บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

ในการศึกษานี้จะศึกษาถึงหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวกับการไหลของของไหลผ่านวัตถุทรงกระบอกและวัตถุทรงกลมโดยจะแบ่งเป็น 4 ส่วน ในส่วนแรกจะศึกษาถึงหลักการ ทฤษฎีและสมการในการคำนวณเกี่ยวกับการไหลแบบศักย์ (Potential Flow) ส่วนที่สองจะศึกษาถึงหลักการทฤษฎีและสมการในการคำนวณเกี่ยวกับการไหลรอบวัตถุรูปทรงกระบอกของของไหลในจินตนาการ (Ideal flow about a cylinder) ซึ่งจะวิเคราะห์ถึงการไหลที่ทำให้เกิดแรงยก (Lift) โดยอ้างอิงจากทฤษฎีของ Kutta-Joukowski ส่วนที่สามจะศึกษาเกี่ยวกับการเกิดปรากฏการณ์การแยกตัว (Separation) ของของไหลจากวัตถุทรงกลมซึ่งก่อให้เกิดแรงเสียดทานต่อการไหล ส่วนสุดท้ายจะศึกษาถึงสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier Stokes equation)

2.1 การไหลแบบศักย์ (Potential Flow) พื้นฐานที่เป็นระนาบ

การไหลแบบศักย์ (Potential Flow) คือการไหลที่ไร้ความหนืด (Inviscid Flow) ซึ่งการพิจารณาทางกายภาพจะอยู่ในรูปของ Streamline, Ψ ที่มีความสัมพันธ์กับความเร็วของการไหลดังนี้

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{และ} \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

โดยให้เป็นไปตามสมการความต่อเนื่อง (Continuity) : $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

จะได้ $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$

ในที่นี้เราพิจารณาการไหลผ่านทรงกระบอกที่กำลังหมุน ซึ่งจะแบ่ง Streamline ออกเป็นสามส่วน ได้แก่ Streamline ของกระแสอิสระที่มีความเร็วคงที่ (Uniform Flow) เป็น U_∞ Streamline ของดับเบล็ตและ Streamline เนื่องจากการหมุนของทรงกระบอก จากนั้นจะเป็นการรวมสามชนิดของ Streamline ดังกล่าวเข้าด้วยกันด้วยวิธี Superposition

2.1.1 การไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform flow)

การไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow) คือเส้น Streamline ที่เป็นเส้นตรงและขนานกัน และขนาดของความเร็วจะมีค่าคงที่ รูปที่ 2.2 แสดงเวกเตอร์ของการไหลแบบสม่ำเสมอรวมทั้งเส้น Streamline และเส้นที่แสดงค่า Velocity Potential ที่มีค่าคงที่ ในกรณีนี้ค่าองค์ประกอบของความเร็วในแกน x และ y คือ u = U และ v = 0 ดังนั้นความสัมพันธ์ของความเร็วกับ Velocity potential เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะสามารถอินทิเกรทและให้ค่า

$$\phi = Ux \tag{2.1}$$

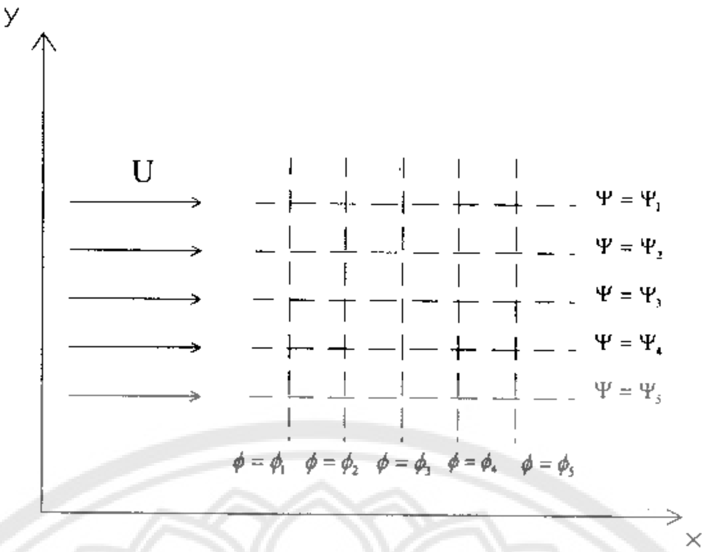
ในทำนองเดียวกันความสัมพันธ์ของค่าสตรีมฟังก์ชันกับความเร็วจะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

