บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

พลาสติกซึ่งเมื่อไม่นานมานี้ยังเป็นรองวัสดุอื่นๆ เช่น ไม้,เหล็ก,ยาง,กระดาษ,แก้ว ฯลฯ ได้เริ่มมีบทบาทต่อมวลมนุษย์มากขึ้นทุกวันดังที่จะสังเกตเห็นได้จากสิ่งแวดล้อมในชีวิตประจำวันของเราซึ่งมีพลาสติกหลายชนิดเข้ามาเกี่ยวพันด้วย ทั้งนี้เนื่องจากการที่ได้มีการปรับปรุงเทคโนโลยีการผลิตวัตถุดิบและการนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์ได้ถูกทาง การปรับปรุงทางด้านการเสริมความแข็งแรงของพลาสติกให้ใช้งานได้ทัดเทียมกับโลหะนั้น ทำได้โดยการใช้วัสดุที่มีคุณสมบัติที่เรียกได้ทั้งแข็ง และ เหนียว มาเสริมเข้าเป็นเนื้อเดียวกัน

ถ้าจะเปรียบเทียบกับสิ่งก่อสร้างอาคารคอนกรีตเสริมเหล็ก คอนกรีต(ปูนซีเมนต์+ หิน+ทราย) เป็นรูปร่าง เหล็กเส้นภายในเป็นส่วนเสริมความแข็งแรง ใส่เหล็กมากอาคารจะยิ่งแข็งแรงมากขึ้น ผลิตภัณฑ์พลาสติกที่ได้รับการปรับปรุงดังกล่าวโดยใส่วัสดุอื่นเสริมความแข็งแรงจึงเรียกว่า ผลิตภัณฑ์พลาสติกเสริมแรง (Reinforced Plastic)

วัสดุที่มีคุณสมบัติที่ดีและเหมาะสมที่สุดที่จะเอามาเสริมแรงให้พลาสติกก็คือ"ใยแก้ว" (Glass Fiber) ซึ่งมีคุณสมบัติอ่อนนุ่มแต่เหนียว ทั้งทนการผุกร่อนได้ดี ทนความร้อนได้สูง เป็นฉนวนไฟฟ้า และทนสารเคมีส่วนพลาสติกที่นำมาใช้เป็นเนื้อ ต้องเป็นชนิดที่มีความแข็งมาก ซึ่งถ้าไม่มีการเสริมแรงแล้วจะเปราะดังนั้นเราจึงเอาพลาสติกชนิด"เทอร์โมเซตติ้ง" มาใช้งานซึ่งได้ "อีพอกซี่เรซิน" (Epoxy Rasin) พลาสติกจำพวกนี้เป็นพลาสติกเหลวซึ่งภายหลังจากผสมกับ ตัวช่วยเร่งปฏิกิริยา (Accelerator) และตัวทำให้แข็ง(Hardener) แล้วจะเกิดปฏิกิริยาทางเคมี (Polymerization) มีความร้อนเกิดขึ้นสูงกว่า 100 C แล้วเปลี่ยนสภาพเป็นพลาสติกแข็งและจะไม่คืนรูปอีก ดังนั้นการสร้างผลิตภัณฑ์ขึ้นมาโดยใช้วิธีดังกล่าว จึงเรียกได้เป็น ผลิตภัณฑ์พลาสติกเสริมแรงด้วยใยแก้ว(Fiber Glass Reinforced Plastics):ซึ่งเราเรียกง่ายๆว่า ผลิตภัณฑ์ไฟเบอร์กลาส หรือ ผลิตภัณฑ์เอฟอาร์พี

2.1 กรรมวิธีการผลิต

กรรมวิธีที่ใช้ในการผลิตวินเซิร์บที่ใช้ในอุตสาหกรรมนี้เป็นรูปแบบเฉพาะที่จะใช้ในการผลิตวินเซิร์บเท่านั้น ซึ่งจัดว่าเป็นวิธีการที่ไม่ยุ่งยากนัก แม่แบบที่ใช้จะเป็นวัสดุที่ทำจากอีพอกซี่เรซินเพราะว่า

