลงให้เป็นตัวแปรหุ่นก่อน ซึ่งตัวแปรที่จะนำมาคำนวณค่าน้ำหนัก (Weight) ต้องเป็นตัวแปรเชิงปริมาณ และมีความสัมพันธ์กับค่าความแปรปรวนของตัวแปรตาม

ดังนั้น ตัวประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก คือ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_w = \left(\boldsymbol{X'WX}\right)^{-1}\boldsymbol{X'Wy} \tag{2.4}$$

เมื่อ $\boldsymbol{W}$ แทน ฟังก์ชันน้ำหนัก

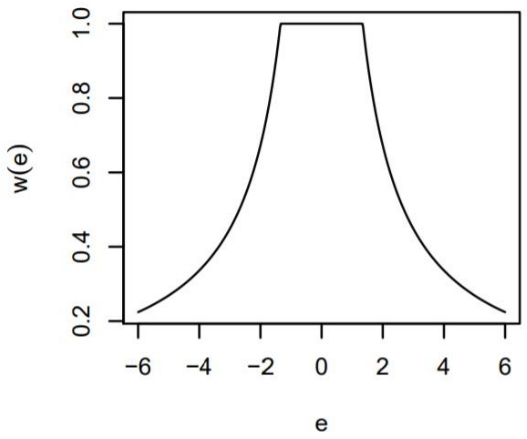
ทั้งนี้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก เป็นเทคนิคการวิเคราะห์ที่ให้ความสำคัญหรือให้น้ำหนักกับข้อมูลแต่ละค่าไม่เท่ากัน ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชันน้ำหนัก 3 วิธี คือ

2.5.2.1 Huber Weighted Function (John Fox, 2556) มีรูปแบบดังนี้

$$w_H(e) = \begin{cases} 1 & ;\ |e| \le k \\ \dfrac{k}{|e|} & ;\ |e| > k \end{cases} \tag{2.5}$$

เมื่อค่า $\boldsymbol{k}$ = 1.345

และ e แทน ค่าความคลาดเคลื่อน



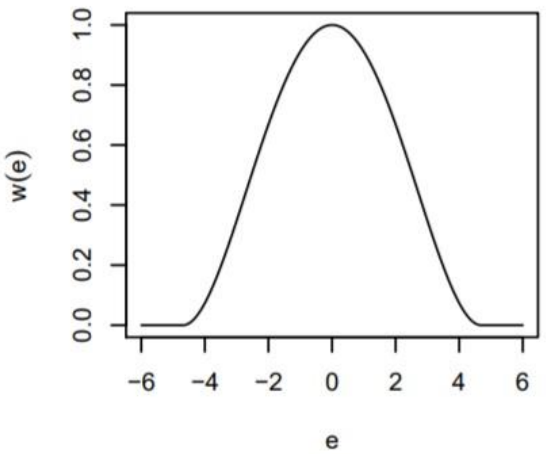
ภาพ 1 รูปแบบฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักโดย Huber

2.5.2.2 Tukey Weighted Function (John Fox, 2556) มีรูปแบบดังนี้

$$w_T(e) = \begin{cases} \left[1-\left(\dfrac{e}{f}\right)^2\right]^2 & ; |e| \le f \\ 0 & ; |e| > f \end{cases} \tag{2.6}$$

เมื่อค่า f = 4.685

และ e แทน ค่าความคลาดเคลื่อน



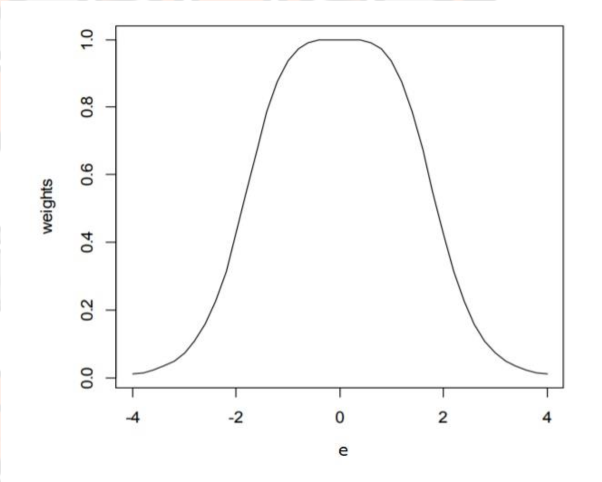
ภาพ 2 รูปแบบฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักโดย Tukey

2.5.2.3 Noor-Ul-Amin Weighted Function (Noor-Ul-Amin, 2551) มีรูปแบบดังนี้

$$w_N(e) = \left[1 + \left(\frac{2e}{k}\right)^4\right]^{-2} \tag{2.7}$$

เมื่อค่า $\boldsymbol{k}$ = 1.345

และ $\boldsymbol{e}$ แทน ค่าความคลาดเคลื่อน



ภาพ 3 รูปแบบฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักของ Noor-Ul-Amin

2.5.3 วิธีแบบเบส์ (Bayesian Method)

การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีแบบเบส์เกิดจากการวิเคราะห์บนพื้นฐานความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของการเกิดเหตุการณ์ร่วมกัน 2 เหตุการณ์คือ $\boldsymbol{y}$ และ $\boldsymbol{\beta}, \sigma^2$ (Koop,2003) ดังนี้

ความน่าจะเป็นของ $\boldsymbol{y}$ เมื่อกำหนด $\boldsymbol{\beta}, \sigma^2$ มีรูปแบบดังนี้

$$f\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \middle| \boldsymbol{y}\right) = \frac{f\left(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right)}{f\left(\boldsymbol{y}\right)} = \frac{f\left(\boldsymbol{y} \middle| \boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right) f\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right)}{f\left(\boldsymbol{y}\right)} \tag{2.8}$$

โดยที่

$f(\boldsymbol{y})$ แทน ความน่าจะเป็นของข้อมูล $\boldsymbol{y}$

$f\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^2\right)$ แทน ความน่าจะเป็นของ $(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$ หรือการแจกแจงก่อนของ $(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$

$f\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^2\middle|\boldsymbol{y}\right)$ แทน ความน่าจะเป็นของ $(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$ เมื่อทราบข้อมูล $\boldsymbol{y}$ หรือการแจกแจงภายหลัง

$f\left(\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{\beta},\sigma^2\right)$ แทน ความน่าจะเป็นของ $\boldsymbol{y}$ เมื่อทราบข้อมูล $\boldsymbol{\beta}$ และ σ^2

การแจกแจงภายหลังกรณีที่ $\boldsymbol{\beta},\sigma^2$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ มีรายละเอียด ดังนี้

2.5.3.1 การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก (Noninformative Prior Distribution)

กำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก (Noninformative prior) ดังนี้

$$f\left(\boldsymbol{\beta}\right) \propto \text{ค่าคงที่} \tag{2.9}$$

$$f\left(\sigma^2\right) \propto \frac{1}{\sigma^2} \tag{2.10}$$

โดยสมมติให้ $\boldsymbol{\beta}$ และ σ^2 เป็นอิสระกัน

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ $\boldsymbol{y}$ (Likelihood function) เมื่อกำหนด $\boldsymbol{\beta},\sigma^2$ มีรูปแบบดังนี้

$$L\left(\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{\beta},\sigma^2\right)=\left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}\right)'\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}\right)\right] \tag{2.11}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}\right)'\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}\right) &= \boldsymbol{y'y}-\boldsymbol{y'X\beta}-\boldsymbol{y}X'\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta'X'X\beta}\\ &= \boldsymbol{y'y}-2\boldsymbol{\beta'X'y}+\boldsymbol{\beta'X'X\beta}\end{aligned} \tag{2.12}$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
L\left(\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{\beta},\sigma^{2}\right) &\propto \sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right] \\
&= \sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{b}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\right)\right] \\
&= \sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[\begin{matrix}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\right)'\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\right)\\ -2\boldsymbol{b}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\end{matrix}\right]\right] \\
&= \sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[\hat{\sigma}^{2}\left(n-k\right)-2\boldsymbol{b}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\right]\right] \\
&= \sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[\hat{\sigma}^{2}\left(n-k\right)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)\right]\right]
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \\
\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b} \\
\hat{\sigma}^{2} &= \frac{\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\right)'\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\right)}{n-k}
\end{aligned}
$$

จะได้การแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) ของ ($\boldsymbol{\beta},\sigma^{2}$) ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\pi\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^{2}\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right) &\propto L\left(\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{\beta},\sigma^{2}\right)f\left(\boldsymbol{\beta}\right)f\left(\sigma^{2}\right) \\
&= \sigma^{-(n+1)}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[\hat{\sigma}^{2}\left(n-k\right)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)\right]\right]
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

ให้ s เป็นตัวประมาณของ σ^{-2} และคำนวณการแจกแจงภายหลังของ $\boldsymbol{\beta}$ ได้ดังนี้

$$
\pi\left(\boldsymbol{\beta}\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right) \propto \int_{0}^{\infty} s^{\frac{n+1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}s\left[\hat{\sigma}^{2}\left(n-k\right)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)\right]\right]d\sigma^{2} \tag{2.15}
$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปของการแจกแจง Gamma โดยพิจารณาจากคุณสมบัติต่อไปนี้

$$1 = \int_0^\infty \frac{q^{p+1}}{\Gamma(p+1)} s^p e^{-qs} ds$$

$$1 = \frac{q^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^\infty s^p e^{-qs} ds$$

$$\frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}} = \int_0^\infty s^p e^{-qs} ds \qquad (2.16)$$

เมื่อ $\Gamma(p) = (p-1)!$ จะได้ว่า

$$\frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}} = \frac{p!}{q^{p+1}} = p! q^{-(p+1)} \qquad (2.17)$$

พิจารณาสมการ

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}) \propto \int_0^\infty s^{\frac{n+1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} s\left[\hat{\sigma}^2(n-k) + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})\right]\right] d\sigma^2 \qquad (2.18)$$

สมการ (2.18) เป็นรูปแบบการแจกแจง Gamma อยู่ในรูปแบบ $\int_0^\infty s^p e^{-qs} ds$ ดังนั้นจึงจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบ $\frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}}$ เพื่อง่ายต่อการคำนวณ

เมื่อให้ $p = \frac{n+1}{2}$ และ $q = \frac{1}{2}\left[\hat{\sigma}^2(n-k) + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})\right]$

