สัญญาเลขที่ R2558B034

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ของระบบสมการที่ลดทอน
จากสมการนาเวียร์-สโตกส์

Lie-Bäcklund transformations of the reduced system
from the Navier-Stokes equations

ผู้วิจัย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.โสภิตา ขำรอด
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สนับสนุนโดย
งบประมาณแผ่นดิน มหาวิทยาลัยนเรศวร
ปีงบประมาณ 2558

Research Title : Lie–Bäcklund transformations of the reduced system from The Navier–Stokes equations

Name : Asst. Prof. Dr. Sopita khamrod

Institute : School of Mathematics Institute of Science and Technology Naresuan University

Year : 2019

Abstract

The purpose of this research is to find the admitted Lie group of the reduced system from the Navier–Stokes equations by using the Bäacklund Transformations method.

$$U''' - UU'' + U'^2 = 0,$$
$$W'' - UW' = 0,$$
$$V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} - V_{zz} = 0$$

where U and W are depend on x, V is depend on t,x,z.

Theses system of equations are constructed from the Navier–Stokes equations rising to a partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. This is the first and necessary step in application of group analysis method to partial differential equation. A Lie group of Bäcklund transformations is constructed in this research and some invariant solutions are also found.

Keywords admitted Lie group; Bäcklund Transformations; invariant solutions; partially invariant solutions; Navier–Stokes equations

ชื่อโครงการ	:	การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ของระบบสมการที่ลดทอนจากสมการนาเวียร์-สโตกส์
ชื่อผู้วิจัย	:	ผศ. ดร. โสภิตา ขำรอด
หน่วยงานที่สังกัด	:	สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
ทำเสร็จเรียบร้อยเมื่อ	:	พ.ศ. 2562

บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้คือ หากลุ่มที่ยอมรับกับระบบสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์

$$U''' - UU'' + U'^2 = 0,$$
$$W'' - UW' = 0,$$
$$V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} - V_{zz} = 0$$

โดยที่ U และ W เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x, V เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t, x, z สมการนี้สร้างมาจากการหาผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ ซึ่งเป็นขั้นตอนที่จำเป็นในการประยุกต์ใช้วิธีของกลุ่มวิเคราะห์กับสมการเชิงอนุพันธ์ต่างๆ งานวิจัยนี้ได้สร้างการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ เพื่อนำไปหาผลเฉลยยืนยงของสมการดังกล่าว

คำสำคัญ กลุ่มลีย์ที่ยอมรับ; การแปลงแบบแบคก์ลันด์; ผลเฉลยยืนยง; ผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน; สมการนาเวียร์-สโตคส์

สารบัญ

บทที่ 1
รายละเอียดของโครงการวิจัย
(Executive Summary)

1.1 ชื่อโครงการภาษาไทยและภาษาอังกฤษ

(ภาษาไทย) การแปลงแบบลี-แบคก์ลันด์ของระบบสมการที่ลดทอนจากสมการนาเวียร์-สโตกส์

(ภาษาอังกฤษ) Lie-Bäcklund transformations of the reduced system from the Navier-Stokes equations

1.2 รายละเอียดของหัวหน้าโครงการ

1.2.1 ชื่อ นามสกุล (ภาษาไทย) ดร.โสภิตา ขำรอด

(ภาษาอังกฤษ) Dr.Sopita Khamrod

1.2.2 ตำแหน่งทางวิชาการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์

1.2.3 สถานที่ทำงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

จังหวัด พิษณุโลก รหัสไปรษณีย์ 65000

โทรศัพท์ 055 963241 โทรสาร 055 963201

โทรศัพท์มือถือ 089 1593051 e-mail : kuntimak@nu.ac.th

1.2.4 หน้าที่หรือความรับผิดชอบในโครงการ

หัวหน้าโครงการ

1.2.5 เวลาที่ใช้ในโครงการวิจัย เวลาที่ใช้ในโครงการวิจัย 20 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

1.3 ช่วงเวลาดำเนินโครงการ

ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2558 ถึง 31 กรกฎาคม 2562

1.4 คำสำคัญของโครงการวิจัย

ภาษาไทย : กลุ่มลีย์ที่ยอมรับ; การแปลงแบบแบคก์ลันด์ ; ผลเฉลยยืนยง; ผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน; สมการนาเวียร์-สโตคส์

ภาษาอังกฤษ : admitted Lie group; Bäcklund Transformations; invariant solutions; partially invariant solutions; Navier-Stokes equations

1.5 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่สำคัญต่างๆ เช่นทางฟิสิกส์ ทางชีววิทยา ทางเศรษฐศาสตร์ หรือ อื่นๆ สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้นในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinaty differential equations) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) สมการที่กล่าวมานี้ส่วนมากจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ชนิดไม่เป็นเชิงเส้น สิ่งที่สำคัญที่สุดคือจะต้องหาผลเฉลยของสมการเหล่านี้ เพราะถ้าเราหาผลเฉลยได้ก็จะสามารถนำไปอธิบายหรือทำนายปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นได้เมื่อมีเงื่อนไขกำหนดหรือตัวแปรบางตัวเปลี่ยนไป การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ชนิดไม่เป็นเชิงเส้น โดยทั่วไปแล้วเป็นเรื่องยากที่จะหาผลเฉลยออกมาในรูปผลเฉลยแม่นตรง(exact solutions) หรือผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytic solu-tions) วิธีการหาคำตอบหรือผลเฉลยเชิงตัวเลขจึงถูกนำมาใช้บ่อยในการแก้สมการเหล่านี้ เพราะเป็นวิธีที่มีความสะดวกและง่ายกว่า แต่ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นผลเฉลยแบบประมาณค่า (approximate solutions) อาจจะทำให้มีความคาดเคลื่อนจากความเป็นจริงได้

งานวิจัยนี้ สนใจในการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดไม่เป็นเชิงเส้น วิธีการหาผลเฉลยนี้มีหลายวิธี จะเลือกใช้วิธีใดนั้นขึ้นอยู่กับสมการที่ได้มาและปัญหาที่มีอยู่ วิธีการใช้กลุ่มวิเคราะห์ (Group analysis methods) เป็นวิธีการหนึ่งในการหาผลเฉลยเฉพาะ (particular solutions) ของผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งคิดค้นขึ้นโดย Sophus Lie นักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ ในปี ค.ศ. 1972 ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไปว่า สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดี ดังรายละเอียดจะพบใน Ovsiannikov (1978) และ Ibragimov (1994-1996) วิธีการนี้ ใช้คุณสมบัติของสมมาตร(symmetry) ของสมการเชิงอนุพันธ์ ในที่นี้ สมมาตร หมายถึงการแปลง (transformations) ซึ่งส่งผลเฉลยของสมการไปยังอีกผลเฉลยของสมการเดียวกัน ซึ่งผลที่ได้นี้ทำให้เราสามารถพบผลเฉลยใหม่ๆของสมการที่เราสนใจได้ ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการ ใช้กลุ่มวิเคราะห์จำแนกออกเป็นสองชนิดคือ ผลเฉลยยืนยง(invariant solutions) และผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน (partially invariant solutions) ส่วนการแปลงที่ใช้ในวิธีการของกลุ่มวิเคราะห์แบ่งออกเป็นสามชนิด คือ การแปลงแบบจุด (point trans-formations) การแปลงแบบคอนแทคท์ (contact transformations) และการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ (Lie-Bäcklund transformations)

งานวิจัยนี้ใช้การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ในการหากลุ่มที่ยอมรับ (admitted group) กับระบบสมการ

$$\begin{aligned} &U''' - UU'' + U'^2 = 0, \\ &W'' - UW' = 0, \\ &V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} - V_{zz} = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

โดยที่ U และ W เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x, V เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t,x,z

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นสมการลดทอน (reduced equation) ที่ได้มาจากวิธีการหาผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ สมการนาเวียร์-สโตคส์นี้เป็นสมการที่ถูกนำมาศึกษโดยตรงและประยุกต์เพื่อใช้วิเคราะห์ปรากฏการของธรรมชาติ ในเชิงฟิสิกส์เกี่ยวกับการไหลของของเหลว ซึ่งมีรูปสมการในรูปแบบกระชับคือ

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \Delta\mathbf{u} + f, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

โดยที่ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ เป็นเวกเตอร์ของความเร็ว, t คือเวลา, $p(\mathbf{x}, t)$ คือแรงดันของไหล, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ, $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ และ $\Delta \equiv (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)$ โดยที่ $\partial_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, (i = 1, 2, 3)$

ปัจจุบันนี้ยังไม่มีใครสามารถหาผลเฉลยแบบทั่วไป (general solutions) ของสมการนาเวียร์-สโตคส์ได้ มีเพียงแต่ผลเฉลยเฉพาะราย (paticular solutions) เท่านั้น

งานวิจัยนี้ต้องการประยุกต์กลุ่มวิเคราะห์ (group analysis) เพื่อหากลุ่มที่ยอมรับ(admitted group)กับสมการ (1) หรืออีกนัยหนึ่งคือหาการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ (Lie-Bäcklund transformations) ที่ส่งผลเฉลยของสมการ (1) ไปยังผลเฉลยอีกอันหนึ่งของสมการเดียวกัน ขั้นตอนถัดไปคือนำกลุ่มที่ยอมรับกับสมการที่ได้นั้นเพื่อไปหาผลเฉลยยืนยง (Invariant solutions) ของสมการ (1) ซึ่งผลเฉลยนี้สามารถนำไปหาผลเฉลยของสมการเวียร์-สโตคส์ได้ ผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ซึ่งจะทำให้เราเข้าใจสมการมากขึ้นและสามารถนำผลไปอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติได้

งานวิจัยที่ประสบความสำเร็จในการนำกลุ่มวิเคราะห์เข้ามาช่วยในการหาผลเฉลยของสมการ ดังจะเห็นได้จากงานของ Popovych, R.O. (1995), Ludlow, D.K., Charkson, P.A. and Bassom, A.P. (1998), Meleshko, S.V. (1994), Hematulin, A. and Meleshko, S.V. (2002) และ Thailert, K. (2005)

ในการหาผลเฉลยของอนุพันธ์ย่อยชนิดไม่เป็นเชิงเส้น เป็นเรื่องที่ยุ่งยากและซับซ้อนในขั้นตอนการวิเคราะห์หาผลเฉลย ดังนั้นจึงได้มีการนำเอาคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณซึ่งจะใช้วิธีทางพีชคณิตของคอมพิวเตอร์และใช้โปรแกรม REDUCE (Hearn, 1999) ซึ่งเป็นโปรแกรมเชิงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เข้ามาใช้ในการวิเคราะห์ ดังนั้นผู้วิจัยจึงเห็นความสำคัญในการประยุกต์ใช้กลุ่มวิเคราะห์เพื่อหาผลเฉลยของสมการ (1) เพราะถือได้ว่าเป็นหัวข้อที่น่าสนใจและมีประโยชน์ที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งซึ่งสามารถนำเอาไปใช้พัฒนาและก่อประโยชน์ต่อส่วนรวมได้ในอนาคต อีกทั้งผลลัพธ์ของโครงการวิจัยนี้ยังทำให้เกิดการพัฒนานวัตกรรมและองค์ความรู้ใหม่ทางวิทยาศาสตร์ และการพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ในวิทยาการต่างๆ รวมถึงการสร้างนักวิจัยรุ่นใหม่ให้เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องอีกด้วย

1.6 วัตถุประสงค์ของโครงการ

1.6.1 ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ โดยวิธีการประยุกต์ใช้กลุ่มวิเคราะห์กับระบบสมการที่ลดทอนมาจากสมการนาเวียร์-สโตคส์

1.6.2 ศึกษากลุ่มที่ยอมรับกับระบบสมการที่ลดทอนมาจากสมการนาเวียร์-สโตคส์โดยใช้การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์

1.6.3 หารูปแบบของผลเฉลยจากกลุ่มที่ยอมรับกับระบบสมการที่ลดทอนมาจากสมการนาเวียร์- สโตคส์

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1.7.1 เป็นองค์ความรู้ในการทำวิจัยสำหรับนักวิจัยเพื่อต่อยอดต่อไปในอนาคต

1.7.2 สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์สาขาที่เกี่ยวข้อง

1.7.3 มีผลงานตีพิมพ์ในระดับนานาชาติเพื่อเป็นการเผยแพร่ผลงานและชื่อเสียงของนักคณิตศาสตร์ไทย

1.8 ขอบเขตการศึกษา

ใช้วิธีการของกลุ่มวิเคราะห์ (group analysis method) โดยใช้วิธีการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ในการหากลุ่มที่ยอมรับ (admitted group) กับระบบสมการ (1.1) เพื่อไปสร้างตัวแทนผลเฉลยแล้วนำไปหาผลเฉลยยืนยงของระบบสมการ (1.1) เท่านั้น

บทที่ 2
เนื้อหางานวิจัย

ในหัวหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงวิธีการของกลุ่มวิเคราะห์ (group analysis) เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งผู้ที่คิดวิธีการนี้ขึ้นคือ Sophus Lie เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ ในปีค.ศ. 1972 ซึ่งถือได้ว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ระดับแนวหน้าคนหนึ่งในคริสศตวรรษที่ 19 โดยรายละเอียดสามารถศึกษาได้จากหนังสือ (Ovsiannikov (1978), Ibragimov (1994), (1995), (1996))

2.1 กลุ่มวิเคราะห์ (Lie Groups)

2.1.1 การแปลงแบบจุด (point transformation)

พิจารณา การส่งของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\overline{x}_i = f^i(x,u;a), \qquad \overline{u}_j = \varphi^j(x,u;a), \\ &(i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m) \end{aligned} \tag{2.1}$$

โดยที่ $(x,u) \in V \subset Z = R^n(x) \times R^m(u)$ และ a เป็นพารามิเตอร์, $a \in \Delta$ เมื่อ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ เป็นตัวแปรอิสระและ $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ เป็นตัวแปรตาม เซต V เป็นเซตเปิดใน Z, Δ เป็นช่วงสมมาตรของ R^1 เมื่อเทียบกับศูนย์

บทนิยาม 1 จะกล่าวว่าเซตของการแปลง (2.1) ว่าเป็นกลุ่มหนึ่งตัวพารามิเตอร์เฉพาะที่ (local one-parameter group) G^1 ถ้ามีสมบัติต่อไปนี้ :

1. $f(x,u;0) = x, \varphi(x,u;0) = u$ สำหรับทุกๆ $(x,u) \in V$
2. $f(f(x,u;a), \varphi(x,u;a);b) = f(x,u;a+b)$ และ
   $\varphi(f(x,u;a), \varphi(x,u;a);b) = \varphi(x,u;a+b)$ สำหรับทุก $a, b, a+b \in \Delta, (x,u) \in V$
3. ถ้า $a \in \Delta$ และ $(x,u;a) = x, \varphi(x,u;a) = u$ สำหรับทุก $(x,u) \in V$ แล้ว $a = 0$
4. $f, \varphi \in C_\infty(V \times \Delta)$

ฟังก์ชัน f^i และ φ^j สามารถกระจายเป็นอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) เมื่อเทียบกับพารามิเตอร์ a ในย่านจุดของ $a = 0$ ซึ่งจะทำให้เราเขียนการแปลงน้อยยิ่ง (2.1) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \overline{x}_i &\approx x_i + \xi^i(x,u)a, \\ \overline{u}^j &\approx u^j + \zeta^j(x,u)a \end{aligned}$$

ขณะที่

$$\xi^i(x,u)=\left.\frac{\partial f^i(x,u;a)}{\partial a}\right|_{a=0},\quad \zeta^j(x,u)=\left.\frac{\partial \varphi^j(x,u;a)}{\partial a}\right|_{a=0} \tag{2.2}$$

เวกเตอร์ (ξ,ζ) ที่กำหนดโดย (2.2) ขณะที่ $\xi=(\xi^1,...,\xi^n),\zeta=(\zeta^1,...,\zeta^m)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสกับเส้นโค้งที่ได้จากการแปลง (2.1) ณ จุด (x,u) จะเรียกเวกเตอร์เหล่านี้ว่าสนามของเวกเตอร์สัมผัสของกลุ่ม (tangent vector field of group) G^1 เราสามารถเขียนสนามเวกเตอร์ (vector field) ในรูปของตัวดำเนินการอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง (first-order differential operator)

$$X=\xi^i(x,u)\partial_{x_i}+\zeta^j(x,u)\partial_{u^j} \tag{2.3}$$

เราจะเรียกตัวดำเนินการ (2.3) ข้างต้นว่า ตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง (infinitesimal generators) ตัวดำเนินการ X เป็นการแปลงสเกลาร์ที่เปลี่ยนตัวแปร เรียก $\xi^i(x,u)$ และ $\zeta^j(x,u)$ ว่า การแปลงน้อยยิ่ง (infinitesimal transformations) ดังนั้นจะมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างกลุ่มการแปลง (2.1) กับ ตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง (2.3)

ทฤษฎีบท 1 กลุ่มลีเฉพาะที่ของการแปลง (2.1) สามารถตรวจสอบให้สมบูรณ์ได้โดยหาผลเฉลยของปัญหาโคชีของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d\bar{x}_i}{da}=\xi^i(\bar{x},\bar{u}),\ \frac{d\bar{u}^j}{da}=\zeta^j(\bar{x},\bar{u}) \tag{2.4}$$

ด้วยค่าเริ่มต้น

$$f^i(x,u,0)=x,\quad \varphi^j(x,u,0)=0$$

เราจะเรียกสมการ (2.4) นี้ว่า สมการลี

ต่อไปจะแสดงการสร้างการแปลงฟังก์ชันเหล่านี้ โดยใช้กลุ่มลีใน (2.1) สมมติว่ากำหนดฟังก์ชัน $u=u_0(x)$ มาให้ อันดับแรกเราแทนค่า $u_0(x)$ เข้าไปในพจน์ของการแปลงของตัวแปรอิสระใน (2.1)

$$\bar{x}=f(x,u_0(x);a) \tag{2.5}$$

จากนิยามข้อ 1 ได้ $f(x,u_0(x),0)=x$ แล้วจากทฤษฎีบทเกี่ยวกับอินเวอร์สฟังก์ชัน ในย่านจุด (neighborhood) ของ $a=0$ เราจะได้

$$x=g(\bar{x},a) \tag{2.6}$$

นำค่า $x=g(\bar{x},a)$ ไปแทนในสมการแรกของ (2.1) ทำให้ได้เอกลักษณ์

$$\bar{x}=f(g(\bar{x},a),u_0(g(\bar{x},a));a) \tag{2.7}$$

การแปลงจะเกิดขึ้นจากเราแทนค่า (2.6) เข้าไปในส่วนที่สองของ (2.1) ได้

$$u_a(\bar{x})=\varphi(g(\bar{x},a),u_0(g(\bar{x},a));a) \tag{2.8}$$

ทำให้ได้เอกลักษณ์

$$u_a(f(x,u_0(x),a))=\varphi(x,u_0(x);a) \tag{2.9}$$

ในการประยุกต์กลุ่มวิเคราะห์ของลีกับสมการอนุพันธ์นั้น อันดับแรกจำเป็นจะต้องรู้การแปลงอนุพันธ์ก่อน ดังนั้นเราจะศึกษาการแปลงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $u_0(x)$ ที่กำหนดให้ ต่อไปนี้จะเรียกว่า การต่อออกไปของกลุ่ม (prolongation of group) (2.1)

เพื่อให้ง่ายต่อการศึกษาความคิดนี้ เราจะเริ่มต้นในกรณีที่ $n=1, m=1$

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการแปลง $u_a(\bar{x})$ จะได้จาก (2.8) จะได้

$$\frac{\partial u_a(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x'}(x',a)[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(g(\bar{x},a),u_0(g(\bar{x},a);a) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(\bar{x},a),u_0(g(\bar{x},a);a)\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x}(g(\bar{x},a))]$$