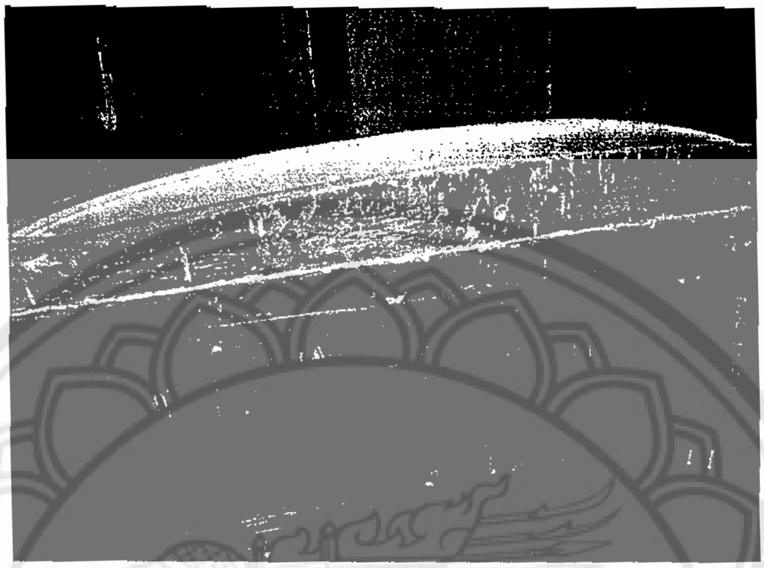
อีพอกซี่เรซินมีความแข็งแรงพอที่เราจะสามารถกดด้วยความดันที่มากๆได้ เครื่องมือที่นำมาใช้ คือ ลูกกลิ้ง เครื่องพ่นอีพอกซี่ผสมตัวช่วยเร่งปฏิกิริยา แท่นกด (Press Machine) วัสดุที่ใช้ก็จะมี น้ำยาอีพอกซี่เรซิน ตัวทำให้แข็ง(Hardener) ใยแก้วที่ตัดไว้แล้ว โฟม หรือวัสดุอื่นๆที่จะนำมาใส่ไว้ภายในชิ้นงาน

2.2 ขั้นตอนการผลิต

1.ขั้นตอนการเตรียมงาน เป็นขั้นตอนที่จะเตรียมใยแก้วที่ตัดไว้แล้ว และ โฟมที่จะนำมาใส่ไว้ภายในชิ้นงาน ให้พร้อมที่จะนำมาใช้

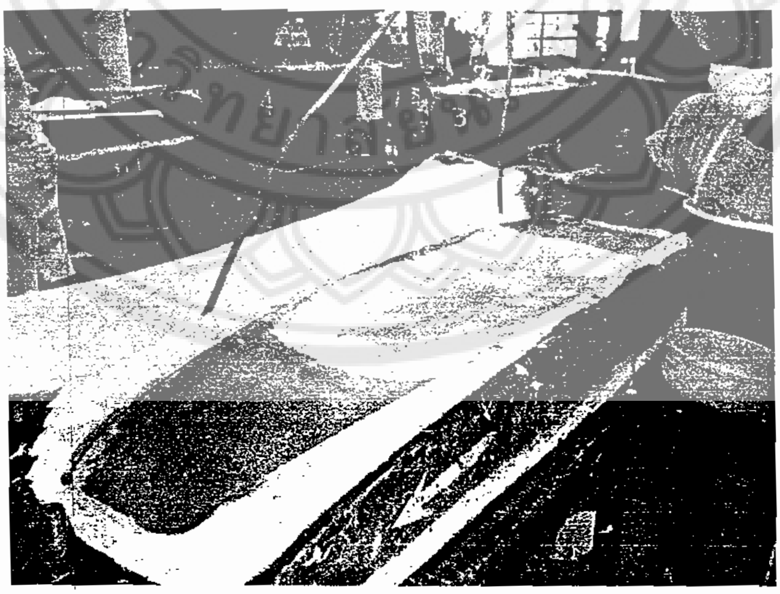
รูปที่ 2.1 แสดงขั้นตอนการเตรียมงาน

2.นำแม่แบบที่เราต้องการ มาวางแผ่นโพลียูรีเทนที่เราต้องการให้เป็นลายของวินเซิร์บ(Top sheet) ซึ่งจะต้องวางให้แนบสนิทไปกับแม่แบบโดยการใช้ความดันแวคคัมดูดอากาศที่อยู่ภายในออกแล้วทำให้พลาสติกแผ่น ร้อนจนเปลี่ยนรูปไปเป็นรูปวินเซิร์บที่เราต้องการทำแบบนี้ทั้งสองด้านของแม่พิมพ์



