บทที่ 3
วิธีดำเนินการทดลอง

การศึกษานี้แบ่งออกเป็นสองส่วนเพื่อให้เข้าใจถึงการไหลของอากาศผ่านลูกกอล์ฟ ในส่วนแรกเป็นการศึกษาการไหลแบบศักย์ (Potential Flow) ผ่านทรงกระบอกที่กำลังหมุน ซึ่งศึกษาโดยใช้โปรแกรม MATLAB โดยกำหนดให้เกิดการ Superposition ของกระแสอิสระ (Uniform Flow) ที่มีความเร็วคงที่ การไหลแบบดับเบล็ตและการไหลแบบวอร์เท็กซ์ ในส่วนที่สองเป็นการศึกษาการไหลผ่านทรงกลม ซึ่งประกอบด้วยรอยบุ๋มที่ตำแหน่งต่างๆ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element) คำนวณ

3.1 การศึกษาการไหลของของไหลผ่านทรงกระบอกหมุนสำหรับการไหลแบบศักย์

ในการศึกษาส่วนนี้จะศึกษาถึงลักษณะทางกายภาพของอากาศที่ไหลผ่านทรงกระบอกตันที่กำลังหมุน เพื่อศึกษาการไหลที่ทำให้เกิดแรงยก (Lift) อันเป็นการศึกษาเบื้องต้นสำหรับการยกตัวของวัตถุต่างๆ เช่น ปีกเครื่องบิน ลูกกอล์ฟ โดยใช้เกณฑ์ของ Kutta-Joukowski กล่าวคือ เมื่ออากาศไหลผ่านวัตถุที่กำลังหมุนจะทำให้เกิดแรงยก โดยทำการศึกษาภายใต้ D'Alembert's paradox (แรงลากเท่ากับศูนย์) และใช้โปรแกรม MATLAB ช่วยในการประมวลผล ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1.1 สมการที่ใช้ในการคำนวณ

เริ่มด้วยการกำหนดให้ทรงกระบอกหมุนในของไหล ซึ่งไหลด้วยความเร็วคงที่ U_∞ การไหลเป็นการไหลแบบศักย์ (Potential Flow) เพราะฉะนั้นจะต้องพิจารณา Streamfunction (ψ) ของการไหลของของไหลดังแสดงในสมการที่ (3.1) Streamfunction ของการไหลแบบดับเบล็ต (3.2)และ Streamfunction ของวอร์เท็กซ์อันเนื่องมาจากการหมุนของทรงกระบอก ดังแสดงในสมการที่ (3.3) โดยที่ Γ คือความแข็งแรง (Strength) ของวอร์เท็กซ์ มีค่าเท่ากับ $2\pi K$

การไหลที่ความเร็วคงที่ $$\psi_U = Uy \tag{3.1}$$

ดับเบล็ต $$\psi_q = \frac{-q\sin\theta}{r_q} \tag{3.2}$$

วอร์เท็กซ์ $$\psi_\Gamma = \frac{-\Gamma \ln r_\Gamma}{2\pi} \tag{3.3}$$

โดยที่ $r_\Gamma^2 = (x - x_\Gamma)^2 + (y - y_\Gamma)^2$

$r_q^2 = (x - x_q)^2 + (y - y_q)^2$

เมื่อ x_Γ และ y_Γ คือจุดกำเนิดของวอร์เท็กซ์

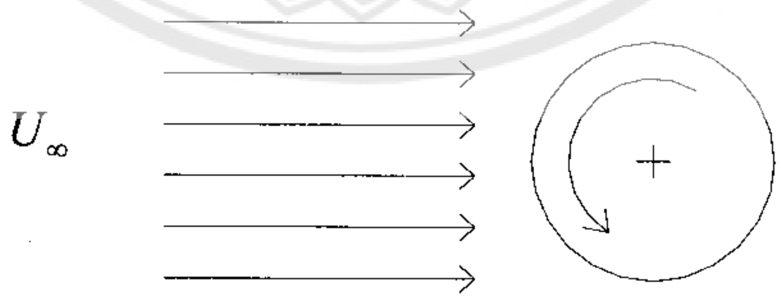
เมื่อนำสมการ (3.1) (3.2)และ (3.3) มา Superposition กัน จะได้ Streamfunction สำหรับการไหลผ่านทรงกระบอกที่กำลังหมุนเป็น

$$\Psi = \Psi_U + \Psi_q + \Psi_\Gamma \tag{3.4}$$

ดังนั้น $$\psi = Uy - \frac{q\sin\theta}{r_q} - \frac{\Gamma \ln r_\Gamma}{2\pi} \tag{3.5}$$