จัดรูปจากสมการ (2.18) ให้อยู่ในรูป (2.17)

$$\begin{aligned}\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}) &= \frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}} \\ &= p! q^{-(p+1)} \\ &\propto q^{-(p+1)} = q^{-\left(\frac{n+3}{2}\right)} \qquad (2.19)\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า q ในสมการ (2.19)

$$\pi\left(\boldsymbol{\beta}\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right)=\left[\frac{1}{2}\left[\hat{\sigma}^{2}\left(n-k\right)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)\right]\right]^{-\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$
$$\propto\left[\hat{\sigma}^{2}\left(n-k\right)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)\right]^{-\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$
$$\propto\left[v\hat{\sigma}^{2}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)\right]^{-\frac{(v+k)+3}{2}}$$
$$\propto\left[1+\frac{1}{v\hat{\sigma}^{2}}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)\right]^{-\frac{(v+k)}{2}} \qquad (2.20)$$
$$\boldsymbol{\beta}\sim mvt\left(\boldsymbol{b},\left(\frac{v}{v-2}\right)\hat{\sigma}^{2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\right)$$

เมื่อ $v=n-k$

mvt แทน การแจกแจงแบบทีหลายตัวแปร

ดังนั้นการแจกแจงภายหลังของ $\boldsymbol{\beta}$ มีการแจกแจงแบบทีหลายตัวแปร (Multivariate *t*-distribution) ด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{b}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\left(\frac{v}{v-2}\right)\hat{\sigma}^{2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$

ภายใต้ฟังก์ชันสูญเสียความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Squared Error Loss Function) นั่นคือ $L(\boldsymbol{b};\boldsymbol{\beta})=\left(\boldsymbol{b}(\underline{x})-\boldsymbol{\beta}\right)^{2}$ จะได้ตัวประมาณแบบเบส์ของ $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes} &= E_{\beta|\underline{x}}[L(\boldsymbol{b};\boldsymbol{\beta})]\\ &= \int L(\boldsymbol{b};\boldsymbol{\beta})\cdot\pi\left(\boldsymbol{\beta}\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{\beta}\\ &= E[\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}]\\ &= \boldsymbol{b}\end{aligned} \qquad (2.21)$$

2.5.3.2 การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ (Informative prior distribution)

กำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta}\sim N\left(\boldsymbol{A},\Sigma_{\beta}^{-1}\right)\qquad \Sigma_{\beta}^{-1}=\sigma^{2}I_{p}$$
$$\sigma^{2}\sim Gamma\left(a,c\right)$$

เมื่อ $\boldsymbol{A}$, Σ_{β}^{-1}, $\boldsymbol{a}$ และ $\boldsymbol{c}$ แทน hyperparameter

นั่นคือ

$$f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}}\sigma^{-p}\exp\left[-\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A})'\Sigma_{\beta}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A})\right)\right] \tag{2.24}$$

$$f(\sigma^2) \propto \sigma^{-(a+1)}\exp\left[-\frac{c}{\sigma^2}\right] \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\beta},\sigma^2) &= f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)\,f(\sigma^2) \\ &\propto \sigma^{-p-(a+1)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A})'\Sigma_{\beta}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A})+2c\right)\right] \end{aligned} \tag{2.26}$$

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ $\boldsymbol{y}$ เมื่อกำหนด $\boldsymbol{\beta},\sigma^2$ ดังนี้

$$L(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma^2) \propto \sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\hat{\sigma}^2(n-k)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})\right]\right] \tag{2.27}$$

จะได้การแจกแจงภายหลังของ $\boldsymbol{\beta},\sigma^2$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\beta},\sigma^2|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}) &= L(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\,f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)\,f(\sigma^2) \\ &\propto \sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\hat{\sigma}^2(n-k)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})\right]\right] \\ &\quad\times\sigma^{-p-(a+1)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A})'\Sigma_{\beta}^{-1}(\beta-\boldsymbol{A})+2c\right)\right] \\ &\propto \sigma^{-n-p-(a+1)}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^2(n-k)+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}) \\ +(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A})'\Sigma_{\beta}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A})+2c\end{bmatrix}\right] \end{aligned} \tag{2.28}$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\right)+\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A}\right)'\Sigma_{\beta}^{-1}\left(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A}\right)\\
&=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\beta}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{A}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{A}\\
&=\boldsymbol{\beta}'\left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}\right]\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{A}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{A}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{A}\\
&=\boldsymbol{\beta}'M\boldsymbol{\beta}-2M^{-1}\left[\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}'\Sigma^{-1}\right]\boldsymbol{\beta}+K\\
&=M\left[\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)'\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]-M\tilde{\boldsymbol{L}}'\tilde{\boldsymbol{L}}+K
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

เมื่อ $M=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}$

$K=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{A}$

$\tilde{L}=M^{-1}\left[\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}'\Sigma^{-1}\right]$

จะได้ว่า

$$
\pi\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^2\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right)\propto\sigma^{-n-p-(a+1)}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\begin{matrix}\hat{\sigma}^2\left(n-k\right)+2c+\\(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\\-M\tilde{\boldsymbol{L}}'\tilde{\boldsymbol{L}}+K\end{matrix}\right]\right]
\tag{2.30}
$$

ให้ $\tilde{s}=\hat{\sigma}^2\left(n-k\right)+2c-\tilde{\boldsymbol{L}}'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\tilde{\boldsymbol{L}}+K$

$\bar{v}=n+a$

จะได้ว่า

$$
\pi\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^2\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right)\propto\sigma^{-n-p-(a+1)}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\tilde{s}+(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]\right]
\tag{2.31}
$$

การแจกแจงภายหลังของ $\boldsymbol{\beta}$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$
\pi\left(\boldsymbol{\beta}\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right)=\int_0^\infty\sigma^{\frac{-v-p-1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\tilde{s}+(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]\right]d\sigma^2
\tag{2.32}
$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปของการแจกแจง Gamma โดยพิจารณาจากคุณสมบัติต่อไปนี้

$$1=\int_0^\infty \frac{q^{p+1}}{\Gamma(p+1)} s^p e^{-qs} ds$$

$$1=\frac{q^{p+1}}{\Gamma(p+1)}\int_0^\infty s^p e^{-qs} ds$$

$$\frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}}=\int_0^\infty s^p e^{-qs} ds \qquad (2.33)$$

เมื่อ $\Gamma(p)=(p-1)!$ จะได้ว่า

$$\frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}}=\frac{p!}{q^{p+1}}=p!q^{-(p+1)} \qquad (2.34)$$

จากสมการ

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y})=\int_0^\infty \sigma^{\frac{-v-p-1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\tilde{s}+(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]\right]d\sigma^2 \qquad (2.35)$$

สมการ (2.35) เป็นรูปแบบการแจกแจง Gamma อยู่ในรูปแบบ $\int_0^\infty s^p e^{-qs} ds$ ดังนั้นจึงจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบ $\frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}}$ เพื่อง่ายต่อการคำนวณ

เมื่อให้ $p=\frac{-\bar{v}-p-1}{2}$ และ $q=\frac{1}{2}\left[\tilde{s}+(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]$

จัดรูปจากสมการ (2.18) ให้อยู่ในรูป (2.17)

$$\begin{aligned}\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}) &= \frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}} \\ &= p!q^{-(p+1)} \\ &\propto q^{-(p+1)} = q^{-\frac{(\bar{v}+p)}{2}}\end{aligned} \qquad (2.36)$$

เมื่อแทนค่า q ในสมการ (2.36) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\pi\left(\boldsymbol{\beta}\middle|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}\right) &= \left[\frac{1}{2}\left[\tilde{s}+(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]\right]^{-\frac{(\bar{v}+p)}{2}} \\ &\propto \left[\tilde{s}+(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]^{-\frac{(\bar{v}+p)}{2}} \\ &\propto \left[1+\frac{1}{\bar{v}}(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}})'\frac{[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]}{\tilde{s}}\left(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{L}}\right)\right]^{-\frac{(\bar{v}+p)}{2}}\end{aligned} \tag{2.37}$$

นั่นคือ

$$\boldsymbol{\beta} \sim mvt\left(\tilde{\boldsymbol{L}}\ ,\ \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}-2}\right)[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]^{-1}\tilde{s}\right)$$

ดังนั้นการแจกแจงภายหลังของ $\boldsymbol{\beta}$ มีการแจกแจงแบบทีหลายตัวแปร (Multivariate *t*-distribution) ด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\tilde{\boldsymbol{L}}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}-2}\right)[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\Sigma^{-1}]^{-1}\tilde{s}$

ภายใต้ฟังก์ชันสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Squared Error Loss Function)

นั่นคือ $L(\hat{\boldsymbol{\beta}};\boldsymbol{\beta})=\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}\right)^2$ จะได้ว่าตัวประมาณแบบเบส์คือ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes}=E[\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}]=\tilde{\boldsymbol{L}}$

2.6 เกณฑ์การตัดสินใจ

2.6.1 ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE)

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยกับค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยที่กำหนด สามารถแสดงได้ดังนี้

$$MSE(\hat{\beta}_k)=\frac{\sum_{i=1}^{M}(\beta_k-\hat{\beta}_{ik})^2}{M} \tag{2.40}$$

β_k คือ ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยที่กำหนด $k=0,\ldots,p-1$

$\hat{\beta}_{ik}$ คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยตัวที่ k ในการทำซ้ำรอบที่ i

i คือ จำนวนรอบของการทำซ้ำ $i = 1, \ldots, M$

p คือ จำนวนพารามิเตอร์

2.6.2 ความเอนเอียง (Bias)

ความเอนเอียงของค่าประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยกับค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยที่กำหนด สามารถแสดงได้ดังนี้

$$Bias(\hat{\beta}_k) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\hat{\beta}_{ik}}{M} - \beta_k \tag{2.41}$$

2.6.3 ความแปรปรวน (Variance)

ความแปรปรวนของค่าประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยกับค่าประมาณ สัมประสิทธิ์ถดถอยเฉลี่ย สามารถแสดงได้ดังนี้

$$Variance(\hat{\beta}_k) = \frac{\sum_{i=1}^{M} (\hat{\beta}_{ik} - \bar{\hat{\beta}}_k)^2}{M} \tag{2.42}$$

2.6.4 ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Average Mean Squared Error: AMSE)

ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยกับค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยที่กำหนด สามารถแสดงได้ดังนี้

$$AMSE = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \left[MSE(\hat{\beta}_k) \right]}{p} \tag{2.43}$$

