บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการ

2.1 ทฤษฎีพื้นฐานการสั่นสะเทือน

2.1.1 บทนำ

การสั่นสะเทือนของวัตถุต่างๆเป็นสิ่งหนึ่งที่เกิดขึ้นมาพร้อมกับการถือกำเนิดของโลกนี้ การสั่นสะเทือนของวัตถุต่างๆที่เกิดขึ้นมีทั้งสิ่งที่ก่อให้เกิดประโยชน์และเป็นที่ต้องการ ขณะเดียวกันจะมีการสั่นบางอย่างที่ทำให้เกิดโทษและไม่เป็นที่ต้องการ ซึ่งอาจทำให้เกิดการเสียหายได้ เช่น การสั่นสะเทือนของเครื่องจักรกลก็ คือ การเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมาของชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลที่อยู่ในช่วงยืดหยุ่นได้ ซึ่งรูปแบบของการเคลื่อนที่อาจจะเป็นรูปแบบที่แน่นอนหรือเป็นรูปแบบที่ไม่แน่นอนก็ได้ ขึ้นอยู่กับชนิดของระบบและชนิดของแรงที่กระทำกับระบบนั้น จะเห็นว่า การศึกษาเกี่ยวกับการสั่นสะเทือนจะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนของระบบ

การศึกษาเรื่องการสั่นเป็นการศึกษาเพื่อให้มีความเข้าใจถึงการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นในส่วนต่างๆ ของโครงสร้างหรือของเครื่องจักร ว่ามีคุณลักษณะเฉพาะเป็นอย่างไร วิธีการหลีกเลี่ยงหรือป้องกันการสั่นสะเทือนเพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการเสียหายว่ามีวิธีการอย่างไรบ้าง รวมถึงการวัดและการควบคุมการสั่นสะเทือนที่อาจเกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆของโครงสร้างหรือเครื่องจักรด้วย

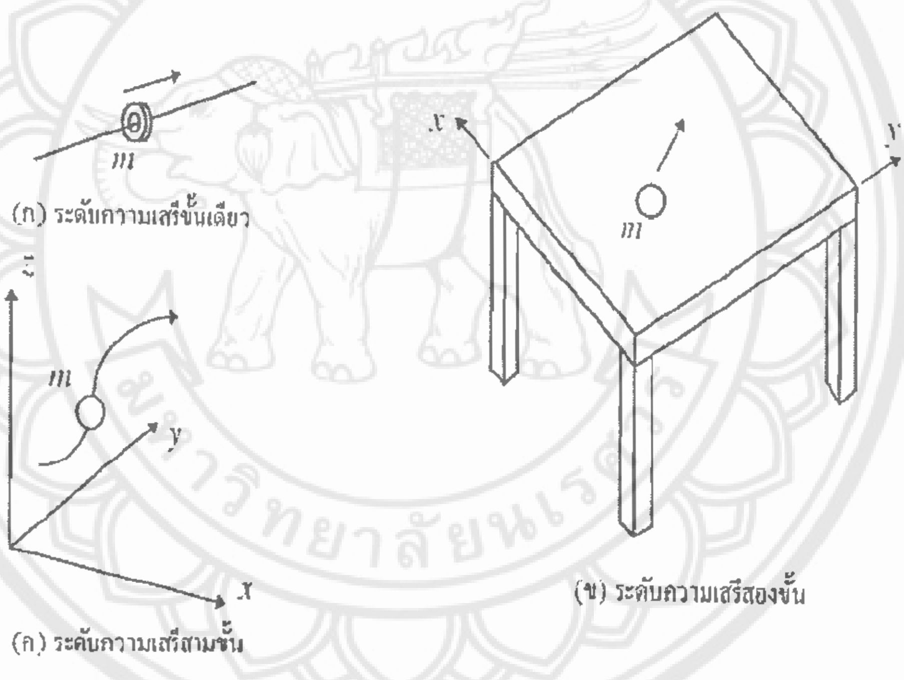
เนื่องจากการศึกษาในเรื่องการสั่นผู้ศึกษาเรื่องนี้ควรจะมีพื้นฐานทางด้าน พลศาสตร์ทางวิศวกรรม รวมถึงคณิตศาสตร์พื้นฐาน เช่น การแก้สมการอนุพันธ์ อยู่ก่อนแล้วเพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาเกี่ยวกับการสั่นสะเทือน

2.1.2 นิยามศัพท์ที่เกี่ยวข้องกับการสั่นทางวิศวกรรม

การศึกษาในเรื่องการสั่นทางวิศวกรรม สิ่งแรกที่นักศึกษาควรทำความเข้าใจก็คือนิยามศัพท์ที่เกี่ยวข้องกับการสั่นทางวิศวกรรม ซึ่งเป็นศัพท์ที่ไม่ได้พบมาก่อนในการศึกษาขั้นพื้นฐาน

2.1.2.1 ลำดับขั้นความเป็นอิสระ (Degree of Freedom, DOF)

ลำดับขั้นความเป็นอิสระ (Degree of Freedom, DOF) หมายถึง จำนวนความเสรีใน**การ**เคลื่อนที่ของวัตถุที่เป็นอิสระต่อกันไม่ขึ้นแก่กัน



รูปที่ 2.1 แสดงภาพของความเป็นอิสระของวัตถุ

พิจารณาห่วงวงแหวนใน รูปที่ 2.1 (ก) ห่วงวงแหวนเคลื่อนที่อยู่บนเส้นลวด ซึ่งการเคลื่อนที่แบบนี้เป็นการเคลื่อนที่แบบถูกบังคับให้มีการเคลื่อนที่ในทิศทางเดียว ดังนั้นห่วงวงแหวนจึงมีอิสระของการเคลื่อนที่เพียงทิศทางเดียว หรืออาจเรียกได้ว่า *"ห่วงวงแหวนมีระดับความเสรีของการเคลื่อนที่ขั้นเดียว"* ส่วนใน รูปที่2.1 (ข) ลูกบอลเคลื่อนที่อยู่บนโต๊ะ สมมุติว่าพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่แบบการเลื่อนทางขนานอย่างเดียวและถือว่าลูกบอลไม่มีการหมุน จะพบว่าลูกบอลมี

การเคลื่อนที่บนโต๊ะได้สูงสุด 2 ทิศทางเท่านั้น คือ ทิศทางในแนวแกน x และ y จึงถือได้ว่า *"ลูกบอลมีระดับความเสรีของการเคลื่อนที่สองขั้น"* สำหรับใน รูปที่ 2.1 (ค) สมมุติว่ากำลังพิจารณาลูกบอลที่ถูกขว้างปาขึ้นไปในอากาศ ซึ่งเปรียบเสมือนว่าลูกบอลมีการเคลื่อนที่อย่างอิสระ ถ้าสมมุติว่า ลูกบอลไม่มีการหมุน ลูกบอลจะเคลื่อนที่ได้สามทิศทาง คือ ในแนวแกน x, y และ z จึงถือได้ว่า*"ลูกบอลมีระดับความเสรีสามขั้น"*

2.1.2.2 ระบบแยกและระบบต่อเนื่อง

ระบบการสั่นสะเทือนจำนวนมากที่สามารถกำหนดจำนวนลำดับขั้นความเป็นอิสระที่แน่นอนได้ อย่างไรก็ตามยังมีระบบอีกแบบหนึ่งซึ่งมีจำนวนลำดับขั้นความเป็นอิสระมากจนไม่สามารถนับได้ ตัวอย่างเช่น การสั่นในเส้นเชือกเส้นหนึ่ง ซึ่งมีความจำเป็นต้องใช้พิกัดจำนวนมากในการกำหนดว่าตำแหน่งต่างๆทั้งหมดตลอดความยาวเส้นเชือกว่าที่เวลาหนึ่งๆ จุดเหล่านั้นจะมีตำแหน่งอยู่ที่ใดบ้าง ดังนั้นการสั่นสะเทือนประเภทนี้จึงถือว่ามีจำนวนลำดับขั้นความเป็นอิสระที่ไม่จำกัด ระบบใดก็ตามที่สามารถกำหนดการเคลื่อนไหวได้ด้วยลำดับขั้นความเป็นอิสระที่จำกัดค่าหนึ่งจะเรียกว่า *"ระบบแยก (Discrete หรือ Lumped System)"* ส่วนระบบที่มีลำดับขั้นความเป็นอิสระไม่จำกัดจะเรียกว่า *"ระบบต่อเนื่อง (Continuos หรือ Distributed System)"*