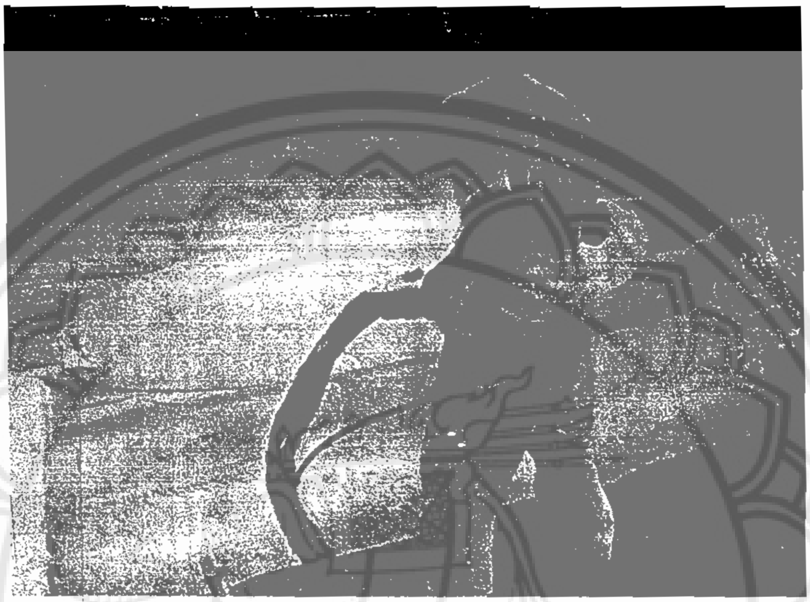
รูปที่ 2.2 แสดงขั้นตอนการติดแผ่น โพลียูรีเทน

3.นำแม่แบบที่ติดแผ่น โพลียูรีเทนแล้วมาทาน้ำยาเรซินให้ทั่วทั้งแผ่น น้ำยาเรซินในที่นี้หมายถึง น้ำยาอีพอกซี่เรซินที่ผสมตัวเร่งปฏิกิริยาหรือตัวทำแข็งเรียบร้อยแล้ว



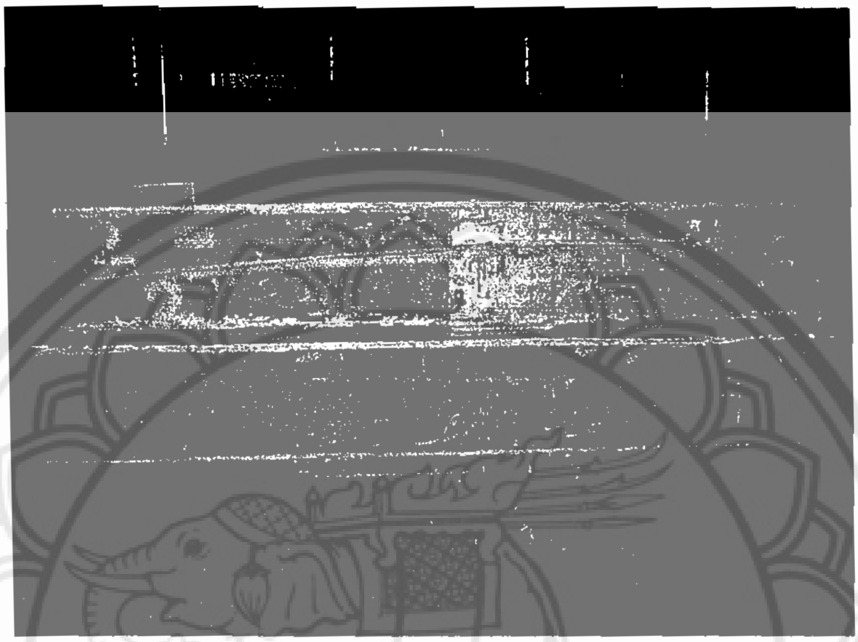
รูปที่ 2.3 แสดงขั้นตอนการทาน้ำยาเรซิน

4.พ่นน้ำยาด้วยเครื่องพ่นลงบนโฟมและใยแก้วให้ทั่วและให้ได้ในปริมาณที่พอเหมาะ ต้องใช้เวลาให้พอเหมาะด้วยอย่าให้นานเกินไปเพราะจะมีผลต่อคุณภาพของชิ้นงาน