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วีรพา ฐานะปรัชญ์ (2542) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยของตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว โดยเปรียบเทียบ 4 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยสุด (OLS) วิธีแบบเบส์เมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก (UNI) วิธีแบบเบส์เมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ (NOR) และวิธีแบบเบส์เมื่อใช้การแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์ (JEF) เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 30, 50 และ 100 ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปรกติมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตัวแปรอิสระเป็นค่าคงที่สุ่มมาจากการแจกแจงปรกติ ด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ผลการศึกษาพบว่า วิธี OLS และวิธี UNI มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน โดยที่วิธี OLS จะมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธี UNI เสมอ วิธี OLS มีประสิทธิภาพดีเมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรตามมีค่าต่ำ และขนาดตัวอย่างสูง วิธี NOR มีประสิทธิภาพดีเมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรตามมีค่าสูง และขนาดตัวอย่างต่ำ

วิโรจน์ มงคลเทพ (2545) ศึกษาประสิทธิภาพของตัวประมาณในสมการถดถอยพหุคูณ กรณีความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่และมีสหสัมพันธ์ในตัว โดยเปรียบเทียบ 2 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดและวิธีบูตสแทร็ป เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15, 30 และ 50 ค่าสหสัมพันธ์ในตัวเท่ากับ 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9 และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนผันแปรตามค่าของตัวแปรอิสระ 2 รูปแบบ ได้แก่ รูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสูงขึ้นเมื่อ X เพิ่มขึ้น และรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลงเมื่อ X เพิ่มขึ้น ผลการศึกษาพบว่า วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดในทุกขนาดตัวอย่าง ทุกระดับสหสัมพันธ์ในตัว และทุกรูปแบบความแปรปรวน และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของทั้งสองวิธีมีแนวโน้มลดลงและมีค่าใกล้เคียงกัน แต่เมื่อค่าสหสัมพันธ์ในตัวเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มสูงขึ้น

นพคุณ บุญพระคุ้มครอง (2551) ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย กรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ โดยเปรียบเทียบ 4 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีบูตสแทร็ป วิธีแจ็คไนฟ์ และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วง

น้ำหนัก เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจคือ ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 50 และ 100 และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนผันแปรตามค่าของตัวแปรอิสระ 2 รูปแบบ ได้แก่ รูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสูงขึ้นเมื่อ X เพิ่มขึ้น และรูปแบบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนลดลงเมื่อ X เพิ่มขึ้น ผลการศึกษาพบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดในทุกขนาดตัวอย่าง และทุกรูปแบบความแปรปรวน และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะลดลงในทุกสถานการณ์

Noor-Ul-Amin, Asghar, Shehza และ Sanaullah (2008) ศึกษาพัฒนาฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักแบบเอ็มด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักในตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย กรณีที่มีค่าผิดปรกติในข้อมูล โดยเปรียบเทียบ 7 วิธี คือวิธีของ Andrews, Tukey, Qadir, Asad, Insha, Uk และวิธีที่พัฒนา เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ ค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (RSS) กำหนดขนาดตัวอย่าง 100, 200 และ 500 กำหนดความคลาดเคลื่อนแจกแจงแบบปรกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และ 50 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1 ผลการศึกษาพบว่า ตัวประมาณของเอ็มด้วย Tukey, Qadir, Asad, Insha, Uk และวิธีที่พัฒนา มีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีประมาณแบบกำลังสองน้อยที่สุด เมื่อข้อมูลมีค่าผิดปรกติ และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ประสิทธิภาพในการประมาณแม่นยำมากขึ้น

Oseni, Olubusoye, และ Adepoju (2009) ศึกษาวิธีประมาณแบบเบส์ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นเมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ กำหนดขนาดตัวอย่าง 25, 50, 100, 150 และ 200 กำหนดโครงสร้างปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่แบบเชิงเส้นตรงและแบบเอ็กซ์โปแนนเชียล โดยใช้วิธีการประมาณแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนให้สารสนเทศน้อยมาก ผลการศึกษาพบว่า วิธีประมาณแบบเบส์ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นเมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง และสอดคล้องกับค่าที่กำหนด ดังนั้นจึงเป็นทางเลือกที่น่าเชื่อถือสำหรับวิธีประมาณพารามิเตอร์แบบเบส์ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นเมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

ฑิฆัมพร บุญญมาส (2554) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยสำหรับการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณที่ความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่ ในการแจกแจงแบบล็อกนอร์มัลและแกมมา ที่ระดับความเบ้เท่ากับ 0.5, 1, 1.5 และ 2 และค่าความแปรปรวน

สัมพันธ์กับค่าของตัวแปรอิสระตัวที่หนึ่งและตัวแปรตามแบบชี้กำลังมีค่าพารามิเตอร์เท่ากับ 0, 0.1, 0.3, และ 0.5 กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25, 50 และ 100 โดยเปรียบเทียบ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) วิธีการแปลงของ Box-cox และวิธี Weighted Least Squared (WLS) เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) และค่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ (RE) ผลการศึกษาพบว่า วิธี OLS ประมาณค่าได้ดีที่สุดเมื่อค่าความแปรปรวนมีความสัมพันธ์ในระดับต่ำกับค่าของตัวแปรอิสระตัวที่หนึ่ง วิธี WLS ประมาณค่าได้ดีที่สุดเมื่อค่าความแปรปรวนมีความสัมพันธ์ในระดับสูงกับค่าของตัวแปรอิสระตัวหนึ่ง และวิธี Box-cox ประมาณค่าได้ดีที่สุดเมื่อค่าความแปรปรวนมีความสัมพันธ์ในระดับสูงกับค่าของตัวแปรตาม

พีรวัฒน์ เสรีวัฒนนุกูล (2555) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยสำหรับตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่ การวิจัยนี้ใช้วิธีการประมาณในสถานการณ์ที่ค่าความแปรปรวนของข้อมูลขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม โดยเปรียบเทียบ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีการแปลงของ Box-cox และวิธี Iteratively Reweighted Least Square (IRWLS) เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) ผลการศึกษาพบว่า วิธี IRWLS เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพที่สุด วิธีBox-cox มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธี OLS โดยเฉพาะในกรณีที่ความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อนมีขนาดใหญ่และขึ้นกับตัวแปรอิสระ

Rasheed และ Adnan (2012) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อมีข้อมูลผิดปรกติและความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ โดยเปรียบเทียบ 4 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Huber, Tukey และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักที่มีความแกร่ง เกณฑ์ในการตัดสินใจ ได้แก่ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าสถิติที ข้อมูลที่ใช้ศึกษา ได้แก่ ข้อมูลอาชญากรรมของสหรัฐอเมริกาปี 2556 จำนวนตัวอย่าง 51 ตัวอย่าง ตัวแปรอิสระ 6 ตัว เมื่อมีข้อมูลผิดปรกติและเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ ผลการศึกษาพบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักของ Tukey มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานน้อยที่สุดและมีค่าสถิติทีที่มากที่สุด

ภูวษา แซ่อุ้ย (2559) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดด้วยวิธีแบบเบส์ เมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก (BNI) วิธีแบบเบส์เมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ (BI) วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) วิธีบูตสแทร็ปแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ (NPB) และวิธีบูตสแทร็ปแบบใช้พารามิเตอร์ (PB) ขนาดตัวอย่างที่ใช้เท่ากับ 5, 15, 30, 50, 75 และ 100 ความคลาดเคลื่อนสุ่มมีการแจกแจงแบบปรกติมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.15, 0.25, 0.5, 0.7, 1, 1.5, 5 และ 10 ตัวแปรอิสระเป็นค่าคงที่ ซึ่งสุ่มมาจากการแจกแจงแบบปรกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.1, 0.5 และ 0.9 เกณฑ์ในการตัดสินใจ คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) ผลการศึกษาพบว่า วิธีแบบเบส์เมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ (BI) มีประสิทธิภาพดีที่สุดเนื่องจากให้ AMSE ต่ำที่สุดสำหรับทุก ๆ สถานการณ์

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ โดยผสมวิธีบูตสแทร็ปกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ถดถอยสำหรับตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่ จำนวน 6 วิธี โดยทำการนำเสนอ จะแบ่งออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

3.1 ขอบเขตงานวิจัย

3.2 ขั้นตอนการวิจัย

3.3 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

3.1 ขอบเขตงานวิจัย

3.1.1 กำหนดจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 2 และ 3

3.1.2 กำหนดให้ตัวแปรอิสระแต่ละตัวมีการแจกแจงแบบปรกติ และเป็นอิสระต่อกัน

$X_1 \sim N(0,1)$, X_2 เรียงลำดับจากน้อยไปมาก และ $X_3 \sim N(0,1)$

3.1.3 กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15, 50, 70 และ 100

3.1.4 กำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบเป็น 0.05

3.1.5 กำหนดให้ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น เมื่อ X_2 เพิ่มขึ้น 2 ระดับ

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย $\varepsilon \sim N\left(0,\sqrt{eps}\right)$

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก $\varepsilon \sim N\left(0,eps\right)$

เมื่อกำหนดให้ eps มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ X_2 เพิ่มขึ้น โดย $eps = \frac{u}{n} \times (X_2 + u)$
เมื่อ u แทน ค่าคงที่

3.1.6 กำหนดค่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ มีค่าเท่ากับ $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 4$ และ $\beta_3 = 1$

3.1.7 กำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก $\beta \sim uniform(0,1)$,
$f\left(\sigma^2\right) \propto \frac{1}{\sigma^2}$ และกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์แบบคอนจุเกต $\beta \sim N\left(A, \sigma^2 I_p\right)$, $\sigma^2 \sim Gamma\left(a, c\right)$ กำหนด A เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกทั้งหมดเป็น 3 $\sigma^2 = 2, a = 2$ และ $c = 1$

3.1.8 กำหนดจำนวนรอบบูตสแทร็ปเท่ากับ 100 รอบ

3.1.9 การศึกษานี้ได้ทำการจำลองค่าตัวแปรสุ่มตามการแจกแจงของประชากรที่กำหนด ทำซ้ำ 5000 รอบ ในแต่ละสถานการณ์ โดยใช้โปรแกรม R studio ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.2 ขั้นตอนการวิจัย

3.2.1 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n)

3.2.2 กำหนดค่าพารามิเตอร์

3.2.3 สร้างข้อมูลตัวแปรอิสระ X_1 และ X_3 ที่มีการแจกแจงแบบปรกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนตัวแปรอิสระเท่ากับ 1 สร้างข้อมูลตัวแปรอิสระ X_2 มีเรียงลำดับจากน้อยไปมาก

