บทที่ 4
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในการวิจัยนี้ จะทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ที่มีผลต่อสมรรถนะที่มีผลต่อระบบผลิตน้ำร้อน เช่น ปริมาณน้ำในถังเก็บ อัตราการไหลของสารทำความเย็น อัตราการไหลของน้ำ อุณหภูมิและความดันที่จุดต่างๆในระบบ ตลอดจนกำลังที่ใช้ขับคอมเพรสเซอร์ ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทในอีวาปอเรเตอร์และคอนเดนเซอร์ เป็นต้น

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะประกอบด้วย แบบจำลองของคอมเพรสเซอร์ คอนเดนเซอร์ ท่อแคปปิลารี อีวาปอเรเตอร์และถังเก็บ โดยการจำลองแบบดังกล่าวจะนำมาจำลองสถานการณ์ของระบบ (System Simulation) เพื่อวิเคราะห์ระบบต่อไป

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคอมเพรสเซอร์

ในการทดลองเพื่อหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคอมเพรสเซอร์นั้น จะประยุกต์มาจากแบบจำลองของ **Stoecker** [1] โดยจะหาความสัมพันธ์ระหว่างต่างๆในสมการ 4.1 ดังนี้

$$\frac{P_{cp,o}}{P_{cp,i}} = f\left(\frac{m_r\sqrt{C_{pr}T_{cp,o}}}{D^2 P_{cp,o}}\right) \qquad [4.1]$$

โดยที่ $P_{cp,o}$ = ความดันขาออกคอมเพรสเซอร์ (MPa)

$P_{cp,i}$ = ความดันขาเข้าคอมเพรสเซอร์ (MPa)

$C_{pr}^{\cdot}$ = ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสารทำความเย็น (kJ/kg.K)

$T_{cp,o}$ = อุณหภูมิขาออกจากคอมเพรสเซอร์ (K)

D^2 = เส้นผ่านศูนย์กลางล้อ (m)

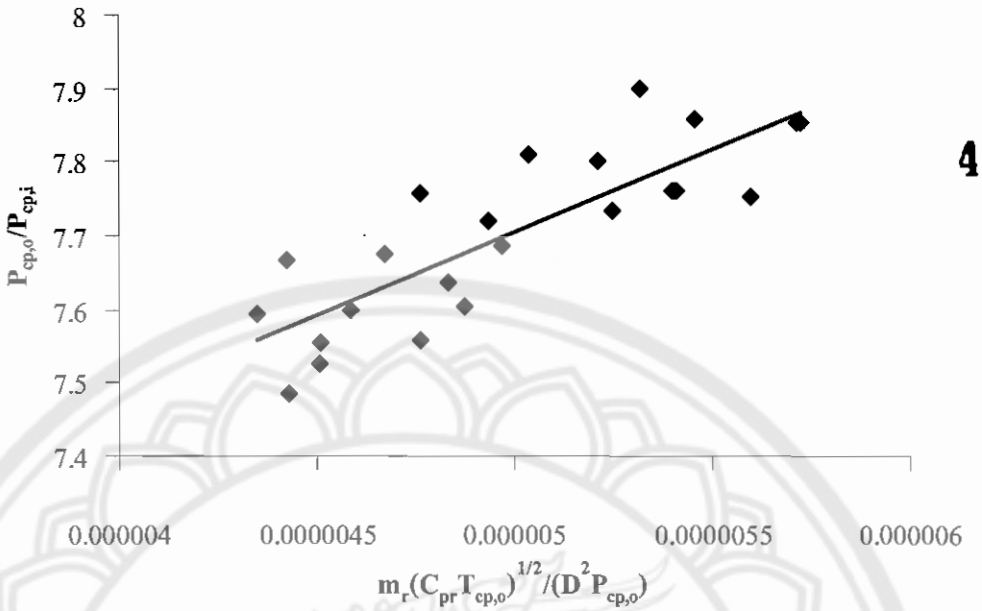
m_r = อัตราการไหลของสารทำความเย็น (kg/s)

จากการทดลองสามารถแสดงความสัมพันธ์ดังรูป 4.1

ป
TH
6551
ว8650
2547ง

สำนักหอสมุด

24 ก.ย. 54
4740531



รูปที่ 4.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ $m_r(C_{pr}T_{cp,o})^{1/2}/(D^2P_{cp,o})$ ที่มีผลต่ออัตราส่วนความดันของคอมเพรสเซอร์

จากความสัมพันธ์ดังรูป 4.1 สามารถนำมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{P_{cp,o}}{P_{cp,i}} = 224945[m_r(C_{pr}T_{cp,o})^{1/2}/(D^2P_{cp,o})] + 6.5801 \qquad [4.2]$$

จากรูป 4.1 จะเห็นได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไปค่าความดันและอุณหภูมิด้านขาออกของคอมเพรสเซอร์จะมีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้ค่าอัตราส่วนความดันขาออกต่อขาเข้าของคอมเพรสเซอร์เพิ่มขึ้นตามไปด้วย

คอมเพรสเซอร์ที่ใช้ในการวิจัยนี้เป็นแบบ Automobile Compressor ซึ่งถือได้ว่าเป็นกระบวนการทำงานแบบโพลีทรอปิก (Polytropic Process) ดังนั้นเราสามารถหาค่าดรรชนีโพลีทรอปิก (Polytropic Index) ได้จากสมการดังนี้

$$\frac{T_{cp,i}}{T_{cp,o}} = \left(\frac{P_{cp,i}}{P_{cp,o}}\right)^{\frac{k-1}{k}} \qquad [4.3]$$