2.1.3 การแบ่งลักษณะการสั่นสะเทือน

การแบ่งประเภทของการสั่นสามารถที่จะแบ่งออกได้หลายประเภท และจะการอธิบายถึงการแบ่งการสั่นสะเทือนประเภทต่างๆ ที่สำคัญและพบเห็นในการศึกษาขั้นพื้นฐานนี้

2.1.3.1 การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free Vibration)

การสั่นสะเทือนแบบอิสระ คือ การสั่นสะเทือนของระบบในลักษณะที่หลังจากมีระบบที่หยุดนิ่งอยู่ที่จุดสมดุลครั้งแรก เมื่อเกิดการสั่นสะเทือนขึ้นแล้ว การสั่นสะเทือนนั้นดำเนินต่อไปโดยไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำกับระบบอีกเลย การรบกวนระบบอาจจะเป็นการทำให้เกิดการขจัดเบื้องต้นหรือทำให้เกิดความเร็วเริ่มต้นหรือทั้งสองแบบรวมกันก็ได้

2.1.3.2 การสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Force Vibration)

การสั่นสะเทือนแบบบังคับ คือ การสั่นสะเทือนของระบบภายใต้แรงกระทำจากภายนอก ซึ่งแรงกระทำจากภายนอกนี้อาจจะเป็นแรงในลักษณะมีการกระทำซ้ำหรือไม่ก็ได้ การสั่นใน

ลักษณะนี้ก็ เช่น การสั่นเนื่องจากความไม่สมดุลของเครื่องจักรที่เกิดการหมุน สิ่งหนึ่งที่จะพบกับการสั่นสะเทือนแบบบังคับก็ คือ หากว่าความถี่ของแรงที่กระทำกับระบบนั้นไปพ้องกับความถี่ธรรมชาติของระบบพอดี การสั่นที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะที่มีช่วงกว้างการสั่นที่สูงมาก เรียกการสั่นในลักษณะนี้ว่า *"การสั่นพ้อง (Resonance")* ซึ่งผลของการสั่นพ้องนี้มักจะทำให้เกิดความเสียหายกับโครงสร้างที่กำลังเกิดการสั่นสะเทือนอยู่ ดังนั้นในการออกแบบวิศวกรมักจะหลีกเลี่ยงการเกิดการสั่นพ้องของระบบ ยกเว้นในระบบที่ต้องการให้เกิดการสั่นมากๆ เช่นในลำโพงขนาดใหญ่ เป็นต้น

2.1.3.3 การสั่นสะเทือนแบบไม่มีความหน่วง (Undamped Vibration)

การสั่นสะเทือนแบบไม่มีความหน่วง คือ การสั่นสะเทือนที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานให้กับสิ่งแวดล้อมของระบบ ไม่ว่าจะอยู่ในรูปแรงเสียดทานหรือแรงด้านอื่นใด ซึ่งเมื่อระบบเคลื่อนที่แบบไม่มีความหน่วงจะทำให้พลังงานรวมของระบบในระหว่างการเคลื่อนที่นี้มีค่าคงที่ การสั่นสะเทือนที่ไม่มีความหน่วงของระบบในความเป็นจริงจะเกิดขึ้นได้ในอวกาศเท่านั้น เพราะวัตถุที่เกิดการเคลื่อนที่โดยทั่วไปแล้วจะเกิดการสูญเสียพลังงานบ้างอย่างน้อยที่สุดก็จะสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทานกับอากาศรอบข้าง สำหรับระบบที่เกิดการสั่นสะเทือนแบบไม่มีความหน่วงและเป็นการสั่นสะเทือนแบบอิสระความถี่ของการสั่นของระบบจะเรียกว่า *"ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency)"* ซึ่งความถี่ธรรมชาตินี้ถือว่าเป็นปริมาณที่มีความสำคัญมากในการออกแบบเพื่อป้องกันการสั่นสะเทือนของอุปกรณ์หรือโครงสร้าง

2.1.3.4 การสั่นสะเทือนแบบมีความหน่วง (Damped Vibration)

การสั่นสะเทือนแบบมีความหน่วง คือ การสั่นสะเทือนที่เกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม ซึ่งเป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลง โดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้นจะเป็นการสั่นสะเทือนแบบมีความหน่วงแทบทั้งสิ้น

2.1.4 องค์ประกอบของระบบ

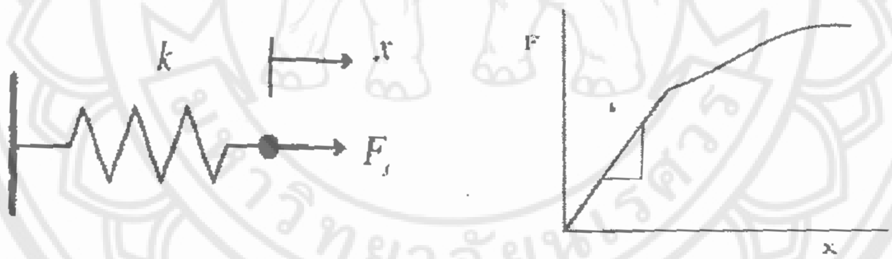
ระบบที่มีการสั่นสะเทือนจะประกอบด้วยชิ้นส่วน 3 ชิ้นส่วนด้วยกันคือ สปริง ตัวหน่วง และมวล

2.1.4.1 สปริง (Spring)

สปริง ในที่นี้หมายถึง ตัวสปริงจริงๆหรืออาจเป็นวัตถุอื่นที่อาจมีการยืดการหดก็ได้สปริงมีคุณสมบัติในการเก็บสะสมพลังงานไว้ในรูปของพลังงานศักย์ และสามารถที่จะปลดปล่อยพลังงานที่สะสมไว้ภายในออกมาได้

ในการสร้างแบบจำลอง มักจะใช้สปริงแทนอุปกรณ์ใดๆในระบบที่มีจุดมุ่งหมายที่ใช้เพื่อการสะสมพลังงานศักย์ของระบบ

วัตถุที่มีสภาพยืดหยุ่นได้ เช่น สปริง เมื่อตกอยู่ภายใต้แรงกระทำไม่ว่าจะเป็นแรงดึงหรือแรงกด แรงที่กระทำต่อสปริงนั้นจะเป็นสัดส่วนกับระยะการยืดตัวหรือยุบตัวของสปริง ดังรูปที่ 2.2



(ก) สปริงอยู่ภายใต้แรงกระทำ

(ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับระยะยืดของสปริง

รูปที่ 2.2 แสดงภาพสปริงเมื่อมีแรงมากระทำ

ซึ่งจะพบว่า สปริง ในช่วงการยืดหยุ่นทั่วไปนั้นขนาดของแรงที่ใช้จะเพิ่มขึ้นตามระยะการยืดตัวของสปริง สามารถกล่าวได้ว่า แรงกระทำเป็นฟังก์ชันของระยะการยืดตัวของสปริง หรือ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$F_s = kx \qquad 2.1$$

โดยที่ F_s คือ แรงที่ค่อยกระทำต่อสปริง มีหน่วยเป็น นิวตัน (N)

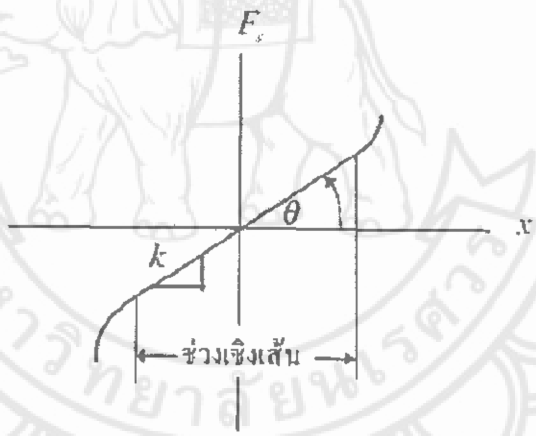
x คือ ระยะยืดของสปริง มีหน่วยเป็น เมตร (m)

k คือ ค่าคงที่ของสปริงแต่ละตัว มีหน่วยเป็น นิวตัน/เมตร (N/m)