3.2.4 สร้างความคลาดเคลื่อนให้มีความแปรปรวนสูงขึ้น เมื่อ X_2 เพิ่มขึ้น 2 ระดับ

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย $\varepsilon \sim N\left(0, \sqrt{eps}\right)$

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก $\varepsilon \sim N\left(0, eps\right)$

เมื่อกำหนดให้ eps มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ X_2 เพิ่มขึ้น โดย $eps = \frac{u}{n} \times (X_2 + u)$
เมื่อ u แทน ค่าคงที่

3.2.5 สร้างข้อมูลจาก $\boldsymbol{y}$ จาก $\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$

3.2.6 ตรวจสอบการเกิดปัญหา Heteroscedasticity โดยใช้สถิติทดสอบของ Breusch และ Pagan

3.2.7 คำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วย Huber, Tukey และ Noor-UI-Amin วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วย Huber, Tukey และNoor-UI-Amin วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์

3.2.8 คำนวณความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าความเอนเอียง และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยแต่ละวิธี

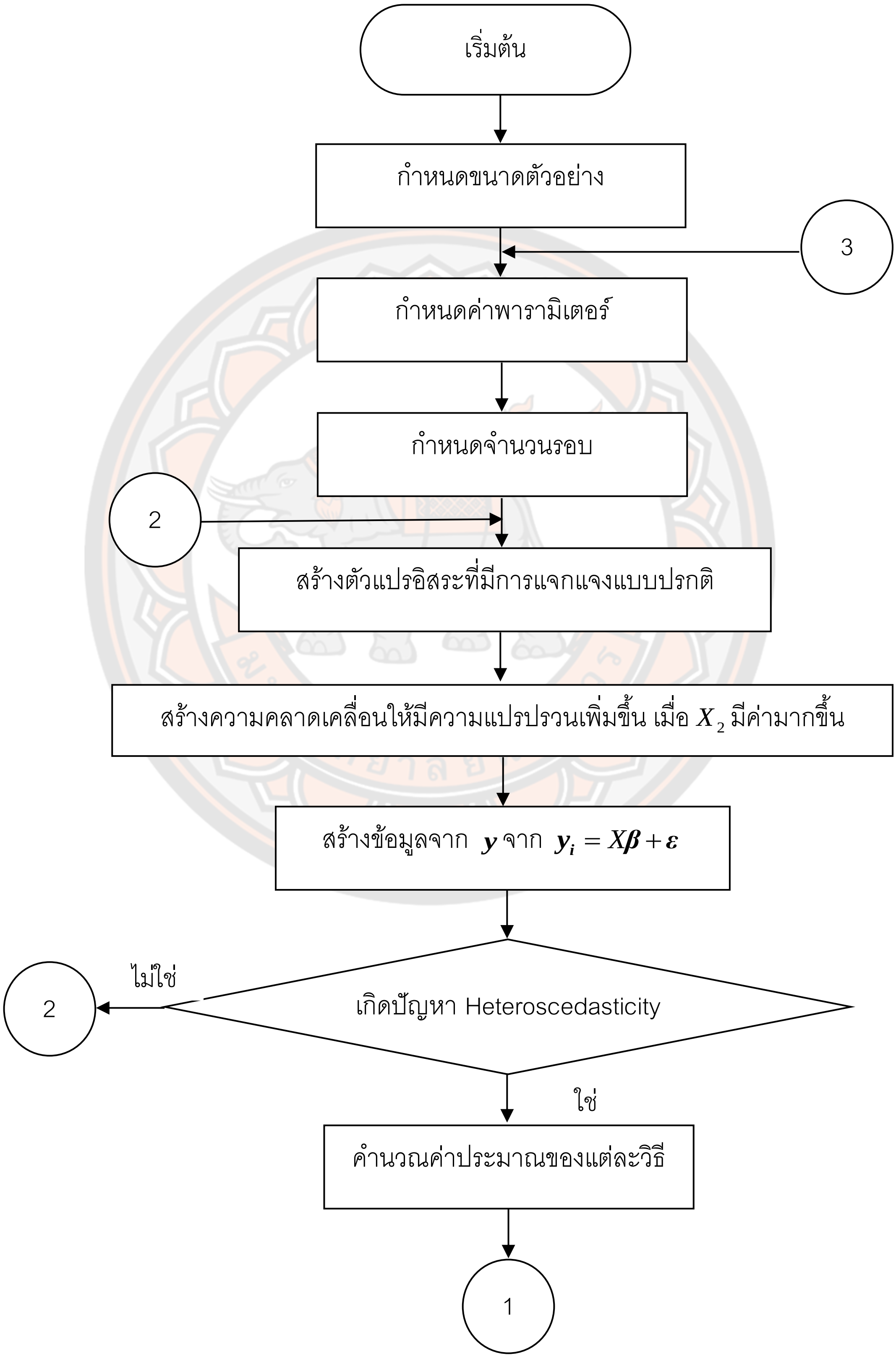
3.2.9 คำนวณค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

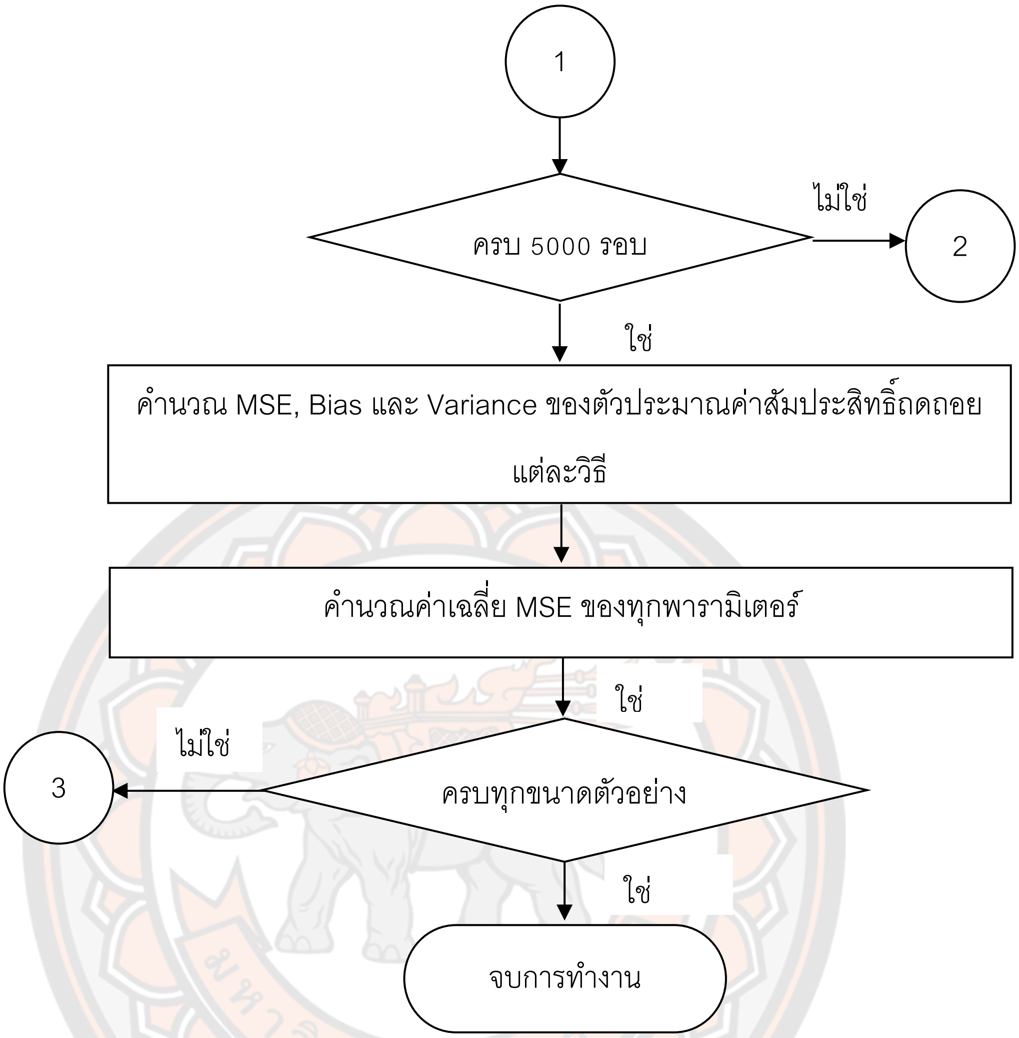
3.2.9 เปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าความเอนเอียง ค่าความแปรปรวน และค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ของแต่ละวิธีในแต่ละสถานการณ์

3.2.10 สรุปผลการวิจัย

3.3 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

ขั้นตอนในการทำงานของโปรแกรมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผังงาน (Flowchart) ได้ดังนี้




1
ครบ 5000 รอบ
ไม่ใช่
2
ใช่
คำนวณ MSE, Bias และ Variance ของตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยแต่ละวิธี
คำนวณค่าเฉลี่ย MSE ของทุกพารามิเตอร์
ใช่
ไม่ใช่
3
ครบทุกขนาดตัวอย่าง
ใช่
จบการทำงาน

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ โดยผสมวิธีบูตสแทร็ปกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีประมาณดังกล่าวกับวิธีประมาณอื่นอีก 6 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin วิธีแบบเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ เพื่อหาผลสรุปว่าวิธีประมาณพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยวิธีใดที่ให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด โดยนำเสนอตามลำดับ ดังนี้

4.1 รายละเอียดของวิธีที่พัฒนา

4.2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิจัย

4.3 ผลการวิจัย

4.1 รายละเอียดของวิธีที่พัฒนา

งานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำแนวคิดของการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยด้วยวิธีบูตสแทร็ปมาใช้ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก (Bootstrap Base On WLS) โดยมีรายละเอียดดังนี้

วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber, Tukeyและ Noor-Ul-Amin

วิธีหาค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแทร็ปนี้ถูกคิดค้นโดย Bradley Efron ในปี ค.ศ. 1979 มีแนวคิดมาจากวิธีแจ็กไนฟ์ (Jackknife) ของ Queneuile และ Tukey ซึ่งวิธีบูตสแทร็ปนี้สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาเมื่อไม่สามารถหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่สนใจในกรณีที่ข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น เช่น ความคลาดเคลื่อนไม่มีการแจกแจงแบบปรกติ หรือหาค่าประมาณ

ได้ยาก เช่น การประมาณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (กิตติ ตันติจินดา, 2546) โดยงานวิจัยนี้ได้นำเอาวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักมาใช้ร่วมกับวิธีบูตสแทร็ป มีขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber, Tukey และ Noor-Ul-Amin