โดยที่ $T_{cp,i}$ = อุณหภูมิขาเข้าคอมเพรสเซอร์ (K)

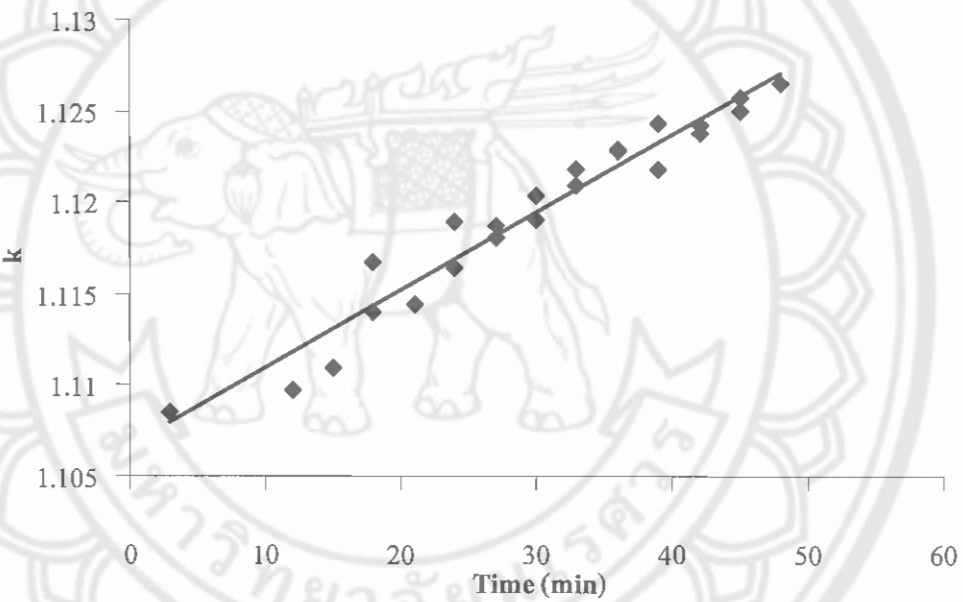
$T_{cp,o}$ = อุณหภูมิขาออกคอมเพรสเซอร์ (K)

$P_{cp,i}$ = ความดันขาเข้าคอมเพรสเซอร์ (MPa)

$P_{cp,o}$ = ความดันขาออกคอมเพรสเซอร์ (MPa)

k = ดัชนีโพลีทรอปิก

จากการทดลองเราได้ทำการหาค่าดัชนีโพลีทรอปิกที่เวลาต่างๆ ในช่วงอัตราการไหลของน้ำ 2 ช่วงด้วยกันคือ 7 lpm และ 9 lpm จะเห็นได้ว่าค่าดัชนีโพลีทรอปิก (k) มีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อยเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น และมีความสัมพันธ์ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าดัชนีโพลีทรอปิกที่ 7 lpm และ 9 lpm กับเวลาที่เปลี่ยนแปลง

จากความสัมพันธ์ดังรูปที่ 4.2 สามารถนำมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$k = 0.0004t + 1.1066 \qquad [4.4]$$

จากสมการที่ 4.4 จะเห็นได้ว่า ค่าดัชนีโพลีทรอปิกขึ้นอยู่กับเวลา แต่ในความเป็นจริงแล้วค่าดัชนีโพลีทรอปิกจะขึ้นอยู่กับความดันและอุณหภูมิ ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการสร้างโมเดลจึงใช้ความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีโพลีทรอปิกกับเวลาแทน เพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น

4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคอนเดนเซอร์

ในการสร้างแบบจำลองของคอนเดนเซอร์ จะหาความสัมพันธ์ของอัตราการไหลของน้ำและอุณหภูมิของคอนเดนเซอร์ที่มีผลต่อ ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมของคอนเดนเซอร์ดังต่อไปนี้

$$(UA)_{cd} = f(\frac{m_w C_{pw}(T_{w,o} - T_{w,i})}{T_{cd,i} - T_{w,i}}) \qquad [4.5]$$

โดยที่ $(UA)_{cd}$ = ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมของคอนเดนเซอร์ (kW/K)

m_w = อัตราการไหลของน้ำ (kg/s)

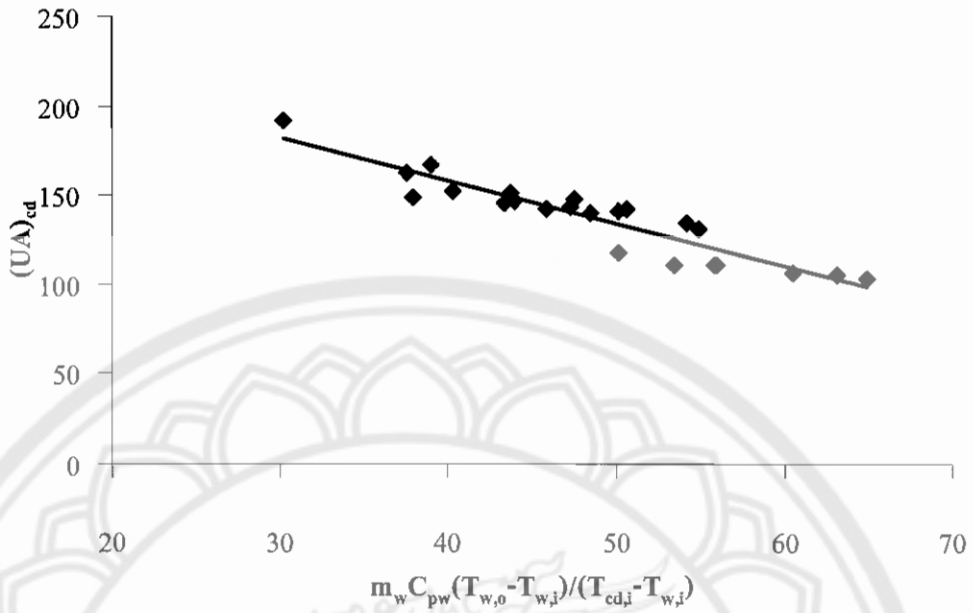
C_{pw} = ค่าความจุความร้อนจำเพาะของน้ำ (kJ/kg.K)