อนุพันธ์ $\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}$ ในที่นี้ สามารถหาได้จากอนุพันธ์ด้านซ้ายและอนุพันธ์ทางด้านขวาของสมการ (2.7) เทียบกับ x' :

$$1 = (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial x})(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}})$$

เพราะว่า

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(\bar{x},0),u_0(g(\bar{x},0);0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(g(\bar{x},0),u_0(g(\bar{x},0);0) = 1$$

แล้วได้ค่า $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$ ในย่านจุดของ $a=0$

ฉะนั้น

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial x})} \tag{2.10}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial u_a(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{\frac{\partial \varphi(x,u_0(x);a)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x,u_0(x);a)}{\partial u}\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,u_0(x);a)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,u_0(x);a)}{\partial u}\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}} = F(x,u_0(x),p(x);a) \tag{2.11}$$

โดย $p_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ และเราจะได้การแปลงอนุพันธ์

$$p_a = Q(x,u_0,p;a)$$

ซึ่งทำให้ได้การต่อออกไปอันดับหนึ่ง $\underset{1}{G}$ ของกลุ่ม G กระทำในปริภูมิ (x,u_0,p) ดำเนินการในทำนองเดียวกันจะได้การต่อออกไปอันดับสอง $\underset{2}{G}$ สำหรับการต่อออกไปอันดับสาม สี่ และ อื่นๆ ก็สามารถดำเนินการในทำนองเดียวกันต่อไปเรื่อยๆ

หรือสามารถเขียนในรูปสั้นๆได้ดังนี้:

$$\underset{(k)}{X} F_\alpha (x,u,p)\big|_{(F=0)} = 0$$

โดยที่สัญลักษณ์ $\big|_{(F=0)}$ หมายถึง สมการ (2.16) ประกอบด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่หนึ่ง หาการต่อออกไปอันดับที่ k - th ของตัวก่อกำเนิด X

ขั้นที่สองดำเนินการ การต่อออกไป $\underset{k}{X}$ อันดับที่ k - th นั้น บนสมการ

$$F_\alpha = 0, (\alpha = 1,2,...,s)$$

ขั้นต่อไป ส่งผ่านไปยัง แมนิโฟลด์ที่อธิบายโดยสมการ (2.16)

เราเรียกสมการที่ได้เหล่านี้ว่า สมการกำหนด (determining equation) ผลเฉลยของสมการเหล่านี้จะประกอบกันเป็นพีชคณิตลี (Lie algebra) ของตัวก่อกำเนิด จะเรียกกลุ่มลีที่สมนัยกับพีชคณิตลีว่า กลุ่มลีที่ยอมรับได้ (admitted Lie group) และเรียกพีชคณิตลีเหล่านั้นว่า พีชคณิตลีที่ยอมรับได้ (admitted Lie algebra)

2.1.2 การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ (Lie-Bäcklund transformations)

พิจารณาการแปลง (transformation) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\bar{x}_i = f^i(x,u,p;a), \bar{u}^k = \varphi^k(x,u,p;a), \bar{p}^k_\alpha = \psi^k_\alpha(x,u,p;a) \tag{2.17}$$

โดยที่

$$p^k_\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}u^k}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}u^k}{\partial x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, i = 1,...,n, k = 1,...,m, |\alpha| \in \{1,2,...,q\}$$

ฟังก์ชัน f^i, φ^k และ ψ^k_α ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ x ตัวแปรตาม u และตัวแปรอนุพันธ์ p สำหรับออร์เดอร์ 1 ถึง q ($|\alpha| \in \{1,2,...,q\}$) ทำการขยายกลุ่มไปยังตัวแปร dx_i, du^k, dp^k_α โดยใช้สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
d\bar{x}_i &= \frac{\partial f^i}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f^i}{\partial u^s}du^s + \sum_{|\beta|=1}^{q}\frac{\partial f^i}{\partial p^s_\beta}dp^s_\beta, \\
d\bar{u}^k &= \frac{\partial \varphi^k}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^s}du^s + \sum_{|\beta|=1}^{q}\frac{\partial \varphi^k}{\partial p^s_\beta}dp^s_\beta, \\
d\bar{p}^k_\alpha &= \frac{\partial \psi^k_\alpha}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial \psi^k_\alpha}{\partial u^s}du^s + \sum_{|\beta|=1}^{q}\frac{\partial \psi^k_\alpha}{\partial p^s_\beta}dp^s_\beta
\end{aligned} \tag{2.18}$$

โดยที่ $i, j = 1,2,...,n, k, s = 1,2,...,m, |\alpha|, |\beta| \in \{1,2,...,q\}$

เรียกกลุ่มของการแปลงในสมการที่ (2.17) ว่า กลุ่มการแปลงสัมผัสของตัวแปรเสริมหนึ่งตัว (one-parameter group of tangent transformations) ถ้าสอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{aligned}
&du^k - p^k_i dx_i = 0, dp^k_\alpha - p^k_{\alpha,i}dx_i = 0, \\
&i = 1,2,...,n, k = 1,2,...,m, |\alpha| \in \{1,2,...,q-1\}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

หมายความว่าต้องสอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้ด้วย นั่นคือ

$$\mathrm{d}\overline{u}^k - \overline{p}_i^k \mathrm{d}\overline{x}_i = 0, \mathrm{d}\overline{p}_\alpha^k - \overline{p}_{\alpha,i}^k \mathrm{d}\overline{x}_i = 0,$$
$$i = 1,2,\dots,n,\ k = 1,2,\dots,m,\ |\alpha| \in \{1,2,\dots,q-1\} \tag{2.20}$$

ให้เซตของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง (infinitesimal generator) ของกลุ่มการแปลงนี้ถูกกำหนดโดยเซต (ξ,η,ζ) นั่นคือ

$$X = \xi^i \partial_{x_i} + \eta^k \partial_{u^k} + \sum_{|\alpha|=1}^{q} \zeta_\alpha^k \partial_{p_\alpha^k} \tag{2.21}$$

โดยที่

$$\xi^i = \left.\frac{\partial f^i}{\partial a}\right|_{a=0}, \eta^k = \left.\frac{\partial \varphi^k}{\partial a}\right|_{a=0}, \zeta_\alpha^k = \left.\frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial a}\right|_{a=0}$$

หลังจากแทนสมการ (2.18) ในสมการ (2.20) จะได้

$$\begin{gathered}
\left[\frac{\partial \varphi^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial \varphi^k}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s - p_i^k \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j} + \frac{\partial f^i}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial f^i}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s\right)\right] \mathrm{d}x_j \\
+ \sum_{|\beta|=q} \left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial p_\beta^s} - p_i^k \frac{\partial f^i}{\partial p_\beta^s}\right) \mathrm{d}p_\beta^s = 0 \\
\left[\frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s - p_{\alpha,i}^k \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j} + \frac{\partial f^i}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial f^i}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s\right)\right] \mathrm{d}x_j \\
+ \sum_{|\beta|=q} \left(\frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial p_\beta^s} - p_{\alpha,i}^k \frac{\partial f^i}{\partial p_\beta^s}\right) \mathrm{d}p_\beta^s = 0
\end{gathered} \tag{2.22}$$

$$(i,j = 1,2,\dots,n,\ k,s = 1,2,\dots,m,\ |\alpha| \in \{1,2,\dots,q-1\})$$

ด้านซ้ายของสมการอยู่ในรูปสมการเชิงเส้นของตัวแปรอนุพันธ์ $\mathrm{d}x_j, \mathrm{d}p_\beta^s,\ |\beta| = q$ และเนื่องจาก $\mathrm{d}x_j, \mathrm{d}p_\beta^s,\ |\beta| = q$ เป็นตัวแปรใดๆ จะได้ว่าสัมประสิทธิจะเป็นศูนย์ หลังจากหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริม a และแทนค่า $a = 0$ จะได้ว่า

$$\zeta_i^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta^k}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial \eta^k}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s - p_i^k \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial \xi^i}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s\right) = 0, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial p_\beta^s} - p_i^k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_\beta^s} = 0, \quad (|\beta| = q) \tag{2.24}$$

$$\zeta_{\alpha,i}^k = \frac{\partial \zeta_\alpha^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta_\alpha^k}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial \zeta_\alpha^k}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s - p_{\alpha,i}^k \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} p_j^s + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} \frac{\partial \xi^i}{\partial p_\beta^s} p_{\beta,j}^s\right) = 0, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \zeta_\alpha^k}{\partial p_\beta^s} - p_{\alpha,i}^k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_\beta^s} = 0, \quad (|\beta| = q) \tag{2.26}$$

$$(i,j = 1,2,\dots,n,\ k,s = 1,2,\dots,m,\ |\alpha| \in \{1,2,\dots,q-1\})$$

สมการ (2.23) และสมการ (2.25) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\zeta_i^k = D_j(\eta^k) - p_i^k D_j(\xi^i),\ \zeta_{\alpha,i}^k = D_j(\zeta_\alpha^k) - p_{\alpha,i}^k D_j(\xi^i),$$
$$(i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,m,\ |\alpha| \in \{1,2,...,q-1\}) \qquad (2.27)$$

โดยที่ตัวดำเนินการอนุพันธ์คือ

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + p_j^s \frac{\partial}{\partial u^s} + \sum_{|\beta|=1}^{q-1} p_{\beta,j}^s \frac{\partial}{\partial p_\beta^s}$$

เพื่อความเข้าใจง่ายจะเขียนสมการ (2.24) และสมการ (2.26) ในรูปของฟังก์ชัน

$$W^k = \eta^k - \xi^i p_i^k,\ W_\alpha^k = \zeta_\alpha^k - \xi^i p_{\alpha,i}^k,$$
$$(k = 1,2,...,m,\ |\alpha| \in \{1,2,...,q-1\}). \qquad (2.28)$$

พิจารณา $q = 1$ จากสมการ (2.20) จะได้ว่า

$$\frac{\partial W^k}{\partial p_i^s} - \xi^i \delta_{ks} = 0,\ (i = 1,2,...,n,\ k,s = 1,2,...,m)$$

สำหรับ $m > 1$ เลือก $k \neq s$ และ $k = s$ จากสมการที่ (2.28) จะได้ว่า

$$\xi^i = -\frac{\partial W^1}{\partial p_i^1} = -\frac{\partial W^2}{\partial p_i^2} = ... = -\frac{\partial W^m}{\partial p_i^m},\quad \frac{\partial W^k}{\partial p_i^s} = 0,$$
$$(i = 1,2,...,n,\ k,s = 1,2,...,m,\ k \neq s) \qquad (2.29)$$

ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ (2.29) สามารถเขียนได้ในรูปดังนี้

$$\xi^i = V_i(x,u),\quad W^k = U^k - \xi^i p_i^k = U^k - V_i p_i^k,$$
$$(i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,m) \qquad (2.30)$$

โดยที่ฟังก์ชัน $V_i = V_i(x,u)$ และ $U^k = U^k(x,u)$ ไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอนุพันธ์ ดังนั้นสมการ (2.17) เป็นการต่อออกไปของกลุ่มการแปลงแบบจุด

สำหรับ $m = 1$ จะได้ว่าสมการ (2.27) และ (2.28) อยู่ในรูป

$$\xi^i = -\frac{\partial W}{\partial p_i},\quad \zeta_i = \frac{\partial W}{\partial x_j} + p_i \frac{\partial W}{\partial u},\quad (i = 1,2,...,n) \qquad (2.31)$$

โดยที่ $u = u^1, W = W^1, p_i = p_i^1, \zeta_i = \zeta_i^1$

สังเกตุว่าจากนิยามของ W และสมการ (2.31) จะได้

$$\eta = W - p_i \frac{\partial W}{\partial p_i},\quad (i = 1,2,...,n)$$

เรียกฟังก์ชัน W ว่า ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (characteristic function) โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้สัมประสิทธิ์ของการต่อออกไปของตัวก่อกำเนิดดังนี้

$$\zeta_\alpha = D_i W - p_{\alpha,i} \frac{\partial W}{\partial p_i},\quad (|\alpha| \geq 1)$$

พิจารณา $q > 1$ จะได้สมการ (2.24) และ (2.26) อยู่ในรูป

$$\frac{\partial W^k}{\partial p_\beta^s} = 0,\quad \frac{\partial W_\alpha^k}{\partial p_\beta^s} + \xi^i \frac{\partial p_{\alpha,i}^k}{\partial p_\beta^s} = 0,$$
$$(k,s = 1,2,...,m,\ |\alpha| \in \{1,2,...,q-1\},\ |\beta| = q) \qquad (2.32)$$

สำหรับ $m>1$ เลือก $k \neq s$ จากสมการที่ (2.32) จะได้ว่า

$$\frac{\partial W_\alpha^k}{\partial p_\beta^s}=0, \quad (k,s=1,2,...,m, |\alpha| \in \{1,2,...,q-1\}, |\beta|=q) \tag{2.33}$$

เลือก $k=s$ และ $\beta=\alpha$ จากสมการที่ (2.24) จะได้ว่า

$$\xi^i=-\frac{\partial W_\alpha^k}{\partial p_{\alpha,i}^k}, \quad (i=1,2,...,n, k=1,2,...,m, |\alpha| \in \{1,2,...,q-1\}) \tag{2.34}$$

ในสมการ (2.32) เนื่องจากฟังก์ชัน ξ^i ไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอนุพันธ์ $p_{\alpha,i}^k, (|\beta|=q, k=1,2,..,m)$ หาผลเฉลยของสมการ (2.33) ได้เป็น

$$W_\alpha^k=U_\alpha^k-\xi^i p_{\alpha,i}^k, \quad (i=1,2,...,n, k=1,2,...,m, |\alpha| \in \{1,2,...,q-1\})$$

โดยที่ U_α^k ไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอนุพันธ์ออร์เดอร์ $q: p_\beta^s, \ (|\beta|=q, s=1,2,..,m)$

พิจารณาสมการ (2.32) และ (2.26) สัมประสิทธิ์ η^k และ $\zeta_\alpha^k, k=1,2,..,m, (|\alpha|=1,...,q-1)$ ขึ้นอยู่กับตัวแปรอนุพันธ์ออร์เดอร์ q โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน q จะได้สมการ (2.30)

ดังนั้นในกรณี $q=1$ การแปลงในสมการ (2.17) จะเป็นการต่อออกไปของกลุ่มการแปลงแบบจุด

สำหรับ $m=1$ จะได้สมการ (2.32) อยู่ในรูป

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial p_\beta}=0, (|\beta|=q), \\
&\frac{\partial W_\alpha}{\partial p_\beta}+\xi^i \frac{\partial p_{\alpha,i}}{\partial p_\beta}=0, (|\alpha| \in \{1,2,...,q-1\}, |\beta|=q)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

สำหรับทุก β,α จะมี i ที่ทำให้ $\beta \neq \{\alpha,i\}$ แล้วจะได้ว่า $\frac{\partial W}{\partial p_\beta}=0$ ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta}\left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial p_{\alpha,i}}+\xi^i\right)=\frac{\partial}{\partial p_{\alpha,i}}\left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial p_\beta}\right)+\frac{\partial \xi^i}{\partial p_\beta}=\frac{\partial \xi^i}{\partial p_\beta}=0$$

สำหรับ $n>1$ พิจารณาสำหรับ $1 \le i \le n$ และ $\beta, (|\beta|=q)$ จะมี $\alpha, (|\alpha|=q-1)$ และ k ที่ทำให้ $k \neq i, \beta=\{\alpha,k\}$ และ $\beta \neq \{\alpha,i\}$ ดังนั้นทำให้สัมประสิทธิ์ $\xi^i, i=1,...,n$ ไม่ขึ้นอยู่กับ p_β $(|\beta|=q)$ จะได้ว่า

$$W_\alpha=U_\alpha-\xi^i p_{\alpha,i}, (|\alpha|=q-1)$$

โดยที่ฟังก์ชัน U_α ไม่ขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน $p_\beta, (|\beta|=q)$ ด้วย

ทำนองเดียวกันกับกรณี $m>1$ จะได้ว่า การแปลงในสมการ (2.17) จะเป็นการต่อออกไปของกลุ่มการแปลงแบบคอนแทคท์ (contact transformations)

สำหรับ $n=1$ จะได้สมการ (2.32) อยู่ในรูป

$$W=\eta-\xi p_1, \quad W_1=\zeta_1-\xi p_2, \quad W_2=\zeta_2-\xi p_3,..., \quad W_{q-1}=\zeta_{q-1}-\xi p_q$$

และ

$$\frac{\partial W}{\partial p_q}=0,\quad \frac{\partial W_1}{\partial p_q}=0,\quad \frac{\partial W_2}{\partial p_q}=0,\dots,\quad \frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_q}=0,\quad \xi=-\frac{\partial W_{q-1}}{\partial p_q} \tag{2.36}$$

โดยสมการ (2.30) จะได้

$$DW_{q-2}=D(\zeta_{q-2}-\xi p_{q-1})=D\zeta_{q-2}-p_{q-1}D\xi-\xi p_q=\zeta_{q-1}-\xi p_q=W_{q-1}$$

โดยสมการ (2.36) จะได้

$$\xi=-\frac{\partial W_{q-1}}{\partial p_q}=-\frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_{q-1}}$$

ดังนั้น จะได้

$$\eta=W-p_1\frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_{q-1}},\quad \zeta_1=W_1-p_2\frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_{q-1}},\dots,\quad \zeta_{q-2}=W_{q-2}-p_{q-1}\frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_{q-1}},$$

$$\zeta_{q-1}=DW_{q-2}+\xi p_q=DW_{q-2}-p_q\frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_{q-1}}$$

$$=\frac{\partial W_{q-2}}{\partial x}+p_1\frac{\partial W_{q-2}}{\partial u}+p_2\frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_1}+\dots+p_{q-1}\frac{\partial W_{q-2}}{\partial p_{q-2}}$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน $\xi,\eta,\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_{q-1}$ ขึ้นอยู่กับตัวแปร $x,u,p_1,p_2,\dots,p_{q-1}$ เท่านั้น โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้การแปลงในสมการ (2.17) จะเป็นการต่อออกไปของกลุ่มการแปลงแบบคอนแทคท์

ดังนั้น จะเห็นว่า การแปลงในสมการ (2.17) จะไม่เป็นการต่อออกไปของกลุ่มการแปลงแบบจุด ในกรณีที่ $m=1$ ซึ่งกรณีนี้เป็นการต่อออกไปของกลุ่มการแปลงแบบคอนแทคท์และมีฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ $W=W(x_1,x_2,\dots,x_n,u,p_1,p_2,\dots,p_n)$ ที่ทำให้

$$\xi^i=-\frac{\partial W}{\partial p_i},\quad \eta=W-p_i\frac{\partial W}{\partial p_i},\quad \zeta_\alpha=D^\alpha W-p_{\alpha,i}\frac{\partial W}{\partial p_i},$$
$$(i=1,2,\dots,n,|\alpha|\geq 1)$$

คุณสมบัติดังกล่าวเรียกว่า การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ (Lie-Bäcklund transformations)

2.2 พีชคณิตลี (Lie Algebras)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราได้รู้เกี่ยวกับพีชคณิตลี ต่อไปจะได้กล่าวถึงการได้มาซึ่งพีชคณิตลีดังต่อไปนี้ โดยกำหนดให้

$$X_1=\xi_1^i(x)\partial_{x_i}$$
$$X_2=\xi_2^i(x)\partial_{x_i}$$

เป็นตัวดำเนินการน้อยยิ่ง (infinitesimal operators) เราจะนิยามตัวทำสลับที่ (commutator) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ตระกร้าลี (Lie bracket) โดย

$$[X_1,X_2]=X_1X_2-X_2X_1 \tag{2.37}$$

หรือ

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi_2^i) - X_2(\xi_1^i))\partial_{x_i}$$