2. คำนวณความคลาดเคลื่อน $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$

3. สุ่มค่าความคลาดเคลื่อน แทนด้วย $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ จำนวน n รอบ

4. แทนค่าความคลาดเคลื่อนในสมการ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$

5. นำ $\boldsymbol{y}$ ที่ได้จากข้อ 4. มาประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber, Tukey และ Noor-Ul-Amin

6. ทำซ้ำข้อ 3, 4 และ 5 ตามลำดับ จำนวน 100 รอบ

7. คำนวณค่าเฉลี่ยของค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยที่ทำซ้ำ 100 รอบ

4.2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้กำหนดสัญลักษณ์เพื่อใช้ในการแสดงผลการวิจัย ดังนี้

OLS	แทน	วิธีกำลังสองน้อยที่สุด
WLSH	แทน	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber
WLST	แทน	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey
WLSN	แทน	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin
BH	แทน	วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber

BT	แทน	วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey
BN	แทน	วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin
Bay-Non	แทน	วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก
Bay-In	แทน	วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์
MSE	แทน	ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
AMSE	แทน	ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
Variance	แทน	ค่าความแปรปรวน
Bias	แทน	ค่าความเอนเอียง

4.3 ผลการวิจัย

4.3.1 ผลการเปรียบเทียบค่าความเอนเอียง ค่าความแปรปรวน และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดไม่คงที่ระดับน้อย

ผลการเปรียบเทียบในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดได้ผล ดังนี้

ตาราง 4.1 ค่าความเอนเอียงของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

n	พารามิเตอร์	Bias								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	0.0276	0.0133	**0.0010**	0.0376	0.0293	0.0581	0.0293	0.0279	0.4033
	β_1	0.0331	0.0222	0.0202	**0.0201**	0.0331	0.0665	0.0331	0.0330	0.1172
	β_2	0.0063	0.0042	**0.0018**	0.0082	0.0059	0.0064	0.0059	0.0063	0.0358
50	β_0	0.0042	0.0023	**0.0013**	0.0029	0.0029	0.0025	0.0041	0.0044	0.1179
	β_1	0.0055	0.0005	0.0021	0.0027	0.0018	**0.0002**	0.0041	0.0054	0.0161
	β_2	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	0.0002	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	0.0036
70	β_0	0.0045	0.0020	**0.0002**	0.0049	0.0031	0.0016	0.0048	0.0045	0.0913
	β_1	0.0070	0.0065	0.0044	**0.0039**	0.0069	0.0062	0.0067	0.0069	0.0217
	β_2	**0.0001**	**0.0001**	0.0002	0.0002	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	0.0019
100	β_0	0.0059	0.0048	0.0045	**0.0027**	0.0054	0.0046	0.0051	0.0057	0.0664
	β_1	0.0036	0.0017	**0.0016**	0.0040	0.0027	0.0021	0.0044	0.0036	0.0138
	β_2	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	**0.0001**	0.0002	0.0002	0.0011

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าความเอนเอียงที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.1 แสดงค่าความเอนเอียงที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่าค่าความเอนเอียงของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และค่าความเอนเอียงของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาในภาพรวม พบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey ให้ค่าความเอนเอียงต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey สำหรับวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ให้ค่าความเอนเอียงสูงที่สุดในทุกสถานการณ์

ตาราง 4.2 ค่าความแปรปรวนของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

n	พารามิเตอร์	Variance								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	2.4097	2.0448	2.6730	2.9668	2.0742	2.9944	2.0883	2.4089	**1.7418**
	β_1	1.4552	**1.2166**	1.5273	1.9445	1.2298	3.6701	1.2693	1.4559	1.2858
	β_2	0.0696	0.0699	0.1098	0.0969	0.0634	0.0640	0.0632	0.0695	**0.0598**
50	β_0	0.4415	**0.3304**	0.3782	0.3767	0.3374	0.3379	0.3787	0.4422	0.4068
	β_1	0.2906	0.2072	0.2133	0.2666	0.2137	**0.2015**	0.2586	0.2907	0.2840
	β_2	0.0014	**0.0013**	0.0019	**0.0013**	**0.0013**	0.0015	**0.0013**	0.0014	0.0014
70	β_0	0.3078	**0.2287**	0.2545	0.2466	0.2326	0.2369	0.2545	0.3077	0.2907
	β_1	0.1980	0.1408	0.1454	0.1751	0.1424	**0.1370**	0.1737	0.198	0.1952
	β_2	**0.0005**	**0.0005**	0.0006	**0.0005**	**0.0005**	0.0006	**0.0005**	**0.0005**	**0.0005**
100	β_0	0.2087	**0.1509**	0.1672	0.1618	0.1532	0.1658	0.1658	0.2089	0.2008
	β_1	0.1331	**0.0923**	0.0937	0.1138	0.0936	0.1151	0.1551	0.1332	0.1318
	β_2	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าความแปรปรวนที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.2 แสดง ค่าความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่า ค่าความแปรปรวนของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และค่าความแปรปรวนของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber ให้ค่าความแปรปรวนต่ำที่สุดในส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey ให้ค่าความแปรปรวนต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์ส่วนน้อยที่สุด

ตาราง 4.3 ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

n	พารามิเตอร์	MSE								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	2.4105	2.0449	2.6730	2.9822	2.0746	2.9978	2.0892	2.4098	**1.9044**
	β_1	1.4563	**1.2171**	1.5277	1.9449	1.2306	3.6745	1.2704	1.4571	1.2995
	β_2	0.0696	0.0699	0.1098	0.0970	0.0634	0.0641	0.0632	0.0696	**0.0612**
50	β_0	0.4415	**0.3301**	0.3782	0.3767	0.3379	0.3379	0.3787	0.4423	0.4207
	β_1	0.2906	0.2072	0.2133	0.2666	0.2137	**0.2015**	0.2586	0.2908	0.2843
	β_2	0.0014	**0.0013**	0.0019	**0.0013**	**0.0013**	0.0015	**0.0013**	0.0014	0.0014
70	β_0	0.3078	**0.2287**	0.2545	0.2466	0.2326	0.2369	0.2545	0.3077	0.2991
	β_1	0.1981	0.1408	0.1454	0.1751	0.1424	**0.1370**	0.1737	0.1981	0.1956
	β_2	**0.0005**	**0.0005**	0.0007	**0.0005**	**0.0005**	0.0006	**0.0005**	**0.0005**	**0.0005**
100	β_0	0.2087	**0.1510**	0.1673	0.1618	0.1533	0.1586	0.1658	0.2089	0.2053
	β_1	0.1331	0.0923	0.0937	0.1138	0.0936	**0.0905**	0.1151	0.1332	0.1319
	β_2	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.3 แสดง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่า ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey และวิธีแบบเบส์โดยกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ซึ่งวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยของแต่ละวิธี มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยใกล้เคียงกันกับวิธีที่ให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตาราง 4.4 ค่าความเอนเอียงของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว

n	พารามิเตอร์	Bias								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	0.0193	0.0212	0.0168	0.0103	**0.0028**	0.1178	0.0045	0.0183	0.4402
	β_1	0.0173	0.0127	0.0109	**0.0037**	0.0154	0.0064	0.0119	0.0171	0.1056
	β_2	0.0025	**0.0016**	0.0027	0.0028	0.0048	0.0110	0.0057	0.0026	0.0473
	β_3	**0.0049**	0.0101	0.0138	0.0088	0.0117	0.0423	0.0136	0.0057	0.0965
50	β_0	**0.0088**	0.0143	0.0177	0.0139	0.0154	0.0184	0.0118	0.0089	0.1167
	β_1	0.0052	0.0055	0.0044	0.0033	0.0035	**0.0030**	0.0037	0.0052	0.0167
	β_2	**0.0005**	0.0007	0.0009	0.0006	0.0008	0.0010	0.0006	**0.0005**	0.0032
	β_3	0.0050	0.0047	**0.0036**	0.0044	0.0058	0.0055	0.0057	0.0053	0.0269
70	β_0	0.0057	0.0055	0.0041	0.005	0.0039	0.0033	**0.0026**	0.0059	0.0828
	β_1	0.0123	0.0130	0.0153	0.0129	0.0136	0.0150	0.0130	**0.0122**	0.0273
	β_2	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	**0.0001**	0.0018
	β_3	0.0058	0.0055	0.0059	0.0057	0.0056	**0.0054**	0.0058	0.0058	0.0096
100	β_0	0.0095	0.0098	0.0118	**0.0084**	0.0097	0.0109	0.0085	0.0095	0.0703
	β_1	0.0021	0.0017	0.0029	0.0016	**0.0001**	0.0015	0.0025	0.002	0.0124
	β_2	**0.0003**	0.0004	0.0004	**0.0003**	0.0004	0.0004	**0.0003**	**0.0003**	0.0013
	β_3	0.0047	0.0043	0.0037	0.0035	0.0038	**0.0034**	0.0041	0.0048	0.0054

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าความเอนเอียงที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.4 แสดง ค่าความเอนเอียงที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ค่าความเอนเอียงของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และค่าความเอนเอียงของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่าความเอนเอียงต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ สำหรับวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ให้ค่าความเอนเอียงสูงที่สุดในทุกสถานการณ์

ตาราง 4.5 ค่าความแปรปรวนของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว

n	พารามิเตอร์	Variance								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	3.0728	2.6915	3.7057	4.3868	2.7996	27.125	2.8669	3.0751	**2.1002**
	β_1	1.7362	**1.4940**	1.9473	2.4889	1.5297	9.4494	1.5527	1.7355	1.5003
	β_2	0.0805	0.0803	0.1313	0.1319	**0.0752**	0.1993	0.0756	0.0806	0.0669
	β_3	1.7599	1.5684	2.057	2.7104	1.5619	1.8567	1.5928	1.7653	**1.4978**
50	β_0	0.4779	**0.3663**	0.4215	0.4289	0.3748	0.3727	0.4173	0.4778	0.4388
	β_1	0.2992	0.2131	0.2248	0.2698	0.2178	**0.2053**	0.2591	0.2922	0.2851
	β_2	0.0015	**0.0014**	0.0019	0.0015	**0.0014**	0.0016	**0.0014**	0.0015	0.0015
	β_3	0.3032	0.2247	0.2361	0.2869	0.2275	**0.2152**	0.2681	0.3033	0.2958
70	β_0	0.3262	**0.2416**	0.2681	0.2783	0.2468	0.2489	0.2776	0.3266	0.3078
	β_1	0.2046	0.1457	0.1508	0.1838	0.1488	**0.1423**	0.181	0.2047	0.2012
	β_2	**0.0005**	**0.0005**	0.0006	**0.0005**	**0.0005**	0.0006	**0.0005**	**0.0005**	**0.0005**
	β_3	0.1976	0.1437	0.152	0.1805	0.1467	**0.1428**	0.1769	0.1976	0.1943
100	β_0	0.2087	**0.1548**	0.1719	0.1706	0.1574	0.1635	0.1729	0.2088	0.2007
	β_1	0.1352	0.0947	0.0972	0.1198	0.0966	**0.0936**	0.1191	0.1353	0.1338
	β_2	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**
	β_3	0.1305	0.0925	0.0953	0.1155	0.0941	**0.0922**	0.1153	0.1306	0.1292