3.1.2 กำหนดขอบเขตของโจทย์

กำหนดให้การไหลของกระแสอิสระมีความเร็วเป็น $U_\infty = 5$ m/s และทิศทางการไหลของของไหลจากซ้ายไปขวาและการหมุนของทรงกระบอกมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกามีเครื่องหมายเป็นบวก ดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยที่ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอกมีค่าเท่ากับ 2 m และกำหนดค่า K ต่างๆ กัน ได้แก่ -10, -5, 0, 5 และ 10 รอบต่อวินาที ประมวลผลโดยใช้โปรแกรม MATLAB ดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.1 การไหลของกระแสอิสระและทิศทางการหมุนของทรงกระบอก

จากรูปที่ 3.2 แสดงโค้ดของโปรแกรม MATLAB เริ่มต้นกำหนดขอบเขตการแสดงผลแนวแกน x อยู่ระหว่าง -3.5 ถึง 1.5 ส่วนขอบเขตในแนวแกน y อยู่ระหว่าง -3.0 ถึง 1.5 รวมทั้งกำหนดให้กระแสอิสระมีความเร็วเป็น U_∞ = 5 m/s และความเร็วรอบของทรงกระบอก (K) เท่ากับ 5 รอบต่อวินาที จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก จุดกำเนิดของวอร์เท็กซ์จุดกำเนิดของดับเบล็ตอยู่จุดเดียวกันคือ (-1,-1) เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอกเท่ากับ 2 เมตร โดยโปรแกรมจะแสดงเส้นการไหลผ่านทรงกระบอกที่กำลังหมุน โดยมี Streamfunction ที่ได้จากการนำการไหลแบบสม่ำเสมอ การไหลแบบวอร์เท็กซ์และการไหลแบบดับเบล็ตมา Superposition กัน

```
nx=100;xmin=-3.5;xmax=1.5;
ny=100;ymin=-3.0;ymax=1.5;
[x y]=meshgrid(linspace(xmin,xmax,nx),linspace(ymin,ymax,ny));
U0=5.0;K=5.0;
Gamma=2*pi*K;xGamma=-1.0;yGamma=-1.0;
q=5.0;xq=-1.0;yq=-1.0;
radius=inline('sqrt((x-x1).^2+(y-y1).^2)','x','y','x1','y1');
Psiq=q*sin(atan2(y-yq,x-xq))./radius(x,y,xq,yq);
PsiGamma=Gamma*log(radius(x,y,xGamma,yGamma))/2/pi;
StreamFunction=U0*y-PsiGamma-PsiK;
levmin=StreamFunction(1,nx);
levmax=StreamFunction(ny,nx/2);
levels=linspace(levmin,levmax,50)';
contour(x,y,StreamFunction,levels)
hold on
theta=linspace(0,2*pi);
plot(xGamma+cos(theta),yGamma+sin(theta),'k')
axis equal
axis([xmin xmax ymin ymax])
ylabel('y')
xlabel('x')
```

รูปที่ 3.2 โค้ดของโปรแกรม MATLAB

3.2 การใช้สมการนาเวียร์ - สโตกส์ในการวิเคราะห์การไหลผ่านทรงกลม

3.2.1 การไหลแบบราบเรียบผ่านทรงกลมสมมาตร 2 มิติ

(a) สมการที่ใช้ในการคำนวณ (Governing Equation)

ในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาการไหลแบบราบเรียบผ่านทรงกลม ในการคำนวณนี้กำหนดให้ของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible Flow) และมีคุณสมบัติต่างๆ คงที่ และการไหลเป็น แบบสภาวะคงตัว (Steady State) แบบสองมิติตามแกน (2D Axial Symmetry) สมการที่ใช้คำนวณได้แก่

สมการต่อเนื่อง(Continuity Equation) :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \qquad (3.6)$$

สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equation) :

แนวแกน r :