จะเรียกปริภูมิเวกเตอร์ L ของตัวดำเนินการน้อยยิ่งว่า พีชคณิตลี (Lie algebra) ถ้าสมาชิกใน L ซึ่งเป็นตัวดำเนินการ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้ :

$$[aX_1 + bX_2, X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3],$$

$$[X_1, aX_2 + bX_3] = a[X_1, X_2] + b[X_1, X_3],$$

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1],$$

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$$

โดยที่ X_1, X_2, X_3 เป็นสมาชิกใดๆใน L ซึ่ง a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

เราจะเรียกปริภูมิย่อยเวกเตอร์ $H \subseteq L$ ว่าเป็นพีชคณิตย่อย (subalgebra) ของพีชคณิตลี L ถ้ามีสมบัติปิดภายใต้ตัวทำสลับที่ นั่นคือ $[H, H] \subseteq H$

กำหนดให้ L และ K เป็นพีชคณิตของตัวดำเนินการสองตัวใดๆ เราจะเรียกการส่งเชิงเส้น $f : L \to K$ ของ L บน K ว่า สาทิสสัณฐาน (homomorphism) ถ้ามีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$f([X_1, X_2]_L) = [f(X_1), f(X_2)]_K \tag{2.38}$$

สำหรับทุกๆ $X_1, X_2 \in L$

และจะเรียก สาทิสสัณฐานแบบหนึ่งต่อหนึ่งว่า สมสัณฐาน (isomorphism)

ถ้าให้ L_r เป็นพีชคณิตลี และ $X_1, X_2, ..., X_r$ เป็นฐานหลัก (basis) ของปริภูมิเวกเตอร์ L_r แล้ว

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^{\alpha} X_\alpha \;\; ; i, j = 1, 2, ... r$$

จะเรียกค่าคงตัว c_{ij}^{α} ว่าคงตัวโครงสร้าง (structure constants) ถ้ามีพีชคณิตลี L และ K ที่เป็นสองมิติ และสมสัณฐานกันแล้ว จะมีมูลฐานหลัก $\{X_1, ..., X_r\} \in L$ และ $\{Y_1, ..., Y_r\} \in K$ ซึ่งมูลฐานหลักทั้งสองจะมีค่าคงตัวโครงสร้างเดียวกัน เราจะเรียกสมสัณฐานจาก L ไปบน L ว่า อัตสัณฐาน (automorphism)

สมมติให้ $X_1, ..., X_r$ เป็นฐานหลักของพีชคณิต L_r ขนาด r -มิติ สำหรับทุกๆ $X \in L$ จะสามารถเขียนได้ในรูป $X = x^\alpha X_\alpha, \quad \alpha = 1, ..., r$

กำหนดให้ L_r^A เป็นผลการแผ่พีชคณิตลี(Lie algebra spanned) โดยตัวดำเนินการต่อไปนี้ :

$$E_i = c_{ij}^{\alpha} x^j \partial_{x^\alpha} \;\; ; i = 1, ..., r$$

พีชคณิต L_r^A ก่อกำเนิดกลุ่ม G^A ของการแปลงปริภูมิ $\{X_1, ..., X_n\}$ การแปลงนี้จะกำหนดอัตสัณฐานของพีชคณิตลี L_r ซึ่งเป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปในชื่อว่าอัตสัณฐานภายใน (inner automorphisms)

พีชคณิตย่อยสองตัวใดๆ จะคล้ายกัน (similar) ถ้ามีสมสัณฐานภายในซึ่งสามารถส่งพีชคณิตย่อยตัวหนึ่งไปยังอีกตัวหนึ่งได้ ความสัมพันธ์คล้ายกันนี้ จะแบ่งเซตของพีชคณิตย่อยทั้งหมดของ L_r เป็นพวกไม่มีส่วนร่วม (disjoint classes) ของพีชคณิตย่อยคล้ายกันเหล่านั้น ในผลแบ่งกั้นนี้ เราจัดเอาพวกของพีชคณิตย่อยที่มีมิติ s เดียวกันอยู่ด้วยกัน แล้วเลือกตัวแทนของแต่ละ

พวก เราจะเรียกเซตของพีชคณิตย่อยที่ได้จากตัวแทนของแต่ละพวกว่า ระบบที่เหมาะสม (optimal system) ของพีชคณิตย่อย s -มิติ ของพีชคณิตลี L_r

2.3 ผลเฉลยยืนยงและผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน (Invariant and Partially Invariant Solutions)

กำหนดให้ G^r เป็นกลุ่มเข้ากันได้กับสมการ (2.15) สมมุติให้ $X_1,\ldots,X_r$ เป็นฐานหลักของกลุ่มลี L^r ซึ่งสมนัยกับกลุ่มลี G^r

บทนิยาม 3 ฟังก์ชัน $\phi(x,u)$ จะเรียกว่ายืนยงภายใต้กลุ่ม G^r ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า

$$X_i\phi(x,u)=0,(i=1,2,\ldots,r) \tag{2.39}$$

เพื่อที่จะหาฟังก์ชันยืนยงนั้น จำเป็นต้องหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโอเวอร์ดีเทอร์มินด์ (overdetermined system of linear equations) (2.39) ระบบนี้จะเป็นระบบที่สมบูรณ์

เซตของฟังก์ชันยืนยงของตัวแปรอิสระ

$$J=\left(J^1(x,u),J^2(x,u),\ldots,J^{m+n-r}(x,u)\right)$$

ซึ่งฟังก์ชัน ϕ ยืนยงใดๆ สามารถเขียนในรูปของเซตต่อไปนี้ได้

$$\phi=\Psi(J^1,J^2,\ldots,J^{m+n-r})$$

จะเรียกว่า ฟังก์ชันยืนยงทั้งหมด(universal invariant function) ซึ่งตั้งเป็นข้อสังเกตได้ว่า ถ้าค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์จาโคเบียน $\dfrac{\partial(J^1,\ldots,J^{m+n-r})}{\partial(u_1,\ldots,u_m)}$ เท่ากับ k และจะไม่ทำให้เสียรูปทั่วไป เมื่อเราเลือกตัวยืนยง k ตัวแรกคือ $J^1,\ldots,J^k$ ที่ขึ้นอยู่กับ x และ u ที่มีค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์จาโคเบียน k , $k=rank\dfrac{\partial(J^1,\ldots,J^k)}{\partial(u_1,\ldots,u_m)}$ ส่วนตัวยืนยงตัวอื่นๆที่เหลือคือ $J^{k+1},J^{k+2},\ldots,J^{m+n-r}$ จะขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ x

ในการหาตัวแทน (representation) ของผลเฉลยยืนยงหรือผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วนอันดับแรกจำเป็นต้องแบ่งตัวยืนยงทั้งหมดออกเป็นสองส่วน วิธีกลุ่มวิเคราะห์กล่าวไว้ว่าจะต้องเขียนตัวยืนยงส่วนแรกเป็นฟังก์ชันของส่วนที่สอง

สำหรับผลเฉลยยืนยง $k=m$: จาโคเบียนของส่วนแรกเทียบกับตัวแปรตาม $u_1,\ldots,u_m$ จะไม่เท่ากับศูนย์ ฉะนั้น ผลเฉลยยืนยงจะมีตัวแทนคือ

$$J^i=\Psi^i(J^{m+1},\ldots,J^{m+n-r}),(i=1,2,\ldots,m) \tag{2.40}$$

จากตัวยืนยง m ตัวแรก $J^i,(i=1,2,\ldots,m)$ ฉะนั้นสามารถนิยามตัวแปรตามได้ดังนี้

$$u^i=\Phi^i(J^1,\ldots,J^m,x),(i=1,\ldots,m) \tag{2.41}$$

เราจะเรียกสัญลักษณ์ u^i หลังจากแทนค่า (2.40) ลงไป ว่า ตัวแทนของผลเฉลยยืนยง (representation of the invariant solution)

ต่อไปเราจะพิจารณาถึงการสร้างตัวแทนของผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน สมมติว่าค่าลำดับชั้น

$$\frac{\partial(J^1,...,J^{m+n-r})}{\partial(u_1,...,u_m)} = k \le m$$

และกำหนดให้ $1 \le l \le k \le m$ ผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วนของกลุ่มวิเคราะห์ ต้องการตัวยืนยง l ตัวแรก คือ $J^1,...,J^l$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวยืนยงตัวอื่นที่เหลือคือ $J^{l+1},...,J^{m+n-r}$: โดยที่

$$J^i = \Psi^i(J^{l+1},...,J^k,J^{k+1},...,J^{m+n-r}), (i=1,2,...,l) \tag{2.42}$$

จากตัวยืนยง l ตัวแรก $J^1,...,J^l$ เราสามารถ หาฟังก์ชัน u^i จำนวน l ตัว การไม่ทำให้เสียความเป็นรูปทั่วไป เราจะพิจารณา

$$u_i = \phi^i(J^1,...,J^l,u_{l+1},...,u_m,x), (i=1,...,l)$$

เราจะเรียกสัญลักษณ์ u^i หลังจากแทนค่า (2.42) ลงไป ว่า ตัวแทนของผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน

ขั้นต่อไปก็จะเป็นการสร้างผลเฉลยยืนยงหรือผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน ที่ประกอบด้วยการแทนค่าตัวแทนของผลเฉลยลงไปในระบบสมการเริ่มต้น จะได้ระบบฟังก์ชัน Ψ^i ซึ่งจะเรียกว่า ระบบลดทอน (reduced system)

สำหรับผลเฉลยยืนยงนั้น ระบบนี้จะเป็นระบบของสมการของฟังก์ชัน Ψ^i ที่มีตัวแปรอิสระจำนวน $n-r$ ตัว นั่นเอง

บทที่ 3

วิธีดำเนินงานวิจัย

3.1 ระบบสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์

ระบบสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ เป็นระบบสมการลดทอน (reduced system of equations) ที่ได้ มาจากวิธีการหาผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ ซึ่งถูกสร้างมาจากกลุ่มที่ยอมรับกับสมการนาเวียร์-สโตคส์ โดยสร้างจากพีชคณิตย่อย (Sub-algebra) ที่ถูกกำหนดโดยตัวก่อกำเนิด $\{\partial_t, \partial_x, \partial_z,\ t\partial_y + \partial_v\}$ วิธีสร้างแสดงดังต่อไปนี้

พิจารณาสมการนาเวียร์-สโตคส์ที่อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -p_x + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \tag{3.1}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -p_y + v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}, \tag{3.2}$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z + w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}, \tag{3.3}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0. \tag{3.4}$$

โดยที่ u, v, w และ p เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x, y, z และ t

จากพีชคณิตย่อย $\{\partial_t, \partial_x, \partial_z,\ t\partial_y + \partial_v\}$ สามารถคำนวณหาตัวยืนยงทั้งหมดของกลุ่มลีที่สมนัยกับพีชคณิตย่อยดังกล่าวคือ

$$u, w, p, x$$

ดังนั้นตัวแทนผลเฉลย ของผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วน คือ

$$u = U(x),\ w = W(x),\ p = P(x)$$

โดยที่ฟังก์ชัน $v = v(t, x, y, z)$

หลังจากแทนค่าตัวแทนผลเฉลยลงในสมการ นาเวียร์-สโตคส์ (3.1)-(3.4) จะได้สมการ

$$U'' - UU' - P' - 1 = 0, \tag{3.5}$$

$$v_t + Uv_x + vv_y + Wv_z - (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) = 0, \tag{3.6}$$

$$W'' - UW' = 0, \tag{3.7}$$

$$U' + v_y = 0 \tag{3.8}$$

อินทิเกรตแก้ระบบสมการหาผลเฉลยของสมการ (3.5) และ (3.8) ได้

$$P = U' - 2^{-1}U^2 - x + C_1 \text{ และ } v = -U'y + V(t, x, z)$$

ค่าคงที่ C_1 สามารถกำหนดให้เป็นศูนย์โดยใช้คุณสมบัติของความดัน p คือกำหนดให้ความดันขึ้นอยู่กับฟังก์ชันเวลาอย่างเดียว

แทนค่า v ในสมการ (3.6) จะได้

$$V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} - V_{zz} + y(U''' - UU'' + U'^2) = 0$$

เนื่องจาก U,V และ W ไม่ขึ้นกับตัวแปร y ดังนั้นสามารถแยก(split)สมการสุดท้ายโดยเทียบกับตัวแปร y ได้สมการข้างล่างนี้

$$U''' - UU'' + U'^2 = 0,$$
$$V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} + V_{zz} = 0$$

นั่นคือ ได้ผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วนของสมการนาเวียร์-สโตคส์เป็น

$$u = U(x),\ v = -U'y + V(t,x,z),\ w = W(x),\ P = U' - 2^{-1}U^2$$

โดยที่ ฟังก์ชัน $U(x)$, $W(x)$ และ $V(t,x,z)$ สอดคล้องกับสมการลดทอนดังนี้

$$\begin{aligned} &U''' - UU'' + U'^2 = 0, \\ &W'' - UW' = 0, \\ &V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} + V_{zz} = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2 สมการกำหนดของระบบสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์

ในหัวข้อนี้จะศึกษาหากกลุ่มลีที่ยอมรับกับสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์(3.9) โดยใช้การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ (Lie-Bäcklund transformations)

กำหนดให้ การแปลง (transformation) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\bar{x}_i = f^i(x,u,p;a),\ \bar{u}^k = \varphi^k(x,u,p;a),\ \bar{p}^k_\alpha = \psi^k_\alpha(x,u,p;a) \tag{3.10}$$

โดยที่

$$p^k_\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}u^k}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}u^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}},\quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,m,\ |\alpha| \in \{1,2,\ldots,q\}$$

ฟังก์ชัน f^i,φ^k และ ψ^k_α ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ x ตัวแปรตาม u และตัวแปรอนุพันธ์ p สำหรับออร์เดอร์ 1 ถึง q ($|\alpha| \in \{1,2,\ldots,q\}$)

กำหนดให้ ตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง ของกลุ่ม G^1 ถูกกำหนดโดย

$$X = \xi^i\partial_{x_i} + \eta^k\partial_{u^k} + \sum_{|\alpha|=1}^{q}\zeta^k_\alpha\partial_{p^k_\alpha} \tag{3.11}$$

โดยที่

$$\xi^i = \left.\frac{\partial f^i}{\partial a}\right|_{a=0},\ \eta^k = \left.\frac{\partial \varphi^k}{\partial a}\right|_{a=0},\ \zeta^k_\alpha = \left.\frac{\partial \psi^k_\alpha}{\partial a}\right|_{a=0}$$

สัมประสิทธิ์ของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง สำหรับอนุพันธ์อันดับสูงกว่าหรือเท่ากับ q ถูกกำหนดโดย

$$\zeta^j_{\alpha,i} = D_i\zeta^j_\alpha - p^j_{\alpha,k}D_i,\ (|\alpha| = q, q+1,\ldots)$$

โดยที่ D_i แทน อนุพันธ์ผลรวม (total derivative) เทียบกับตัวแปร x_i

การต่อออกไปของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง X สำหรับตัวแปรอนุพันธ์ $\mathrm{d}u^j, \mathrm{d}x_i$ และ $\mathrm{d}p^j_\alpha$ คือ

$$\widetilde{X} = X + \widetilde{\xi^i}\partial_{\mathrm{d}x_i} + \widetilde{\eta^k}\partial_{\mathrm{d}u^k} + \widetilde{\zeta^j_\alpha}\partial_{\mathrm{d}p^j_\alpha}$$

โดยที่

$$\widetilde{\xi^i} = \mathrm{d}\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s}\mathrm{d}u^s + \frac{\partial \xi^i}{\partial p^s_\beta}\mathrm{d}p^s_\beta,$$

$$\widetilde{\eta^k} = \mathrm{d}\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l + \frac{\partial \eta^k}{\partial u^s}\mathrm{d}u^s + \frac{\partial \eta^k}{\partial p^s_\beta}\mathrm{d}p^s_\beta,$$

$$\widetilde{\zeta^j_\alpha} = \mathrm{d}\zeta^j_\alpha = \frac{\partial \zeta^j_\alpha}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l + \frac{\partial \zeta^j_\alpha}{\partial u^s}\mathrm{d}u^s + \frac{\partial \zeta^j_\alpha}{\partial p^s_\beta}\mathrm{d}p^s_\beta$$

กลุ่มการแปลงสอดคล้องกับสมการกำหนด คือ

$$\left(\widetilde{\eta^j} - \widetilde{\zeta^j_i}\mathrm{d}x_i - p^j_i\widetilde{\xi^i}\right)\Big|_{(2.20)} = 0,$$

$$\left(\widetilde{\zeta^j_\alpha} - \widetilde{\zeta^j_{\alpha,k}}\mathrm{d}x_k - p^j_{\alpha,k}\widetilde{\xi^k}\right)\Big|_{(2.20)} = 0$$

กลุ่มของการแปลงในตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง X ถูกเรียกว่า ยอมรับกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$F(x,u,p) = 0 \tag{3.12}$$

ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งสอดคล้องกับสมการกำหนด

$$XF\big|_{(3.12)} = 0$$

การยืนยงของเงื่อนไขสำหรับการยอมรับกับกลุ่มการแปลง คือ

$$\left(\widetilde{\eta^j} - \widetilde{\zeta^j_i}\mathrm{d}x_i - p^j_i\widetilde{\xi^i}\right)\Big|_{(2.20),(3.12)} = 0,$$

$$\left(\widetilde{\zeta^j_\alpha} - \widetilde{\zeta^j_{\alpha,k}}\mathrm{d}x_k - p^j_{\alpha,k}\widetilde{\xi^k}\right)\Big|_{(2.20),(3.12)} = 0$$

ให้ฟังก์ชัน $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3)$ เป็นเวกเตอร์ของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่

$$F_1 = U''' - UU'' + U'^2 = 0,$$
$$F_2 = W'' - UW' = 0,$$
$$F_3 = V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} - V_{zz} = 0,$$

สมการกำหนด (determining equations) ของสมการ (3.9) คือ

$$\widetilde{X}F_k\big|_{[\mathcal{F}=0],(2.20)} = 0, \quad k = 1,2,3. \tag{3.12}$$

โดยที่ $[\mathcal{F}=0],(2.20)$ เป็นแมนิโฟลด์ ของตัวแปร t,x,z,U,V,W

เพื่อให้ง่ายในการคำนวณหาสมการกำหนด สามารถแปลงสมการ (3.9) ให้อยู่ในรูประบบสมการที่สมมูลกันดังนี้

$$\begin{gathered}\tilde{U}'' - U\tilde{U}' + \tilde{U}^2 = 0,\\ V_t + UV_x - V\tilde{U} + WV_z - V_{xx} - V_{zz} = 0,\\ W'' - UW' = 0,\\ \tilde{U} = U'\end{gathered} \tag{3.13}$$

กำหนดให้ ตัวแปรอิสระ คือ $x_1 = t, x_2 = s, x_3 = z$ ตัวแปรตามคือ

$$u_1 = U, u_2 = V, u_3 = W, u_4 = U'$$

โดยที่ u_1, u_3 และ u_4 เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x และ u_2 เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t, x, z ดังนั้นสามารถเขียนระบบสมการ (3.13) ให้อยู่ในรูประบบสมการของตัวแปรตามใหม่ดังนี้

$$\begin{gathered} u_4'' - u_1 u_4' + u_4^2 = 0, \\ (u_2)_t + u_1 (u_2)_x - u_2 u_4 + u_3 (u_2)_z - (u_2)_{xx} + (u_2)_{zz} = 0, \\ u_3'' - u_1 u_3' = 0, \\ u_4 = u_1' \end{gathered} \tag{3.14}$$

ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการกำหนด (3.12) โดยที่ $\widetilde{X}$ เป็นการต่อออกไปของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง X มีการคำนวณที่ยุ่งยากซับซ้อนเป็นอย่างมาก ดังนั้นจึงเขียนโปรแกรมช่วยคำนวณและวิเคราะห์ โดยใช้โปรแกรมลดรูป (REDUCE program) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะคำสั่งที่สำคัญๆ ที่เขียนในโปรแกรมเท่านั้น

ขั้นที่ 1 กำหนดตัวแปรต้นและตัวแปรตามและตัวแปรอนุพันธ์

กำหนดจำนวนตัวแปรต้นเป็นสามคือ t, x, z และตัวแปรตามเป็นสี่คือ u_1, u_2, u_3, u_4 โดยใช้คำสั่ง

nx:=3;

nu:=4;

กำหนดตัวแปรตาม u_1, u_2, u_3, u_4 โดยให้

u(1) = u_1 , u(2) = u_2 , u(3) = u_3 , u(4) = u_4

กำหนดตัวแปรอนุพันธ์ของตัวแปรตาม u_1, u_2, u_3, u_4 โดยให้

u(1,1) = $(u_1)_t$, u(1,2) = $(u_1)_x$, u(1,3) = $(u_1)_z$,

u(2,1) = $(u_2)_t$, u(2,2) = $(u_2)_x$, u(2,3) = $(u_2)_z$,

u(3,1) = $(u_3)_t$, u(3,2) = $(u_3)_x$, u(3,3) = $(u_3)_z$,

u(4,1) = $(u_4)_t$, u(4,2) = $(u_4)_x$, u(4,3) = $(u_4)_z$,

u(1,1,1) = $(u_1)_{tt}$, u(1,1,2) = $(u_1)_{tx}$, u(1,1,3) = $(u_1)_{tz}$,

u(1,2,2) = $(u_1)_{xx}$, u(1,2,3) = $(u_1)_{xz}$, u(1,3,3) = $(u_1)_{zz}$,

u(2,1,1) = $(u_2)_{tt}$, u(2,1,2) = $(u_2)_{tx}$, u(2,1,3) = $(u_2)_{tz}$,

u(2,2,2) = $(u_2)_{xx}$, u(2,2,3) = $(u_2)_{xz}$, u(2,3,3) = $(u_2)_{zz}$,

u(3,1,1) = $(u_3)_{tt}$, u(3,1,2) = $(u_3)_{tx}$, u(3,1,3) = $(u_3)_{tz}$,

u(3,2,2) = $(u_3)_{xx}$, u(3,2,3) = $(u_3)_{xz}$, u(3,3,3) = $(u_3)_{zz}$,

u(4,1,1) = $(u_4)_{tt}$, u(4,1,2) = $(u_4)_{xs}$, u(4,1,3) = $(u_4)_{tz}$,

u(4,2,2) = $(u_4)_{xx}$, u(4,2,3) = $(u_4)_{xz}$, u(4,3,3) = $(u_4)_{zz}$

กำหนดสมการเริ่มต้น (3.14) โดยใช้คำสั่ง

```
s(1) := u(4,2,2)-u(1)*u(4,2)+u(4)**2;
s(2) := u(2,1)+u(1)*u(2,2)-u(2)*u(4)+(u(3)+b*x(1))*u(2,3)-u(2,2,2)-u(2,3,3);
```

```
s(3) := u(3,2,2)-u(1)*u(3,2)-b;
s(4) := u(4)-u(1,2);
```

กำหนดตัวแปรการแปลงน้อยยิ่งในตัวก่อกำเนิด X โดยให้

kx(1) = $\xi^{t}(t,x,z,u_1,u_2,u_3,u_4)$

kx(2) = $\xi^{x}(t,x,z,u_1,u_2,u_3,u_4)$

kx(3) = $\xi^{z}(t,x,z,u_1,u_2,u_3,u_4)$

zu(1) = $\zeta^{u_1}(t,x,z,u_1,u_2,u_3,u_4)$

zu(2) = $\zeta^{u_2}(t,x,z,u_1,u_2,u_3,u_4)$

zu(3) = $\zeta^{u_3}(t,x,z,u_1,u_2,u_3,u_4)$

zu(4) = $\zeta^{u_4}(t,x,z,u_1,u_2,u_3,u_4)$

เขียนโปรแกรมกำหนดฟังก์ชันของการแปลงน้อยยิ่งให้ขึ้นกับตัวแปรต้นและตัวแปรตามดังนี้

```
for ju:=1:nu do for ku:=1:nu do depend zu(ju),u(ku);
for ju:=1:nu do for kxn:=1:nx do depend zu(ju),x(kxn);

for jx:=1:nx do for ku:=1:nu do depend kx(jx),u(ku);
for jx:=1:nx do for kxn:=1:nx do depend kx(jx),x(kxn);
```

สูตรโปรแกรมการต่อออกไปอันดับที่สองของตัวก่อกำเนิด X และแทนค่าตัวแปรข้างต้นในสมการกำหนด เขียนได้ดังนี้

```
jj1:=  for l:=1:nx sum for m:=1:nu sum
   df(s(nomu),u(m,l))*ffu(m,l) $
if nomu = koutlet then
write ("JJ1 = ",jj1);
jj2:=  for m:=1:nu sum
   df(s(nomu),u(m))*zu(m) $
if nomu = koutlet then
 write ("JJ2 = ",jj2);
jj3:=  for l:=1:nx sum
   kx(l)*df(s(nomu),x(l)) $
if nomu = koutlet then
 write ("JJ3 = ",jj3);
jj4 :=  for k := 1:nu sum
     for i:= 1:nx sum
```

```
for j:= i:nx sum
ffu(k,i,j)*df(s(nomu),u(k,i,j)) $
if nomu = koutlet then
 write ("JJ4 = ",jj4);
rru:=jj1+jj2+jj3+jj4 $
if nomu = koutlet then
write ("rru = ",rru);
```

เขียนโปรแกรมหาสมการกำหนด(determining equation) ได้ดังนี้

```
for i:=1:nu do begin
fu(i):=zu(i) - for l:=1:nx sum  kx(l)*u(i,l)$
if nomu = koutlet then
write "fu(",i,")=",fu(i)$

for i:=1:nu do for j:=1:nx do begin
 ffu(i,j):= df(fu(i),x(j)) +
 for m:=1:nu sum
  u(m,j)*df(fu(i),u(m))$
ffu(i,j):=ffu(i,j)+for k:=1:nua sum
  df(fu(i),ua(k))*( ua(k,j) + for l:=1:nu sum ua(k,nx+l)*u(l,j) );
if nomu = koutlet then
 write "ffu(",i,",",j,")=",ffu(i,j)$
end$

for i := 1:nu do
 for j := 1:nx do
  for k:= j:nx do
   begin
  ss:=-for l:=1:nx sum
        u(i,j,l)*(df(kx(l),x(k))+
 for kl:=1:nu sum u(kl,k)*df(kx(l),u(kl)) );
```

หลังจากได้สมการกำหนด เขียนโปรแกรมวิเคราะห์เพื่อแยก(split)ตัวแปรโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

```
for m:=1:ms do for l:=m:ms do for q:=l:ms do begin
h:=gkk(m,l,q);

ss:=df(df(df(rru,sk(m)),sk(l)),sk(q))/h;
rru:=rru-ss*sk(m)*sk(l)*sk(q);

if not (ss=0) then
write "fu(",nomu,",",m,",",l,",",q,") := ",num ss;
%clear fu(nomu,m,l,q);
end;

for m:=1:ms do for l:=m:ms do begin
if m=l then h:=2 else h:=1;
ss:=df(df(rru,sk(m)),sk(l))/h;
rru:=rru-ss*sk(m)*sk(l);

if not (ss=0) then
write "fu(",nomu,",",m,",",l,") := ",num ss;
%clear fu(nomu,m,l);
end;

for m:=1:ms do begin
ss:=df(rru,sk(m));
rru:=rru-ss*sk(m);

if not (ss=0) then
write "fu(",nomu,",",m,") := ",num ss;
clear ss;
end;
```

```
write "result rru(",nomu,") := ",rru;
write ("end of splitting");
```

หลังจากการแยก (split) ตัวแปร ได้ผลการรันโปรแกรมคำช่วยคำนวณ ซึ่งผลลัพธ์และรายละเอียดของโปรแกรมทั้งหมดได้แสดงไว้ในภาคผนวก A

บทที่ 4

ผลการวิจัย

4.1 กลุ่มลีย์-แบคก์ลันด์ที่ยอมรับกับระบบสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์

ในบทนี้เป็นการวิเคราะห์หากลุ่มที่ยอมรับกับระบบสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์(3.9) โดยใช้การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ (Lie-Bäcklund transformations) ซึ่งนำผลจากการรันโปรแกรมของสมการกำหนดมาแยก (split) ตัวแปรอนุพันธ์ โดยพิจารณาดูจากสัมประสิทธิ์ในสมการกำหนด หลักการวิเคราะห์แก้สมการเพื่อหาค่าฟังก์ชันการแปลงน้อยยิ่งทั้งหมด มีหลักการโดยทั่วไปคือนำผลเฉลยของสมการที่หาได้ง่ายที่สุดก่อนแล้วไปแทนในสมการที่เหลืออื่นๆ หลังจากนั้นก็รันผลซ้ำ หาผลเฉลยของระบบสมการไปเรื่อยๆ จากง่ายไปยาก จนสามารถหาผลเฉลยของระบบสมการได้ทั้งหมด แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นกลุ่มของการแปลงน้อยยิ่ง ซึ่งสมนัยกับกลุ่มที่ยอมรับกับสมการ (3.9) นั่นเอง

หลังจากการรันผลในครั้งสุดท้ายผลปรากฏว่าหาผลเฉลยของระบบสมการได้ทั้งหมด ซึ่งได้ผลลัพธ์จากการคำนวณ คือกลุ่มที่ยอมรับ (Admitted group) กับสมการ (3.9) ซึ่งประกอบด้วยฐาน (basis) ของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง มีจำนวนทั้งหมด 9 ตัว ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \partial_t, \\
X_2 &= \partial_x, \\
X_3 &= \partial_z, \\
X_4 &= V\partial_V, \\
X_5 &= t\partial_z + \partial_W, \\
X_6 &= U'\partial_V, \\
X_7 &= (tU'+1)\partial_V, \\
X_8 &= (W+zU')\partial_V, \\
X_9 &= 2U'\partial_{U'} + U\partial_U + W\partial_W - 2t\partial_t - x\partial_x - z\partial_z
\end{aligned}
$$

พิจารณากลุ่มการแปลงของการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ ที่สมนัยกับตัวก่อกำเนิดดังนี้

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= U'\partial_V, \\
Y_2 &= (tU'+1)\partial_V, \\
Y_3 &= (W+zU')\partial_V, \\
Y_4 &= 2U'\partial_{U'} + U\partial_U + W\partial_W - 2t\partial_t - x\partial_x - z\partial_z
\end{aligned}
$$

ซึ่งยอมรับกับระบบสมการ (3.9) จะได้ว่าสมนัยกับการแปลงดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
Y_1: \;& \bar{t} = t,\ \bar{x} = x,\ \bar{z} = z,\\
& \bar{U} = U,\ \bar{U}' = U',\ \bar{U}'' = U'',\ \bar{U}''' = UU'' - (U')^2,\\
& \bar{W} = W,\ \bar{W}' = W',\ \bar{W}'' = W'' = UW',\\
& \bar{V} = V + aU',\ \bar{V}_t = V_t,\ \bar{V}_z = V_z,\ \bar{V}_{zz} = V_{zz},\\
& \bar{V}_x = V_x + aU'',\ \bar{V}_{xx} = V_{xx} + a(UU'' - (U')^2),\\
Y_2: \;& \bar{t} = t,\ \bar{x} = x,\ \bar{z} = z,\\
& \bar{U} = U,\ \bar{U}' = U',\ \bar{U}'' = U'',\ \bar{U}''' = UU'' - (U')^2,\\
& \bar{W} = W,\ \bar{W}' = W',\ \bar{W}'' = W'' = UW',\\
& \bar{V} = V + a(tU' + 1),\ \bar{V}_t = V_t + aU',\ \bar{V}_z = V_z,\ \bar{V}_{zz} = V_{zz},\\
& \bar{V}_x = V_x + atU'',\ \bar{V}_{xx} = V_{xx} + at(UU'' - (U')^2),\\
Y_3: \;& \bar{t} = t,\ \bar{x} = x,\ \bar{z} = z,\\
& \bar{U} = U,\ \bar{U}' = U',\ \bar{U}'' = U'',\ \bar{U}''' = UU'' - (U')^2,\\
& \bar{W} = W,\ \bar{W}' = W',\ \bar{W}'' = W'' = UW',\\
& \bar{V} = V + a(W + zU'),\ \bar{V}_t = V_t, \bar{V}_z = V_z + aU',\\
& \bar{V}_{zz} = V_{zz}, \bar{V}_x = V_x + aW' + azU'',\\
& \bar{V}_{xx} = V_{xx} + aW'' + az(UU'' - (U')^2)\\
Y_4: \;& \bar{t} = te^{-2a},\ \bar{x} = xe^{-a},\ \bar{z} = ze^{-a},\\
& \bar{U} = Ue^{a},\ \bar{U}' = U'e^{2a},\ \bar{U}'' = U''e^{3a},\ \bar{U}''' = U'''e^{4a} = (UU'' - (U')^2)e^{4a},\\
& \bar{W} = We^{a},\ \bar{W}' = W'e^{2a},\ \bar{W}'' = W''e^{3a} = (UW')e^{3a},\\
& \bar{V} = V,\ \bar{V}_t = V_t e^{2a},\\
& \bar{V}_x = V_x e^{a},\ \bar{V}_{xx} = V_{xx}e^{2a} = (V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{zz})e^{2a},\\
& \bar{V}_z = V_z e^{a},\ \bar{V}_{zz} = V_{zz}e^{2a} = (V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx})e^{2a}
\end{aligned}
$$

4.2 ผลเฉลยยืนยงของระบบสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์

จากตัวดำเนินการพีชคณิตของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งทั้ง 9 ตัวข้างต้นสามารถนำมาสร้างผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.2.1 พีชคณิตย่อย $X_2, X_3 + X_4$

มูลฐานของพีคณิตย่อย ประกอบด้วย

$$X_2 = \partial_x,\ X_3 + X_4 = \partial_z + V\partial_V$$

เพื่อที่จะหาผลเฉลยยืนยง เราจำเป็นต้องหาฟังก์ชันยืนยงทั้งหมด (universal invariant) ก่อนโดยสมมติฟังก์ชัน

$$f = f(t, x, z, U, V, W)$$

เป็นฟังก์ชันยืนยงภายใต้ตัวก่อกำเนิด $X_2 = \partial_x$

หมายความว่า

$$f_x = 0$$

ดังนั้น จะได้ว่าฟังก์ชัน f ไม่ขึ้นกับตัวแปร x นั่นคือ $f = f(t,z,U,V,W)$
และการที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันยืนยงภายใต้ตัวก่อกำเนิด

$$X_3 + X_4 = \partial_z + V\partial_V$$

หมายความว่า

$$f_z + Vf_V = 0 \tag{4.1}$$

ระบบสมการลักษณะเฉพาะ (characteristics system) ของสมการ (4.1) คือ

$$\frac{dt}{0} = \frac{dz}{1} = \frac{dV}{V} = \frac{dU}{0} = \frac{dW}{0} \tag{4.2}$$

แก้สมการผลเฉลยโดยทั่วไปของสมการ $\frac{dt}{0} = \frac{dz}{1}$ จะได้ $t = C$

แก้สมการผลเฉลยโดยทั่วไปของสมการ $\frac{dz}{1} = \frac{dV}{V}$ จะได้ $Ve^{-z} = C$

แก้สมการผลเฉลยโดยทั่วไปของสมการ $\frac{dz}{1} = \frac{dU}{0}$ จะได้ $U = C$

แก้สมการผลเฉลยโดยทั่วไปของสมการ $\frac{dz}{1} = \frac{dW}{0}$ จะได้ $W = C$

ดังนั้นได้ตัวยืนยงทั้งหมด(universal invariant)ที่สอดคล้องกับพีชคณิตย่อย $X_2, X_3 + X_5$ คือ

$$t, U, Ve^{-z}, W$$

สร้างตัวแทนผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์–สโตคส์จากตัวยืนยงทั้งหมด (universal invariant)ได้เป็น

$$U = C_1, W = C_2, V = e^z F(t)$$

จากสมการลดทอนของสมการนาเวียร์–สโตคส์

$$\begin{aligned} &U''' - UU'' + U'^2 = 0, \\ &W'' - UW' = 0, \\ &V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} - V_{zz} = 0 \end{aligned}$$

หลังจากนำตัวแทนผลเฉลยยืนยงไปแทนในสมการข้างต้นจะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่งคือ

$$F'(t) + (C_2 - 1)F(t) = 0 \tag{4.3}$$

หาผลเฉลยของสมการ (4.3) ได้เป็น

$$F(t) = C_3 e^{(1-C_2)t}$$

โดยที่ C_3 เป็นค่าคงที่

ดังนั้นผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์–สโตคส์ที่สร้างจากพีคณิตย่อย $X_2, X_3 + X_5$ คือ

$$\begin{aligned} U &= C_1, \\ W &= C_2, \\ V &= C_3 e^{(1-C_2)t+z} \end{aligned}$$

โดยที่ C_1, C_2 และ C_3 เป็นค่าคงที่

4.2.2 **พีชคณิตย่อย** $X_2, X_1 + X_3 + X_4$

มูลฐานของพีชคณิตย่อย ประกอบด้วย

$$X_2 = \partial_x, X_1 + X_3 + X_4 = \partial_t + \partial_z + V\partial_V$$

หาฟังก์ชันยืนยงทั้งหมด(universal invariant)ได้ดังนี้

สมมติฟังก์ชัน

$$f = f(t, x, z, U, V, W)$$

เป็นฟังก์ชันยืนยงภายใต้ตัวก่อกำเนิด $X_2 = \partial_x$

ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างแรก จะได้ว่าฟังก์ชัน f ไม่ขึ้นกับตัวแปร x นั่นคือ

$$f = f(t, z, U, V, W)$$

และการที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันยืนยงภายใต้ตัวก่อกำเนิด

$$X_1 + X_3 + X_4 = \partial_t + \partial_z + V\partial_V$$

หมายความว่า

$$(X_1 + X_3 + X_4)f = 0$$

จะได้

$$f_t + f_z + Vf_V = 0 \tag{4.4}$$

ระบบสมการลักษณะเฉพาะ(characteristics system) ของสมการ (4.4) คือ

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{1} = \frac{dV}{V} = \frac{dU}{0} = \frac{dW}{0} \tag{4.5}$$

แก้สมการหาตัวยืนยงทั้งหมด ที่สอดคล้องกับพีชคณิตย่อย $X_2, X_1 + X_4 + X_5$ คือ

$$z - t, \frac{V}{e^t}, U, W$$

สร้างตัวแทนผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์–สโตคส์จากตัวยืนยงทั้งหมด (universal invariant)ได้เป็น

$$U = C_1, W = C_2, V = e^t F(\overline{z})$$

โดยที่ $F(\overline{z}), \overline{z} = z - t$ และ C_1, C_2 เป็นค่าคงที่

หลังจากนำตัวแทนผลเฉลยยืนยงไปแทนในสมการลดทอนของสมการนาเวียร์–สโตคส์ (3.9) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองคือ

$$F''(\overline{z}) - (C_2 + 1)F'(\overline{z}) - F(\overline{z}) = 0 \tag{4.6}$$