ในกรณีที่ว่าสปริงไม่เป็นเชิงเส้น การจะหาค่าปริพันธ์ได้จะต้องทราบการเปลี่ยนแปลงของค่าคงที่สปริง k ต่อระยะการยืดตัวของสปริง x สำหรับพลังงานศักย์ของสปริงจะหาได้โดยจากการที่สปริงเกิดเมื่อยืดตัวเป็นระยะทาง dx จะได้ว่าแรงกระทำมีค่าเป็น

$$dF = kdx \tag{2.2}$$

เมื่อสปริงถูกกระทำจากแรงภายนอกให้มีการยืดหรือหดตัวย่อมทำให้เกิดงานขึ้น งานที่เกิดขึ้นจะหาได้จากพื้นที่ใต้กราฟของ รูปที่ 2.3 ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งจะทำให้เกิดงานเป็น



รูปที่ 2.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง แรง F_s กับ ระยะยืดหรือหดของสปริง

จะสามารถนำมาเขียนเป็นสมการ ได้ว่า

$$W = \frac{1}{2} F_s x \tag{2.3}$$

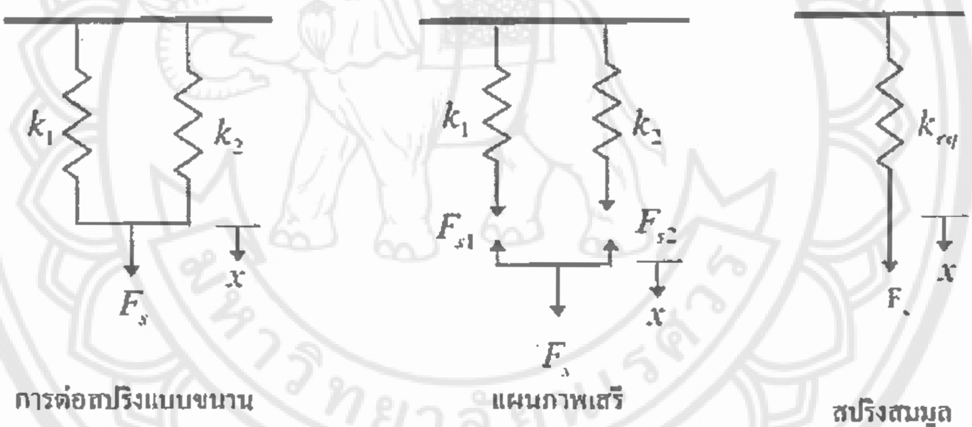
แทน $F_s = kx$ ในสมการที่ 2.3 จะได้

$$W = \frac{1}{2} kx^2 \tag{2.4}$$

ซึ่งในกรณีนี้ งานที่ทำให้สปริงยืดหรือหดตัวไปเป็นระยะ x จะมีค่าเท่ากับพลังงานศักย์ที่สะสมอยู่ในสปริง แสดงให้เห็นว่างานภายนอก W ที่ให้กับสปริงจะทำให้เกิดพลังงานศักย์ $\frac{kx^2}{2}$ สะสมอยู่ภายในสปริง และสปริงก็พร้อมที่จะปลดปล่อยพลังงานนี้ออกมาระบบบาง ระบบอาจมีสปริงต่อรวมกันอยู่หลายตัว เพื่อความสะดวกในการพิจารณา จึงจำเป็นที่จะต้องคิดรวมสปริงย่อยเหล่านั้นให้เป็นสปริงสมมูลเพียงตัวเดียว โดยมีข้อแม้ว่า สปริงสมมูลนี้จะต้องมีคุณสมบัติของการรับแรง และการยืดหรือหดตัว เหมือนกับสปริงย่อยเหล่านั้น ซึ่งการต่อสปริงหลายตัวเข้าด้วยกันจะมีการต่ออยู่ 2 แบบ คือ การต่อแบบขนาน และ การต่อแบบอนุกรม

- การต่อแบบขนาน

สปริงที่มีค่าคงตัว k_1 และ k_2 ต่อรวมกันแบบขนาน ซึ่งจะคิดเป็นสปริงสมมูลตัวเดียวได้โดยรวมสปริงทั้งสองเข้าด้วยกันดัง รูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 การต่อสปริงแบบขนาน

จาก รูปที่2.4 จะได้ว่า $$\mathbf{k_{eq} = k_1 + k_2} \qquad 2.5$$

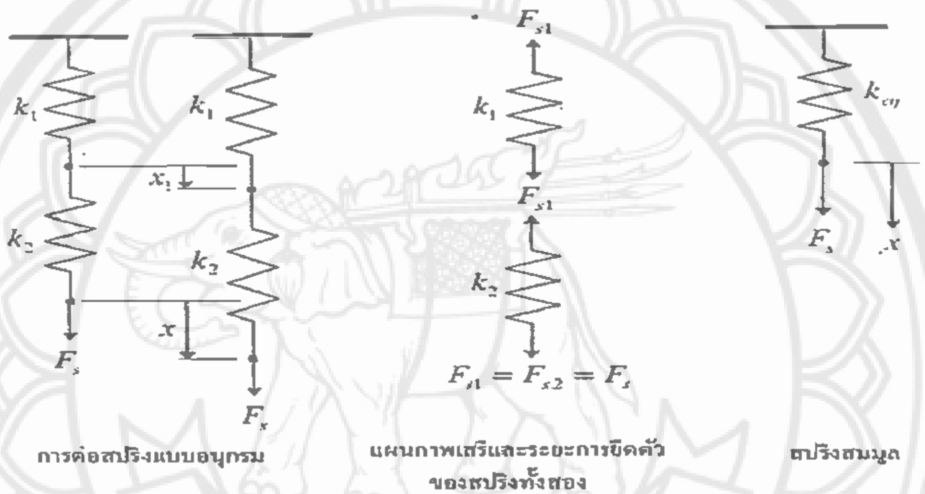
ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสปริงที่ต่อกันแบบขนาน จะมีค่าคงตัวของสปริงสมมูลเป็นผลรวมของค่าคงตัวของสปริงย่อยที่นำมาต่อรวมกัน ในกรณีที่มีสปริง N ตัวต่อกันแบบขนาน จะหาค่าคงที่ของสปริงสมมูลได้จาก

$$k_{eq} = \sum k_i \qquad 2.6$$

- การต่อแบบอนุกรม

ในกรณีนำสปริงหลายตัวมาต่อกันแบบอนุกรม จะพิจารณาได้จาก รูปที่2.5 สปริงที่มีค่าคงตัว k_1 และ k_2 ต่อกันแบบอนุกรม เมื่อมีแรงภายนอก F_s มากระทำกับระบบตามรูปจะทำให้สปริงทั้งสองยืดออก โดยที่ปลายทางขวามือของสปริง k_2 ยืดออกไปเป็นระยะทาง x ซึ่งจะทำให้แรงที่เกิดขึ้นภายในสปริงทั้ง 2 เท่ากันเป็น

$$F_{s1} = F_{s2} - F_s \qquad 2.7$$



รูปที่ 2.5 การต่อ สปริงแบบอนุกรม

จาก รูปที่ 2.5 จะได้ว่า

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad 2.8$$

ซึ่ง k_{eq} ในที่นี้ก็คือค่าคงตัวของสปริงสมมูล ที่มีการต่อสปริงแบบอนุกรม สำหรับการ**ต่อ**สปริงแบบอนุกรม N ตัว จะหาค่าคงตัวของสปริงสมมูลได้จาก

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum \frac{1}{k_i} \qquad 2.9$$

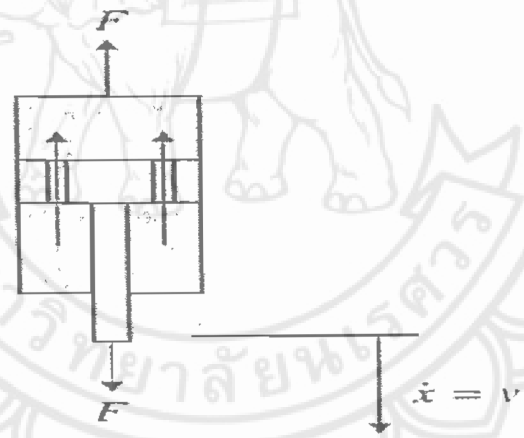
2.1.4.2 **ตัวหน่วงการสั่นสะเทือน (Damper)**