ซึ่งจะได้

$$\Psi = Uy \tag{2.2}$$



รูปที่ 2.1 การไหลแบบสม่ำเสมอ

2.1.2 การไหลแบบวอร์เท็กซ์ (Vortex)

การไหลแบบวอร์เท็กซ์ เป็นการไหลในลักษณะที่เคลื่อนที่เป็นวงกลม ซึ่งการเคลื่อนที่ของของไหลในลักษณะวอร์เท็กซ์นี้ จะสามารถแบ่งเป็น 2 แบบ คือการไหลแบบวอร์เท็กซ์อิสระ (Free Vortex) และการไหลแบบวอร์เท็กซ์บังคับ (Forced Vortex) ซึ่งในกรณีนี้จะศึกษาการไหลแบบวอร์เท็กซ์อิสระ (Free Vortex) โดยการเคลื่อนที่แบบวอร์เท็กซ์อิสระ(Free Vortex) จะเป็นการเคลื่อนที่ในลักษณะที่เป็นการไหลแบบไม่หมุน (Irrotational Flow) ซึ่งจะให้ค่าความเร็วในแกนพิกัด $r\theta$ เป็น $V_r = 0$, $V_\theta = K/r$ ในกรณีที่การไหลแบบวอร์เท็กอิสระ (Free Vortex) ดังกล่าวนั้นหมุนอยู่ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งค่าความเร็วของ free vortex นี้จะมีลักษณะที่ความเร็วของการไหลลดลงเมื่อมีระยะห่างออกจากจุดศูนย์กลาง และมีจุด singularity อยู่ที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งจากนิยามของค่าสตรีมฟังก์ชันและค่าศักย์ความเร็ว (Velocity Potential) เขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$V_\theta = \frac{K}{r} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

ซึ่งเมื่ออินทิเกรทจะได้

$$\psi = -K \ln r \tag{2.3}$$

$$\phi = K\theta \tag{2.4}$$

และจากนิยามของค่า Circulation Γ ที่กำหนดให้เป็นค่าอินทิเกรทรอบเส้นโค้งของความเร็วของของไหลในแนวสัมผัสในระนาบการไหล ซึ่งแสดงได้เป็น

$$\Gamma = \oint \vec{V} . d\vec{s} \tag{2.5}$$

ดังนั้นหากนำมาใช้กับ Free vortex ที่มีจุดกำเนิดอยู่ในเส้นโค้งปิด จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_\theta r d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{K}{r}\right) r d\theta$$

$$\Gamma = 2\pi K$$

ดังนั้น

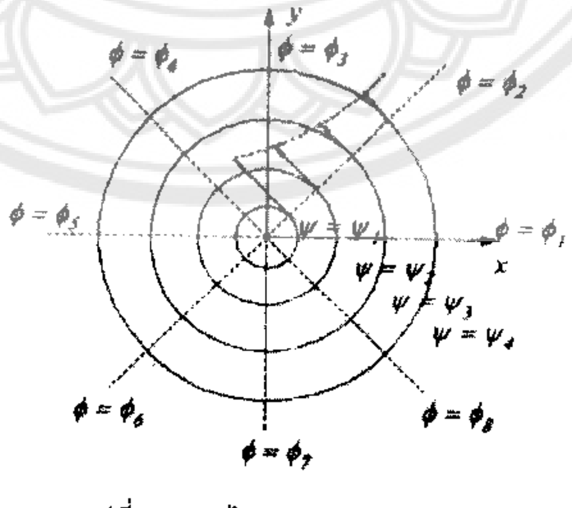
$$K = \frac{\Gamma}{2\pi} \tag{2.6}$$

เพราะฉะนั้นค่า Ψ และ ϕ ของการไหลแบบวอร์เท็กซ์ซึ่งหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \tag{2.7}$$