หาผลเฉลยของสมการ (4.3) ได้เป็น

$$F(\overline{z}) = C_3 e^{\frac{1}{2}(C_2 - 1 + \sqrt{C_2^2 - 2C_2 + 5})\overline{z}} + C_4 e^{\frac{1}{2}(C_2 - 1 - \sqrt{C_2^2 - 2C_2 + 5})\overline{z}}$$

โดยที่ C_3 และ C_4 เป็นค่าคงที่

ดังนั้นผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ที่สร้างจากพีคณิตย่อย $X_2, X_1+X_3+X_4$ คือ

$$U = C_1,$$
$$W = C_2,$$
$$V = C_3 e^{\frac{1}{2}(C_2-1+\sqrt{C_2^2-2C_2+5})\bar{z}+t} + C_4 e^{\frac{1}{2}(C_2-1-\sqrt{C_2^2-2C_2+5})\bar{z}+t}$$

โดยที่ $\bar{z} = z - t$ และ C_1, C_2, C_3 และ C_4 เป็นค่าคงที่

4.2.3 พีชคณิตย่อย X_3, X_1+X_6

มูลฐานของพีคณิตย่อย ประกอบด้วย

$$X_3 = \partial_z,\ X_1 + X_6 = \partial_t + U'\partial_V$$

สมมติฟังก์ชัน

$$f = f(t, x, z, U, V, W)$$

เป็นฟังก์ชันยืนยงภายใต้ตัวก่อกำเนิด $X_3 = \partial_z$

ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างแรก จะได้ว่าฟังก์ชัน f ไม่ขึ้นกับตัวแปร z นั่นคือ

$$f = f(t, x, U, V, W)$$

และการที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันยืนยงภายใต้ตัวก่อกำเนิด

$$X_1 + X_6 = \partial_t + U'\partial_V$$

หมายความว่า

$$(X_1 + X_6) f = 0$$

จะได้

$$f_t + U' f_V = 0 \tag{4.7}$$

ระบบสมการลักษณะเฉพาะ(characteristics system) ของสมการ (4.7) คือ

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{0} = \frac{dV}{U'} = \frac{dU}{0} = \frac{dW}{0} \tag{4.8}$$

แก้สมการหาตัวยืนยงทั้งหมดที่สอดคล้องกับพีชคณิตย่อย X_3, X_1+X_6 คือ

$$x, V - U't, U, W$$

สร้างตัวแทนผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์จากตัวยืนยงทั้งหมด (universal invariant)ได้เป็น

$$U = U(x), W = W(x), V = U't + F(x)$$

โดยที่ U, W และ F เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

หลังจากนำตัวแทนผลเฉลยยืนยงไปแทนในสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ (3.9) จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญคือ

$$
\begin{aligned}
&U''' - UU'' + U'^2 = 0, \\
&W'' - UW' = 0, \\
&F''(x) - UF'(x) + F(x)U' = 0
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

โดยไม่สูญเสียการวางนัยโดยทั่วไป สมมุติให้ $U = C_1$ จะได้ว่า $W = C_2 e^{C_1 x} + C_3$ และ

$$F(x) = C_4 e^{C_1 x} + C_5$$

โดยที่ C_1, C_2, C_3, C_4 และ C_5 เป็นค่าคงที่

ดังนั้นผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ที่สร้างจากพีคณิตย่อย $X_3, X_1 + X_6$ คือ

$$
\begin{aligned}
&U = C_1, \\
&W = C_2 e^{C_1 x} + C_3, \\
&V = C_1 t + C_4 e^{C_1 x} + C_5
\end{aligned}
$$

โดยที่ C_1, C_2, C_3, C_4 และ C_5 เป็นค่าคงที่

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

5.1 สรุปผลการวิจัย

รายงายการวิจัยเรื่องการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ของระบบสมการที่ลดทอนจากสมการนาเวียร์-สโตกส์ สรุปได้ดังนี้

5.1.1 ปัญหา

การวิจัยนี้เป็นการประยุกต์เอากระบวนการของกลุ่มวิเคราะห์ โดยใช้การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ มาใช้ในการหาผลเฉลยชัดแจ้งของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์,

$$
\begin{aligned}
&U''' - UU'' + U'^2 = 0,\\
&W'' - UW' = 0, \qquad\qquad (5.1)\\
&V_t + UV_x - VU' + WV_z - V_{xx} - V_{zz} = 0
\end{aligned}
$$

โดยที่ U และ W เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x, V เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t,x,z

การประยุกต์ใช้กลุ่มวิเคราะห์กับสมการ (5.1) นั้นเราเริ่มด้วยการศึกษาตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของสมการโดยใช้การแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ และวิเคราะห์หาสมการกำหนดและศึกษาพีชคณิตลีของสมการซึ่งจะนำไปสู่การหากลุ่มที่ยอมรับกับสมการ เพื่อนำไปสร้างตัวแทนผลเฉลย แล้ววิเคราะห์หาผลเฉลยของสมการได้ในที่สุด

5.1.2 ผลการวิจัย

1. ได้ศึกษาตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ (5.1)
2. ได้พีชคณิตลี ที่สมนัยกับกลุ่มลีของการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ ที่ยอมรับกับสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ ซึ่งสมาชิกในมูลฐานหลักมี 9 ตัวดังนี้

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \partial_t,\\
X_2 &= \partial_x,\\
X_3 &= \partial_z,\\
X_4 &= V\partial_V,\\
X_5 &= t\partial_z + \partial_W,\\
X_6 &= U'\partial_V,\\
X_7 &= (tU'+1)\partial_V,\\
X_8 &= (W+zU')\partial_V,\\
X_9 &= 2U'\partial_{U'} + U\partial_U + W\partial_W - 2t\partial_t - x\partial_x - z\partial_z
\end{aligned}
$$

3. ได้ผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงตัวอย่างของผลเฉลยยืนยงที่ได้ดังนี้

3.1 ผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ที่สร้างจากพีคณิตย่อย $X_2, X_3 + X_5$ คือ

$$U = C_1,$$
$$W = C_2,$$
$$V = C_3 e^{(1-C_2)t+z}$$

โดยที่ C_1, C_2 และ C_3 เป็นค่าคงที่

3.2 ผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ที่สร้างจากพีคณิตย่อย $X_2, X_1 + X_3 + X_4$ คือ

$$U = C_1,$$
$$W = C_2,$$
$$V = C_3 e^{\frac{1}{2}(C_2 - 1 + \sqrt{C_2^2 - 2C_2 + 5})\bar{z} + t} + C_4 e^{\frac{1}{2}(C_2 - 1 - \sqrt{C_2^2 - 2C_2 + 5})\bar{z} + t}$$

โดยที่ $\bar{z} = z - t$ และ C_1, C_2, C_3 และ C_4 เป็นค่าคงที่

3.3 ผลเฉลยยืนยงของสมการลดทอนของสมการนาเวียร์-สโตคส์ที่สร้างจากพีคณิตย่อย $X_3, X_1 + X_6$ คือ

$$U = C_1,$$
$$W = C_2 e^{C_1 x} + C_3,$$
$$V = C_1 t + C_4 e^{C_1 x} + C_5$$

โดยที่ C_1, C_2, C_3, C_4 และ C_5 เป็นค่าคงที่

5.2 ข้อจำกัดของการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาอย่างเป็นระบบโดยใช้วิธีการของกลุ่มวิเคราะห์ (group analysis method) ซึ่งใช้วิธีของการแปลงแบบลีย์-แบคก์ลันด์ในการหากลุ่มที่ยอมรับ (admitted group) กับระบบสมการ (5.1) เพื่อไปสร้างตัวแทนผลเฉลย แล้วนำไปหาผลเฉลยยืนยงของระบบสมการ (5.1) เท่านั้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Aristov, S.N. (1990). Class of exact solutions of the Navier-Stokes equations for viscous gas. Doklady Academii Nauk S.S.S.R. 313: 1403-1406.

Aristov, S.N. and Grabovskii, V. N. (1995). Self-similar solution of the Navier-Stokes equations for viscous gas. Mechanica Jydkosti i Gasa 5: 44-50.

Boisvert, R.E., Ames, W.F., and Srivastava, U.N. (1983). Group properties and new solutions of Navier-Stokes equations. Journal of Engineering Mathematics. 17: 203-221.

Byrkin, A.P. (1969). On one exact solution of the Navier-Stokes equations of a compressible gas. Journal of Applied Mathematics. 33: 152-157.

Byrkin, A.P. (1970). About exact solutions of the Navier-Stokes equations for flows of a compressible gas in channels. Scientific Notes of CAHI. 1: 15-21.

Bytev, V.O. (1972). Group properties of the Navier-Stokes equations. Chislennye Metody Mehaniki Sploshnoi Sredy. 3: 13-17.

Davenport, J.H., Siret Y. and Tournier E. (1993). Computer algebra systems and algorithms for algebraic manipulations. Masson, Paris: Academic Press.

Fushchich, W.I. and Popovych, R.O. (1994). Symmetry reduction and exact solution of the Navier-Stokes equations. Nonlinear Mathematical Physics. 1: 75-113.

Golovin, S.V. (1996). Optimal system subalgebras for Lie algebra generators, admitted gas dynamics equations in polytropic gas case. Novosibirsk: Institute of Hydrodynamics SB RAS.

Grauel, A. and Steeb, W.-H. (1985). Similarity solutions of the Euler equation and the Navier-Stokes equations in two space dimensions. International Journal of Theoretical Physics 24: 255-265.

Hearn, A.C. (1999). REDUCE. User's and contributed packages manual, version 3.7. Santa Monica, Carifornia: Rand Corp.

Hematulin, A. and Meleshko, S.V. (2001). Rotational Invariant and Partially Invariant Flows of a Viscous Incompressible Fluid and a Viscous gas. Journal of Nonlinear Dynamics (accepted).

Ibragimov, N.H.(ed.). (1994). CRC handbook of Lie group analysis of differential equations volume 1. Boca Raton, Florida: CRC Press.

Ibragimov, N.H.(ed.). (1995). CRC handbook of Lie group analysis of differential equations volume 2. Boca Raton, Florida: CRC Press.

Ibragimov, N.H.(ed.). (1996). CRC handbook of Lie group analysis of differential equations volume 3. Boca Raton, Florida: CRC Press.

Ibragimov, N.H. (1999). Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. Chichester: Wiley.

Ibragimov, N.H. and Unal, G. (1994). Equivalence transformations of Navier-Stokes equations. Bulletin of the Technical University of Istanbul 47: 203-207.

Lloyd, S.P. (1981). The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations. Acta Mathematica 38: 85-98.

Ludlow, D.K., Clarkson, P.A., and Bassom, A.P. (1998). Nonclassical symmetry reductions of the three-dimensional incompressible Navier--Stokes equations. Journal of Physics A: Mathematical and General. 31: 7965--7980.

Ludlow, D.K., Clarkson, P.A., and Bassom, A.P. (1999). Similarity reduction and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier--Stokes equations. Studies in Applied Mathematics. 103: 183--240.

Meleshko, S.V. (1991). Classification of solutions with degenerate hodograph of the gas dynamics and plasticity equations. Ph.D. Dissertation, Ekaterinburg.

Meleshko, S.V. (1995). Group classification of the equations of two-dimensional motions of a gas. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 58: 629-635.

Meleshko, S.V. (1996). Generalization of the equivalence transformations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 3, 1-2: 170-174.

Meleshko, S.V. (1996). Group classification gas dynamics equations with constant body forces. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1: 28-35.

Meleshko, S.V. (1998). Group classification of two-dimensional stable viscous gas equations. International Journal of Non-Linear Mechanics 34: 449-456.

Meleshko, S.V. and Puchnachov, V.V. (1999). One class of partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics 40: 24-33.

Meleshko, S.V. (2002). On Class of Partially Invariant Solutions of the Navier-Stokes

Equations with the Hyperbolic Monge–Ampere Equation, *Proceedings of ISNA-16 (Moscow, 2002), Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century*, p.559-562

Ovsiannikov, L.V. (1978). Group analysis of differential equations. translatied by W.F. Ames. New York: Academic Press.

Ovsiannikov, L.V. (1995). Regular and irregular partially invariant solutions, Doclady Rassian Academy of Science. 343, 2: 156-159.

Ovsiannikov, L.V. and Chupakhin, A.P. (1996). Regular partially invariant submodels of gas dynamics equations, Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 6: 990-999.

Popovych, R.O. (1995). On Lie reduction of theNavier--Stokes equations. Nonlinear Mathematical Physics 2: 301-311.

Puchnachov, V.V. (1972). Unsteady movements of viscous fluid with free boundary, being described by partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations. Dynamica sploshnoi sredy, Novosibirsk. 10: 125-137.

Puchnachov, V.V. (1974). Free Boundary Problems of the Navier-Stokes Equations. Ph.D. Dissertation, Novosibirsk.

Thailert, K. and Meleshko, S.V. (2004). On partially invariant solutions of the Navier- Stokes equations, *Proceedings "WASCOM 2003" 12-th Conference on Waves and Stability in Continuous Media* (1-7th June, 2003, Italy)., Editors Roberto Monaco, Sebastiano Pennisi, Salvatore Rionero, Tommaso Ruggeri. World Scientific, Singapore. 2004; pp. 524-534.

Thailert, K. and Meleshko, S.V. (2005). Bäcklund transformations of one class of partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations, Proceedings of 10th International Conference in MOdern Group ANalysis, Larnaca, Cyprus, October 24-31, 2005. pp. 207-213.

Thailert, K. (2006). One class of regular partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations, Journal of Nonlinear Dynamics, Volume 43, Number 4, March 2006, pp. 343-364(22).

ภาคผนวก

ภาคผนวก A

การวิเคราะห์หาสมการกำหนด

A.1 โปรแกรมการวิเคราะห์หาสมการกำหนด

โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ

```
nx:=3;  %%%%%%%%****** (number of independent variables)
nu:=4;  %%%%%%%%****** (number of dependent variables)
nua:=0;  %%%%%%%%****** (number of arbitrary elements)
off echo$
operator s,sk,u,ua,uu,uua,x,rru,ffu,ffua,fu,fua,zu,zua,kx$

algebraic procedure gkk(m,l,q);
begin
h:=1;
if m=l and l=q then h:=6 else if l=q or m=l or m=q then h:=2;
return h;
end;

algebraic procedure gkkk(k,m,l,q);
begin
h:=1;
if k=m then begin
      if gkk(m,l,q)=6 then h:=24 else
      if gkk(m,l,q)=2 then <<if m=l then h:=6 else h:=4;>> else
      h:=2;
end else h:=gkk(m,l,q);
return h;
end;

for ju:=1:nu do for ku:=1:nu do depend zu(ju),u(ku);
for ju:=1:nu do for kxn:=1:nx do depend zu(ju),x(kxn);

for jx:=1:nx do for ku:=1:nu do depend kx(jx),u(ku);
for jx:=1:nx do for kxn:=1:nx do depend kx(jx),x(kxn);

for ju:=1:nu do for ku:=1:nu do factor df(zu(ju),u(ku));
for ju:=1:nu do for kxn:=1:nx do factor df(zu(ju),x(kxn));

for jx:=1:nx do for ku:=1:nu do factor df(kx(jx),u(ku));
for jx:=1:nx do for kxn:=1:nx do factor df(kx(jx),x(kxn));

for ju:=1:nu do factor zu(ju);
for jx:=1:nx do factor kx(jx);

if not(nua=0) then begin
for ju:=1:nu do for kua:=1:nua do depend zu(ju),ua(kua);
for jua:=1:nua do for ku:=1:nu do depend zua(jua),u(ku);
for jua:=1:nua do for kxn:=1:nx do depend zua(jua),x(kxn);
for jua:=1:nua do for kua:=1:nua do depend zua(jua),ua(kua);
for jx:=1:nx do for kua:=1:nua do depend kx(jx),ua(kua);
for ju:=1:nu do for kua:=1:nua do factor df(zu(ju),ua(kua));
for jua:=1:nua do for ku:=1:nu do factor df(zua(jua),u(ku));
for jua:=1:nua do for kxn:=1:nx do factor df(zua(jua),x(kxn));
for jua:=1:nua do for kua:=1:nua do factor df(zua(jua),ua(kua));
for jx:=1:nx do for kua:=1:nua do factor df(kx(jx),ua(kua));
for jua:=1:nua do factor zua(jua);
end;
```

```
if nua=0 then in "group_eq.new" else in "equiv_eq.new";


for k:=1:nu do for j:=1:nx do for l:=(j+1):nx do
u(k,l,j):=u(k,j,l);

if not (nua=0) then
for k:=1:nua do for j:=1:(nx+nu) do for l:=(j+1):(nx+nu) do
ua(k,l,j):=ua(k,j,l);

koutlet:=-3;

for each nomu in
{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25} do
%%%%%%%%****** (loop for equations)
begin
  write ("nomu = ",nomu);

%     act on the equation by prolonged operator

jj1:=   for l:=1:nx sum for m:=1:nu sum
              df(s(nomu),u(m,l))*ffu(m,l) $
if nomu = koutlet then
  write ("JJ1 = ",jj1);
jj2:=   for m:=1:nu sum
              df(s(nomu),u(m))*zu(m) $
if nomu = koutlet then
  write ("JJ2 = ",jj2);
jj3:=   for l:=1:nx sum
              kx(l)*df(s(nomu),x(l)) $
if nomu = koutlet then
  write ("JJ3 = ",jj3);
jj4 :=  for k := 1:nu sum
                 for i:= 1:nx sum
                          for j:= i:nx sum
                          ffu(k,i,j)*df(s(nomu),u(k,i,j)) $
if nomu = koutlet then
  write ("JJ4 = ",jj4);
if not(nua=0) then
<<jja0:=    for m:=1:nua sum
              df(s(nomu),ua(m))*zua(m) >>
else jja0:=0;
if nomu = koutlet then
  write ("JJa0 = ",jja0);

if not(nua=0) then
<<jja1:=    for l:=1:nx+nu sum for m:=1:nua sum
              df(s(nomu),ua(m,l))*ffua(m,l) >>
else jja1:=0;
if nomu = koutlet then
  write ("JJa1 = ",jja1);

rru:=jj1+jj2+jj3+jj4+jja0+jja1$
if nomu = koutlet then
  write ("rru = ",rru);
clear jj1,jj2,jj3,jj4,jja0,jja1$

%pause$
%     coeff. at the df(derivatives) in the generator
for i:=1:nu do begin
```

```
fu(i):=zu(i) -  for l:=1:nx sum  kx(l)*u(i,l)$
if nomu = koutlet then
 write "fu(",i,")=",fu(i)$
end$
if not(nua=0) then begin      %   for fua()

for i:=1:nua do begin
fua(i):=zua(i) - ( for l:=1:nx sum  kx(l)*ua(i,l) )
              - ( for j:=1:nu sum  zu(j)*ua(i,j+nx) )$
if nomu = koutlet then
 write "fua(",i,")=",fua(i)$
end$
end;  %   for fua()

for i:=1:nu do for j:=1:nx do begin
        ffu(i,j):= df(fu(i),x(j)) +
        for m:=1:nu sum
            u(m,j)*df(fu(i),u(m))$
      ffu(i,j):=ffu(i,j)+for k:=1:nua sum
      df(fu(i),ua(k))*( ua(k,j) + for l:=1:nu sum ua(k,nx+l)*u(l,j) );
if nomu = koutlet then
 write "ffu(",i,",",j,")=",ffu(i,j)$
end$
if not(nua=0) then begin      %   for ffua()
for i:=1:nua do begin
   for j:=1:nx do begin
        ffua(i,j):= kkuax;
%      Check
        ffua(i,j):= df(fua(i),x(j)) +
        for m:=1:nua sum
            ua(m,j)*df(fua(i),ua(m))$
if nomu = koutlet then
 write "ffua(",i,",",j,")=",ffua(i,j)$
   end;
   for j:=1:nu do begin
%      Check
%if j<3 then
%        ffua(i,j+nx):= kkuau else
        ffua(i,j+nx):= df(fua(i),u(j)) +
        for m:=1:nua sum
            ua(m,j+nx)*df(fua(i),ua(m))$
if nomu = koutlet then
 write "ffua(",i,",",j+nx,")=",ffua(i,j+nx)$
   end;
end$
end;  %   for ffua()

for i := 1:nu do
    for j := 1:nx do
        for k:= j:nx do
           begin
             ss:=-for l:=1:nx sum
            u(i,j,l)*(df(kx(l),x(k))+
                   for kl:=1:nu sum u(kl,k)*df(kx(l),u(kl)) );
if not(nua=0) then     %   for df(kx(l),ua()
      ss:=ss-for ka:=1:nua sum
      df(kx(l),ua(ka))*( ua(ka,k) + for la:=1:nu sum
ua(ka,nx+la)*u(la,k) );

             ss:=ss+ df(ffu(i,j), x(k)) +
                    for m:= 1:nu sum
```

```
                                u(m,k)*df(ffu(i,j),u(m));
              ss:=ss + for m:= 1:nu sum for kl:=1:nx sum
                                u(m,k,kl)*df(ffu(i,j),u(m,kl))$
 if not(nua=0) then begin      %   for df(ffu(i,j),ua()
              ss:=ss + for ka:= 1:nua sum
              df(ffu(i,j),ua(ka))*( ua(ka,k) +
                   for la:=1:nu sum ua(ka,nx+la)*u(la,k) );
              ss:=ss + for ka:= 1:nua sum for kl:=1:nx+nu sum
              df(ffu(i,j),ua(ka,kl))*( ua(ka,kl,k) +
                   for la:=1:nu sum ua(ka,kl,nx+la)*u(la,k) );
 end;  %   for df(ffu(i,j),ua()
              ffu(i,j,k) :=ss;
 clear ss;

 if nomu = koutlet then
  write "ffu(",i,",",j,",",k,")=",ffu(i,j,k)$
```

```
 end;
 rru:=rru;

 % "second order stuff above"

 for i:=1:nu do clear fu(i);
 off nat$

 %     transition to the manifold of solution

 %for i:=1:nu do for j:=1:nx do ffu(i,j);
 %for i:=1:nua do for j:=1:nx do ffua(i,j);
 %for i:=1:nua do for j:=1:nu do ffua(i,j+nx);
 %for i := 1:nu do
 %    for j := 1:nx do
 %        for k:= j:nx do ffu(i,j,k);

 %if nomu = koutlet then
   write ("before sol rru ",nomu," := ");


 %*******************************************************************************
 %off echo$
  write ("nomu = ",nomu)$


 if nua=0 then in "grou_ma.new" else in "equi_ma.new";

 %*****************************************************

 for m:=1:ms do for l:=m:ms do for q:=1:ms do begin
 h:=gkk(m,l,q);

 ss:=df(df(df(rru,sk(m)),sk(l)),sk(q))/h;
 rru:=rru-ss*sk(m)*sk(l)*sk(q);

 if not (ss=0) then
 write "fu(",nomu,",",m,",",l,",",q,") := ",num ss;
 %clear fu(nomu,m,l,q);
 end;

 for m:=1:ms do for l:=m:ms do begin
 if m=1 then h:=2 else h:=1;
 ss:=df(df(rru,sk(m)),sk(l))/h;
```

```
rru:=rru-ss*sk(m)*sk(l);

if not (ss=0) then
write "fu(",nomu,",",m,",",l,") := ",num ss;
%clear fu(nomu,m,l);
end;

for m:=1:ms do begin
ss:=df(rru,sk(m));
rru:=rru-ss*sk(m);

if not (ss=0) then
write "fu(",nomu,",",m,") := ",num ss;
clear ss;
end;

write "result rru(",nomu,") := ",rru;
write ("end of splitting");

end$
%split (nomu,ms,rru);
```