ตัวหน่วงหน่วงการสั่นสะเทือน (damper) เป็นอุปกรณ์ที่จำลองขึ้นเมื่อใช้อธิบายระบบที่มีการสูญเสียพลังงาน เนื่องจากการเคลื่อนของระบบ เพราะในระบบที่มีการสั่นสะเทือนเกิดขึ้นนั้นโดยทั่วไปแล้ว จะต้องมีการสูญเสียพลังงานไม่มากก็น้อยและทำให้ระบบหยุด

การสั่นสะเทือนได้ แรงที่เกิดขึ้นกับตัวหน่วงจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความเร็ว แต่ไม่ขึ้นกับระยะทาง โดยสามารถแบ่งตัวหน่วงการสั่นได้เป็นประเภทใหญ่ๆ ได้ดังนี้

- ตัวหน่วงเนื่องจากความหนืด (Viscous Damping)
- ตัวหน่วงเนื่องจากแรงเสียดทานระหว่างของแข็งกับของแข็ง หรือ *"ตัวหน่วงคูลอมบ์ (Dry Friction หรือ Coulomb Damping)"*
- ตัวหน่วงเนื่องจากความไม่ยืดหยุ่นของวัสดุ หรือ *"ตัวหน่วงโครงสร้าง (Hysteretic Damping หรือ Structural Damping)"*

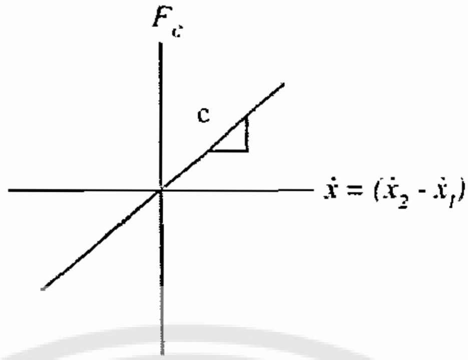
ชิ้นส่วนทางกลที่มีคุณสมบัติแบบนี้คือกระบอกสูบตาม รูปที่ 2.6 ซึ่งประกอบด้วยกระบอกสูบปิดสนิท ภายในบรรจุน้ำมันเต็ม และที่ลูกสูบจะเจาะรูทะลุ ทำให้น้ำมันไหลผ่านจากห้องด้านบนไปยังห้องด้านล่างหรือในทางกลับกันได้ถ้าใส่แรง F_c ให้กับกระบอกสูบตามรูปเมื่อลูกสูบเคลื่อนที่ลง จะทำให้น้ำมันในห้องด้านล่างไหลผ่านรูที่ลูกสูบขึ้นไปยังห้องด้านบน ถ้ารูที่ลูกสูบมีขนาดเล็กก็จะทำให้น้ำมันไหลได้ช้า ลูกสูบก็เคลื่อนที่ลงได้ช้า แต่ถ้ารูมีขนาดใหญ่ ก็จะทำให้น้ำมันไหลได้เร็ว ลูกสูบก็จะเคลื่อนที่ลงได้เร็ว



รูปที่ 2.6 แสดงตัวหน่วงในกระบอกสูบ

ซึ่งแรง F_c ที่เกิดขึ้นนี้จะมีเฉพาะในช่วงที่ลูกสูบเคลื่อนที่เท่านั้น นั่นก็คือ เมื่อลูกสูบมีความเร็วจึงจะมีแรง F_c แต่ถ้าลูกสูบหยุด ก็จะไม่เกิดแรง F_c เพราะน้ำมันไม่มีการเคลื่อนที่ และนี่เป็นการแสดงให้เห็นว่า แรงที่เกิดขึ้นกับตัวหน่วงจะขึ้นอยู่กับความเร็วเท่านั้น ไม่ขึ้นกับระยะทาง ถ้าทำการเขียนกราฟของแรง F_c เทียบกับความเร็วของการเคลื่อนที่ของลูกสูบ จะได้ตาม รูปที่ 2.7 ซึ่งกราฟจะมีความชันเป็น c ซึ่งทำให้กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเร็วได้เป็น

$$F_c = c\dot{x} \qquad 2.10$$



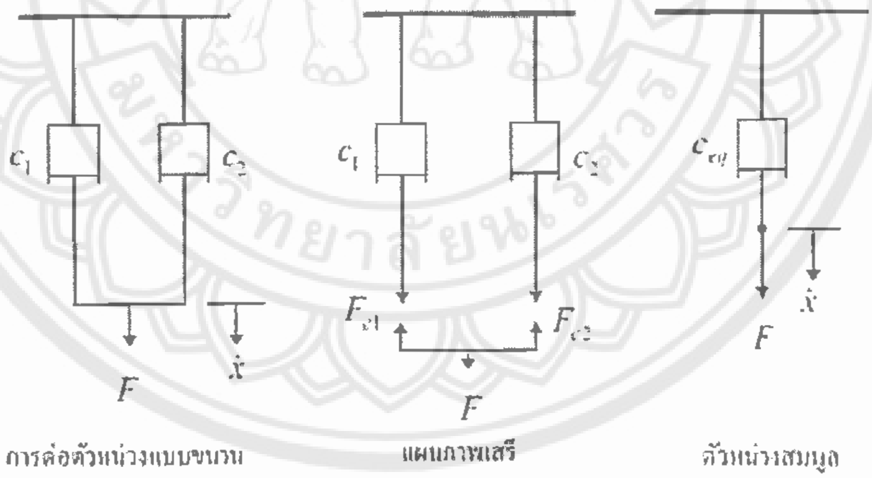
รูปที่ 2.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับความเร็ว

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวของการหน่วง มีหน่วยเป็น Ns/m

สำหรับการใช้ตัวหน่วงหลายตัวร่วมกันก็จะมีลักษณะการต่อเช่นเดียวกันกับสปริง **คือมี** การต่อแบบขนาน และ การต่อแบบอนุกรม

- การต่อแบบขนาน

ตัวหน่วงที่มีค่าคงตัวของการหน่วง c_1 และ c_2 ต่อรวมกันแบบขนาน ทำให้ความเร็ว**ที่เกิด**ขึ้นกับตัวหน่วงทั้งสองเท่ากันเป็นคือ $x_1 = x_2 = x$ ดังแสดงใน รูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แสดงตัวหน่วงแบบขนาน

เมื่อทำการพิจารณา รูปที่ 2.8 **แรง** F_c **ของตัวหน่วงสมมูลจะได้เป็น**

$$F_c = C_{eq} X \qquad 2.11$$

และจะได้

$$C_{eq} = c_1 + c_2 \qquad 2.12$$

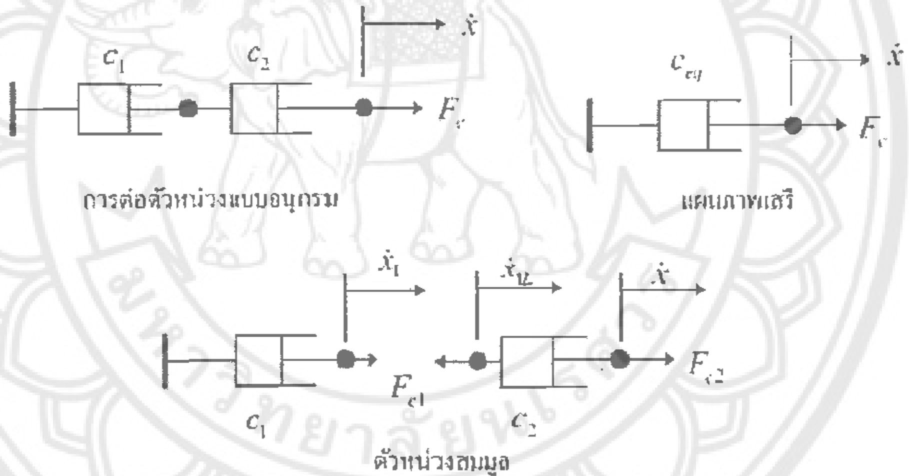
ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ค่าคงตัวของตัวหน่วงสมมูล จะได้จากผลรวมของค่าคงตัวของตัวหน่วงย่อย ในกรณีที่มีตัวหน่วง N ตัวต่อกันแบบขนาน ค่าคงตัวของตัวหน่วงสมมูลจะหาได้จาก