หมายเหตุ : ตัวหนา คือ ค่าความแปรปรวนที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.5 แสดง ค่าความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ค่าความแปรปรวนของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และค่าความแปรปรวนของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber และวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey ให้ค่าความแปรปรวนต่ำที่สุดในส่วนใหญ่ สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey ให้ค่าความแปรปรวนต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์ส่วนน้อยที่สุด

ตาราง 4.6 ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว

n	พารามิเตอร์	MSE								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	3.0732	2.6919	3.706	4.3868	2.7996	27.139	2.8669	3.0754	**2.2940**
	β_1	1.7365	**1.4942**	1.9475	2.4889	1.5299	9.4494	1.5528	1.7358	1.5114
	β_2	0.0805	0.0803	0.1313	0.1319	0.0752	0.1994	0.0756	0.0806	**0.0692**
	β_3	1.7599	1.5685	2.0572	2.7105	1.5621	1.8585	1.5931	1.7654	**1.5071**
50	β_0	0.4780	**0.3665**	0.4218	0.4291	0.3751	0.3730	0.4174	0.4778	0.4525
	β_1	0.2923	0.2132	0.2249	0.2698	0.2178	**0.2053**	0.2591	0.2922	0.2854
	β_2	0.0015	**0.0014**	0.0019	**0.0014**	**0.0014**	0.0016	**0.0014**	0.0015	0.0015
	β_3	0.3032	0.2247	0.2361	0.2869	0.2275	**0.2152**	0.2682	0.3033	0.2965
70	β_0	0.3262	**0.2416**	0.2682	0.2784	0.2468	0.2490	0.2776	0.3267	0.3147
	β_1	0.2047	0.1458	0.1510	0.1839	0.1490	**0.1425**	0.1812	0.2049	0.2019
	β_2	**0.0005**	**0.0005**	0.0007	**0.0005**	**0.0005**	0.0006	**0.0005**	**0.0005**	**0.0005**
	β_3	0.1977	0.1437	0.1520	0.1805	0.1467	**0.1429**	0.1769	0.1977	0.1944
100	β_0	0.2088	**0.1549**	0.1721	0.1707	0.1575	0.1637	0.1731	0.2089	0.2057
	β_1	0.1353	0.0951	0.0972	0.1198	0.0966	**0.0936**	0.1192	0.1353	0.1339
	β_2	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	0.0016	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**	**0.0002**
	β_3	0.1305	0.0926	0.0953	0.1155	0.0941	**0.0922**	0.1153	0.1306	0.1292

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.6 แสดง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber และวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์ส่วนน้อย

ที่สุด ซึ่งวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยของแต่ละวิธี มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยใกล้เคียงกันกับวิธีที่ให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

4.2.2 ผลการเปรียบเทียบค่าความเอนเอียง ค่าความแปรปรวน และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดไม่คงที่ระดับมาก

ผลการเปรียบเทียบในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดได้ผล ดังนี้

ตาราง 4.7 ค่าความเอนเอียงของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

n	พารามิเตอร์	Bias								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	0.0533	0.0864	0.1610	**0.0082**	0.0465	0.0739	0.0324	0.0537	0.4778
	β_1	0.0616	0.0779	0.0627	**0.0106**	0.0547	0.0229	0.0308	0.0575	0.1446
	β_2	0.0144	0.0155	0.0246	0.0069	0.0079	**0.0024**	0.0042	0.0141	0.0558
50	β_0	0.0634	0.0271	0.0029	0.0754	0.0210	**0.0009**	0.0493	0.0623	0.0616
	β_1	0.0545	0.0166	**0.0046**	0.0537	0.0245	0.0122	0.0401	0.0550	0.0308
	β_2	0.0061	0.0029	**0.0006**	0.0069	0.0027	0.0007	0.0051	0.0060	0.0024
70	β_0	0.0213	0.0113	0.0304	0.0155	**0.0066**	0.0180	**0.0066**	0.0241	0.1080
	β_1	0.0397	0.0354	0.0435	0.0388	0.0375	0.0375	0.0375	0.0396	**0.0250**
	β_2	0.0006	0.0005	0.0012	0.0006	**0.0003**	0.0007	**0.0003**	0.0006	0.0024
100	β_0	0.0496	0.0399	0.0284	0.0501	0.0428	0.0335	0.0504	0.0499	**0.0105**
	β_1	0.0318	0.0088	0.0062	0.0319	0.0083	**0.0048**	0.0284	0.0311	0.0222
	β_2	0.0017	0.0015	0.0009	0.0017	0.0016	0.0012	0.0017	0.0017	**0.0008**

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าความเอนเอียงที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.7 แสดง ค่าความเอนเอียงที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่า ค่าความเอนเอียงของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และค่าความเอนเอียงของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ

Tukey และวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ให้ค่าความเอนเอียงต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber และวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก ไม่มีสถานการณ์ที่ให้ค่าความเอนเอียงต่ำที่สุด

ตาราง 4.8 ค่าความแปรปรวนของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว

n	พารามิเตอร์	Variance								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	66.3323	43.3684	65.608	86.3699	47.8395	56.0625	**43.176**	66.4274	47.7326
	β_1	43.9164	**25.502**	31.3706	108.091	28.9442	57.6767	26.0183	43.9274	38.4904
	β_2	2.4146	2.0669	3.5003	3.8583	1.9440	1.8807	**1.6920**	2.4161	2.0972
50	β_0	10.4409	5.4091	7.2065	9.899	5.6735	**5.1321**	8.6898	10.4372	9.6018
	β_1	7.0479	2.6356	2.3092	6.7489	2.9942	**2.1084**	5.5861	7.0476	6.8902
	β_2	0.0428	0.0319	0.0512	0.0418	**0.0314**	0.0335	0.0371	0.0428	0.0413
70	β_0	6.3851	**3.3084**	4.7597	5.7570	3.4581	3.4558	5.6179	6.3897	6.0393
	β_1	4.5119	1.5153	1.2404	4.0994	1.6938	**1.1711**	3.8272	4.5134	4.4414
	β_2	0.0143	**0.0109**	0.0183	0.0135	**0.0109**	0.0127	0.0129	0.0143	0.0139
100	β_0	4.3035	**2.0969**	3.0623	3.8506	2.1641	2.2489	3.8589	4.3096	4.1422
	β_1	2.9719	0.9474	0.7597	2.7151	1.0382	**0.7157**	2.6364	2.9715	2.9423
	β_2	0.0048	**0.0034**	0.0059	0.0045	**0.0034**	0.0042	0.0044	0.0048	0.0047

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าความแปรปรวนที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.8 แสดง ค่าความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่า ค่าความแปรปรวนของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber ให้ค่าความแปรปรวนต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ไม่มีสถานการณ์ที่ให้ค่าความแปรปรวนต่ำที่สุด

ตาราง 4.9 ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 2

n	พารามิเตอร์	MSE								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	66.335	43.375	65.633	86.369	47.841	56.067	**43.177**	66.430	47.960
	β_1	43.920	**25.508**	31.374	108.09	28.947	57.677	26.019	43.930	38.511
	β_2	2.4148	2.0672	3.5009	3.8583	1.9441	1.8807	**1.6921**	2.4163	2.1003
50	β_0	10.444	5.4098	7.2065	9.9047	5.6739	**5.1321**	8.6923	10.441	9.6056
	β_1	7.0509	2.6359	2.3092	6.7517	2.9947	**2.1086**	5.5877	7.0506	6.8911
	β_2	0.0428	0.0319	0.0512	0.0419	**0.0315**	0.0335	0.0371	0.0428	0.0413
70	β_0	6.3856	**3.3085**	4.7606	5.7573	3.4582	3.4561	5.6183	6.3903	6.0509
	β_1	4.5135	1.5165	1.2422	4.1009	1.6952	**1.1725**	3.8284	4.5149	4.4421
	β_2	0.0143	**0.0109**	0.0183	0.0135	**0.0109**	0.0127	0.0129	0.0143	0.0139
100	β_0	4.3059	**2.0985**	3.0631	3.8531	2.1658	2.2501	3.8615	4.3121	4.1423
	β_1	2.9728	0.9475	0.7597	2.7161	1.0382	**0.7157**	2.6372	2.9725	2.9428
	β_2	0.0048	**0.0034**	0.0059	0.0045	**0.0034**	0.0042	0.0044	0.0048	0.0047

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.9 แสดง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่า ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่น้อยของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber ให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ไม่มีสถานการณ์ที่ให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด

ตาราง 4.10 ค่าความเอนเอียงของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว

n	พารามิเตอร์	Bias								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	0.0962	0.0954	0.1365	0.1438	**0.0199**	0.2419	0.0609	0.0989	0.3793
	β_1	0.0366	**0.0087**	0.0248	0.0668	0.0331	0.0577	0.0375	0.0359	0.0522
	β_2	0.0243	0.0256	0.0316	0.0181	0.0129	**0.0110**	0.0225	0.0244	0.0226
	β_3	0.1352	0.0873	**0.0364**	0.1038	0.0656	0.3494	0.0594	0.1337	0.2175
50	β_0	0.0384	0.0397	**0.0288**	0.0434	0.0489	0.0384	0.0439	0.0395	0.1616
	β_1	0.0062	0.0138	0.021	0.0163	0.0076	0.0138	0.0100	**0.0047**	0.0178
	β_2	0.0013	0.0012	**0.0001**	0.0021	0.0017	0.0008	0.0015	0.0013	0.0049
	β_3	0.0118	**0.0022**	0.0059	0.0298	0.0047	0.0092	0.0112	0.0111	0.0117
70	β_0	0.0062	0.0159	0.0279	0.0196	0.0088	0.0168	**0.0023**	0.0075	0.0846
	β_1	0.0436	0.0131	0.0077	0.0498	0.0181	**0.0011**	0.0440	0.0438	0.0573
	β_2	0.0005	0.001	0.0017	0.0009	0.0007	0.0010	**0.0003**	0.0005	0.0015
	β_3	0.0948	0.054	**0.0411**	0.0808	0.058	0.0436	0.0883	0.0949	0.1099
100	β_0	0.0857	0.0516	0.0397	0.0872	0.0525	**0.0322**	0.0803	0.0844	0.1426
	β_1	0.0171	0.0079	0.0048	0.0187	0.0101	**0.0042**	0.017	0.0167	0.0069
	β_2	0.0031	0.0021	0.0018	0.0031	0.0021	**0.0014**	0.0029	0.0031	0.0039
	β_3	0.0056	0.0048	**0.0006**	0.0072	0.0063	0.0083	0.0049	0.0056	0.0166