โปรแกรมย่อยที่ถูกเรียกใช้ในการคำนวณ

```
off echo;

s(1) := u(4,2,2)-u(1)*u(4,2)+u(4)**2;
s(2) := u(2,1)+u(1)*u(2,2)-u(2)*u(4)+u(3)*u(2,3)-u(2,2,2)-u(2,3,3);
s(3) := u(3,2,2)-u(1)*u(3,2);
s(4) := u(4)-u(1,2);

s(5) := u(1,1); s(6)  := u(1,3); s(7) :=  u(1,1,1); s(8) :=  u(1,1,2);
s(9) :=  u(1,1,3); s(10) := u(1,2,3); s(11) := u(1,3,3);
s(12):= u(3,1); s(13) := u(3,3); s(14) := u(3,1,1); s(15) := u(3,1,2);
s(16) := u(3,1,3); s(17) := u(3,2,3); s(18) := u(3,3,3);
s(19):= u(4,1); s(20) := u(4,3); s(21) := u(4,1,1); s(22) := u(4,1,2);
s(23) := u(4,1,3); s(24) := u(4,2,3); s(25) := u(4,3,3);

j:=df(s(1),u(4,2,2));
u(4,2,2):=u(4,2,2)-s(1)/j;
s(1);

j:=df(s(2),u(2,3,3));
u(2,3,3):=u(2,3,3)-s(2)/j;
s(2);

j:=df(s(3),u(3,2,2));
u(3,2,2):=u(3,2,2)-s(3)/j;
s(3);

j:=df(s(4),u(1,2));
u(1,2):=u(1,2)-s(4)/j;
s(4);

j:=df(s(5),u(1,1));
u(1,1):=u(1,1)-s(5)/j;
s(5);

j:=df(s(6),u(1,3));
u(1,3):=u(1,3)-s(6)/j;
```

```
s(6);

j:=df(s(7),u(1,1,1));
u(1,1,1):=u(1,1,1)-s(7)/j;
s(7);

j:=df(s(8),u(1,1,2));
u(1,1,2):=u(1,1,2)-s(8)/j;
s(8);

j:=df(s(9),u(1,1,3));
u(1,1,3):=u(1,1,3)-s(9)/j;
s(9);

j:=df(s(10),u(1,2,3));
u(1,2,3):=u(1,2,3)-s(10)/j;
s(10);

j:=df(s(11),u(1,3,3));
u(1,3,3):=u(1,3,3)-s(11)/j;
s(11);

j:=df(s(12),u(3,1));
u(3,1):=u(3,1)-s(12)/j;
s(12);

j:=df(s(13),u(3,3));
u(3,3):=u(3,3)-s(13)/j;
s(13);

j:=df(s(14),u(3,1,1));
u(3,1,1):=u(3,1,1)-s(14)/j;
s(14);

j:=df(s(15),u(3,1,2));
u(3,1,2):=u(3,1,2)-s(15)/j;
s(15);

j:=df(s(16),u(3,1,3));
u(3,1,3):=u(3,1,3)-s(16)/j;
s(16);

j:=df(s(17),u(3,2,3));
u(3,2,3):=u(3,2,3)-s(17)/j;
s(17);

j:=df(s(18),u(3,3,3));
u(3,3,3):=u(3,3,3)-s(18)/j;
s(18);

j:=df(s(19),u(4,1));
u(4,1):=u(4,1)-s(19)/j;
s(19);

j:=df(s(20),u(4,3));
u(4,3):=u(4,3)-s(20)/j;
s(20);

j:=df(s(21),u(4,1,1));
u(4,1,1):=u(4,1,1)-s(21)/j;
s(21);
```

A.2 ผลการคำนวณโปรแกรมการวิเคราะห์หาสมการกำหนด

```
nx := 3
  %%%%%%%%****** (number of independent variables)
nu:=4;
nu := 4

  %%%%%%%%****** (number of dependent variables)

nua:=0;
nua := 0

  %%%%%%%%****** (number of arbitrary elements)
off echo$
                                                 2
s(1) := u(4,2,2) - u(4,2)*u(1) + u(4)
s(2) :=-u(4)*u(2)+u(3)*u(2,3)-u(2,3,3)-u(2,2,2)+u(2,2)*u(1)+ u(2,1)
s(3) := u(3,2,2) - u(3,2)*u(1)
s(4) := u(4) - u(1,2)
s(5) := u(1,1)
s(6) := u(1,3)
s(7) := u(1,1,1)
s(8) := u(1,1,2)
s(9) := u(1,1,3)
s(10) := u(1,2,3)
s(11) := u(1,3,3)
s(12) := u(3,1)
s(13) := u(3,3)
s(14) := u(3,1,1)
s(15) := u(3,1,2)
s(16) := u(3,1,3)
s(17) := u(3,2,3)
s(18) := u(3,3,3)
s(19) := u(4,1)
s(20) := u(4,3)
s(21) := u(4,1,1)
s(22) := u(4,1,2)
s(23) := u(4,1,3)
s(24) := u(4,2,3)
s(25) := u(4,3,3)
j := 1
                                      2
u(4,2,2) := u(4,2)*u(1) - u(4)
0
j := -1
u(2,3,3) := - u(4)*u(2) + u(3)*u(2,3) - u(2,2,2) + u(2,2)*u(1) + u(2,1)
0
j := 1
u(3,2,2) := u(3,2)*u(1)
0
j := -1
u(1,2) := u(4)
0
j := 1
u(1,1) := 0
0
j := 1
u(1,3) := 0
```

```
0
j := 1
u(1,1,1) := 0
0
j := 1
u(1,1,2) := 0
0
j := 1
u(1,1,3) := 0
0
j := 1
u(1,2,3) := 0
0
j := 1
u(1,3,3) := 0
0
j := 1
u(3,1) := 0
0
j := 1
u(3,3) := 0
0
j := 1
u(3,1,1) := 0
0
j := 1
u(3,1,2) := 0
0
j := 1
u(3,1,3) := 0
0
j := 1
u(3,2,3) := 0
0
j := 1
u(3,3,3) := 0
0
j := 1
u(4,1) := 0
0
j := 1
u(4,3) := 0
0
j := 1
u(4,1,1) := 0
0
j := 1
u(4,1,2) := 0
0
j := 1
u(4,1,3) := 0
0
j := 1
u(4,2,3) := 0
0
j := 1
u(4,3,3) := 0
0
```

ภาคผนวก B

การวิเคราะห์หากลุ่มที่ยอมรับกับสมการ

B.1 โปรแกรมการวิเคราะห์หากลุ่มที่ยอมรับกับสมการ

โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ วิเคราะห์ทีละขั้นตอน

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%       1       %%%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,9) := df(zu(4),u(2))$
fu(1,11) := df(zu(4),u(1))$
nodepend zu(4),u(1),u(2);

fu(2,1,7) := 2*df(kx(1),u(4))$
fu(2,1,9) := 2*df(kx(2),u(4))$
fu(2,1,10) := 2*df(kx(3),u(4))$
fu(2,2,7) := 2*df(kx(1),u(3))$
fu(2,2,9) := 2*df(kx(2),u(3))$
fu(2,2,10) := 2*df(kx(3),u(3))$
fu(2,4,7) := 2*df(kx(1),u(2))$
fu(2,4,9) := 2*df(kx(2),u(2))$
fu(2,4,10) := 2*df(kx(3),u(2))$
fu(2,3,11) := df(kx(1),u(1))$
fu(2,4,11) := df(kx(2),u(1))$
fu(2,8) := 2*df(kx(1),x(3))$
fu(8,11) :=  - df(kx(2),x(1))$
fu(10,11) :=  - df(kx(2),x(3))$
nodepend kx(1),x(3),u(4),u(3),u(2),u(1);
nodepend kx(2),x(1),x(3),u(4),u(3),u(2),u(1);
nodepend kx(3),u(4),u(3),u(2);

fu(2,11) :=  - df(zu(2),u(1))$
fu(3,11) := df(zu(3),u(1))$
fu(3,9) := df(zu(3),u(2))$
result rru(12) := df(zu(3),x(1))$
result rru(13) := df(zu(3),x(3))$
nodepend zu(2),u(1);
nodepend zu(3),x(1),x(3),u(1),u(2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%       2       %%%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(2,5,11) := df(kx(3),u(1))$
fu(2,7) := 2*df(kx(1),x(2))$
nodepend kx(3),u(1);
nodepend kx(1),x(2);

fu(4,1) :=  - df(zu(1),u(4))$
fu(4,2) :=  - df(zu(1),u(3))$
fu(4,4) :=  - df(zu(1),u(2))$
result rru(5) := df(zu(1),x(1))$
result rru(6) := df(zu(1),x(3))$
nodepend zu(1),x(1),x(3),u(4),u(3),u(2);

result rru(20) := df(zu(4),x(3))$
nodepend zu(4),x(3);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%       3       %%%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(2,10) := 2*df(kx(3),x(2))$
nodepend kx(3),x(2);

result rru(19) := df(zu(4),x(1))$
```

```
nodepend zu(4),x(1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      4          %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,1,1) := df(zu(4),u(4),2)$
depend a1,x(2),u(3);
depend a2,x(2),u(3);
zu(4):=a1*u(4)+a2;
fu(1,1,1);

fu(2,1,1) :=  - df(zu(2),u(4),2)$
depend a3,x(1),x(2),x(3),u(2),u(3);
depend a4,x(1),x(2),x(3),u(2),u(3);
zu(2):=a3*u(4)+a4;
fu(2,1,1) ;

fu(3,1,1) := df(zu(3),u(4),2)$
depend a5,x(2),u(3);
depend a6,x(2),u(3);
zu(3):=a5*u(4)+a6;
fu(3,1,1) ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      5          %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,1,2) := 2*df(a1,u(3))$
nodepend a1,u(3);

fu(2,1,2) :=  - 2*df(a3,u(3))$
fu(2,1,4) :=  - 2*df(a3,u(2))$
fu(2,1) :=  - 2*df(a3,x(2))$
nodepend a3,x(2),u(2),u(3);

fu(3,12,12) :=  - a5$
a5:=0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      6          %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,2,2) := df(a2,u(3),2)$
depend a21,x(2);
depend a22,x(2);
a2:=a21*u(3)+a22;
fu(1,2,2);

fu(2,2,2) :=  - df(a4,u(3),2)$
depend a41,x(1),x(2),x(3),u(2);
depend a42,x(1),x(2),x(3),u(2);
a4:=a41*u(3)+a42;
fu(2,2,2) ;

fu(3,2,2) := df(a6,u(3),2)$
depend a61,x(2);
depend a62,x(2);
a6:=a61*u(3)+a62;
fu(3,2,2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      7          %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,12,13) := 2*a21$
a21:=0;

fu(2,2) :=  - 2*df(a41,x(2))$
fu(2,13,13) := df(a41,x(3))$
nodepend a41,x(2),x(3);

fu(2,4,4,13) :=  - df(a41,u(2),2)$
```

```
depend a411,x(1);
depend a412,x(1);
a41:=a411*u(2)+a412;
fu(2,4,4,13) ;

fu(2,4,4) :=  - df(a42,u(2),2)$
depend a421,x(1),x(2),x(3);
depend a422,x(1),x(2),x(3);
a42:=a421*u(2)+a422;
fu(2,4,4);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      8        %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(2,2,4) :=  - 2*a411$
a411:=0;

fu(4,12) := df(kx(2),x(2)) - df(zu(1),u(1)) + a1$
depend a7,x(2);
zu(1):=( df(kx(2),x(2)) + a1 )*u(1) + a7;
fu(4,12) ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      9        %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,12,15) :=  - df(a1,x(2))$
nodepend a1,x(2);

fu(1,15) :=  - df(a22,x(2))$
nodepend a22,x(2);

fu(2,13,14) := df(a421,x(3))$
fu(2,14,15) := df(a421,x(2))$
nodepend a421,x(3),x(2);

fu(2,15) := df(a422,x(2))$
nodepend a422,x(2);

fu(3,13,15) :=  - df(a61,x(2))$
nodepend a61,x(2);

fu(3,15) :=  - df(a62,x(2))$
nodepend a62,x(2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      10       %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,12) := 2*a22$
a22:=0;

fu(1,12,12) := 2*df(kx(2),x(2)) + a1$
kx(2):=-a1*x(2)/2 + c1;
fu(1,12,12) ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      11       %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(1,1) :=  - a7$
a7:=0;

fu(2,14) := df(a421,x(1))$
nodepend a421,x(1);

fu(2,5,13) := df(kx(3),x(3)) + a61$
depend a8,x(1);
kx(3):=-a61*x(3) + a8;
fu(2,5,13) ;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      12        %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(2,4,15) := a1 - 2*a61$
a1:=2*a61;
fu(2,4,15);

fu(2,12,13) := df(a3,x(3)) - a412$
depend a9,x(1);
a3:= a412*x(3) + a9;
fu(2,12,13);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      13        %%%%%%%%%%%%%%%%%
%result rru(3) := 3*a61*b$
%a61:=0;
fu(2,3) :=  - df(kx(1),x(1)) - 2*a61$
kx(1):= -2*a61*x(1)+c2;
fu(2,3);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      14        %%%%%%%%%%%%%%%%%
%fu(2,3) :=  - df(kx(1),x(1))$
%kx(1):= c2;
fu(2,5) :=  - df(a8,x(1)) + a62$
a8:=x(1)*a62 + c3;
fu(2,5);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      15        %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(2,13) := df(a412,x(1)) + df(a422,x(3))$
depend a10,x(1);
a422:= - x(3)*df(a412,x(1)) + a10;
fu(2,13);


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      16        %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(2,12) := 2*df(a412,x(1))*x(3) + df(a9,x(1)) - a10$
df(fu(2,12),x(3));
nodepend a412,x(1);
fu(2,12);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      17        %%%%%%%%%%%%%%%%%
fu(2,12) := df(a9,x(1)) - a10$
result rru(2) := df(a10,x(1))$
nodepend a10,x(1);
a9:=a10*x(1)+c4;
fu(2,12);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      18        %%%%%%%%%%%%%%%%%
kx(1):=kx(1);
kx(2):=kx(2);
kx(3):=kx(3);
zu(1):=zu(1);
zu(2):=zu(2);
zu(3):=zu(3);
zu(4):=zu(4);

oper:=dx1*kx(1)+dx2*kx(2)+dx3*kx(3)+du1*zu(1)+du2*zu(2)+du3*zu(3)+du4*z
u(4);
factor c1,c2,c3,c4,a10,a61,a62,a412,a421;
op1:=df(oper,c1);
op2:=df(oper,c2);
op3:=df(oper,c3);
op4:=df(oper,c4);
op5:=df(oper,a10);
```

```
op6:=df(oper,a61);
op7:=df(oper,a62);
op8:=df(oper,a412);
op9:=df(oper,a421);

ss:=oper;
sss:=ss-op1*c1-op2*c2-op3*c3-op4*c4-op5*a10-op6*a61-op7*a62-op8*a412-
op9*a421;

end;
```

B.2 ผลการคำนวณโปรแกรมการวิเคราะห์หากลุ่มที่ยอมรับกับสมการ

```
*** result declared operator
zu (4) := u (4)*a1 + a2
0
zu (2) := u (4)*a3 + a4
0
zu (3) := u (4)*a5 + a6
0
a5 := 0
a2 := u (3)*a21 + a22
0
a4 := u (3)*a41 + a42
0
a6 := u (3)*a61 + a62
0
a21 := 0
a41 := u (2)*a411 + a412
0
a42 := u (2)*a421 + a422
0
a411 := 0
zu (1) := df (kx (2), x (2))*u (1) + u (1)*a1 + a7
0
a22 := 0
         - x (2)*a1 + 2*c1
kx (2) := --------------------
               2
0
a7 := 0
kx (3) := - x (3)*a61 + a8
0
a1 := 2*a61
0
a3 := x (3)*a412 + a9
0
kx (1) := - 2*x (1)*a61 + c2
0
a8 := x (1)*a62 + c3
0
a422 := - df (a412, x (1))*x (3) + a10
0
2*df (a412, x (1))
df (a9, x (1)) - a10
a9 := x (1)*a10 + c4
```