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \tag{2.8}$$

โดยที่ค่า Γ จะเรียกว่า ความแข็งแรง (Strength) ของวอร์เท็กซ์ จากรูปที่ 2.3 แสดงเส้น Streamline, Ψ และเส้นศักย์ความเร็ว (Velocity Potential), ϕ ที่มีค่าคงที่ของการไหลแบบ free vortex



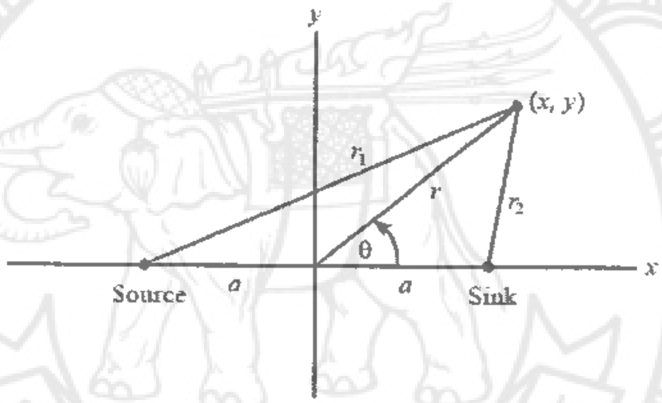
รูปที่ 2.2 การไหลแบบ Free vortex

2.1.3 การไหลแบบดับเบล็ต (Doublet)

การไหลแบบดับเบล็ต (Doublet) เป็นการไหลที่เกิดจากการนำการไหลแบบซอร์สและการไหลแบบซิงค์ที่มีขนาด strength เท่ากัน นำมาวางไว้ที่จุดเดียวกัน ซึ่งในการหาความสัมพันธ์ค่าสตรีมฟังก์ชันและค่า velocity potential ของการไหลแบบดับเบล็ต จะเริ่มจากการนำเอาการไหลแบบซอร์สและการไหลแบบซิงค์ วางห่างกันเป็นระยะ 2a รูปที่ 2.3 จะแสดงถึงการไหลดังกล่าว และเนื่องจากการไหลดังกล่าวมีผลเฉลยเป็นเชิงเส้น จึงสามารถนำผลเฉลยที่ถูกแสดงในรูปค่า Ψ และ ϕ มารวมกันได้ ดังนั้นค่า Ψ และ ϕ ของการไหลดังกล่าวจะเขียนได้เป็น

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \tag{2.9}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) \tag{2.10}$$

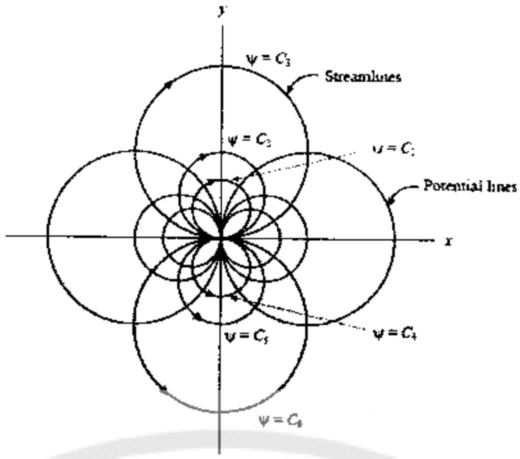


รูปที่ 2.3 แสดงการไหลแบบ source และ sink ที่มี strength เท่ากันวางห่างกันเป็นระยะ 2a