รูปที่ 2.4 แสดงการพ่นน้ำยาเรซิน

5.ประกบแม่แบบทั้งสองด้านเข้าด้วยกันให้สนิท

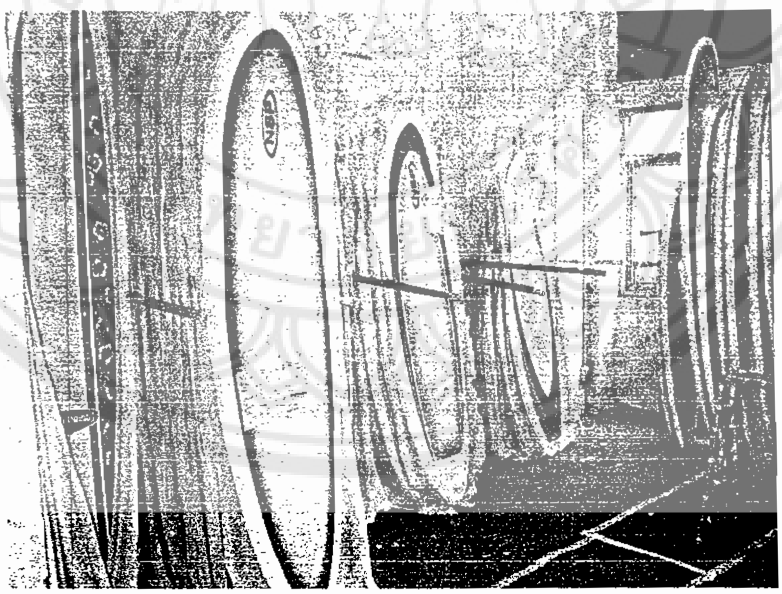


รูปที่ 2.5 แสดงการประกบแม่พิมพ์

6.นำแม่แบบไปกดด้วยเครื่องอัดความดันไฮดรอลิกให้ได้ความดันประมาณ 2500 psi ในแม่แบบจะมีท่อน้ำร้อนวิ่งผ่านเพื่อเป็นการเร่งปฏิกิริยาให้แข็งเร็วขึ้น จากนั้นก่อนนำชิ้นงานออกให้น้ำหล่อเย็นวิ่งในแม่แบบประมาณ 15 นาที

รูปที่ 2.6 แสดงขั้นตอนการกดด้วยเครื่องอัดความดันไฮดรอลิก

7.นำชิ้นงานออกจากแม่แบบตกแต่งขอบให้เรียบร้อย



รูปที่ 2.7 แสดงขั้นตอนการนำชิ้นงานออกและตกแต่งขอบ

2.3 ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาหนึ่งมิติ

หัวใจของการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้จึงนำไปประยุกต์ใช้เพื่อหาการกระจายของผลลัพธ์ของปัญหานั้น ลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะเป็นค่าโดนประมาณและมีการเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่างๆบนโดเมนของปัญหาสอดคล้องกับความคาดหมายสมจริงกับสิ่งที่ควรเกิดขึ้นอันจะนำไปสู่การเข้าใจในปัญหานั้นๆได้ดียิ่งขึ้น กระบวนการขั้นตอนต่างๆเช่นนี้เกิดขึ้นกับการแก้ปัญหาพื้นฐานด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไป ในบทนี้เราจะทำการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในลักษณะเช่นเดียวกันนี้เข้ากับปัญหาของการไหล