```
0
kx (1) := - 2*x (1)*a61 + c2
kx (2) := - x (2)*a61 + c1
kx (3) := - x (3)*a61 + x (1)*a62 + c3
zu (1) := u (1)*a61
zu (2) := u (4)*x (3)*a412 + u (4)*x (1)*a10 + u (4)*c4 + u (3)*a412 + u (2)*a421 + a10
zu (3) := u (3)*a61 + a62
zu (4) := 2*u (4)*a61
oper  :=  u (4)*x (3)*a412*du2 + u (4)*x (1)*a10*du2 + 2*u (4)*a61*du4 + u (4)*c4*du2 + u (3)*a412*du2
     + u (3)*a61*du3 + u (2)*a421*du2 + u (1)*a61*du1 - x (3)*a61*dx3 - x (2)*a61*dx2
     - 2*x (1)*a61*dx1 + x (1)*a62*dx3 + a10*du2 + a62*du3 + c1*dx2 + c2*dx1 + c3*dx3
op1 := dx2
op2 := dx1
op3 := dx3
op4 := u (4)*du2
op5 := du2*(u (4)*x (1) + 1)
op6 := 2*u (4)*du4 + u (3)*du3 + u (1)*du1 - x (3)*dx3 - x (2)*dx2 - 2*x (1)*dx1
op7 := x (1)*dx3 + du3
op8 := du2*(u (4)*x (3) + u (3))
op9 := u (2)*du2
ss  :=  a10*du2*(u (4)*x (1) + 1) + a412*du2*(u (4)*x (3) + u (3)) + a421*u (2)*du2
    + a61*(2*u (4)*du4 + u (3)*du3 + u (1)*du1 - x (3)*dx3 - x (2)*dx2 - 2*x (1)*dx1)
    + a62*(x (1)*dx3 + du3) + c1*dx2 + c2*dx1 + c3*dx3 + c4*u (4)*du2
sss  := 0
koutlet  := -3
nomu  = 1
before sol rru 1 := $
nomu  = 1$
result rru (1) := 0$
end of splitting$
nomu  = 2$
before sol rru 2 := $
nomu  = 2$
result rru (2) := 0$
end of splitting$
nomu  = 3$
before sol rru 3 := $
nomu  = 3$
result rru (3) := 0$
end of splitting$
nomu  = 4$
before sol rru 4 := $
nomu  = 4$
result rru (4) := 0$
end of splitting$
nomu  = 5$
before sol rru 5 := $
nomu  = 5$
result rru (5) := 0$
```

```
end of splitting$
nomu = 6$
before sol rru 6 := $
nomu = 6$
result rru(6) := 0$
end of splitting$
nomu = 7$
before sol rru 7 := $
nomu = 7$
result rru(7) := 0$
end of splitting$
nomu = 8$
before sol rru 8 := $
nomu = 8$
result rru(8) := 0$
end of splitting$
nomu = 9$
before sol rru 9 := $
nomu = 9$
result rru(9) := 0$
end of splitting$
nomu = 10$
before sol rru 10 := $
nomu = 10$
result rru(10) := 0$
end of splitting$
nomu = 11$
before sol rru 11 := $
nomu = 11$
result rru(11) := 0$
end of splitting$
nomu = 12$
before sol rru 12 := $
nomu = 12$
result rru(12) := 0$
end of splitting$
nomu = 13$
before sol rru 13 := $
nomu = 13$
result rru(13) := 0$
end of splitting$
nomu = 14$
before sol rru 14 := $
nomu = 14$
result rru(14) := 0$
end of splitting$
nomu = 15$
before sol rru 15 := $
nomu = 15$
result rru(15) := 0$
end of splitting$
nomu = 16$
before sol rru 16 := $
```