จากการนำเอาค่า Ψ และ ϕ มากระจายให้อยู่ในรูป r และ a และจากนั้นกำหนดให้ค่า a=0 คือ เลื่อนจุดกำเนิดของการไหลซอร์สและการไหลแบบซิงค์มาอยู่ที่จุดเดียวกัน จะได้ค่า Ψ และ ϕ ของการไหลเป็น

$$\Psi = \frac{-q\sin\theta}{r} \tag{2.11}$$

$$\phi = \frac{q\cos\theta}{r} \tag{2.12}$$



รูปที่ 2.4 แสดงถึงเส้น Streamline ของการไหลแบบดับเบล็ต

2.2 การไหลรอบวัตถุรูปทรงกระบอกของของไหลในจินตนาการ

(Ideal flow about a cylinder)

พิจารณาการไหลของของไหลในจินตนาการรอบวัตถุทรงกระบอกที่ยาวมาก จากไฮโดรไดนามิกส์จะสามารถหาความเร็ว V_{t1} ตามแนวเส้นสัมผัสที่เส้นรอบวงของวัตถุรูปทรงกระบอกในของไหลที่ไหลด้วยความเร็วที่สม่ำเสมอคงที่; U (รูปที่ 2.3 (ก)) ได้เป็น:

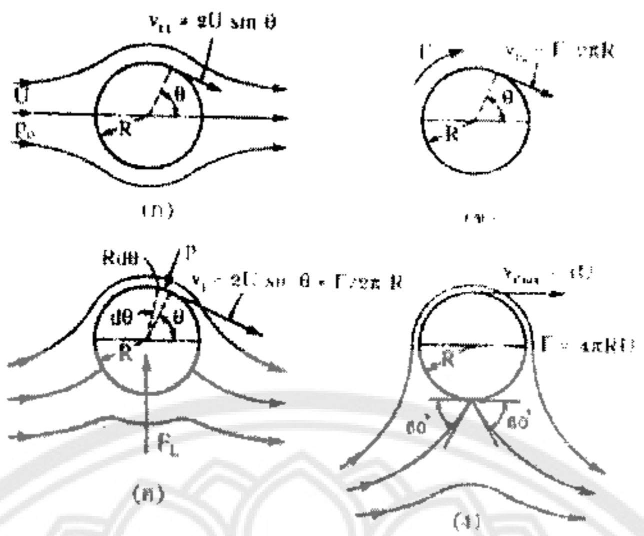
$$V_{t1} = 2U \sin\theta \qquad (2.13)$$

ส่วนความดันบนวัตถุรูปทรงกลมนั้นสามารถคำนวณได้จากสมการเบอร์นูลลี่ ที่นำมาใช้ระหว่างจุดที่อยู่ในของไหลอิสระที่อยู่ห่างจากวัตถุรูปทรงกระบอกมากๆ กับจุดที่อยู่บนผิวของวัตถุรูปทรงกระบอกและเนื่องจากความดันรอบๆ วัตถุรูปทรงกระบอกนั้นกระจายตัวในลักษณะสมมาตรกัน ดังนั้นจึงไม่มีแรงยกหรือแรงต้านสุทธิสำหรับในกรณีของของไหลในจินตนาการนี้

สมมุติว่ามีการไหลหมุนเวียนรอบวัตถุรูปทรงกระบอกเกิดขึ้นโดยปราศจากการไหลของกระแสอิสระดังแสดงใน รูปที่ 2.3 (ข) และเมื่อให้การไหลเวียน Γ ตามเข็มนาฬิกาเป็นบวกแล้วก็จะได้ความเร็วขอบหรือความเร็วตามเส้นสัมผัสตามแนวเส้นสัมผัสของผิววัตถุรูปทรงกระบอกเป็น :

$$V_{t2} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \qquad (2.14)$$

เมื่อ : R ≡ รัศมีของวัตถุทรงกระบอก



รูปที่ 2.5 การหมุนเวียนและการยกตัวจากการไหลรอบวัตถุรูปทรงกระบอก

ดังนั้นของไหลที่อยู่ทางด้านนอกของวัตถุรูปทรงกระบอกก็จะมีความเร็ว $V_{2t} = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$ การเปลี่ยนแปลงของความเร็วดังกล่าวนี้ทำให้ความดันที่แต่ละรัศมีนี้แตกต่างกันและสมมาตรกันในแนวรัศมีตามทฤษฎีของการไหลหมุนอิสระ