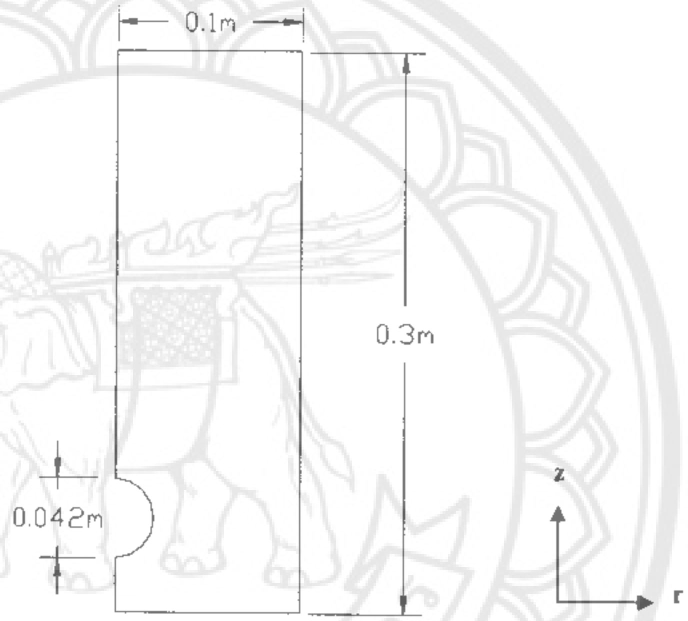
$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_r]\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right\} \qquad (3.7(ก))$$

แนวแกน z :

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right\} \qquad (3.7(ข))$$

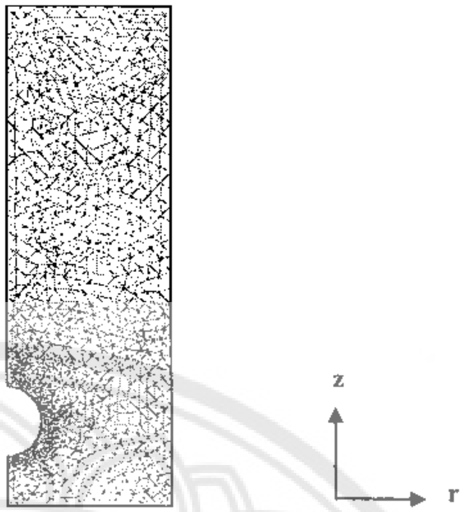
(b) วิธีการคำนวณ

สำหรับวิธีการคำนวณนั้นเริ่มจากการออกแบบการทดลองดังรูปที่ 3.3 แสดงแบบจำลองที่ใช้ในการคำนวณ โดยเริ่มจากการสร้างขอบเขตหรือโดเมนของการคำนวณเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 0.1×0.3 m ทั้งนี้เมื่อให้การประมวลผลของคอมพิวเตอร์ดำเนินไปได้อย่างรวดเร็วและ Converge จากนั้นสร้างครึ่งวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.042 m จะได้โดเมนในการคำนวณเพียงครึ่งเดียว เนื่องจากมีความสมมาตร



รูปที่ 3.3 ลักษณะขอบเขตหรือโดเมนของแบบจำลองการไหลผ่านทรงกลม

จากนั้นกำหนดสภาวะขอบเขต โดยการสร้างกริด (Grid) ดังรูปที่ 3.4 ซึ่งกริดบริเวณพื้นผิวทรงกลมจะมีความละเอียดกว่าบริเวณการไหล โดยมีจำนวนกริดโดยรวมเป็น 1,556 กริด คิดเป็นความละเอียด 517,866 กริดต่อตารางเมตร หลังจากนั้นทำการประมวลผล



รูปที่ 3.4 รายละเอียดของกริดของแบบจำลองการไหลผ่านทรงกลม

(c) การกำหนดสภาวะขอบเขต

รูปที่ 3.5 แสดงการกำหนดสภาวะขอบเขตของโจทย์โดยมีรายละเอียดดังนี้

ด้านที่ 1: Inflow/Outflow Velocity กล่าวคือ ขอบเขตทางเข้า กำหนดให้ความเร็วของของไหลคงที่ดังนี้

$$u = u_{\infty} = 0.15 \text{ m/s} \tag{3.8}$$

ด้านที่ 2: Outflow/Pressure กล่าวคือ ขอบเขตทางออก กำหนดให้ความดันและแรงเนื่องจากความหนืดเป็นดังต่อไปนี้

$$p = 0 \tag{3.9}$$
$$\mu\nabla^2\vec{V} = 0$$

ด้านที่ 3: No Slip กล่าวคือ ความเร็วของของไหลที่ผิวทรงกลมไม่ลื่นไถลจึงมีค่าเท่ากับศูนย์