$$Ceq = \sum c_i \tag{2.13}$$

- การต่อแบบอนุกรม

ตัวหน่วงที่มีค่าคงตัวของการหน่วง c_1 และ c_2 ต่อกันแบบอนุกรม และถูกกระทำด้วย**แรง** F_c ทำให้มีความเร็วเป็น x เนื่องจากตัวหน่วง c_1 และ c_2 ต่อกันแบบอนุกรมทำให้แรงที่เกิด**ขึ้น**ที่ตัวหน่วงทั้งสองเท่ากันเป็น

$$F_{c1} = F_{c2} = F_c \tag{2.14}$$



รูปที่ 2.9 แสดงการต่อตัวหน่วงแบบอนุกรม

เมื่อพิจารณาจาก รูปที่ 2.9 จะได้สมการเป็น

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \tag{2.15}$$

ซึ่งจะได้ว่า C_{eq} เป็นค่าคงตัวของตัวหน่วงสมมูลที่มีการต่อตัวหน่วงแบบอนุกรม ระหว่างตัวหน่วง c_1 และตัวหน่วง c_2 สำหรับในกรณีที่มีการตัวหน่วง N ตัวแบบอนุกรม ค่าคงตัวของตัวหน่วงสมมูลจะหาได้จาก

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{c_i} \tag{2.16}$$

ตัวหน่วงไม่จำเป็นจะต้องเป็นกระบอกน้ำมัน เท่านั้น ยังมีอุปกรณ์อื่นๆที่ทำหน้าที่เช่นเดียวกับตัวหน่วงได้เช่นกัน ตัวอย่างเช่น แรงเสียดทานที่เกิดจากความฝืด และแรงปะทะจากอากาศที่มีต่อวัตถุที่เคลื่อนที่ เป็นต้น

2.1.4.3 มวล (Mass)

มวลของระบบ คือ อนุภาคหรือวัตถุแข็งเกร็ง มีหน้าที่สะสมพลังงานจลน์ในขณะที่มวลเคลื่อนที่สำหรับแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของมวลจะอยู่ในลักษณะของแรงเฉื่อยซึ่งพิจารณาได้ 2 แบบ คือ

- การใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

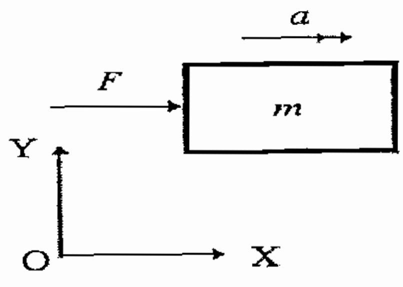
วิธีนี้เป็นวิธีการที่ใช้ในการหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบต่างๆ ได้โดยจะใช้ในการศึกษากลศาสตร์วิศวกรรมพื้นฐานที่เป็นการศึกษากลศาสตร์ของนิวตัน (Newtonian Mechanics) เป็นหลักนั่นเอง กฎของการเคลื่อนที่ในที่นี้หมายถึง กฎข้อที่ 2 ของนิวตันซึ่งได้กล่าวไว้ว่า *"เมื่ออนุภาคที่มีมวล m กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $v = \dot{x}$ ถูกกระทำด้วยแรง F จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ตัมในทิศทางเดียวกันกับแรงนั้น"* ซึ่งจะสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \qquad 2.17$$

เมื่อมวลเป็นค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงไปกับเวลา จะได้ว่า $\frac{dm}{dt} = 0$ เมื่อจัดรูปสมการใหม่จะได้เป็น

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\dot{v} = ma = m\ddot{x} \qquad 2.18$$

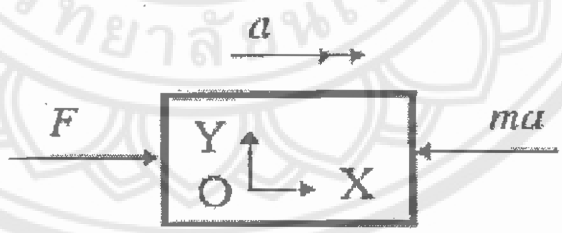
โดยที่ $\mathbf{a} = \ddot{x}$ เป็นความเร่งของมวล m



รูปที่ 2.10 แสดงหลักการพิจารณามวลตามกฎของนิวตัน

- การใช้หลักของ D'Alembert

วิธีการของ D'Alembert เป็นการทำปัญหาทางพลศาสตร์ให้กลายเป็นปัญหาทางสถิตยศาสตร์ ซึ่งจะวิเคราะห์ในลักษณะของระบบที่อยู่ภายใต้การสมดุลของแรง โดย D'Alembert จะแทนกรอบอ้างอิง *แรงเฉื่อย(Inertia)* ตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันด้วยกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งเท่ากับอนุภาค จึงทำให้เกิดแรงเฉื่อยของอนุภาคเป็น ma โดยแรงเฉื่อยนี้จะเกิดขึ้นตรงข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ และทำให้ระบบอยู่ในสภาพ *สมดุลพลวัต (Dynamic Equilibrium)* ดังรูปที่ 2.11 จากหลักการของ D'Alembert นี้ สามารถนำมาใช้กับวัตถุแข็งเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบการเลื่อนทางขนาน และที่เกิดการหมุนได้ โดยใส่แรงเฉื่อยในทิศทางที่สวนทางกับความเร่งของวัตถุแข็งเกร็งนั้น



$$F - ma = 0$$

รูปที่ 2.11 การพิจารณาสมดุลตามกหลักของ D'Alembert

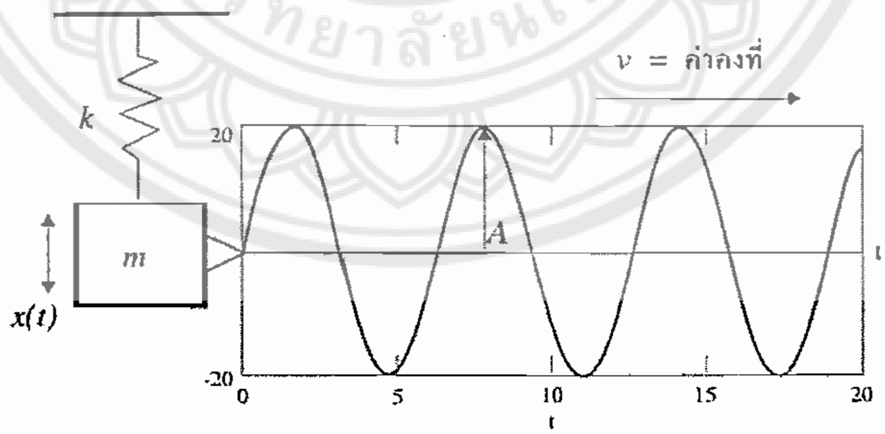
2.1.5 การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกส์ (Harmonic)

การเกิดการสั่นสะเทือนจะมีลักษณะระบบประกอบด้วยมวล m และสปริง k เมื่อมวลถูกกระตุ้นด้วยแรงดล จะทำให้มวล m เคลื่อนที่ขึ้นลงด้วยแอมพลิจูด A คงที่ ถ้านำปากกาไปติดไว้ที่มวล m และนำแถบกระดาษมารองรับปากกา เมื่อเลื่อนกระดาษด้วยความเร็วคงที่ปากกาจะเขียน

การเคลื่อนที่ของมวล m ลงบนกระดาษเป็นรูปไซน์ ซึ่งถ้านำมาเขียนลงในระบบแกน**จะได้**ตาม รูปที่1.12 ในการเคลื่อนที่ของมวล m ครบ 1 รอบของวงกลม หรือเคลื่อนที่ครบ 360 **องศา** หรือ 2π เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ จะมีการเรียกดังนี้ *"คาบเวลาของการเคลื่อนที่"* สัญลักษณ์ที่จะใช้ในที่นี้คือ T มีหน่วยเป็น รอบ (cycle) จำนวนรอบต่อการเคลื่อนที่ใน 1 วินาที จะเรียกว่า*"ความถี่"* สัญลักษณ์ที่จะใช้ในที่นี้คือ f มีหน่วยเป็น Hz (เฮิรตซ์) **หรือ** รอบต่อวินาที จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับคาบเวลาของการเคลื่อนที่เป็นสมการดัง**นี้**

$$f = \frac{1}{T} \tag{2.19}$$

สำหรับ *"ความถี่เชิงมุมหรือความเร็วเชิงมุม (Angular Frequency หรือ Angular Velocity)"* จะเป็นมุมที่วัตถุเคลื่อนที่รอบจุดศูนย์กลางในหนึ่งหน่วยเวลา ซึ่งความถี่เชิงมุมนี้จะมีความสัม**พันธ์**กับความถี่คือ $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ มีหน่วยเป็น rad/sec