จากนั้นให้เพิ่มการไหลแบบไหลเวียนซ้อนลงบนการไหลที่สม่ำเสมอ เพื่อทำให้เกิดการไหลที่ไม่สมมาตรขึ้นดังรูป ฉะนั้นความเร็วขอบหรือความเร็วตามแนวเส้นสัมผัสรวมของวัตถุรูปที่ 2.3 (ค) ทรงกระบอกก็จะเป็นผลบวกของความเร็วย่อยทั้งสองนั้น นั่นก็คือ

$$V_t = V_{t1} + V_{t2}$$

$$= 2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \qquad (2.15)$$

ดังนั้นความดันที่จุดใดๆ บนเส้นรอบวงก็สามารถหาได้จาก

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g}$$

เมื่อ : P_0 ≡ ความดันของจุดที่อยู่ห่างออกไป ซึ่งเป็นจุดที่มีความเร็วสม่ำเสมอ
ดังนั้นเมื่อแทนค่าจากสมการ (2.11) ลงในสมการดังกล่าวก็จะได้

$$P - P_0 = \frac{\rho}{2}\left[U^2 - \left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]$$

เนื่องจากพื้นที่เล็กๆ ของผิวต่อหนึ่งหน่วยความยาวของวัตถุรูปทรงกระบอกนั้นมีค่าเป็น R.dθ และเนื่องจากแรงยก F_L เป็นผลบวกของแรงย่อยที่ตั้งฉากกับทิศทางของ U ดังนั้นแรงยก F_L นี้ก็มีค่าเป็น

$$F_L = -B\int_0^{2\pi}(P - P_0)\sin\theta.Rd\theta$$

แทนค่า $(P - P_0)$ จากสมการข้างบนแล้วอินทิเกรตก็จะได้

$$F_L = \rho BU\Gamma \qquad (2.16)$$

เมื่อ F_L ≡ แรงยก

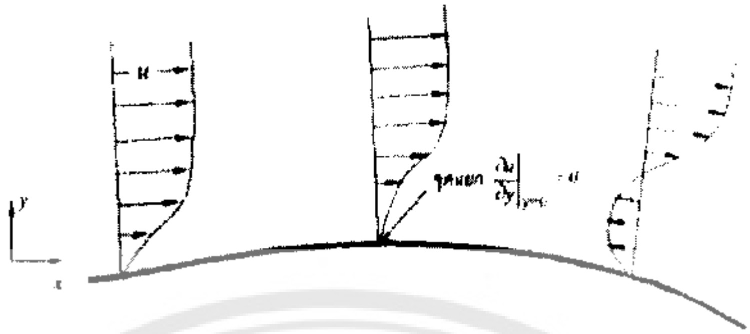
B ≡ ความยาวของวัตถุรูปทรงกระบอก

ผลของการเกิดแรงดังกล่าวเป็นทฤษฎีของ Kutta-Joukowski ซึ่งเป็นผู้ค้นพบและเป็นผู้บุกเบิกเกี่ยวกับการศึกษาแรงยกนี้ ไม่เพียงทฤษฎีนี้จะใช้กับวัตถุทรงกระบอกกลมเท่านั้น แต่ยังสามารถนำไปใช้กับวัตถุรูปทรงกระบอกที่มีหน้าตัดรูปแบบอื่นรวมทั้งแพนปีกสำหรับรับแรงยก (Lifting vane และ Airfoil)

2.3 การเกิดปรากฏการณ์การแยก (Separation)