$T_{w,i}$ = อุณหภูมิน้ำขาเข้าคอนเดนเซอร์ (K)

$T_{w,o}$ = อุณหภูมิน้ำขาออกจากคอนเดนเซอร์ (K)

$T_{cd,i}$ = อุณหภูมิขาเข้าคอนเดนเซอร์ (K)

ความสัมพันธ์ตังสมการที่ 4.5 สามารถแสดงดังรูปที่ 4.3 ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมพื้นที่ของคอนเดนเซอร์ลดลง เมื่ออัตราส่วนของการถ่ายเทความร้อนของคอนเดนเซอร์ต่อผลต่างของอุณหภูมิขาเข้าของทั้ง 2 กระแสเพิ่มขึ้น ซึ่งแตกต่างจากปรากฏการณ์ปกติของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนทั่วๆไป ทั้งนี้เนื่องมาจาก อิทธิพลของอุณหภูมิน้ำด้านขาเข้าคอนเดนเซอร์ ซึ่งมีค่าสูงขึ้นเมื่อเวลาผ่านไป ส่งผลให้ประสิทธิผลของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนลดต่ำลง แต่เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมพื้นที่ของคอนเดนเซอร์จะแปรผันกับ ค่าประสิทธิผลดังนั้นจึงทำให้ ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมพื้นที่มีค่าลดลง เมื่ออุณหภูมิด้านเข้าของน้ำเพิ่มขึ้น



รูปที่ 4.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราการไหลของน้ำและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงที่คอนเดนเซอร์ ที่มีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมของคอนเดนเซอร์

จากความสัมพันธ์ดังรูปที่ 4.3 สามารถนำมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$(UA)_{cd} = -2.4033[m_w C_{pw}(T_{w,o} - T_{w,i})/(T_{cd,i} - T_{w,i})] + 254.33 \qquad [4.6]$$

4.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอีวาปอเรเตอร์

ในการสร้างแบบจำลองของอีวาปอเรเตอร์ จะหาความสัมพันธ์ของอัตราการไหลของอากาศและอุณหภูมิที่อีวาปอเรเตอร์ ที่มีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมของอีวาปอเรเตอร์ดังต่อไปนี้

$$(UA)_{ev} = f\left(\frac{m_a C_{pa}(T_{a,i} - T_{a,o})}{T_{a,i} - T_{ev,i}}\right) \qquad [4.7]$$

โดยที่ $(UA)_{ev}$ = ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมของอีวาปอเรเตอร์ (kW/K)

m_a = อัตราการไหลของอากาศ (kg/s)

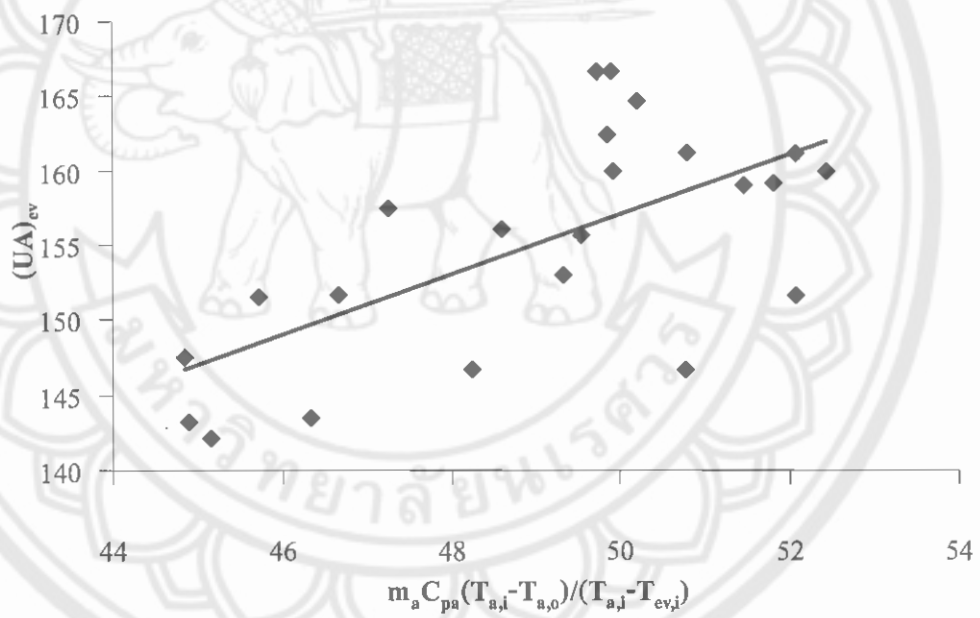
C_{pa} = ค่าความจุความร้อนจำเพาะของอากาศ (kJ/kg.K)

$T_{a,i}$ = อุณหภูมิอากาศขาเข้าแฟนคอยล์ (K)

$T_{a,o}$ = อุณหภูมิอากาศขาออกแฟนคอยล์ (K)

$T_{ev,i}$ = อุณหภูมิขาเข้าอีวาปอเรเตอร์ (K)