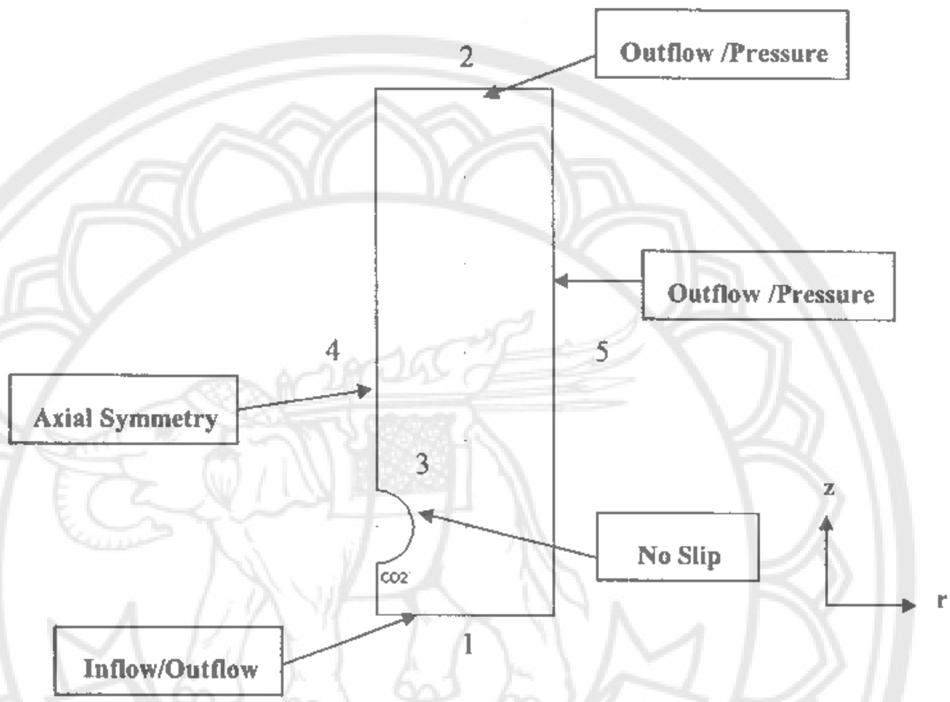
$$u = 0 \tag{3.10}$$

ด้านที่ 4: Axial Symmetry กล่าวคือ เป็นแกนสมมาตรของโดเมนทำให้การวิเคราะห์การไหลเหลือเพียงครึ่งเดียว ซึ่งลดเวลาในการประมวลผลโดยคอมพิวเตอร์ มีค่าดังนี้

$$r = 0 \tag{3.11}$$

ด้านที่ 5: Outflow/Pressure **กล่าวคือ ขอบเขตดังกล่าว กำหนดให้ความดันและแรงเนื่องจากความหนืดเป็นดังต่อไปนี้**

$$p = 0 \tag{3.12}$$
$$\mu \nabla^2 \vec{V} = 0$$



รูปที่ 3.5 สภาวะขอบเขตของแบบจำลองการไหลผ่านทรงกลม

(d) พารามิเตอร์และตัวแปรที่เกี่ยวข้อง

พารามิเตอร์และตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหลที่ T = 300 K แสดงได้ดังต่อไปนี้

ความหนาแน่นของอากาศ ρ_{air} = 1.1614 kg/m^3

ความหนืดของอากาศ $\mu_{air} = 1.846 \times 10^{-5}\ N.s/m^2$

ความเร็วของอากาศ u_∞ = 0.05 m/s 0.15 m/s และ 0.848 m/s

3.2.2 การไหลแบบราบเรียบผ่านทรงกลม 3 มิติ

(a) สมการที่ใช้ในการคำนวณ (Governing Equation)

ในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาการไหลของผ่านทรงกลมผิวเรียบเปรียบเทียบกับทรงกลมที่มีรอยปุ่ม ในการคำนวณนี้กำหนดให้ของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible Flow) และมีคุณสมบัติต่างๆ คงที่ และการไหลเป็นแบบสภาวะคงตัว (Steady State) แบบสามมิติ สมการที่ใช้คำนวณได้แก่

สมการต่อเนื่อง (Continuity Equation) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (3.13)$$

สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equation) :

แนวแกน x :

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (3.14(\text{ก}))$$

แนวแกน y :