เพื่อให้เกิดความเข้าใจโดยง่าย เราจะเริ่มจากการใช้สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งจะเขียนอยู่ในรูปค่าพลังงานภายใน e สำหรับกรณีของการไหลแบบไม่อัดตัว และละค่าพลังงานของการกระจายความหนืด(viscous energy disspation)สมการนี้จึงลดรูปเป็น

$$\rho\frac{De}{Dt}=Q+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.1)$$

โดย ρ แทนความหนาแน่นของของเหลว e แทนค่าพลังงานภายใน t แทนเวลา Q แทนปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เองต่อปริมาตร k แทนสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน และ T แทนอุณหภูมิ เนื่องจาก $e = cT$ โดย c แทนค่าความร้อนจำเพาะของก๊าซที่ปริมาตรคงตัว ดังนั้นหาก c เป็นค่าคงที่ พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการนี้คือ

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\bullet\vec{\nabla}T\right)$$

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.2)$$

แทนสมการ(2.2)นี้ลงในสมการ(2.1)จะได้

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=Q+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{2.3}$$

และหากค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน k เป็นค่าคงที่ด้วยแล้วสมการ(2.3) สามารถลดรูปลงไปได้ง่ายอีกเป็น

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-Q=0 \tag{2.4}$$

นอกจากนั้น หากพิจารณาเฉพาะการไหลในหนึ่งมิติในทิศแกน x เท่านั้นสมการ(2.4)คือ

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\rho cu\frac{\partial T}{\partial x}-Q=0 \tag{2.5}$$

ซึ่งเรียกว่าเป็นสมการของการพาและการแพร่กระจายความร้อนในหนึ่งมิติ(One dimensional convective-diffution equation) อันเป็นสมการพื้นฐานที่เราจะทำการศึกษาพฤติกรรมของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากสมการนี้ อนึ่ง ในการแก้ปัญหาทางปฏิบัติ ค่าต่างๆที่เราละทิ้งไปหรือสมมุติให้เป็นค่าคงตัวอันนำมาสู่สมการ (2.5) นี้จะทำเช่นนั้นไม่ได้เพราะจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ห่างไกลจากความเป็นจริง

2.3.1 ปัญหาการแพร่กระจายความร้อน

เป็นปัญหาพื้นฐานชนิดแรกที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจในขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่สอดคล้องกันได้เป็นอย่างดี รูปที่ 2.8 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของของเหลวในท่อความยาว l ซึ่งไม่มีการไหล แต่ความร้อนสามารถถ่ายเทได้ด้วยการกระจายซึ่งเปรียบเสมือนการนำ(Conduction)ความร้อน ความร้อนเคลื่อนที่จากตำแหน่งหนึ่งสู่อีกตำแหน่งหนึ่ง

เนื่องจากความแตกต่างของระดับอุณหภูมิ T ในแนวแกน x อันเป็นผลมาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองของโดเมนรวมทั้งจากปริมาณความร้อน Q ที่อาจผลิตได้เอง (Internal heat generation)

1. สมการเชิงอนุพันธ์

สำหรับปัญหาการกระจายความร้อนของของเหลวในหนึ่งมิติในรูปที่ 2.8 นี้ สมการเชิงอนุพันธ์ (2.5)ลดรูปลงเป็น

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Q = 0 \tag{2.6}$$

โดยพจน์แรกแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณความร้อนซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา ส่วนพจน์ที่สองและสามแทนปริมาณการกระจายความร้อนและปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองตามลำดับ สมการเชิงอนุพันธ์ (2.6)นี้จะถูกแก้ไปพร้อมกับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆกัน ยกตัวอย่างเช่น เงื่อนไขขอบเขตอาจประกอบด้วยการกำหนดอุณหภูมิที่ปลายทั้งสองของท่อ ดังนี้