การไหลของของไหลผ่านวัตถุโดยทั่วไปนั้นอาจเจอสภาวะที่มีค่าความดันแตกต่าง $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ในการไหลได้ 3 แบบ คือ สภาวะที่มีค่าความดันแตกต่างเป็นศูนย์ (กรณีการไหลผ่านแผ่นราบ) สภาวะที่มีความดันแตกต่างที่เป็นลบ $\left(\frac{dp}{dx} < 0\right)$ และสภาวะที่มีค่าความดันแตกต่างที่เป็นบวก$\left(\frac{dp}{dx} > 0\right)$ ในกรณีนี้จะศึกษาสภาวะที่มีความดันแตกต่างที่เป็นบวก เนื่องจากสภาวะที่มีค่าความแตกต่างที่เป็นบวก จะมีความดันที่ต้นทางของการไหลมีค่าน้อยกว่าค่าความดันที่ปลายทางของการไหล ดังนั้นการไหลจะไหลได้ไม่สะดวกเนื่องจากการไหลจะถูกชะลอให้ไหลช้าลงจากค่าความดันที่ปลายทางซึ่งจะมีค่าสูงกว่าความดันที่ต้นทาง และหากค่าความดันแตกต่างมีขนาดมากพอ การไหลจะถูกชะลอให้ช้าลงเรื่อยๆ จนกระทั่งเกิดเงื่อนไขที่ค่าความชันของความเร็วที่ผิวของวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0\right)$ ซึ่งสภาวะดังกล่าวจะเรียกว่า สภาวะการแยก (Separation) และต่อจากนั้นจะเกิดการไหลย้อนกลับขึ้น รูปที่ 2.4 จะแสดงถึงสภาวะการเกิดการแยกขึ้น การแยกดังกล่าวเป็นปรากฏการณ์ธรรมชาติของการไหลที่เรามักไม่ต้องการให้เกิดขึ้น เพราะจะเกิดการไหล

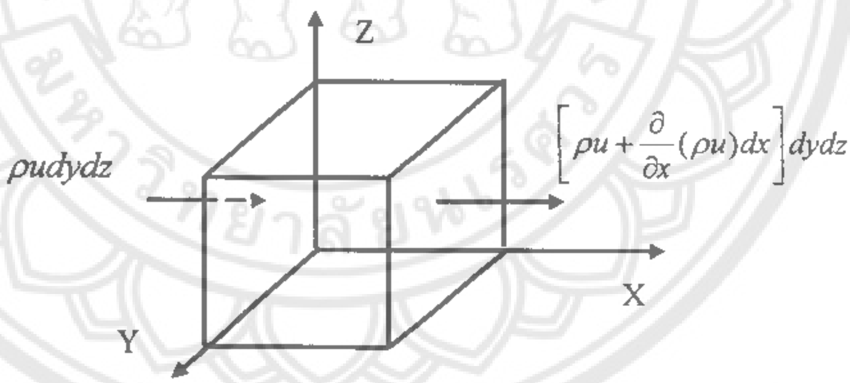
ย้อนกลับหรือการไหลจะหลุดออกจากผิว ผลก็คือจะก่อให้เกิดแรงเสียดทานที่เกิดจากค่าความดันแตกต่างสูงมาก



รูปที่ 2.6 รูปร่างความเร็วของการไหลที่เกิดสภาวะการแยก

2.4 สมการนาเวียร์-สโตกส์

ในการศึกษานี้เป็นการศึกษาถึงที่มาของสมการนาเวียร์-สโตกส์ โดยกำหนดให้การไหลเป็นการไหลที่อัดตัวไม่ได้ (Incompressible Flow) ความหนืดและความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงที่ และการไหลเป็นแบบสภาวะคงตัว (Steady State) จากรูปที่ 2.5 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลผ่านกล่องสี่เหลี่ยมบนปริมาตรย่อยโดยรูปกล่องสี่เหลี่ยมขนาดกว้าง dx ยาว dy และลึก dz โดยพิจารณาที่ตำแหน่ง (x, y, z)