ความสัมพันธ์ดังสมการที่ 4.7 สามารถแสดงออกมาดังรูปที่ 4.4 ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่าอัตราการไหลของอากาศและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงที่อีวาปอเรเตอร์ มีผลโดยตรงต่อค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมพื้นที่ของอีวาปอเรเตอร์ ซึ่งเมื่อค่าอัตราการไหลของอากาศและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมที่อีวาปอเรเตอร์มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนว่าในกรณีของอีวาปอเรเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมพื้นที่ที่ได้จากการทดลองมีความแตกต่างจากกรณีของคอนเดนเซอร์ เนื่องจากในกรณีของอีวาปอเรเตอร์อุณหภูมิของอากาศด้านเข้า มีค่าคงที่ไม่ได้มีการแปรผันตามเวลานั่นเอง



รูปที่ 4.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลของอากาศและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงที่อีวาปอเรเตอร์ กับค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวมของอีวาปอเรเตอร์

จากรูปที่ 4.4 สามารถนำมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$(UA)_{ev} = 2.016[m_a C_{pa}(T_{a,i} - T_{a,o})/(T_{a,i} - T_{ev,i})] + 56.259 \qquad [4.8]$$

4.4 การประเมินการถ่ายเทความร้อนบริเวณท่อของสารทำความเย็นระหว่างคอมเพรสเซอร์และคอนเดนเซอร์

การประเมินการถ่ายเทความร้อนบริเวณที่จะเกิดความร้อนสูญเสียออกไปสู่สิ่งแวดล้อมจะหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนที่ออกจากท่อ และผลต่างของอุณหภูมิของสารทำความเย็นเฉลี่ยกับอุณหภูมิอากาศภายนอก โดยค่าอัตราการไหลของสารทำความเย็นจะถูกตัดไปเนื่องจากเราไม่มีการเปลี่ยนอัตราการไหล ดังนั้นจะลดรูปเหลือดังสมการที่ 4.9

$$m_r C_{pr}(T_{cp,o} - T_{cd,i}) = f((\frac{T_{cp,o} + T_{cd,i}}{2}) - T_a) \qquad [4.9]$$

โดยที่ m_r = อัตราการไหลของสารทำความเย็น (kg/s)

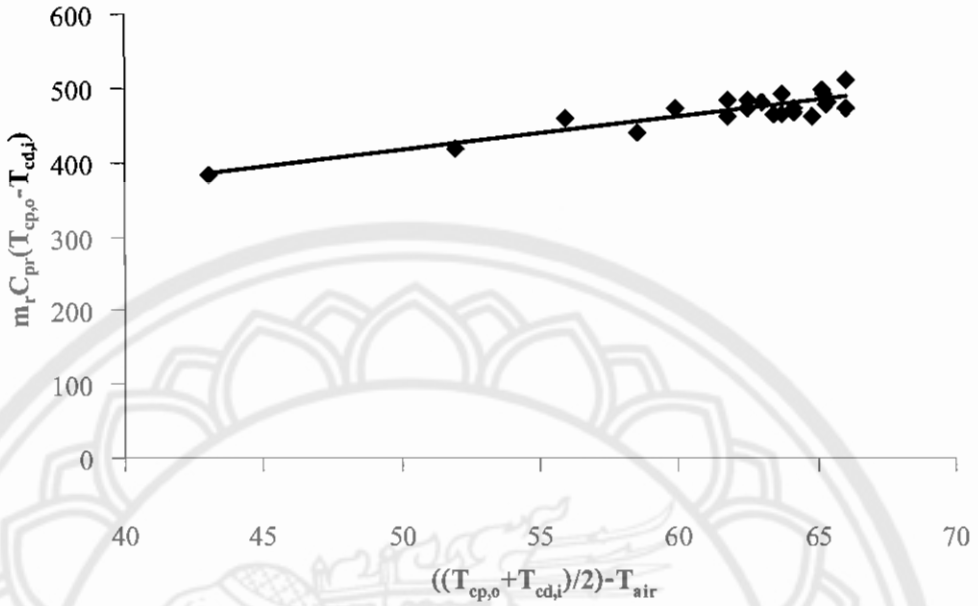
C_{pr} = ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสารทำความเย็น (kJ/kg.K)

$T_{cp,o}$ = อุณหภูมิขาออกจากคอมเพรสเซอร์ (K)

$T_{cd,i}$ = อุณหภูมิขาเข้าคอนเดนเซอร์ (K)

T_a = อุณหภูมิของบรรยกาศ (K)

โดยความสัมพันธ์สมการที่ 4.9 สามารถแสดงได้ดังรูป 4.5 ซึ่งจะเห็นได้ว่าอัตราการสูญเสียความร้อนออกจากท่อจะขึ้นอยู่กับผลต่างของอุณหภูมิของระบบที่พิจารณากับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม



รูปที่ 4.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการถ่ายเทความร้อนออกจากท่อระหว่างคอมเพรสเซอร์กับคอนเดนเซอร์ และผลต่างของอุณหภูมิสารทำความเย็นเฉลี่ยกับอุณหภูมิภายนอก

จากรูปที่ 4.5 สามารถนำมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$m_r C_{pr}(T_{cp,o} - T_{cp,i}) = 4.5013[((T_{cp,o} + T_{cd,i})/2) - T_{air}] + 191.12 \qquad [4.10]$$

4.5 การประเมินการถ่ายเทความร้อนบริเวณท่อของสารทำความเย็นระหว่างอีวาปอเรเตอร์และคอมเพรสเซอร์