$$T(x=0) = T_0 \qquad \text{(2.7 ก)}$$

$$T(x=l) = T_l \qquad \text{(2.7 ข)}$$

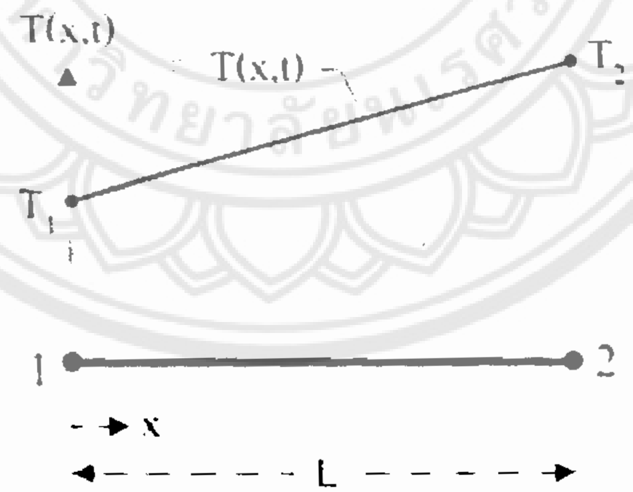
ซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบดีริคเลต (Dirichlet condition) หรืออาจเป็นการกำหนดปริมาณความร้อนแทนที่กำหนดอุณหภูมิ เช่น หากกำหนดปริมาณความร้อนให้เข้าทางด้านขวาของท่อมีค่าเท่ากับ q แล้ว เงื่อนไขขอบเขตตามกฎของฟูเรียร์ (Furier'law) คือ

$$-kA\frac{dT}{dx}(x=l)=q \tag{2.8}$$

โดย A แทนพื้นที่หน้าตัดของท่อ เป็นต้น ซึ่งเรียกว่าเป็นเงื่อนไขขอบเขตแบบนอมันน์ (Neumann condition) โดยเฉพาะสำหรับกรณีพิเศษเมื่อ q = 0 แล้ว จะเป็นเงื่อนไขของการไม่มีการถ่ายเทความร้อนไหลผ่านซึ่งเปรียบเหมือนการเป็นฉนวน (insulation) นั่นเอง

2. สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

รูปที่ 2.8 ยังได้แสดงขั้นตอนแรกของการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการแบ่งโดเมนของปัญหาซึ่งในที่นี้คือความยาวท่อ l ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยความยาว L เอลิเมนต์เหล่านี้ต่อกันที่จุดต่ออันเป็นตำแหน่งที่เราจะคำนวณตัวไม่รู้ค่าซึ่งในที่นี้คืออุณหภูมิ เนื่องจากเราไม่ทราบลักษณะการกระจายอุณหภูมิของผลลัพธ์แม่นตรง T(x,t) สำหรับปัญหาโดยทั่วไปดังนั้นจึงเป็นการเหมาะสมในการที่จะสมมุติลักษณะการกระจายอุณหภูมิ T(x,t) ระหว่างจุดต่อให้อยู่ในรูปแบบของเชิงเส้นตรง รายละเอียดของการสมมุติอุณหภูมิในลักษณะดังกล่าวบนเอลิเมนต์ที่มีความยาว L ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 โดยมีอุณหภูมิที่จุดต่อ T_1 และ T_2 ตามลำดับนั้นได้แสดงในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ลักษณะการกระจายอุณหภูมิเชิงเส้นตรงตลอดความยาวของเอลิเมนต์

(ที่มา : ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม , ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

การสมมุติลักษณะการกระจายของอุณหภูมิในเชิงเส้นตรงตลอดความยาวของเอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 2.8 นี้ สามารถเขียนเป็นสมการในรูปแบบของเมตริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation function matric) และเวกเตอร์ของอุณหภูมิที่จุดต่อ(vector of nodal temperature) ได้โดยเริ่มจาก

$$
\begin{aligned}
T(x,t) &= \left(1-\frac{x}{L}\right)T_1(t)+\left(\frac{x}{L}\right)T_2(t) \\
&= N_1(x)T_1(t)+N_2(x)T_2(t) \\
&= \lfloor N(x) \rfloor \{T(t)\}
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

โดย $\lfloor N(t) \rfloor$ แทนเมตริกซ์การประมาณฟังก์ชันภายในเอลิเมนต์

$$
\lfloor N(x) \rfloor = \left\lfloor 1-\frac{x}{L} \cdot \frac{x}{L} \right\rfloor \qquad (2.10)
$$

ซึ่งมีคุณสมบัติของ

$$
N_i = \begin{cases} 1 & \text{ที่จุดต่อ i} \\ 0 & \text{ที่จุดต่ออื่นๆ} \end{cases} \qquad (2.11)
$$