รูปที่ 2.12 การเคลื่อนที่แบบ sine wave

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ขึ้นลงของมวล m จะเห็นว่ามวล m เคลื่อนที่ขึ้นลงกลับไปกลับมาเหมือนกับการเคลื่อนที่หมุนรอบเป็นวงกลม ที่จุดสมดุลของมวล m เปรียบได้กับมุมที่วงกลม

เป็น $\theta = 0$ องศา และเมื่อมวล m เคลื่อนที่ก็เปรียบได้กับรัศมี A หมุนกวาดไปรอบๆจุดศูนย์กลาง ตำแหน่งของมวล m ที่มุมใดๆหาได้จาก $x(t) = A\sin\theta$ ถ้ารัศมี A หมุนรอบจุดศูนย์กลางด้วยความเร็วเชิงมุม ω rad/s แล้วจะได้ว่าที่เวลา t ใดๆ รัศมี A จะทำมุมเป็น $\theta = \omega t$ rad ซึ่งจะทำให้ตำแหน่งการเคลื่อนที่ของมวล m เป็น $x(t) = A\sin\omega t$

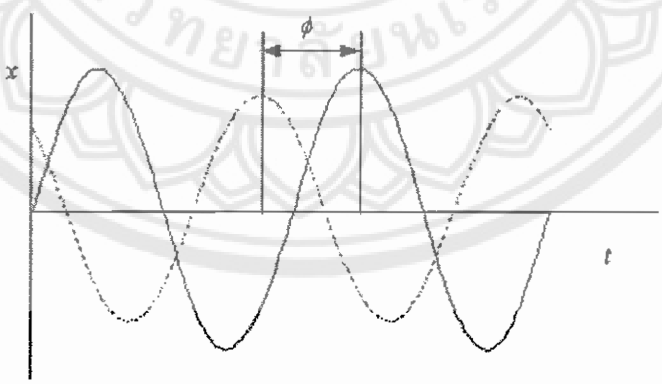
หากพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เป็นอิสระต่อกัน 2 วัตถุ โดยทั้งสองมีสมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$x_1 = A_1 \sin \omega t \qquad 2.20$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi) \qquad 2.21$$

ซึ่งกราฟแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองนี้แสดงใน รูปที่2.13 จากสมการการเคลื่อนที่ที่กำหนดให้นี้ สามารถกล่าวได้ว่า การเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองนี้สอดคล้องกัน (Synchronous) เพราะทั้งคู่เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความถี่ ω ที่เท่ากัน ซึ่งการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกันนี้ไม่จำเป็นต้องมีช่วงกว้างเท่ากัน อีกทั้งยังไม่มีความจำเป็นที่วัตถุทั้งสองจะถึงจุดการเคลื่อนที่สูงสุดพร้อมกัน และมุมเฟส คือ มุมที่วัตถุสองชิ้น เคลื่อนที่ถึงจุดสูงสุดแตกต่าง โดยวัตถุทั้งสองชิ้นต้องเคลื่อนที่สอดคล้องกัน

จาก รูปที่2.13 จะพบว่ากราฟ $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi)$ จะถึงจุดสูงสุดก่อนที่กราฟ $x_1 = A_1 \sin \omega t$ จะถึงจุดสูงสุด ซึ่งสามารถกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า การเคลื่อนที่ทั้งสองมีเฟสแตกต่างกันเท่ากับ ϕ โดยการเคลื่อนที่ของ $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi)$ จะนำ (lead) คือ ขึ้นถึงจุดสูงสุดก่อน วัตถุ $x_1 = A_1 \sin \omega t$ ในการเคลื่อนที่ในรอบเดียวกันอยู่เท่ากับ ϕ



รูปที่ 2.13 การเคลื่อนที่ของมุมเฟสที่ต่างกัน

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกส์อย่างง่ายนี้ ถ้าเราพิจารณาอีกลักษณะหนึ่งเราก็อาจจะมองได้เหมือนกับการเคลื่อนที่ของคลื่นได้เช่นกัน เช่นการเคลื่อนที่ $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ และ

$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$ หากนำการเคลื่อนที่ทั้งสองมารวมกัน ก็จะได้การเคลื่อนที่ที่เป็นลักษณะฮาร์มอนิกส์อีกแบบหนึ่ง นั่นคือถ้า $x_3 = x_1 + x_2$ จะได้การเคลื่อนที่เป็น

$$x_3 = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) \qquad 2.22$$

ซึ่งการรวมการเคลื่อนที่นี้จะเห็นว่าจะคล้ายกับการรวมคลื่น การรวมการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้จะเกิดขึ้นในกรณีที่ระบบมีลำดับขั้นความเป็น อิสระที่มากกว่าหนึ่ง แล้วมวลในระบบเกิดการสั่นขึ้น ซึ่งโดยปกติแล้วระบบที่มีลำดับขั้นความเป็นอิสระ n จะมีความถี่ธรรมชาติเท่ากับ n ค่า การที่ระบบทั้งระบบสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติความถี่ใดความถี่หนึ่งเราเรียกว่า *"ระบบเกิดการสั่นในโหมดปกติ (Normal Mode)"* อย่างไรก็ตามระบบสามารถที่จะสั่นในความถี่ธรรมชาติหลายๆ ความถี่ได้พร้อมกัน ซึ่งลักษณะก็จะเป็นการสั่นที่รวมความถี่ธรรมชาติหลายความถี่เข้าด้วยกัน

2.2 การสั่นสะเทือนของระบบระดับความเสรีสองขั้น

2.2.1 บทนำ

การสั่นสะเทือนของระบบที่มีระดับความเสรีสองขั้น หมายถึง การพิจารณาการเคลื่อนที่ของมวลๆหนึ่งที่มีพิกัดของการเคลื่อนที่สองพิกัดที่เป็นอิสระไม่ขึ้นต่อกัน หรือพิจารณามวลสองมวลโดยที่แต่ละมวลมีหนึ่งพิกัดของการเคลื่อนที่ และพิกัดของการเคลื่อนที่ของแต่ละมวลนั้นไม่ขึ้นต่อกัน

การสั่นสะเทือนของระบบที่มีระดับความเสรีสองขั้นจะมีความซับซ้อนมากกว่าระบบที่มีระดับความเสรีขั้นเดียวมาก วิธีการพิจารณาระบบระดับความเสรีหลายขั้นจะใช้หลักการวิเคราะห์ปัญหาแบบเดียวกันกับระบบระดับความเสรีขั้นเดี่ยว

ในกรณีที่ระบบมีระดับความเสรีมากกว่าหนึ่งขั้น จะพบว่าจำนวนความถี่ธรรมชาติของระบบจะเท่ากับจำนวนขั้นของความเสรี และจำนวนขั้นของความเสรีจะมีค่าเท่ากับจำนวนของพิกัดตำแหน่งของระบบทั้งหมดรวมกัน

เนื่องจากจำนวนความถี่ธรรมชาติของระบบจะเท่ากับจำนวนขั้นของระดับความเสรี ในกรณีที่ระบบมีการสั่นสะเทือนเสรีที่ความถี่ธรรมชาติค่าใดค่าหนึ่ง จะเรียกการสั่นสะเทือนที่ตำแหน่งนั้นว่า ***"ฐานนิยมปรกติ (Normal Mode)หรือฐานนิยมมุขสำคัญ (Principal Mode)"***

2.2.2 การสั่นสะเทือนที่ฐานนิยมปรกติ(Normal Mode Vibation)