```
nomu = 16$
result rru(16):= 0$
end of splitting$
nomu = 17$
before sol rru 17:= $
nomu = 17$
result rru(17):= 0$
end of splitting$
nomu = 18$
before sol rru 18:= $
nomu = 18$
result rru(18):= 0$
end of splitting$
nomu = 19$
before sol rru 19:= $
nomu = 19$
result rru(19):= 0$
end of splitting$
nomu = 20$
before sol rru 20:= $
nomu = 20$
result rru(20):= 0$
end of splitting$
nomu = 21$
before sol rru 21:= $
nomu = 21$
result rru(21):= 0$
end of splitting$
nomu = 22$
before sol rru 22:= $
nomu = 22$
result rru(22):= 0$
end of splitting$
nomu = 23$
before sol rru 23:= $
nomu = 23$
result rru(23):= 0$
end of splitting$
nomu = 24$
before sol rru 24:= $
nomu = 24$
result rru(24):= 0$
end of splitting$
nomu = 25$
before sol rru 25:= $
nomu = 25$
result rru(25):= 0$
end of splitting$
```

ภาคผนวก C

บทความสำหรับการเผยแพร่

Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)

Corresponding Address:
Pushpa Publishing House
Vijaya Niwas, 198, Mumfordganj, Prayagraj - 211002, INDIA
http://www.pphmj.com/journals/fjms.htm

General Manager
arun azad
arun@pphmj.com
fjms@pphmj.com

ISSN: 0972-0871

Our reference no.: PPH-1906069-MS

To
Professor Sopita Khamrod
Department of Mathematics
Faculty of Science
Naresuan University
Phitsanulok, 65000, Thailand

July 22, 2019

Dear Professor Khamrod,

I am happy to inform you that your paper entitled "*Bäcklund transformations and solutions of the reduced system from the Navier-Stokes equations*" has been accepted for publication in the Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS).

Thank you for submitting your work to Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS).

Yours sincerely

(ARUN AZAD)

Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)

http://www.pphmj.com
http://dx.doi.org/10.17654/
Volume ..., Number ..., 2019, Pages ... ISSN: 0972-0871

Bäcklund transformations and solutions of the reduced system from the Navier-Stokes equations

Sopita Khamrod

Department of Mathematics

Faculty of Science

Naresuan University

Phitsanulok, 65000, Thailand

e-mail:kuntimak@nu.ac.th

Abstract

The purpose of this paper is to find the admitted Lie group of the reduced system from the Navier-Stokes equations by using the Bäcklund transformations method. Theses equations are constructed from the Navier-Stokes equations rising to a partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations. A Lie group of Bäcklund transformations is constructed in the manuscript and some invariant solutions are also found.

Received: June 28, 2019; Accepted: July 22, 2019
2010 Mathematics Subject Classification: 34B60, 35N10, 35A22.
Keywords and phrases: Admitted Lie group, Bäcklund transformations, invariant solutions, partially invariant solutions, Navier-Stokes equations.

1. Introduction

Physical and mathematical modeling are very closely related. Physical phenomena are used to construct mathematical models, and on the other hand, the solutions of mathematical models are used to explain the physical phenomena. Almost all fundamental equations of physics are nonlinear, and in general, are very difficult to solve explicitly. Numerical methods are often used with much success for obtaining approximate, not exact solutions. Hence, there is interest in obtaining exact solutions of nonlinear equations. Each solution has value, firstly, as an exact description of a real process in the framework of a given model; secondly, as a model to compare various numerical methods; thirdly, as a basis to improve the models used. Group analysis is one of the methods for constructing particular exact solutions of partial differential equations. A survey of this method can be found in [11, 19].

The first step in applications of group analysis methods to partial differential equations consists of finding an admitted Lie group of transformations. The transformations can be point, contact or finite order tangent transformations. The Bäcklund theorem states that there are no nontrivial tangent transformations of finite order except contact transformations. This theorem is proven under assumption that all derivatives involved in the transformations are free: they only satisfy the tangent conditions. On the other hand, if the derivatives appearing in a system of partial differential equations satisfy additional relations other than the tangent conditions, then there may exist nontrivial tangent transformations of finite order. These transformations are called Bäcklund transformations [12].

In this manuscript, we construct Lie group of Bäcklund transformations for a system of partial differential equations which arises from the study of partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations,

$$\begin{aligned} &U''' - UU'' + U'^2 = 0, \\ &W'' - UW' - 1 = 0, \\ &V_t + UV_x - VU' + (W + t)V_z - V_{xx} - V_{zz} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where U and W depend on independent variable x and V depends on independent variables t,x,z. These equations are constructed from the Navier-Stokes equations with the defect $\delta=1$ and the rank $\sigma=1$. Subgroups for studying are taken from the part of optimal system of subalgebras considered for the gas dynamics equations [24]. The proposed research is to find the admitted Lie group of the Equation (1). Example of some invariant solutions are also found. They can return to new solutions of the Navier-Stokes equations.

2. Invariant and partially invariant solutions

Group analysis is one of the methods for constructing particular exact solutions of partial differential equations. This method makes use of symmetry properties of differential equations. Symmetry means that any solution of a given system of partial differential equations is transformed by a Lie group of transformations to a solution of the same system. Moreover a symmetry allows finding new solutions of the system. There are two types of solutions, the class of invariant solutions and partially invariant solutions which can be obtained by group analysis. The notion of invariant solution was introduced by Sophus Lie in 1895.

The notion of a partially invariant solution was introduced by Ovsiannikov [20]. This notion of partially invariant solutions generalizes the notion of an invariant solution, and extends the scope of applications of group analysis for constructing exact solutions of partial differential equations. The algorithm of finding invariant and partially invariant solutions consists of the following steps.

Let L^r be a Lie algebra with the basis $X_1,\ldots,X_r$. The universal invariant J consists of $s=m+n-r$, functionally independent invariants

$$J=\left(J^1(x,u),J^2(x,u),\ldots,J^{m+n-r}(x,u) \right),$$

where n,m are the numbers of independent and dependent variables, respectively and r_* is the total rank of the matrix composed by the coefficients of the generators $X_i, (i = 1,2,...,r)$. If the rank of the Jacobi matrix $\frac{\partial(J^1,...,J^{m+n-r_*})}{\partial(u^1,...,u^m)}$ is equal to q, then one can choose the first $q \le m$ invariants $J^1,...,J^q$ such that the rank of the Jacobi matrix $\frac{\partial(J^1,...,J^q)}{\partial(u_1,...,u_m)}$ is equal to q. A partially invariant solution is characterized by two integers: $\sigma \ge 0$ and $\delta \ge 0$. These solutions are also called $H(\sigma,\delta)$-solutions. The number σ is called the rank of a partially invariant solution. This number gives the number of the independent variables in the representation of the partially invariant solution. The number δ is called the defect of a partially invariant solution. The defect is the number of the dependent functions which can not be found from the representation of partially invariant solution. The rank σ and the defect δ must satisfy the conditions

$$\sigma = \delta + n - r_* \ge 0, \delta \ge 0,$$
$$\rho \le \sigma < n, \max\{r_* - n, m - q, 0\} \le \delta \le \min\{r_* - 1, m - 1\},$$

where ρ is the maximum number of invariants which depends on the independent variables only. Note that for invariant solutions, $\delta = 0$ and $q = m$.

For constructing a representation of a $H(\sigma,\delta)$-solution one needs to choose $l = m - \delta$ invariants and separate the universal invariant in two parts:

$$\overline{J} = (J^1,...,J^l), \ \overline{\overline{J}} = (J^{l+1}, J^{l+2},...,J^{m+n-r_*}).$$

The number l satisfies the inequality $1 \le l \le q \le m$. The representation of the $H(\sigma,\delta)$-solution is obtained by assuming that the first l coordinates $\overline{J}$ of the universal invariant are functions of the invariants $\overline{\overline{J}}$:

$$\overline{J} = W(\overline{\overline{J}}). \tag{2}$$

Equation (2) form the invariant part of the representation of a solution. The next assumption about a partially invariant solution is that Equation (2) can be solved for the first l dependent functions, for example,

$$u^i = \phi^i(u^{l+1}, u^{l+2}, ..., u^m, x), (i = 1, ..., l). \quad (3)$$

It is important to note that the function $W^i, (i = 1, ..., l)$ is involved in the expression for the functions $\phi^i, (i = 1, ..., l)$. The functions $u^{l+1}, u^{l+2}, ..., u^m$ are called superfluous. The rank and the defect of the $H(\sigma, \delta)$-solution are $\delta = m - l$ and $\sigma = m + n - r_* - l = \delta + n - r_*$, respectively.

Note that if $\delta = 0$, then the above algorithm is the algorithm for finding a representation of an invariant solution. If $\delta \neq 0$, then Equations (3) do not define all dependent functions. Since a partially invariant solution satisfies the restrictions (2), this algorithm cuts out some particular solutions from the set of all solutions.

After constructing the representation of an invariant or partially invariant solution (3), it has to be substituted into the original system of equations. The system of equations obtained for the functions W and superfluous functions $u^k, (k = l + 1, 2, ..., m)$ is called the reduced system. This system is overdetermined and requires an analysis of compatibility.

Compatibility analysis for invariant solutions is easier than for partially invariant solutions. Another case of partially invariant solutions which is easier than the general case occurs when $\bar{\bar{J}}$ only depends on the independent variables $J^{l+1} = J^{l+1}(x), J^{l+2} = J^{l+2}(x), ..., J^{m+n-r_*} = J^{m+n-r_*}(x)$.

In this case, a partially invariant solution is called regular, otherwise it is irregular. The number $\sigma - \rho$ is called the measure of irregularity.

The process of studying compatibility consists of reducing the overdetermined system of partial differential equations to an involutive system. During this process different subclasses of $H(\sigma, \delta)$ partially invariant solutions can be obtained. Some of these subclasses can be $H_1(\sigma_1, \delta_1)$-solutions with subalgebra $H_1 \subset H$. In this case $\sigma_1 \geq \sigma, \delta_1 \leq \delta$. The study of compatibility of partially invariant solutions with the same rank $\sigma_1 = \sigma$, but with smaller defect $\delta_1 < \delta$ is simpler than the study of compatibility for $H(\sigma,\delta)$-solutions. In many applications, there is a reduction of a $H(\sigma,\delta)$-solution to a $H_1(\sigma,0)$ solution. In this case the $H(\sigma,\delta)$-solution is called reducible to an invariant solution. The problem of reduction to an invariant solution is important since invariant solutions are usually studied first.

3. The unsteady Navier-Stokes equations

Unsteady motion of incompressible viscous fluid is governed by the Navier-Stokes equations

$$\mathrm{u}_t + \mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{u} = -\nabla p + \Delta\mathrm{u}, \quad \nabla\cdot\mathrm{u} = 0, \tag{4}$$

where $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ is the velocity field, p is the fluid pressure, ∇ is the gradient operator in the three-dimensional space $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $= (x, y, z)$ and Δ is the Laplacian. A group classification of the Navier-Stokes equations in the three-dimensional case[1] was done in [2]. The Lie group admitted by the Navier-Stokes equations is infinite. Its Lie algebra can be presented in the form of the direct sum $L^\infty \oplus L^5$, where the infinite-dimensional ideal L^∞ is generated by the operators [2]

$$X_{\phi_i} = \phi_i(t)\partial_{x_i} + \phi_i'(t)\partial_{u_i} - \phi_i''(t)x_i\partial_p, X_\psi = \psi(t)\partial_p$$

with arbitrary functions $\phi_i(t), (i = 1,2,3)$ and $\psi(t)$. The subalgebra L^5 has the following basis:

$$Y = 2t\partial_t + x_i\partial_{x_i} - u_i\partial_{u_i} - 2p\partial_p, Z_0 = \partial_t,$$

$$Z_{ik} = x_i\partial_{x_k} - x_k\partial_{x_i} + u_i\partial_{u_k} - u_k\partial u_i, (i < k \leq 3).$$

The Galilean algebra L^{10} is contained in $L^\infty \oplus L^5$.

---

[1]A classification of the two-dimensional Navier-Stokes equations was studied in [26].

[2]There is still no complete classification of the subalgebras of the Lie algebra $L^\infty \oplus L^5$. Classification of infinite-dimensional subalgebras of this algebra was studied in [14].

Several articles [1,3,4,8,13,15,25,27] are devoted to invariant solutions of the Navier-Stokes equations[3]. While partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations have been less studied[4], there has been substantial progress in studying such classes of solutions of inviscid gas dynamics equations [5,9,17,18,19,21,23,24,28].

4. The unsteady Navier-Stokes equations

The reduction of the Navier-Stokes equations to partial differential equation in three independent variables is described. In this section analysis of compatibility of regular partially invariant solutions with defect 1 and rank 1 of the subalgebra $\{\partial_y, \partial_z, t\partial_y + \partial_v, t\partial_z + \partial_w + \partial_t\}$ is given. This subalgebra is taken from the optimal system constructed for the gas dynamics equations [22]. Partially invariant solutions of the gas dynamics equations for this subalgebra was considered in [24].

The Navier-Stokes equations are used in the component form:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -p_x + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \tag{5}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -p_y + v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}, \tag{6}$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z + w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}, \tag{7}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0. \tag{8}$$

The dependent variables u, v, w and p are functions of the space variables x, y, z and time t.

Invariants of the Lie group corresponding to subalgebra generated by $\{\partial_y, \partial_z, t\partial_y + \partial_v, t\partial_z + \partial_w + \partial_t\}$ are

$$u, w - t, p, x.$$

The representation of the regular partially invariant solution is

$$u = U(x), w = W(x) + t, p = P(x), \tag{9}$$

while the function $v = v(t, x, y, z)$ still depends on all independent variables. Substituting this representation of a solution into the Navier-Stokes equations, one obtains

---

[3]Short reviews devoted to invariant solutions of the Navier-Stokes equations can be found in [4,6,7,16,27].

[4]Firstly the approach of partially invariant solutions to the Navier-Stokes equations was applied in[27].

$$U'' - UU' - P' - 1 = 0, \tag{10}$$

$$v_t + Uv_x + vv_y + (W + t)v_z - (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) = 0, \tag{11}$$

$$W'' - UW' - 1 = 0, \tag{12}$$

$$U' + v_y = 0. \tag{13}$$

Integrating equations (10) and (13), one has

$$P = U' - 2^{-1}U^2 - x + C_1,\ \ v = -U'y + V(t,x,z).$$

The constant C_1 can be zero by using the property that the pressure p is defined up to an arbitrary function of time only.
Substituting v into Equation (11), one arrives at the equation

$$V_t + UV_x - VU' + (W+t)V_z - V_{xx} - V_{zz} + y(U''' - UU'' + U'^2) = 0.$$

Since U,V and W do not depend on y, the last equation can be split with respect to y:

$$U''' - UU'' + U'^2 = 0,$$
$$V_t + UV_x - VU' + (W+t)V_z - V_{xx} - V_{zz} = 0.$$

Thus the studied partially invariant solution of the Navier-Stokes equations is

$$u = U(x),\ v = -U'y + V(t,x,z),\ w = W(x) + t,$$
$$P = U' - 2^{-1}U^2 - x,$$

where the functions $U(x), W(x)$ and $V(t,x,z)$ satisfy the reduced system

$$\begin{aligned} &U''' - UU'' + U'^2 = 0,\\ &W'' - UW' - 1 = 0,\\ &V_t + UV_x - VU' + (W+t)V_z - V_{xx} - V_{zz} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

5. Lie groups of Bäcklund transformations

Lie groups of Bäcklund transformations admitted by the system of equation (14) are presented in this section.

A point transformation is a transformation which involves transformations of the independent and the dependent variables only. On the other hand, a tangent transformation is a transformation which involves transformations of the independent variables, the dependent variables, as well as the derivatives. A natural generalization of the prolongation of point transformation leads to the tangent transformation. A tangent transformation which involves only the first order derivatives is called a contact transformation. A tangent transformation which involves derivatives up to finite order is called a Bäcklund transformation.

Consider the transformations of the independent variables x, dependent variables u and derivatives p:

$$\bar{x}_i = f^i(x,u,p;a),\ \bar{u}^k = \varphi^k(x,u,p;a),\ \bar{p}^k_\alpha = \psi^k_\alpha(x,u,p;a). \tag{15}$$

Here

$$p^k_\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}u^k}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}u^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}},$$

where $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ is a multi-index, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$, $i=1,...,n,\ k=1,...,m,\ |\alpha|\in\{1,2,...,q\}$. The functions f^i,φ^k and ψ_α^k depend on the independent variables x, dependent variables u and the derivatives p of order up to q ($|\alpha|\in\{1,2,...,q\}$).

The Lie group of transformations (15) is called a one-parameter group of tangent transformations if it preserves the tangent conditions

$$du^k-p_i^k dx_i=0,\ dp_\alpha^k-p_{\alpha,i}^k dx_i=0,\quad i=1,2,...,n,\ k=1,2,...,m,\ |\alpha|\in\{1,2,...,q-1\}. \tag{16}$$

This means that

$$d\bar{u}^k-\bar{p}_i^k d\bar{x}_i=0,\ d\bar{p}_\alpha^k-\bar{p}_{\alpha,i}^k d\bar{x}_i=0,\quad i=1,2,...,n,\ k=1,2,...,m,\ |\alpha|\in\{1,2,...,q-1\}. \tag{17}$$

These conditions are strong, they provide very strong restrictions for the transformations (15).

The infinitesimal generator of this group is given by the vector field (ξ,η,ζ):

$$X=\xi^i\partial_{x_i}+\eta^k\partial_{u^k}+\sum_{|\alpha|=1}^{q}\zeta_\alpha^k\partial_{p_\alpha^k}, \tag{18}$$

where

$$\xi^i=\left.\frac{\partial f^i}{\partial a}\right|_{a=0},\ \eta^k=\left.\frac{\partial\varphi^k}{\partial a}\right|_{a=0},\ \zeta_\alpha^k=\left.\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Assume that the transformations (15) form a one parameter Lie group G^1. The infinitesimal generator of the group G^1 is given by the equation (18). The coefficients of the infinitesimal generator for the derivatives of any order higher than q are defined by the recurrent prolongation formulae

$$\zeta_{\alpha,i}^j=D_i\zeta_\alpha^j-p_{\alpha,k}^j D_i,\ (|\alpha|=q,q+1,...).$$

Here D_i is the operator of the total derivative with respect to x_i.

The infinitesimal generator X is prolonged for the differentials du^j, dx_i and dp_α^j:

$$\widetilde{X}=X+\widetilde{\xi^i}\,\partial_{dx_i}+\widetilde{\eta^k}\,\partial_{du^k}+\widetilde{\zeta_\alpha^j}\,\partial_{dp_\alpha^j}$$

by the usual formulae for the differentials

$$\widetilde{\xi^i} = \mathrm{d}\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s}\mathrm{d}u^s + \frac{\partial \xi^i}{\partial p^s_\beta}\mathrm{d}p^s_\beta,$$

$$\widetilde{\eta^k} = \mathrm{d}\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l + \frac{\partial \eta^k}{\partial u^s}\mathrm{d}u^s + \frac{\partial \eta^k}{\partial p^s_\beta}\mathrm{d}p^s_\beta,$$

$$\widetilde{\zeta^j_\alpha} = \mathrm{d}\zeta^j_\alpha = \frac{\partial \zeta^j_\alpha}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l + \frac{\partial \zeta^j_\alpha}{\partial u^s}\mathrm{d}u^s + \frac{\partial \zeta^j_\alpha}{\partial p^s_\beta}\mathrm{d}p^s_\beta.$$

A Lie group of tangent transformations has to satisfy the determining equations

$$\left(\widetilde{\eta^j} - \widetilde{\zeta^j_i} - p^j_i \widetilde{\xi^i}\right)\Big|_{(17)} = 0, \quad \left(\widetilde{\zeta^j_\alpha} - \widetilde{\zeta^j_{\alpha,k}} - p^j_{\alpha,k}\widetilde{\xi^k}\right)\Big|_{(17)} = 0.$$

A Lie group of tangent transformations with generator X is called admitted by a system of partial differential equations

$$F(x,u,p) = 0 \tag{19}$$

if the coefficients of the infinitesimal generator satisfy the determining equations

$$\widetilde{X}F\Big|_{(19)} = 0. \tag{20}$$

Invariance of the tangent conditions for the admitted Lie group of tangent transformations becomes

$$\left(\widetilde{\eta^j} - \widetilde{\zeta^j_i} - p^j_i \widetilde{\xi^i}\right)\Big|_{(17),(19)} = 0, \quad \left(\widetilde{\zeta^j_\alpha} - \widetilde{\zeta^j_{\alpha,k}} - p^j_{\alpha,k}\widetilde{\xi^k}\right)\Big|_{(17),(19)} = 0. \tag{21}$$

where the sign $\big|_{(17),(19)}$ means that equation (21) is considered on the manifold defined by equations (17) and (19). The process of obtaining equations (21) consists of the following steps. The first step is to get the prolongation of the generator X. The second step is acting of the prolongation $\widetilde{X}$ on the equation $F = 0$. The next step is a transition onto the manifold, defined by (17) and (19). The obtained equation is called a determining equation. The generators, which coefficients satisfy this equation compose a Lie algebra of admitted generators. The Lie group corresponding to this Lie algebra is called an admitted Lie group. For all complicate calculations we use the symbolic manipulation program REDUCE [10].

Direct calculations show that the Lie group of transformations corresponding to the generators

$$Y_1 = U'\partial_V, \; Y_2 = (tU'+1)\partial_V, \; Y_3 = (1 + W + zU')\partial_V, \tag{22}$$

is admitted by the system of equations (14). The corresponding transformations are:

$$Y_1 : \bar{t} = t,\ \bar{x} = x,\ \bar{z} = z,$$
$$\bar{U} = U,\ \bar{U}' = U',\ \bar{U}'' = U'',\ \bar{U}''' = UU'' - (U')^2,$$
$$\bar{W} = W,\ \bar{W}' = W',\ \bar{W}'' = W'',$$
$$\bar{V} = V + aU',\ \bar{V}_t = V_t,\ \bar{V}_z = V_z,\ \bar{V}_{zz} = V_{zz},$$
$$\bar{V}_x = V_x + aU'',\ \bar{V}_{xx} = V_{xx} + a(UU'' - (U')^2),$$
$$Y_2 : \bar{t} = t,\ \bar{x} = x,\ \bar{z} = z,$$
$$\bar{U} = U,\ \bar{U}' = U',\ \bar{U}'' = U'',\ \bar{U}''' = UU'' - (U')^2,$$
$$\bar{W} = W,\ \bar{W}' = W',\ \bar{W}'' = W'',$$
$$\bar{V} = V + a(tU' + 1),\ \bar{V}_t = V_t + aU',\ \bar{V}_z = V_z,\ \bar{V}_{zz} = V_{zz},$$
$$\bar{V}_x = V_x + atU'',\ \bar{V}_{xx} = V_{xx} + at(UU'' - (U')^2),$$
$$Y_3 : \bar{t} = t,\ \bar{x} = x,\ \bar{z} = z,$$
$$\bar{U} = U,\ \bar{U}' = U',\ \bar{U}'' = U'',\ \bar{U}''' = UU'' - (U')^2,$$
$$\bar{W} = W,\ \bar{W}' = W',\ \bar{W}'' = W'',$$
$$\bar{V} = V + a(t + W + zU'),\ \bar{V}_t = V_t + a,$$
$$\bar{V}_z = V_z + aU',\ \bar{V}_{zz} = V_{zz},$$
$$\bar{V}_x = V_x + aW' + azU'',\ \bar{V}_{xx} = V_{xx} + aW'' + az(UU'' - (U')^2).$$

The Lie group of transformations (22) was originally found by seeking an admitted Lie group of point transformations for the equivalent system

$$\begin{aligned} &\tilde{U}'' - U\tilde{U}' + \tilde{U}^2 = 0,\ \tilde{U} = U', \\ &W'' - UW' - 1 = 0, \\ &V_t + UV_x - V\tilde{U} + (W + t)V_z - V_{xx} - V_{zz} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

For system (23) the dependent variables are

$$u^1 = U, u^2 = V, u^3 = W, u^4 = U'.$$

The basis of the Lie algebra corresponding to the Lie group of point transformations admitted by system (23) is

$$X_1 = \partial_x,\quad X_2 = \partial_z,\quad X_3 = V\partial_V,$$
$$X_4 = \partial_t + t\partial_z,\quad X_5 = t\partial_z + \partial_W,\quad X_6 = U'\partial_V,$$
$$X_7 = (tU' + 1)\partial_V,\quad X_8 = (t + W + zU')\partial_V.$$

The generators X_6, X_7, X_8 coincide with the operators Y_1, Y_2, Y_3 respectively. Notice that if one looks for an admitted group by considering the dependent variables

$$u^1 = U, u^2 = V, u^3 = W, u^4 = U',$$
$$u^5 = W', u^6 = V_t, u^7 = V_x, u^8 = V_y,$$

then one obtains the following admitted generators

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_z, \quad X_3 = V\partial_V + V_t\partial_t + V_x\partial_x + V_z\partial_z$$
$$X_4 = t\partial_z + \partial_W - V_z\partial_V, \quad X_5 = \partial_t - t\partial_W.$$

Note that Y_1, Y_2, and Y_3 are no longer among these generators.

The Bäcklund theorem [12] states that there are no tangent transformations of finite order N other than tangent transformations which are prolongations of contact $(m = 1)$ or point transformations $(m > 1)$.

This means that for the case $m > 1$, a tangent transformation is the N-th prolongation of a group of point transformations, and for $m = 1$, a tangent transformation is the prolongation of a contact transformation.

Therefore any tangent transformation is a prolongation of a Lie group of either contact transformations or point transformations. The first case is only possible for $m = 1$. Notice that the Bäcklund theorem was proven under the assumption that all derivatives only satisfy the tangent conditions.

In contrast to the Bäcklund theorem, admitted tangent transformations involve additional relations for the derivatives occurring in (19). This allows for the existence of Bäcklund transformations, namely tangent transformations of finite order.

6. Examples of invariant solutions of the reduced system (1)

Invariant solutions of the equation (1) are presented in this section. Analysis of invariant solutions is presented in details for three examples.

Subalgebra : $\{X_2, X_1 + X_3\}$

The basis of this subalgebra is

$$X_2 = \partial_z, X_1 + X_3 = \partial_x + V\partial_V.$$

Let a function $f = f(t,x,z,U,V,W)$ be an invariant of the generator X_2. This means that $f_z = 0$. So the function f is not depend z, it means that $f = f(t,x,U,V,W)$. After substituting it into the equation $(X_1 + X_3)f = 0$, one obtains the equation $f_x + Vf_V = 0$. The characteristics system of the last equation is

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{dV}{V}.$$

Thus the universal invariant of this subalgebras consist of invariants

$$t, \frac{V}{e^x}.$$

Hence, a representation of the invariant solution is

$$U = U(x),\ W = W(x),\ V = e^x F(t)$$

with arbitrary functions $U(x), W(x)$ and $F(t)$.

After substituting this representation into the reduced system (1), one obtains the system of ordinary differential equations

$$U''' - UU'' + U'^2 = 0,$$

$$W'' - UW' - 1 = 0,$$

$$F'(t) + (U - U' - 1)F(t) = 0$$

Without loss of generality, for easily solving the last system. Assume $U = C_1$, we get that $W = \frac{C_2}{C_1}e^{C_1 x} - \frac{x}{C_1} + C_3$ and $F(t) = C_4 e^{(1-C_1)t}$,

where C_1, C_2, C_3 and C_4 are arbitrary constants.

Therefore the invariant solutions of the reduced system from the Navier-Stokes equations are

$$U = C_1,$$

$$W = \frac{C_2}{C_1}e^{C_1 x} - \frac{x}{C_1} + C_3$$

$$V = C_4 e^{(1-C_1)t+x}$$

where C_1, C_2, C_3 and C_4 are arbitrary constants.

Subalgebra : $\{X_2, X_4 + X_7\}$

The basis of this subalgebra is

$$X_2 = \partial_z,\ X_4 + X_7 = \partial_t + t\partial_z + (tU' + 1)\partial_V.$$

Let a function $f = f(t,x,z,U,V,W)$ be an invariant of the generator X_2. By the same way, we get that $f = f(t,x,U,V,W)$.

After substituting it into the equation $(X_4 + X_7)f = 0$, one obtains the equation

$$f_t + (tU' + 1)f_V = 0.$$

The characteristics system of the last equation is

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{0} = \frac{dV}{tU' + 1} = \frac{dU}{0} = \frac{dW}{0}.$$

Thus the universal invariant of this subalgebras consist of invariants

$$x, V-(U't^2)/2-t, U, W.$$

Hence, a representation of the invariant solution is

$$U=U(x), W=W(x), V=(U't^2)/2+t+F(x)$$

with arbitrary functions $U(x)$, $W(x)$ and $F(x)$. After substituting this representation into equation (1), one obtains the system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned}
&U'''-UU''+U'^2=0,\\
&W''-UW'-1=0,\\
&F''(x)-UF'(x)+F(x)U'+(U't^2)/2-1=0.
\end{aligned}$$

Without loss of generality, for easily solving the last system. Assume $U=C_1$, we get that $W=\dfrac{C_2}{C_1}e^{C_1x}-\dfrac{x}{C_1}+C_3$ and $F=\dfrac{C_4}{C_1}e^{C_1x}-\dfrac{x}{C_1}+C_5$ where C_1, C_2, C_3, C_4 and C_5 are arbitrary constants.

Therefore the invariant solutions of the reduced system from the Navier-Stokes equations are

$$\begin{aligned}
&U=C_1,\\
&W=\frac{C_2}{C_1}e^{C_1x}-\frac{x}{C_1}+C_3,\\
&V=t+\frac{C_4}{C_1}e^{C_1x}-\frac{x}{C_1}+C_5
\end{aligned}$$

where C_1, C_2, C_3, C_4 and C_5 are arbitrary constants.

6. Conclusion

This manuscript devoted to the construction of a Lie group of tangent transformations for a system of partial differential equations. The Bäcklund theorem states that in the general case there are no nontrivial tangent transformations of finite order except contact transformations. This theorem is proven under the assumption that all derivatives involved in the transformations are free: they only satisfy the tangent conditions. On the other hand, if the derivatives appearing in a system of partial differential equations satisfy additional relations other than the tangent conditions, then there may exist nontrivial tangent transformations of finite order. These transformations are called Bäcklund transformations.

In this article it is found the existence of Bäcklund transformations for a system of partial differential equations (1) which arises from the study of partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations. The algorithm of obtaining an admitted of subalgebras was applied to the reduction of the Navier-Stokes equations. Some exact invariant solutions corresponding to some subalgebras are presented. These possibilities extend an area of using group analysis for constructing new exact solutions.

Acknowledgements

The author would like to deeply appreciate the Naresuan University for the research grant in this research.

References

[1] R. E. Boisvert, W. F. Ames, and U. N. Srivastava, Group properties and new Solutions of Navier-Stokes equations, J. Eng. Math. 17 (1983), 203-221.

[2] V. O. Bytev, Group properties of Navier-Stokes equations, Chislennye metody mehaniki sploshnoi sredy (Novosibirsk). 3 (3) (1972), 13-17.

[3] B. J. Cantwell, Similarity transformations for the two-dimensional, unsteady, stream-function equation, J. Fluid Mech. 85 (1978), 257-271.

[4] B. J. Cantwell, Introduction to symmetry analysis, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[5] A. P. Chupakhin, On barochronic motions of a gas, Dokl. RAS. 352 (5) (1997), 624-626.

[6] W. I. Fushchich and R. O. Popovych, Symmetry reduction and exact solution of the Navier-Stokes equations, Nonl. Math. Phys. 1 (1) (1994), 75-113.

[7] W. I. Fushchich and R. O. Popovych, Symmetry reduction and exact solution of the Navier-Stokes equations, Nonl. Math. Phys. 1 (2) (1994), 158-188.

[8] A. Grauel, and W.H. Steeb, Group properties and new solutions of Navier-Stokes equations, Int. J. Theor. Phys. 24 (1985), 255-265.

[9] A. M. Grundland and L. Lalague, Invariant and partially invariant solutions of the equations describing a non-stationary and isotropic flow for an ideal and compressible fluid in (3+1) dimensions, J. Phys. A: Math. Gen.f. 29 (1996), 1723-1739.

[10] A. C. Hearn, REDUCE. User's and contributed packages manual, version 3.7, Rand Corp, Carifornia, 1999.

[11] N. H. Ibragimov (ed.), CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, (Vol.1, 2, 3), CRC Press, 1994.

[12] N. H. Ibragimov, Transformation groups applied to mathematical physics, Nauka, Moscow, 1983. (English translation, Reidel, D., Ed., Dordrecht, 1985.)

[13] N. H. Ibragimov and G. Unal, Equivalence transformations of Navier-Stokes equation, Bulletin of the Technical University of Istanbul 47 (1-2) (1994), 203-207.

[14] S. V. Khabirov, Partially invariant solutions of equations of hydrodynamics, Exact solutions of differential equations and their asymptotics. Ufa, 1992.

[15] S. P. Lloyd, The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations, Acta Math.f 38 (1981), 85-98.

[16] D. K. Ludlow, P. A. Clarkson, and A. P. Bassom, Similarity reduction and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, Studies in Appl. Math. 103 (1999), 183-240.

[17] S. V. Meleshko, Classification of the solutions with degenerate hodograph of the gas dynamics and plasticity equations, Doctoral thesis, 1991.

[18] S. V. Meleshko, One class of partial invariant solutions of plane gas flows, Differential Equations, 30 (10) (1994), 1690-693.

[19] L. V. Ovsiannikov, Group analysis of differential equations, Moscow: Nauka, 1978. (English translation, Ames, W.F., Ed., published by Academic Press, New York, 1982)

[20] L. V. Ovsiannikov, Partially Invariant Solutions of the Equations Admitting a Group, Proceedings of 11-th Int. Congr. Appl. Mech, 1964, 868-870.

[21] L. V. Ovsiannikov, Isobaric motions of a gas, Differential Equations, 30 (10) (1994), 1792-1799.

[22] L. V. Ovsiannikov, Program SUBMODELS Gas dynamics, J. Appl. Math. Mech. 58 (1994), 30-55.

[23] L. V. Ovsiannikov, Regular and irregular partially invariant solutions, Dokl. RAS. 343 (2) (1995), 156-159.

[24] L. V. Ovsiannikov and A. P. Chupakhin, Regular partially invariant submodels of the equations of gas dynamics, J. Appl. Math. Mech. 60 (6) (1996), 990-999.

[25] R. O. Popovych, On Lie reduction of the Navier-Stokes equations, Nonl. Math. Phys. 2 (3-4) (1995), 301-311.

[26] V. V. Pukhnachov, Group properties of the Navier-Stokes equations in two-dimensional case, J. Appl. Mech. Techn. Phys. (1960), 83-90.

[27] V.V. Pukhnachov, Free boundary problems of the Navier-Stokes equations,

Doctoral thesis, 1974.

[28] A. F. Sidorov, V. P. Shapeev, and N. N. Yanenko, The method of differential constraints and its applications in gas dynamics, Novosibirsk: Nauka, 1984.