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าความเอนเอียงที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.10 แสดง ค่าความเอนเอียงที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ค่าความเอนเอียงของแต่ละวิธีที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก และค่าความเอนเอียงของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey ให้ค่าความเอนเอียงต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin และวิธีแบบเบส์โดยกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ไม่มีสถานการณ์ที่ให้ค่าความเอนเอียงต่ำที่สุด

ตาราง 4.11 ค่าความแปรปรวนของวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว

n	พารามิเตอร์	Variance								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	82.473	**55.269**	87.004	118.47	63.002	214.75	58.706	82.520	56.155
	β_1	48.898	**31.015**	41.360	74.086	35.598	107.71	32.185	48.911	41.980
	β_2	2.6197	2.1815	3.8673	3.8916	2.1313	3.1282	**1.9583**	2.6195	2.2058
	β_3	48.224	**31.066**	42.272	79.010	34.978	31.375	31.929	48.217	41.458
50	β_0	10.616	**5.7655**	8.0747	10.360	6.1930	5.7694	8.6063	10.621	9.7515
	β_1	7.2568	2.8329	2.5475	6.9086	3.2618	**2.3458**	5.6211	7.2550	7.0694
	β_2	0.0429	**0.0330**	0.0547	0.0424	0.0329	0.0356	0.0367	0.0429	0.0414
	β_3	6.7422	2.6997	2.3935	6.525	3.1082	**2.2397**	5.2744	6.7431	6.5765
70	β_0	7.1320	**3.5407**	4.8625	6.7019	3.7843	3.5991	6.1784	7.1419	6.7302
	β_1	4.5742	1.6890	1.4233	4.293	1.9075	**1.3532**	3.8661	4.5742	4.5048
	β_2	0.015	**0.0107**	0.0177	0.0146	0.0108	0.0122	0.0135	0.0150	0.0146
	β_3	4.3872	1.5959	1.3651	4.1070	1.8095	**1.2828**	3.7062	4.3868	4.3159
100	β_0	4.4432	**2.1657**	3.1412	4.0576	2.2737	2.3903	3.9855	4.4470	4.2723
	β_1	2.8862	0.9765	0.8531	2.6910	1.0816	**0.7989**	2.5667	2.8874	2.8560
	β_2	0.0047	**0.0034**	0.0058	0.0045	**0.0034**	0.0043	0.0044	0.0047	0.0047
	β_3	2.9347	0.9931	0.8321	2.7039	1.1025	**0.7885**	2.6148	2.9347	2.9028

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าความแปรปรวนที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.11 แสดง ค่าความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ค่าความแปรปรวนของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber ให้ค่าความแปรปรวนต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ไม่มีสถานการณ์ที่ให้ค่าแปรปรวนต่ำที่สุด

ตาราง 4.12 ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอย เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว

n	พารามิเตอร์	MSE								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
15	β_0	82.482	**55.278**	87.022	118.49	63.002	214.81	58.710	82.530	56.298
	β_1	48.899	**31.015**	41.361	74.090	35.599	107.71	32.186	48.913	41.983
	β_2	2.6203	2.1822	3.8683	3.8919	2.1314	3.1283	**1.9588**	2.6202	2.2064
	β_3	48.242	**31.074**	42.273	79.021	34.982	31.497	31.933	48.234	41.506
50	β_0	10.617	**5.7671**	8.0755	10.362	6.1954	5.7708	8.6082	10.622	9.7776
	β_1	7.2569	2.8332	2.5479	6.9088	3.2619	**2.3460**	5.6212	7.2551	7.0697
	β_2	0.0429	0.0330	0.0547	0.0424	**0.0329**	0.0356	0.0367	0.0429	0.0414
	β_3	6.7424	2.6997	2.3935	6.5259	3.1083	**2.2398**	5.2745	6.7432	6.5766
70	β_0	7.1320	**3.5409**	4.8633	6.7024	3.7844	3.5993	6.1784	7.1419	6.7374
	β_1	4.5761	1.6892	1.4233	4.2955	1.9078	**1.3532**	3.8680	4.5762	4.5081
	β_2	0.0150	**0.0107**	0.0177	0.0146	0.0108	0.0122	0.0135	0.0150	0.0146
	β_3	4.3962	1.5988	1.3668	4.1135	1.8128	**1.2847**	3.7140	4.3958	4.3281
100	β_0	4.4505	**2.1683**	3.1427	4.0652	2.2765	2.3913	3.9919	4.4542	4.296
	β_1	2.8865	0.9766	0.8531	2.6914	1.0817	**0.7990**	2.5670	2.8877	2.8561
	β_2	0.0047	**0.0034**	0.0058	0.0045	**0.0034**	0.0043	0.0044	0.0047	0.0047
	β_3	2.9347	0.9931	0.8321	2.7040	1.1026	**0.7886**	2.6148	2.9347	2.9030

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.12 แสดง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่น้อยของทุกวิธีแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber ให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ รองลงมาคือวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ไม่มีสถานการณ์ที่ให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด

4.2.3 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

ผลการเปรียบเทียบในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดได้ผล ดังนี้

ตาราง 4.13 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย

จำนวนตัวแปรอิสระ	*n*	AMSE								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
2	15	1.3121	1.1107	1.4368	1.6701	1.1229	2.2454	1.1409	1.3122	**1.0883**
	50	0.2445	**0.1796**	0.1978	0.2149	0.1842	0.1803	0.2129	0.2448	0.2355
	70	0.1688	**0.1234**	0.1335	0.1407	0.1252	0.1248	0.1429	0.1688	0.1651
	100	0.1140	**0.0816**	0.0871	0.0919	0.0823	0.0831	0.0937	0.1141	0.1125
3	15	1.6625	1.4587	1.9605	2.4295	1.4917	9.6617	1.5221	1.6643	**1.3454**
	50	0.2687	0.2015	0.2212	0.2468	0.2055	**0.1988**	0.2365	0.2687	0.2589
	70	0.1823	**0.1329**	0.1429	0.1608	0.1358	0.1337	0.1591	0.1824	0.1778
	100	0.1187	**0.0856**	0.0912	0.1016	0.0871	0.0874	0.1019	0.1188	0.1173

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตาราง 4.13 สรุปผลได้ดังนี้ กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่า ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีแบบเบส์โดยกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์มีค่าต่ำที่สุด แต่ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 70 และ 100 ค่าเฉลี่ยของคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber มีค่าต่ำที่สุด กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์มีค่าต่ำที่สุด แต่ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey มีค่าต่ำที่สุด ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70 และ100 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber มีค่าต่ำที่สุด ซึ่งค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลัง

สองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยของแต่ละวิธีเปรียบเทียบกับวิธีมีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด มีค่าใกล้เคียงกัน เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตาราง 4.14 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยเมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก

จำนวนตัวแปรอิสระ	n	AMSE								
		วิธีประมาณ								
		OLS	WLSH	WLST	WLSN	BH	BT	BN	Bay-Non	Bay-In
2	15	37.5567	23.650	33.503	66.106	26.244	38.541	**23.630**	37.592	29.524
	50	5.8462	2.6925	3.1889	5.5661	2.9000	**2.4247**	4.7724	5.8448	5.5127
	70	3.6377	1.6119	2.0071	3.2906	1.7214	**1.5471**	3.1533	3.6398	3.5023
	100	2.4278	1.0165	1.2762	2.1912	1.0692	**0.9899**	2.1677	2.4298	2.3633
3	15	45.5612	**29.887**	43.631	68.874	33.929	89.289	31.197	45.574	35.498
	50	6.1649	2.8833	3.2679	5.9598	3.1496	**2.5981**	4.8852	6.1660	5.8663
	70	4.0298	1.7099	1.9178	3.7815	1.8789	**1.5624**	3.4435	4.0322	3.8971
	100	2.5691	1.0354	1.2085	2.3663	1.1161	**0.9958**	2.2945	2.5703	2.5141

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตาราง 4.14 สรุปผลได้ดังนี้ กรณีเมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก กรณีตัวแปรอิสระ 2 ตัว พบว่า ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin มีค่าต่ำที่สุด แต่ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 70 และ 100 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey มีค่าต่ำที่สุด กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว พบว่า ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber มีค่าต่ำที่สุด แต่ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 70 และ 100 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey มีค่าต่ำที่สุด รองลงมาคือวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey

ตาราง 4.15 สรุปวิธีประมาณสัมประสิทธิ์ถดถอยที่มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่น้อยที่สุดในแต่ละสถานการณ์

n	**ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่**			
	ระดับน้อย		**ระดับมาก**	
	ตัวแปรอิสระ 2 ตัว	**ตัวแปรอิสระ 3 ตัว**	**ตัวแปรอิสระ 2 ตัว**	**ตัวแปรอิสระ 3 ตัว**
15	Bay-In	Bay-In	BN	WLSH
50	WLSH	BT	BT	BT
70	WLSH	WLSH	BT	BT
100	WLSH	WLSH	BT	BT

จากตาราง 4.15 สรุปผลได้ดังนี้ กรณีเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับน้อย พบว่า ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์มีค่าต่ำที่สุด แต่ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 70 และ 100 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber มีค่าต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่ กรณีเกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ระดับมาก ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber มีค่าต่ำที่สุด แต่ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50, 70 และ 100 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey มีค่าต่ำที่สุด

บทที่ 5

บทสรุป

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบพหุคูณโดยผสมวิธีบูตสแทร็ปกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin และเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ จำนวน 6 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ ซึ่งใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15, 50, 70 และ 100 จำนวนตัวแปรอิสระเท่ากับ 2 และ 3 ตัว ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยได้จากการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล โดยใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ผลการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ จำนวน 9 วิธี มีรายละเอียดดังนี้

กรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่อยู่ในระดับน้อย เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก (n=15) วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ จะให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด แต่เมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 50 เป็นต้นไป วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber จะให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดเป็นส่วนใหญ่

กรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่อยู่ในระดับมาก เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก (n=15) วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Noor-Ul-Amin และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Huber ให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด แต่เมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 50 เป็นต้นไป วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey จะให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด

นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของทั้ง 9 วิธี มีแนวโน้มลดลงและมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น แต่เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนของความ

คลาดเคลื่อนไม่คงที่มากขึ้น ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของทั้ง 9 วิธี มีค่าเพิ่มขึ้นในทุกสถานการณ์

5.2 อภิปรายผล

จากการพิจารณาค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีประมาณทั้ง 9 วิธี พบว่า วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด ในกรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่อยู่ในระดับน้อย และขนาดตัวอย่างเล็ก (n=15) เนื่องจากวิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ เป็นวิธีที่นำข้อมูลในอดีตมาใช้ประโยชน์ในการประมาณค่า จึงให้การประมาณค่าที่ค่อนข้างแม่นยำ ซึ่งสอดคล้องกับบทความของ Will Koehrsen (2021) ที่ศึกษาความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการถดถอยเชิงเส้นแบบเบส์ พบว่า ในสถานการณ์ที่ข้อมูลมีจำกัดและมีข้อมูลในอดีตที่เป็นประโยชน์ ควรใช้วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย เพราะวิธีแบบเบส์สร้างการประมาณเบื้องต้นและมีการปรับปรุงการประมาณค่าให้ดีขึ้นเมื่อรวบรวมข้อมูลที่เป็นประโยชน์ แต่เมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 50 เป็นต้นไป วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber ให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ นิธิภัทร กมลสุข (2563) ที่ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีความแกร่งสำหรับตัวแบบการถดถอยด้วยวิธีประมาณค่าเอ็มและวิธีประมาณค่าเอส พบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก เมื่อใช้ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนของ Huber มีประสิทธิภาพดีที่สุดกรณีมีค่าผิดปรกติระดับน้อย ซึ่งการเกิดค่าผิดปรกติเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

กรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่อยู่ในระดับมาก เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก (n=15) วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Noor-Ul-Amin และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber ให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Noor-Ul-Amin, et al (2008) ที่ศึกษาพัฒนาฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักแบบเอ็มด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักในตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย กรณีที่มีค่าผิดปรกติในข้อมูล พบว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Noor-Ul-Amin มีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีการประมาณค่าแบบเอ็ม เมื่อเกิดค่าผิดปรกติในข้อมูลในระดับที่มากและมีจำนวนมาก ซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ และสอดคล้องกับ นิธิภัทร กมลสุข (2563) ที่ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีความแกร่งสำหรับตัวแบบการถดถอยด้วยวิธีประมาณค่าเอ็ม และวิธีประมาณค่าเอส พบว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนัก เมื่อใช้ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนของ Huber มีประสิทธิภาพดีที่สุดกรณีมีค่า

ผิดปรกติระดับน้อย แต่เนื่องจากขนาดตัวอย่างเล็ก (*n*=15) จำนวนค่าผิดปรกติในข้อมูลยังไม่มาก ทำให้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber ยังมีประสิทธิภาพที่ดีอยู่ แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 50 เป็นต้นไป วิธีบูตสแทร็ปโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Tukey ให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด ซึ่งสอดคล้องกันงานวิจัยของ Shankar Subramanian, et al (1988) ที่ศึกษาการวิเคราะห์การถดถอยที่มีความแกร่งต่อความแปรปรวนไม่คงที่ พบว่าเมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ระดับมาก มีค่าผิดปกติจำนวนมาก วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของ Tukey มีประสิทธิภาพที่สุด

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. งานวิจัยนี้ได้พัฒนาวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อเกิดปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่ โดยผสมวิธีบูตสแทร็ปกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin และเปรียบเทียบกับวิธีประมาณ 6 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักโดยวิธีของ Huber วิธีของ Tukey และวิธีของ Noor-Ul-Amin วิธีแบบเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศน้อยมาก และการแจกแจงก่อนที่ให้สารสนเทศที่เป็นประโยชน์ โดยผู้ที่สนใจอาจศึกษาวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีอื่น ๆ ในโอกาศต่อไป

2. งานวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ จำนวนตัวแปรอิสระ 2 และ 3 ตัว ดังนั้นควรศึกษาสถานการณ์อื่น เช่น ตัวแปรอิสระ 4 5 หรือ 6 ตัว

3. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย ในกรณีที่ความแปรปรวนไม่คงที่รูปแบบอื่น

บรรณานุกรม

กิตติ ตันติจินดา. (2546). *การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัมประสิทธิ์การถดถอยในสมการเชิงเส้นเดียว เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเบ้ขวา.* กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์.

เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี. (2549). *การวิเคราะห์การถดถอย.* พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ฑิฆัมพร บุญญูมาส. (2554). *การเปรียบเทียบวิธีการประมาณสำหรับการวิเคราะห์ความ ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่ในการแจกแจงแบบล็อกนอร์มัลและแกมมา.* กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์.

ณัฐภาวรณ์ รอดรัตษะ. (2553). *การศึกษาเปรียบเทียบประมาณตัวแบบความถดถอยเชิงเส้นด้วยวิธีบูตสแทร็ปแบบใช้พารามิเตอร์และไม่ใช้พารามิเตอร์.* กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์.

ณัฐวิชญ์ ทองเพชร. (2557). *การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงในการแจกแจงแบบนิเสธทวินาม.* พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.

นพคุณ บุญพระคุมครอง. (2551). *การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย กรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่.* พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.

นิธิภัทร กลมสุข. (2563). *การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการถดถอยที่แกร่งด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีประมาณค่าเอส.* กรุงเทพ ฯ: สถาบันการจัดการปัญญาภิวัฒน์.

พจนานุกรมศัพท์สถิติศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา. (2561). พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ, สำนักงานราชบัณฑิตยสภา.

พีรวัฒน์ เสรีวัฒนนุกูล. (2555). *การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่.* กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์.

ภูวษา แซ่อุ้ย. (2559). *การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดด้วยวิธีแบบเบส์ กำลังสองน้อยที่สุด และวิธีบูตสแทร็ปแบบใช้พารามิเตอร์สำหรับตัวแบบถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย.* กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

เมทินี ชมพูสว่าง. (2564). *ความแกร่งในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณสำหรับค่าผิดปกติในตัวแปรตาม. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.*

วิโรจน์ มงคลเทพ. (2545). *ประสิทธิภาพของตัวประมาณในสมการถดถอยพหุคูณ กรณี ความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่ และมีอัตตสหสัมพันธ์.* เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

วีรชาติ กิเลนทอง. (2562). *หลักการประมาณค่าแบบจุด.* สืบค้นเมื่อ 14 กันยายน 2563, จาก https://riped.ytcc.ac.th .

วีรพา ฐานะปรัชญ์ (2542). *การเปรียบเทียบค่าวิธีประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยของตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว.* กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์.

สุทิน ชนะบุญ. (2560). *สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูลในงานวิจัยเบื้องต้น.* สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดขอนแก่น.

สุพล ดุรงวัฒนา. (2549). *การวิเคราะห์ความถดถอย สำหรับงานวิจัยระดับสูง.* พิมพ์สวย.

Bello Abdulkadir Rasheed, R., Robiah Adnan, A., Seyed Ehsan Saffari S., & Kafi dano Pati, P. (2014). *Robust Weighted Least Squares Estimation of Regression Parameter in the Presence of Outliers and Heteroscedastic Errors.* University Technology Malaysia.

Carrol, R. & Ruppert, D. (1982) *Robust Estimation in Heteroscedastic Linear Models.* The American Statistician.

Daniel B. Wright. (2009). *Ten statisticians and Their Impacts for Psychologists.* Florida Internation University.

Euge Inzaugarat. (2019). *Linear and Bayesian Modeling in R.* Retrieved 4 September 2563 from https://towardsdatascience.com

Habshah Midi, MD.Shohel Rana & A.H.M. Rahmatullah Imon. (2009). *The Performance of Robust Weighted Least Squares in the Presence of Outliers and Heteroscedastic Error.* Laboratory of Applied and Computation Statistics, University Putra Malaysia.

Jan Rovny. (2020). *Multicollinearity and Heteroscedasticity.* form https://static1.quarespace.com .

Jeff Gill. (2008). *Bayesian Medthods A Social and Behavioral Sciences Approach.* Washington University.

John Fox. (2020). *Robust Regression.* Appendix to An R and S-PLUS Companion to Applied Regression.

Koop,G. (2003). *Bayesian Econometrics.* England: John Wiley.

MD.Shohel Rana & A.H.M. Rahmatullah Imon. (2015). *Two-step robust estimator in heteroscedastic regression model presence of outliers.* Putra Malaysia.

Mijeong Kim. (2017). *A study on robust regression estimators in heteroscedastic error model. Ewha Womans University.*

Muhammad Noor-Ul-Amin, N., Salah-Ud-Din Asghar, A., Muhammad Ahmad Shehza, S. & Aamir Sanaullah, A. (2008). *Redescending M-Estimator for Robust Regression.* BahauddinZakariya University. From https://www.journal.riverpublishers.com/

Niansheng Tang. (2020). *Bayesian Inference on Complicated Data.* Croatia.

Oseni, B., Olubusoye, O., & Adepoju, A. (2019). *Bayesian Estimation of Normal Linear Regression Model with Heteroscedasticity Error Structures. Asian Journal of Probability and Statistics*, https://doi.org/10.9734/ajpas/2019/v4i230111

Penerbit Akademia Baru. (2015). *Performance of Robust Wild Bootstrap Estimation of Linear Model in the Presence of Outliers and Heteroscedasticity Errors*. University teknilogi Malaysia.

Shankar, S & Richard ,T. Carson. (1988). *Robust Regression in The Presence of Heteroscedasticity.* San Diego : University of California.

WADA, K. & TSUBAKI, H. (2020). *Robust Tools for Statistical Data Editing and Imputation in R.* Tsuda University.

Will, K. (2021). *Introduction of Bayesian Linear Regression.* Cleveland : Case Western Reserve University.

Wu, C. F. J. (1986). *The Annals of Statistics.* U.S.A.: University of Wisconsin-Madison.