ระบบการสั่นสะเทือนที่ไม่มีตัวหน่วงดัง รูปที่ 2.14 ถ้าให้ x_1 และ x_2 เป็นการกระจักของมวลm_1 และ m_2 ตามลำดับและถ้าค่า x_2 มีค่ามากกว่า x_1 สปริง k_2 จะถูกดึงซึ่งมีค่าเท่ากับ $k_2(x_2 - x_1)$ ดัง รูปที่2.14(ข) แต่ถ้า x_1 มีค่ามากกว่า x_2 สปริง k_2 จะถูกอัดซึ่งมีค่าเท่ากับ $k_2(x_1 - x_2)$ เนื่องจากแรงทั้งสองมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางกลับส่วนทางกัน ดั้งนั้นจะสมมุติให้ x_1 มากกว่า x_2 หรือ x_2 มากกว่า x_1 ผลลัพธ์ที่ได้ย่อมมีค่าเท่ากันจากกฏข้อที่ 2 ของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ของระบบคือ

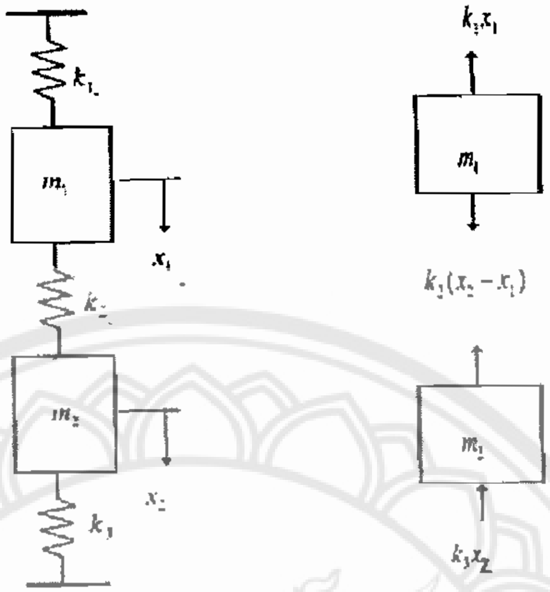
$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned} \qquad 2.23$$

ถ้าสมมุติให้ x_1 และ x_2 เป็นการกระจัดแบบฮาร์มอนิกส์ที่มีความถี่เท่ากันคือ

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \theta) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \qquad 2.24$$

แทนค่า x_1 และ x_2 ลงในสมการ 2.23 และทำการจัดรูปสมการใหม่จะได้เป็น

$$\begin{aligned} &\left[\left(\omega^2 - \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)A_1 + \frac{k_2}{m_1}A_2\right]\sin(\omega t + \phi) = 0 \\ &\left[\left(\frac{k_2}{m_2}A_1 + \left(\omega^2 - \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right)A_2\right)\right]\sin(\omega t + \phi) = 0 \end{aligned} \qquad 2.25$$



(ก) ระบบที่มีระดับความเสรีสองชั้น (ข) แผนภาพอิสระ

รูปที่ 2.14 ภาพแสดงระบบที่มีสองลำดับความเสรี

จากสมการที่ 2.25 จะเป็นจริงทุกๆค่าของ t ก็ต่อเมื่อพจน์ในวงเล็บปีกกาเท่ากับศูนย์จะได้

$$\left(\omega^2 - \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)A_1 + \frac{k_2}{m_1}A_2 = 0$$

$$\frac{k_2}{m_2}A_1 + \left(\omega^2 - \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right)A_2 = 0 \qquad 2.26$$

โดยทั่วไปจะเรียกสมการที่ 2.26 ว่า "สมการแอมพลิจูด (amplidude equation)" คือ ถ้า**ทราบ**ค่า ω ก็สามารถหาค่า A_1และA_2ได้เนื่องจาก A_1และA_2 ไม่เท่ากับศูนย์ดังนั้นตัวกำ**หนด** (determinant)ของขนาดA_1และA_2ต้องเท่ากับศูนย์

$$\begin{vmatrix} \left(\omega^2 - \frac{k_1 - k_2}{m2}\right) & \left(\frac{k_2}{m_1}\right) \\ \frac{k_2}{m_2} & \left(\omega^2 - \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad 2.27$$

หรือ $$\left(\omega^2 - \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right) - \left(\frac{k_2}{m_1}\right)\left(\frac{k_2}{m_2}\right) = 0 \qquad 2.28$$

หรือ $$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right)\omega^2 + \left(\frac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_2}{m_1m_2}\right) = 0 \qquad 2.29$$

และเรียกสมการที่ 2.29 ว่า *"สมการลักษณะเฉพาะ (characterstic equation)"* ถ้าให้ $k_1 = k_2 = k_3 = k$ และ $m_1 = m_2 = m$ และแทนค่าลงในสมการที่ 2.30 ดังนั้น

$$\omega^4 - 4\frac{k}{m}\omega^2 + 3\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \qquad 2.30$$

รากของสมการก็คือ $\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \omega_2^2 = 3\frac{k}{m}$ หรือ $\omega_1 = \frac{k}{m}, \omega_2^2 = 3\frac{k}{m}$

ซึ่งเป็นค่าความถี่ธรรมชาติของระบบที่เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกส์ ถ้าแทนค่า ω_1 ลงในสมการที่ 2.27 จะได้ $\frac{A_2}{A_1} = 1$ และถ้าแทนค่า A_1 และA_2 ลงในสมการที่ 2.25 ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นฐานนิยมหลัก หรือฐานนิยมแรกของการเคลื่อนที่คือ

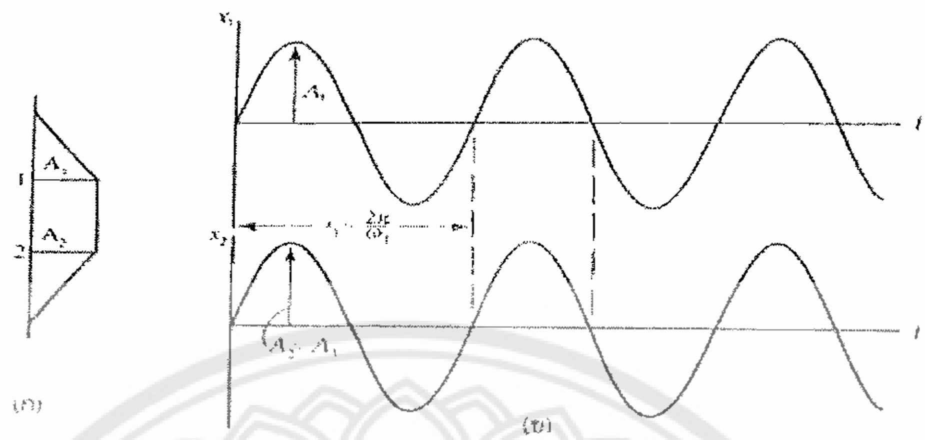
$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \end{aligned} \qquad 2.31$$

ซึ่งค่า $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ และค่าϕ_1 คือมุมเฟสของฐานนิยมแรก ค่าของA_1และ ϕ_1 จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการการเคลื่อนที่ การเคลื่อนที่ของมวลที่มีขนาดเท่ากันจะมีรูปร่างและขนาดการเคลื่อนที่ในเวลาใดเวลาหนึ่งเท่ากันทุกประการ ลักษณะของฐานนิยมจะเห็นได้จากรูปที่ 2.15(ก) ส่วนใน รูปที่2.15(ข) เป็นการเคลื่อนที่ของมวลทั้งสอง โดยที่สมมุติให้ $\phi_1 = 0$ มวลดังกล่าว จะเคลื่อนที่ ขึ้น - ลง พร้อมกัน

ถ้าแทนค่า$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ ลงในสมการที่ 2.27 ผลลัพธ์ที่ได้คือ $A_2 = -A_1$หรือ $A_2/A_1 = -1$ และแทนค่า A_1 และA_2 ลงในสมการที่ 2.25 ผลลัพธ์ที่ได้คือ ฐานนิยมที่สองของการเคลื่อนที่