การประเมินการถ่ายเทความร้อน บริเวณที่จะเกิดความร้อนเข้าสู่ระบบ จะหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนที่เข้าสู่ท่อ และผลต่างของอุณหภูมิของสารทำความเย็นเฉลี่ยกับอุณหภูมิอากาศภายนอก โดยค่าอัตราการไหลของสารทำความเย็นจะถูกตัดไปเนื่องจากเราไม่มีการเปลี่ยนอัตราการไหล ดังนั้นจะลดรูปเหลือดังสมการที่ 4.11

$$m_r C_{pw}(T_{cp,i} - T_{ev,o}) = f(T_a - (\frac{T_{ev,o} + T_{cp,i}}{2})) \qquad [4.11]$$

โดยที่ m_r = อัตราการไหลของสารทำความเย็น (kg/s)

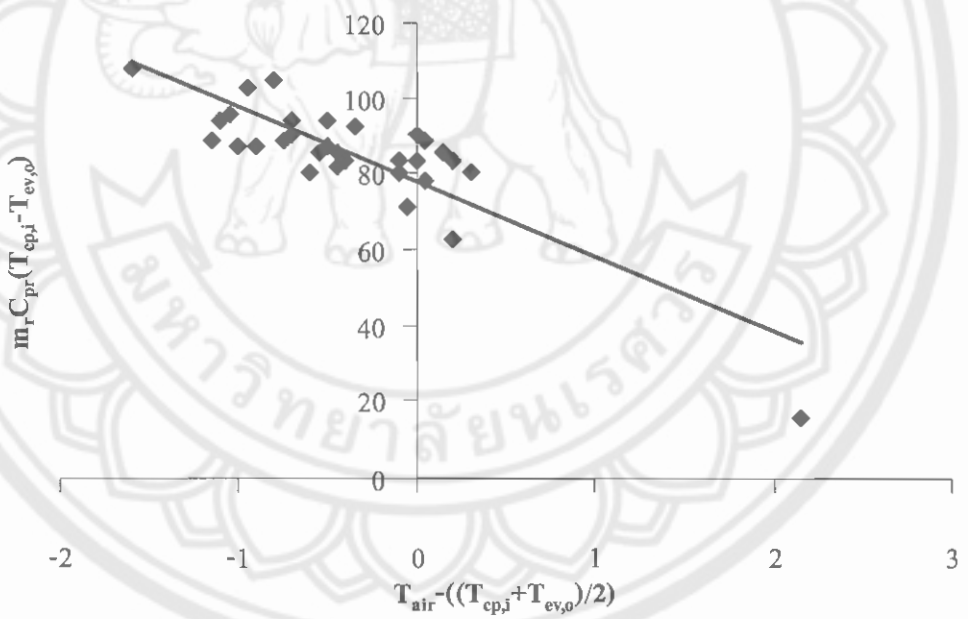
C_{pr} = ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสารทำความเย็น (kJ/kg.K)

$T_{cp,i}$ = อุณหภูมิขาเข้าคอมเพรสเซอร์ (K)

$T_{ev,o}$ = อุณหภูมิขาออกจากอีวาปอเรเตอร์ (K)

T_a = อุณหภูมิของบรรยกาศ (K)

โดยความสัมพันธ์สมการที่ 4.11 สามารถแสดงได้ดังรูป 4.6 ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลต่างของอุณหภูมิสิ่งแวดล้อมของสารทำความเย็น มีค่าติดลบทั้งนี้เนื่องมาจาก ความร้อนที่ถ่ายเทให้กับสารทำความเย็นมิใช่มีเพียงความร้อนจากสิ่งแวดล้อมเท่านั้น แต่ยังมีความร้อนจากคอมเพรสเซอร์ซึ่งถ่ายเทไปตามท่อและสารทำความเย็น และในบางกรณีส่งผลให้อุณหภูมิเฉลี่ยของสารทำความเย็นสูงกว่าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมนั่นหมายถึง การถ่ายเทความร้อนของท่อในส่วนนี้จะมีทั้งในกรณีของการรับความร้อนจากสิ่งแวดล้อมและการถ่ายเทความร้อนออกสู่สิ่งแวดล้อมด้วย



รูปที่ 4.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการรับความร้อนเข้าสู่ท่อระหว่างคอมเพรสเซอร์กับอีวาปอเรเตอร์ และผลต่างของอุณหภูมิสารทำความเย็นเฉลี่ยกับอุณหภูมิภายนอก

จากรูปที่ 4.6 สามารถนำมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$m_r C_{pr}(T_{cp,i} - T_{ev,o}) = -19.635(T_a - (\frac{T_{ev,o} + T_{ep,i}}{2})) + 77.767 \qquad [4.12]$$

4.6 แบบจำลองอัตราส่วนความดันที่ท่อแคปปิลารี

การสร้างแบบจำลองอัตราส่วนความดันที่ท่อแคปปิลารี จะหาความสัมพันธ์ของอุณหภูมิน้ำเข้าคอนเดนเซอร์ที่มีผลต่ออัตราส่วนความดันที่ท่อแคปปิลารี โดยค่าอัตราการไหลของน้ำจะถูกตัดไปซึ่งจากกราฟจะเห็นได้ว่ามีแนวโน้มไปในทางเดียวกันจึงไม่นำมาคิด ดังความสัมพันธ์ดังนี้