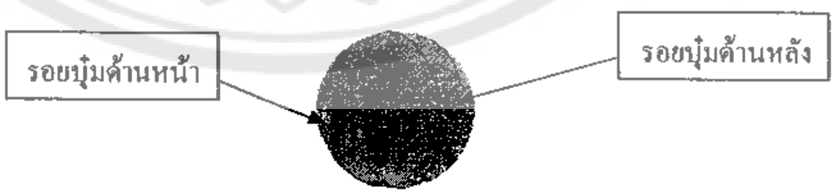
$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (3.14(\text{ข}))$$

แนวแกน z :

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (3.14(\text{ค}))$$

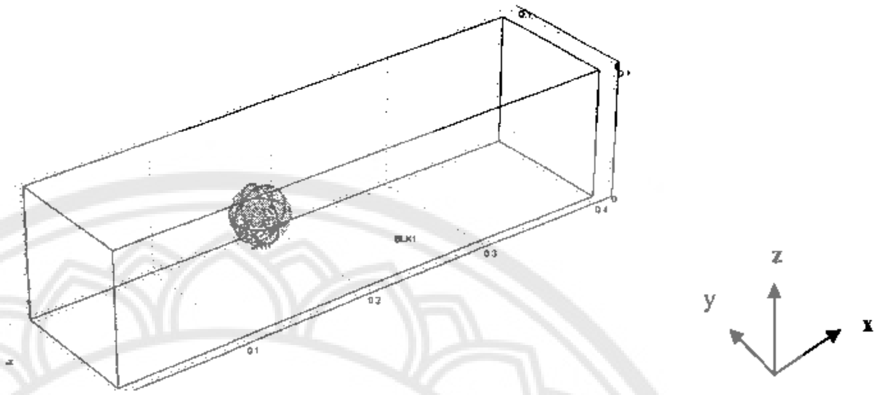
(b) วิธีการคำนวณ

ออกแบบการทดลองเป็นทรงกลมผิวเรียบและทรงกลมที่มีรอยปุ่มขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.01 เมตร โดยกำหนดให้มีรอยปุ่มอยู่ที่ตำแหน่งต่างๆ กัน เช่น ด้านหน้า- ด้านหลังของทรงกลมดังรูปที่ 3.6 และด้านบน-ด้านล่างของทรงกลม เป็นต้น



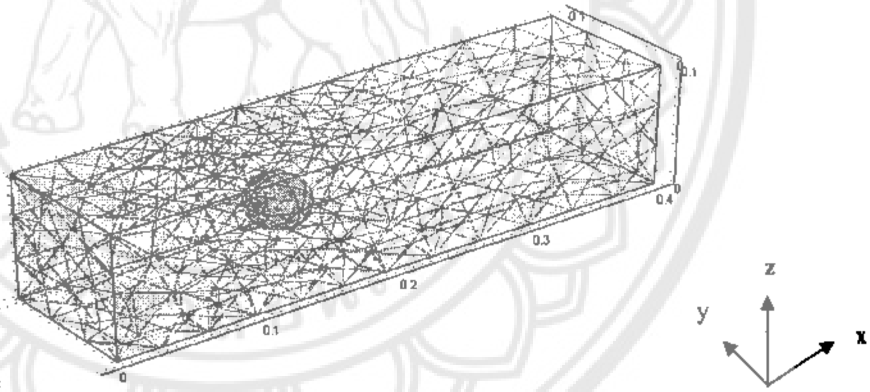
รูปที่ 3.6 ทรงกลมที่มีรอยปุ่มด้านหน้า- ด้านหลังของทรงกลม

รูปที่ 3.7 แสดงแบบจำลองที่ใช้ในการคำนวณ โดยเริ่มจากการสร้างขอบเขตหรือโดเมนของการคำนวณเป็นกล่องสี่เหลี่ยมขนาด $0.1 \times 0.4 \times 0.1$ m จากนั้นสร้างทรงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.042 m



รูปที่ 3.7 ลักษณะขอบเขตหรือโดเมนของแบบจำลองการไหลผ่านทรงกลมผิวเรียบ

จากนั้นทำการสร้างกริด (Grid) ดังรูปที่ 3.8 ซึ่งกริดบริเวณพื้นผิวทรงกลมจะมีความละเอียดกว่าบริเวณการไหล โดยมีจำนวนกริดโดยรวมเป็น 6,150 กริด เป็นความละเอียด 1,537,500 กริดต่อลูกบาศก์เมตร หลังจากนั้นทำการประมวลผล