รูปที่ 2.7 การเปลี่ยนแปลงมวลของระบบ

จากกฎอนุรักษ์มวลคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลของระบบมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\frac{dM_{sys}}{dt}=0 \tag{2.17}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลภายในปริมาตรควบคุม + อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลผ่านผิวปริมาตรควบคุม = 0

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz + \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx \right] dydz - (\rho udydz) = 0 \tag{2.18}$$

รวม 3 แกน

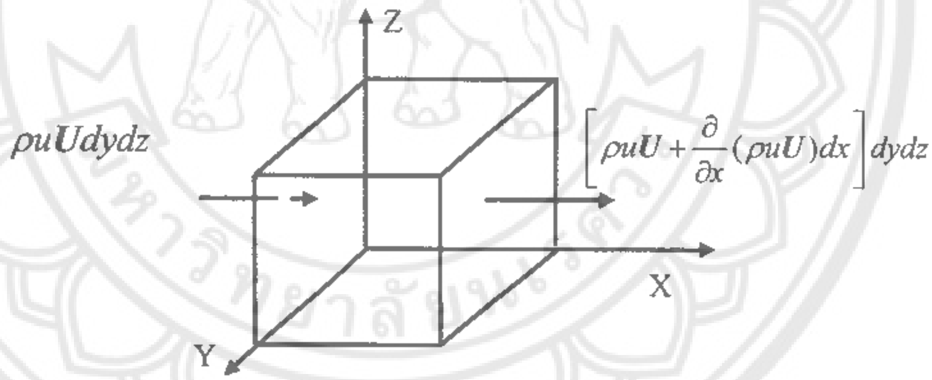
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{2.19}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

สมการต่อเนื่อง (Continuity Equation) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho U) = 0 \tag{2.20}$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการโมเมนตัมได้ดังนี้

$$\sum F = ma = m\dot{U} \tag{2.21}$$



รูปที่ 2.8 การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของระบบ

ผลรวมของแรงที่กระทำต่อ CV = อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมภายใน CV + อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมผ่านผิวปริมาตรควบคุม

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t}(\rho U)dxdydz + \left[\rho uU + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uU)dx \right] dydz - (\rho uUdydz) \tag{2.22}$$

$$\sum F = dxdydz\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}(\rho \boldsymbol{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\boldsymbol{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\boldsymbol{U}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\boldsymbol{U})\right) \tag{2.23}$$

$$\sum F = \boldsymbol{U}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\boldsymbol{U})\right] + \rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t} + u\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial x} + v\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial y} + w\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial z}\right) \tag{2.24}$$

เนื่องจากสมการต่อเนื่อง (Continuity Equation) เท่ากับศูนย์

เพราะฉะนั้น

$$\sum F = \rho\frac{DU}{Dt}dxdydz \tag{2.25}$$

พิจารณาแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ความดันและแรงเนื่องจากความหนืดจะได้

$$\rho\boldsymbol{g} - \nabla p + \nabla.\tau_{ij} = \rho\frac{DU}{Dt} \tag{2.26}$$

พิจารณาของไหลที่เป็นของไหลนิวทอเนียน พบว่าความเค้นในของไหลนั้นมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับอัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุม ดังนั้นความเค้นจึงมีทั้งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน ซึ่งแต่ละพจน์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.27}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{2.28}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.29}$$

นำสมการ 2.23-2.25 แทนค่าในสมการที่ 2.22 จะได้สมการนาเวียร์-สโตกส์สำหรับของไหล

$$\rho\boldsymbol{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{U} = \rho\frac{DU}{Dt} \tag{2.30}$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการนาเวียร์-สโตกส์แต่ละแนวแกนได้ดังนี้

แกน X : $$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (2.31)$$

แกน Y : $$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (2.32)$$

แกน Z : $$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (2.33)$$