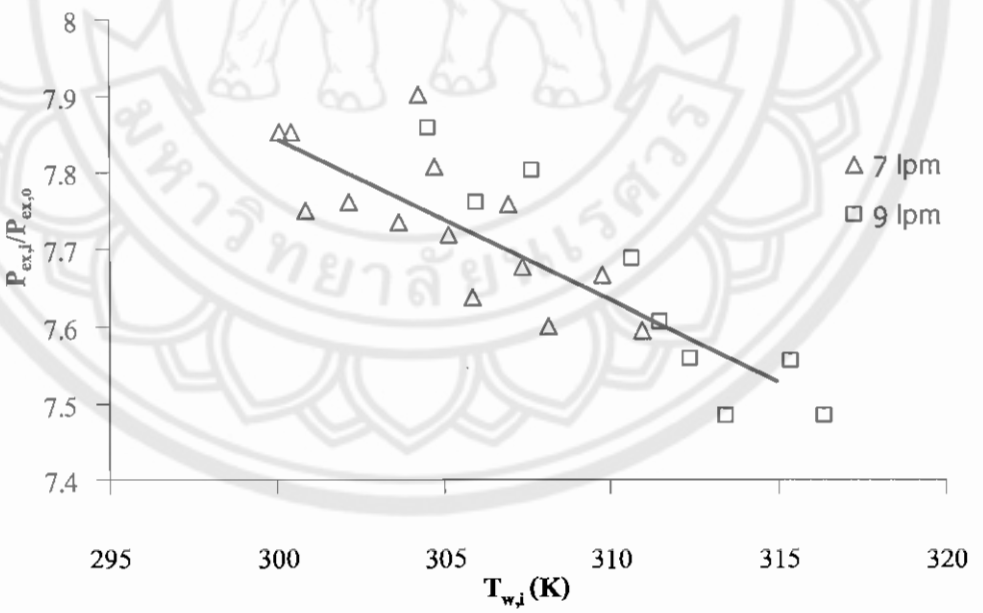
$$\frac{P_{ex,i}}{P_{ex,o}} = f(T_{w,i}) \qquad [4.13]$$

โดยที่ $P_{ex,i}$ = ความดันขาเข้าของท่อแคปปิลารี (kPa)

$P_{ex,o}$ = ความดันขาออกของท่อแคปปิลารี (kPa)

$T_{w,i}$ = อุณหภูมิน้ำขาเข้าคอนเดนเซอร์ (K)

โดยความสัมพันธ์ของสมการที่ 4.13 สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.7 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิน้ำมีผลโดยตรงต่ออัตราส่วนความดันที่ท่อแคปปิลารี โดยที่อัตราส่วนความดันที่ท่อแคปปิลารี จะมีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิของน้ำมีค่าสูงขึ้น



รูปที่ 4.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความดันที่ท่อแคปปิลารี กับอุณหภูมิน้ำเข้าคอนเดนเซอร์

จากรูปที่ 4.7 สามารถนำมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{P_{ex,i}}{P_{ex,o}} = -0.0221(T_{w,i}) + 14.492 \qquad [4.14]$$