รูปที่ 3.8 รายละเอียดของกริดของแบบจำลองการไหลผ่านทรงกลม

(c) การกำหนดสภาวะขอบเขต

รูปที่ 3.9 แสดงการกำหนดสภาวะขอบเขตของโจทย์โดยมีรายละเอียดดังนี้

ด้านที่ 1: Inflow/Outflow Velocity กล่าวคือ ขอบเขตทางเข้า กำหนดให้ความเร็วของของไหลคงที่ดังนี้

$$u = u_{\infty} = 0.01 \text{ m/s} \tag{3.15}$$

ด้านที่ 2: Outflow/Pressure กล่าวคือ ขอบเขตทางออก กำหนดให้ความดันและแรงเนื่องจากความหนืดเป็นดังต่อไปนี้

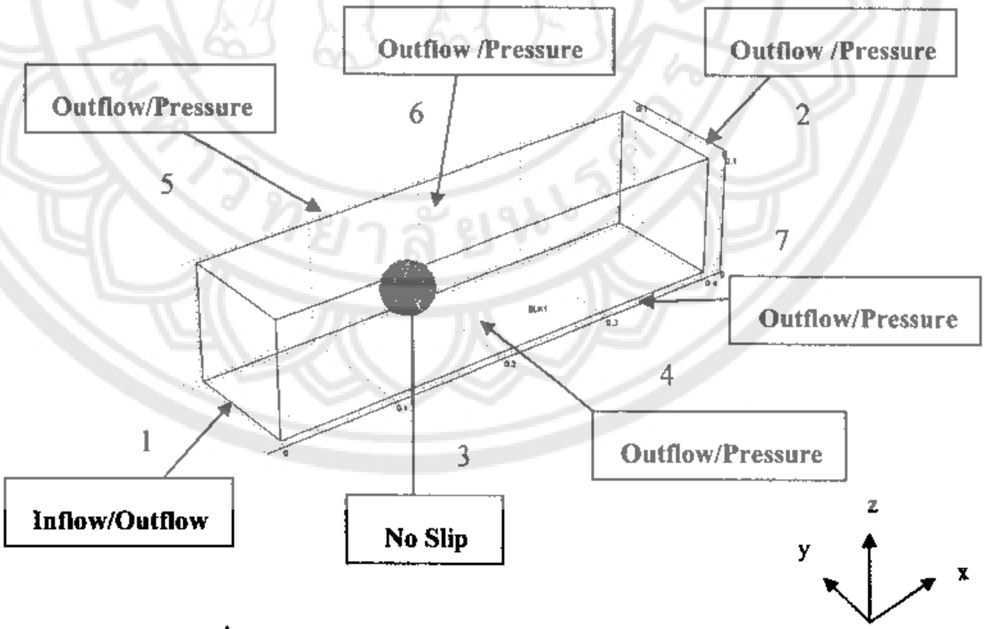
$$p = 0 \tag{3.16}$$
$$\mu\nabla^2\vec{V} = 0$$

ด้านที่ 3: No Slip กล่าวคือ ความเร็วของของไหลที่ผิวทรงกลมไม่ลื่นไถลจึงมีเท่ากับศูนย์

$$u = 0 \tag{3.17}$$

ด้านที่ 4, 5, 6 และ 7: Outflow/Pressure กล่าวคือ ขอบเขตดังกล่าว กำหนดให้ความดันและแรงเนื่องจากความหนืดเป็นดังต่อไปนี้

$$p = 0 \tag{3.18}$$
$$\mu\nabla^2\vec{V} = 0$$



รูปที่ 3.9 สภาวะขอบเขตของแบบจำลองการไหลผ่านทรงกลม

(d) พารามิเตอร์และตัวแปรที่เกี่ยวข้อง

พิจารณาพารามิเตอร์และตัวแปรที่เกี่ยวข้องที่อุณหภูมิเท่ากับ 300 องศาเคลวิน (T = 300 K) แสดงได้ดังต่อไปนี้

ความหนาแน่นของอากาศ ρ_{air} = 1.1614 kg/m^3

ความหนืดของอากาศ $\mu_{air} = 1.846\times10^{-5}\,N.s/m^2$

ความเร็วของอากาศ u_{∞} = 0.01 m/s