อันเป็นคุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ทั่วไป และจะนำมาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ เราจะเริ่มจากความเข้าใจที่ว่าหากเรารู้ผลเฉลยแม่นตรง T(x,t) แล้วแทนลงในพจน์ต่างๆทางด้านซ้ายของสมการเชิงอนุพันธ์(2.6)จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ทางด้านขวาของสมการเท่ากับศูนย์อย่างแน่นอน นั่นคือ

$$\rho c\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}-k\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial x^2}-Q=0 \tag{2.12}$$

แต่เนื่องจากการแก้ปัญหาโดยทั่วไปนั้นเราไม่รู้ผลเฉลยแม่นตรงล่วงหน้า เราจึงสมมุติผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) T(x,t) เช่นในสมการ (2.9) โดยหวังว่า หากความยาวของเอลิเมนต์ลดลง ลักษณะการกระจายเชิงเส้นตรงที่สมมุติขึ้นตลอดความยาวของเอลิเมนต์จะมีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นตรงที่อาจเป็นเส้นโค้งใดๆก็ได้มากขึ้น แต่เนื่องจากผลเฉลยโดยประมาณ T(x,t)นี้ไม่ใช่ผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นเมื่อแทนลงในพจน์ต่างๆทางด้านซ้ายของสมการเชิงอนุพันธ์(2.6)นี้แล้ว จะก่อให้เกิดเศษตกค้าง(Residual) ทางด้านขวาของสมการนั้นคือ

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-Q=R \tag{2.13}$$

โดย R แทนค่าของเศษตกค้าง เพราะฉะนั้นหลักการขั้นต่อไปก็คือ การพยายามทำให้เศษตกค้าง R ที่เกิดขึ้นนี้มีค่าต่ำที่สุด เพื่อที่ว่าผลลัพธ์โดยประมาณของอุณหภูมิ T ที่จะคำนวณได้นั้นมีความเที่ยงตรงมากที่สุด ซึ่งในที่สุดแล้วเราจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการแพร่กระจายความร้อนภายใต้สถานะไม่อยู่ตัวดังนี้

$$\underbrace{\int_0^L \rho c\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\end{Bmatrix}\lfloor N_1 \quad N_2\rfloor dx}_{[C]}\underbrace{\begin{Bmatrix}\dot{T}_1\\\dot{T}_2\end{Bmatrix}}_{\{\dot{T}\}}+\underbrace{\int_0^L k\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}\\\frac{\partial N_2}{\partial x}\end{Bmatrix}\left\lfloor \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x}\right\rfloor dx}_{[K_c]}\underbrace{\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\end{Bmatrix}}_{\{T\}}$$

$$=\underbrace{\left(\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\end{Bmatrix}k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_0^L}_{\{Q_c\}}+\underbrace{\int_0^L\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\end{Bmatrix}Qdx}_{\{Q_Q\}} \tag{2.14}$$

$$[C]\{\dot{T}\} + [K_c]\{T\} = \{Q_c\} + \{Q_Q\} \tag{2.15}$$

โดย [c] เรียกว่าเมตริกซ์ของความจุความร้อน (capacitance matrix);{T} แทนเวกเตอร์ของการ เปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่จุดต่อ (vector of rate of change of nodal temperature tures) ; $[K_c]$ เรียกว่าเมตริกซ์ของการแพร่กระจายหรือการนำความร้อน (diffusion) ; {T} แทนเวกเตอร์ของอุณหภูมิ ที่จุดต่อ (vector of nodal temperature) ; $\{Q_c\}$แทนโหลดเวกเตอร์ของการถ่ายเทความร้อนที่จุดต่อ (conduction load vector) และ $\{Q_Q\}$แทนโหลดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง(internal heat generation load vector)

เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆในสมการ (2.15) ซึ่งอยู่ในรูปแบบของการอินทิเกรดตลอดความยาว L ของเอลิเมนต์ดังมีรายละเอียดดังแสดงในสมการ (2.14) นั้นสามารถที่จะประดิษฐ์ขึ้นพร้อมที่จะนำไปใช้ต่อเนื่องเพื่อการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์จากสมการ (2.9) คือ