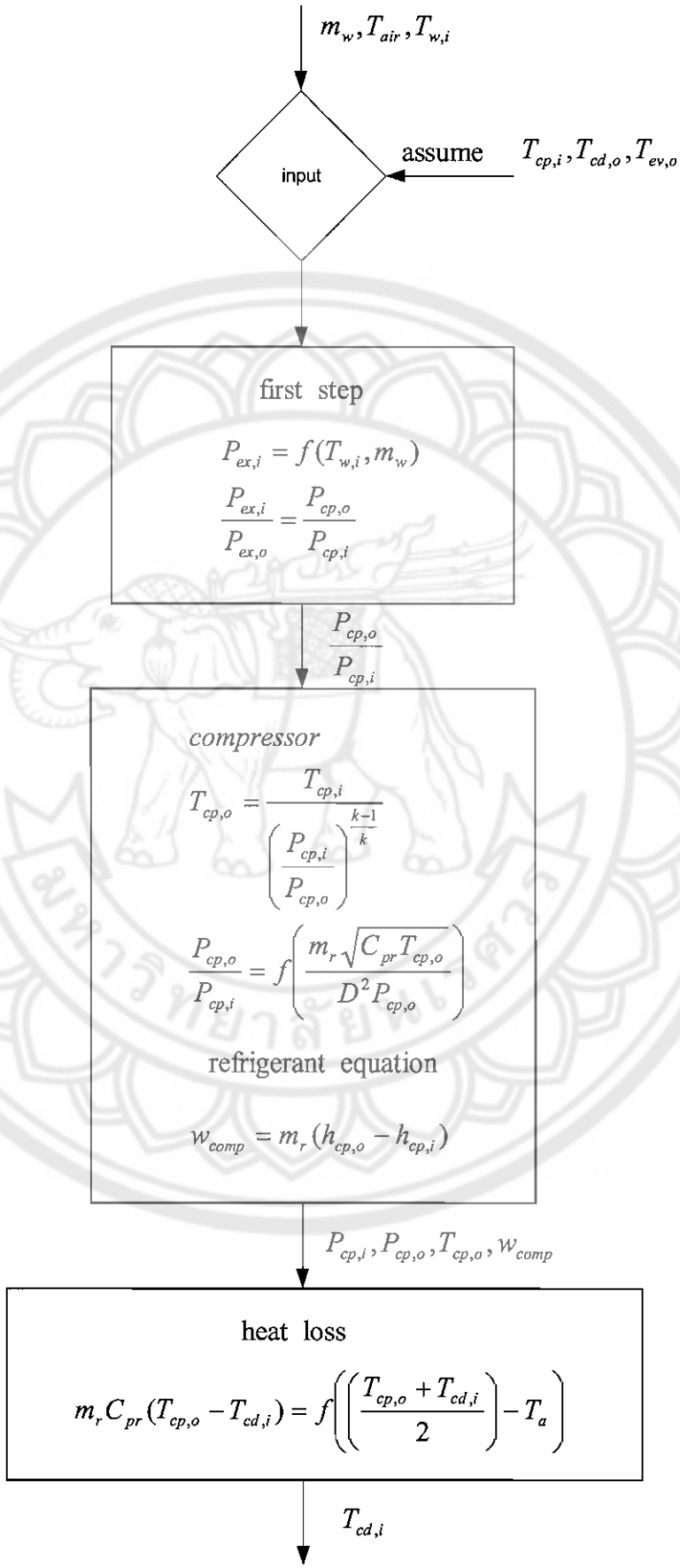
4.7 การจำลองสถานการณ์ของระบบ

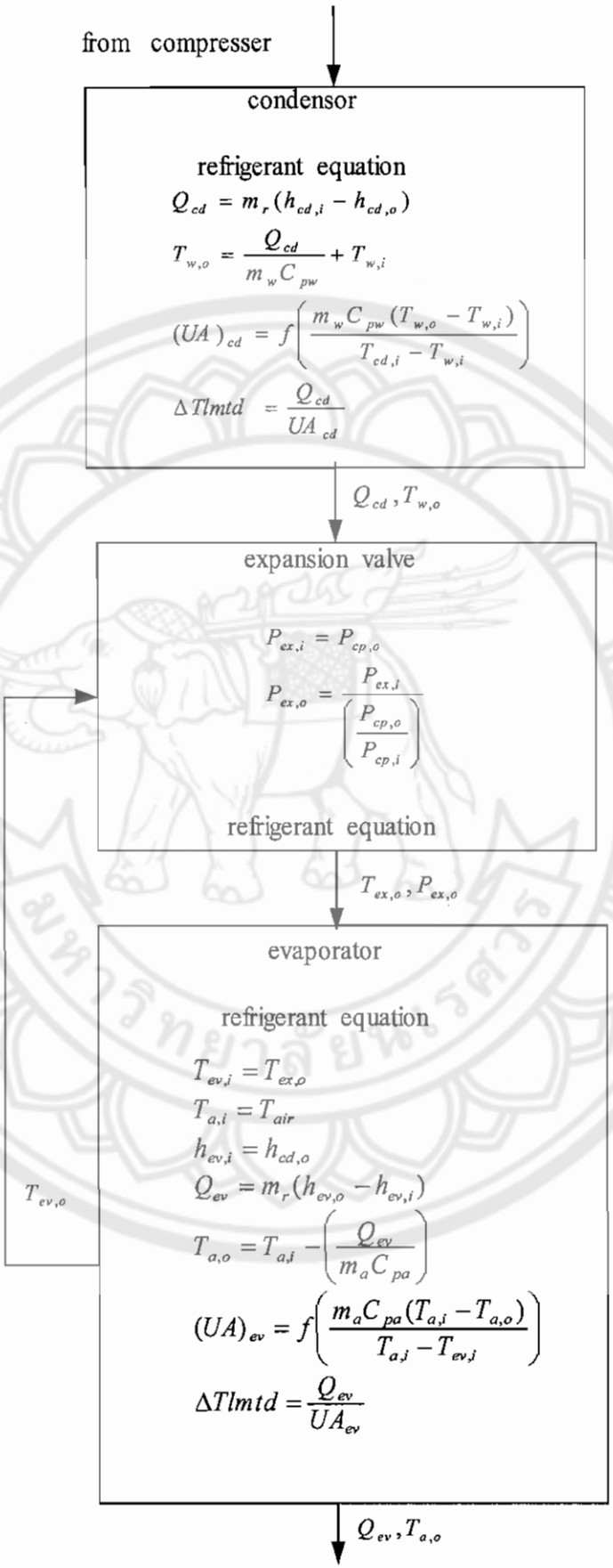
จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอุปกรณ์แต่ละตัว ในวงจรทำความเย็นและความสัมพันธ์ต่างๆทางอุณหพลศาสตร์ รวมถึงสมการในการคำนวณสภาวะต่างๆของสารทำความเย็น (R-134a) สามารถนำมาสร้างเป็นการจำลองสถานการณ์ของระบบได้ดังรูปที่ 4.8

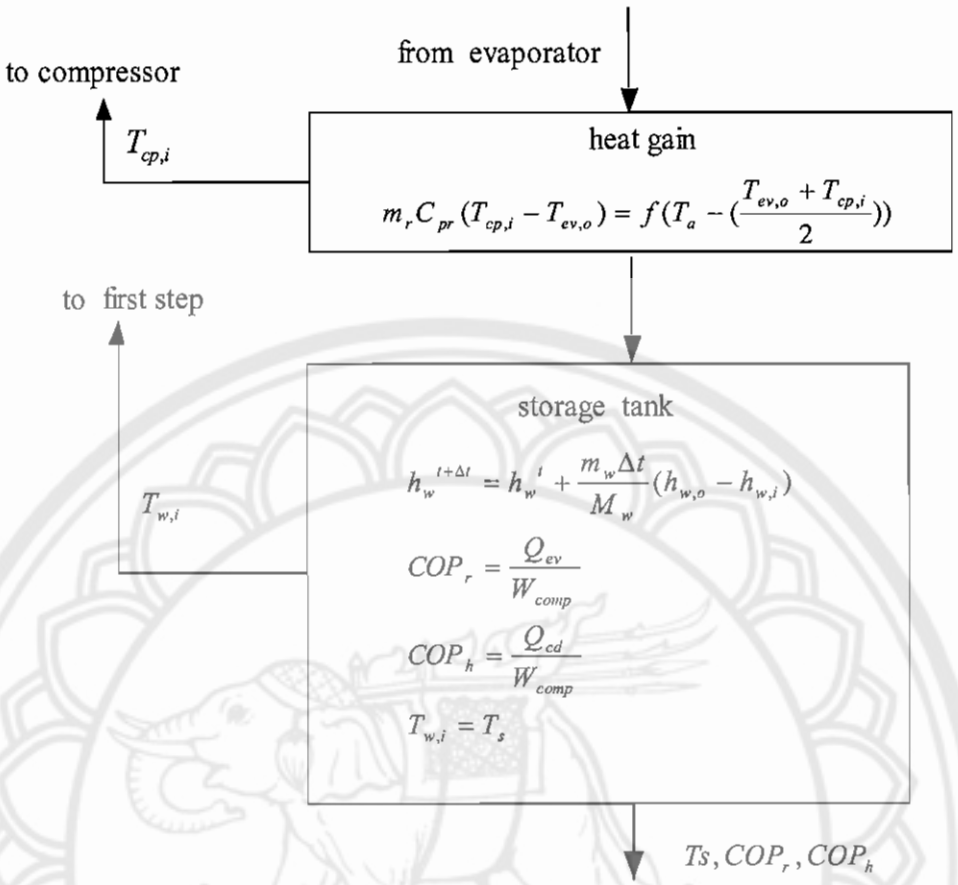
ในการจำลองสถานการณ์การทำงาน จะมีสมมติฐานดังต่อไปนี้

- ไม่มีความดันสูญเสียในคอนเดนเซอร์, อีวาปอเรเตอร์และในท่อ
- ความดันที่ออกจากคอมเพรสเซอร์มีค่าใกล้เคียงกับความดันขาเข้าของคอนเดนเซอร์ และความดันขาเข้าคอมเพรสเซอร์มีค่าใกล้เคียงกับความดันขาออกจากอีวาปอเรเตอร์

ข้อมูลที่ป้อนเข้าโปรแกรมการจำลองสถานการณ์คือ อัตราการไหลของสารทำความเย็น, อัตราการไหลของอากาศ, อัตราการไหลของน้ำ, อุณหภูมิบรรยากาศ, อุณหภูมิน้ำเริ่มต้นในถังเก็บ, ปริมาณน้ำในถังเก็บและข้อมูลที่ส่งออกคือค่าอุณหภูมิน้ำในถังเก็บและค่าสัมประสิทธิ์สมรรถนะของระบบ (COP) ที่ช่วงเวลาต่างๆ ผลที่ได้จากการจำลองสถานการณ์การทำงาน จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดสอบรายละเอียดจะแสดงในหัวข้อถัดไป


$m_w, T_{air}, T_{w,i}$
input
assume
$T_{cp,i}, T_{cd,o}, T_{ev,o}$
first step
$P_{ex,i} = f(T_{w,i}, m_w)$
$\frac{P_{ex,i}}{P_{ex,o}} = \frac{P_{cp,o}}{P_{cp,i}}$
$\frac{P_{cp,o}}{P_{cp,i}}$
compressor
$T_{cp,o} = \frac{T_{cp,i}}{\left(\frac{P_{cp,i}}{P_{cp,o}}\right)^{\frac{k-1}{k}}}$
$\frac{P_{cp,o}}{P_{cp,i}} = f\left(\frac{m_r\sqrt{C_{pr}T_{cp,o}}}{D^2 P_{cp,o}}\right)$
refrigerant equation
$w_{comp} = m_r(h_{cp,o} - h_{cp,i})$
$P_{cp,i}, P_{cp,o}, T_{cp,o}, w_{comp}$
heat loss
$m_r C_{pr}(T_{cp,o} - T_{cd,i}) = f\left(\left(\frac{T_{cp,o} + T_{cd,i}}{2}\right) - T_a\right)$
$T_{cd,i}$


from compresser
condensor
refrigerant equation
$Q_{cd} = m_r(h_{cd,i} - h_{cd,o})$
$T_{w,o} = \frac{Q_{cd}}{m_w C_{pw}} + T_{w,i}$
$(UA)_{cd} = f\left(\frac{m_w C_{pw}(T_{w,o} - T_{w,i})}{T_{cd,i} - T_{w,i}}\right)$
$\Delta Tlmtd = \frac{Q_{cd}}{UA_{cd}}$
$Q_{cd}, T_{w,o}$
expansion valve
$P_{ex,i} = P_{cp,o}$
$P_{ex,o} = \frac{P_{ex,i}}{\left(\frac{P_{cp,o}}{P_{cp,i}}\right)}$
refrigerant equation
$T_{ex,o}, P_{ex,o}$
evaporator
refrigerant equation
$T_{ev,i} = T_{ex,o}$
$T_{a,i} = T_{air}$
$h_{ev,i} = h_{cd,o}$
$Q_{ev} = m_r(h_{ev,o} - h_{ev,i})$
$T_{ev,o}$
$T_{a,o} = T_{a,i} - \left(\frac{Q_{ev}}{m_a C_{pa}}\right)$
$(UA)_{ev} = f\left(\frac{m_a C_{pa}(T_{a,i} - T_{a,o})}{T_{a,i} - T_{ev,i}}\right)$
$\Delta Tlmtd = \frac{Q_{ev}}{UA_{ev}}$
$Q_{ev}, T_{a,o}$



รูปที่ 4.8 แผนภาพการทำงานของโปรแกรมการจำลองสถานการณ์