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{และ} \quad N_2 = \frac{x}{L} \tag{2.10 ก}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{L} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{L} \tag{2.10 ข}$$

<u>เมตริกซ์ของความจุความร้อน</u>

$$[C] = \int_0^L \rho c \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \lfloor N_1 \quad N_2 \rfloor dx$$

$$= \int_0^L \rho c \begin{Bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} \left\lfloor 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\rfloor dx$$

$$= \rho c L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

เมตริกซ์ของการแพร่กระจายความร้อน

$$[K_c] = \int_0^L k \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} dx = \int_0^L k \begin{Bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

โหลดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง

$$\{Q_Q\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} Q dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} Q dx$$

$$= QL \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

<u>โหลดเวกเตอร์จากการถ่ายเทความร้อนที่จุดต่อ</u>

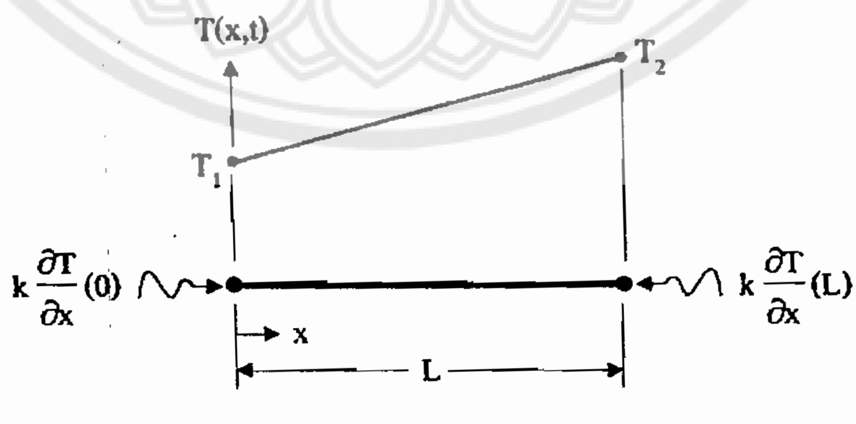
$$\{Q_c\} = \left(\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_0^L = \begin{Bmatrix} \left(N_1 k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_0^L \\ \left(N_2 k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_0^L \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} N_1(L)k\frac{\partial T}{\partial x}(L) - N_1(0)k\frac{\partial T}{\partial x}(0) \\ N_2(L)k\frac{\partial T}{\partial x}(L) - N_2(0)k\frac{\partial T}{\partial x}(0) \end{Bmatrix}$$

แต่จากสมการ (2.11): $N_1(L) = 0$; $N_1(0) = 0$; $N_2(L) = 1$ ดังนั้น

$$\{Q_c\} = \begin{Bmatrix} -k\frac{\partial T}{\partial x}(0) \\ k\frac{\partial T}{\partial x}(L) \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

ซึ่งโหลดเวกเตอร์นี้ประกอบด้วย 2 พจน์ ที่มีความหมายทางกายภาพคือ ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทเข้าที่จุด 1 และจุด 2 ตามลำดับ ดังอธิบายในรูป 2.9



รูปที่ 2.9 ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทเข้าที่จุดต่อของเอลิเมนต์

(ที่มา : ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม , ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

โดยสรุป สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการแพร่กระจายความร้อนหรือการนำความร้อนในหนึ่งมิติภายใต้สถานะไม่อยู่ตัวซึ่งรวมถึงปริมาณความร้อนที่อาจผลิตขึ้นได้เองบนเอลิเมนต์นั้นคือ

$$\rho c L\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{T}_1\\ \dot{T}_2\end{Bmatrix}+\frac{k}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-k\frac{\partial T}{\partial x}(0)\\ k\frac{\partial T}{\partial x}(L)\end{Bmatrix}+QL\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix} \qquad (2.15)$$

สมการ (2.15) นี้เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบอย่างที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นจากสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหานี้ สมการในลักษณะเช่นนี้จำเป็นต้องถูกสร้างขึ้นสำหรับทุกเอลิเมนต์ก่อนรวมเข้าด้วยกันเพื่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นจึงทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเข้ากับระบบสมการรวม