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

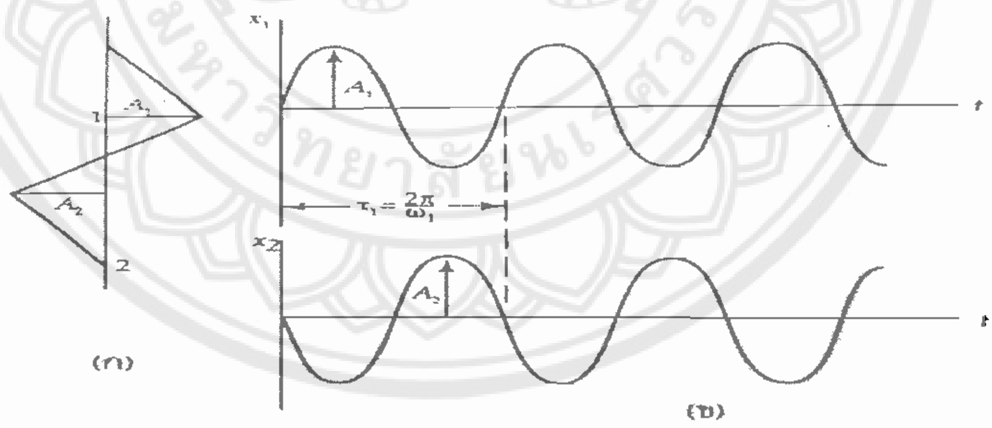
$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \qquad 2.32$$



รูปที่ 2.15 (ก) แสดงการเคลื่อนที่ของมวลขนาดเท่ากันและเคลื่อนที่ในเวลาเท่ากันทุกประการ

(ข) แสดงการเคลื่อนที่ของมวลทั้งสองที่ $\phi_1 = 0$

ซึ่ง $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ ค่า A_1และ ϕ_2 จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนที่การเคลื่อนที่ของมวลจะมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศตรงกันข้าม ซึ่งจะเห็นได้จาก รูปที่ 2.16(ก) ส่วน รูปที่ 2.16(ข) เป็นลักษณะการเคลื่อนที่ของมวลทั้งสองที่สมมุติให้ $\phi_1 = 0$ จะจุดกึ่งกลางของสปริง k_2 จะเป็นจุดอยู่กับที่ ซึ่งเรียกว่า *"บัพ(node)"*



รูปที่ 2.16 **(ก)** แสดงการเคลื่อนที่ของมวลที่มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศตรงกันขาม

(ข) แสดงลักษณะการเคลื่อนที่ซึ่งให้ $\phi_1 = 0$

การกระจัด x_1 และ x_2 ในสมการที่ 2.24 อาจจะสมมุติในรูปของเลขชี้กำลังคือ $x_1 = C_1 e^{st}$ และ $x_2 = C_2 e^{st}$ สมการแอมพลิจูดและความถี่จะได้รับเช่น เดียวกับสมการที่ 2.27และ 2.30 ตามลำดับ

การสมมุติให้มวล m_1 และ m_2 มีการกระจัดแบบฮาร์มอนิกส์ที่มีความถี่เท่ากันและมุมเฟสไม่ต่างกันตามสมการที่ 2.25 นั้น เราสามารถแสดงให้เห็นว่าการสมมุติดังกล่าวเป็นการสมมุติที่ถูกต้องคือถ้าให้

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A_1 \sin \omega' t \\
x_2 &= A_2 \sin \left(\omega'' t + \beta\right)
\end{aligned}
\qquad 2.33
$$

ดังนั้นความถี่ของมวล m_1และ m_2จะต่างกันและมุมเฟสต่างกันเท่ากับ β จากสมการที่ **2.22** อาจเขียนอยู่ในรูปสมการได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\
\ddot{x}_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= 0
\end{aligned}
\qquad 2.34
$$

เมื่อ **a** คือ ค่าคงตัวที่ไม่เท่ากับศูนย์ แทนสมการที่ 2.33 ลงในสมการที่ 2.34ผลที่ได้คือ

$$
\begin{aligned}
\left[a_{11} - (\omega')^2\right] A_1 \sin \omega' t + a_{12} A_2 \sin(\omega'' t + \beta) &= 0 \\
a_{21} A_1 \sin \omega' t + \left[a_{22} - (\omega'')^2\right] A_2 \sin(\omega'' t + \beta) &= 0
\end{aligned}
\qquad 2.35
$$

สมการที่ 2.35 จะเท่ากับศูนย์ทุกๆ ค่าของ t ดังนั้น ถ้าให้ $t = 0$ จะได้ $a_{12} A_2 \sin \beta = 0$ เนื่องจาก a_{12} และ A_2 ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\sin \beta = 0$ เพราะฉะนั้น $\beta = 0$ หรือ π **ถ้า** $\beta = \pi$ เครื่องหมายของ x_2 จะตรงกันข้ามกับที่สมมุติไว้ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า m_1 และ m_2 **จะ** เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกส์ที่มีมุมเฟสเท่ากันแทนค่า $\beta = 0$ ลงในสมการที่ 2.35 จะได้คือ

$$
\left[a_{11} - (\omega'')^2\right] A_1 \sin \omega' t + a_{12} A_2 \sin \omega'' t = 0 \qquad 2.36
$$

ดังนั้น

$$
\frac{\sin \omega'' t}{\sin \omega' t} = \frac{\left[(\omega')^2 - a_{11}\right] A_1}{a_{12} A_2} = const \qquad 2.37
$$

เพราะฉะนั้นทางด้านซ้ายของสมการที่ 2.37 จะมีค่าคงตัวทุกๆ ค่าของ t ซึ่งเป็นได้กรณีเดียวเท่านั้นคือ $\omega'' = \omega'$ ดังนั้นมวล m_1 และ m_2 จะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกส์ที่มีความถี่เท่ากัน

ดังนั้นที่สมมุติให้มวล m_1 และ m_2 เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกส์และมีมุมเฟสไม่ต่างกัน เช่นสมการที่ 2.31 นั้นเป็นการสมมุติที่ถูกต้อง

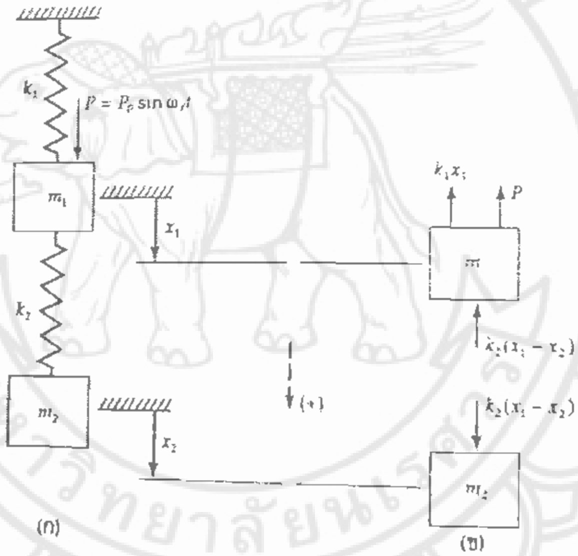
2.2.3 การสั่นสะเทือนแบบบังคับ

ถ้าสมมุติให้มีแรงภายนอกมากระทำที่มวลของระบบระดับความเสรีสองขั้นที่ไม่มีตัวหน่วง ใน รูปที่ 2.17(ก) โดยให้แรงดังกล่าวเป็นแรงแบบฮาร์มอนิกส์ $P = P_0 \sin \omega_f t$ และกระทำที่มวล m_1 จากรูปที่ 2.17(ข) ถ้า x_1 มากกว่า x_2 สมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + P$$
$$m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) \qquad 2.38$$

หรือ

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = P_0 \sin \omega_f t$$
$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \qquad 2.39$$



รูปที่ 2.17 แสดงการสั่นสะเทือนแบบบังคับ

ผลเฉลยของสมการที่ 2.39 จะประกอบด้วยผลเฉลยเอกพันธ์ และผลเฉลยเฉพาะราย เนื่องจากแรงที่กระทำเป็นแบบฮาร์มอนิกส์ จึงสมมุติให้ผลเฉลยในภาวะคงที่ของ มวล m_1 และ m_2 เป็นแบบฮาร์มอนิกส์ด้วยคือ

$$x_1 = X_1 \sin \omega_f t$$
$$x_2 = X_2 \sin \omega_f t \qquad 2.40$$

โดยจะให้

ω_f = ความถี่ธรรมชาติของระบบ

$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ = ความถี่ธรรมชาติของระบบของมวล m_1

$\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ = ความถี่ธรรมชาติของระบบของมวล m_2

$\omega_0 = P_0/k_1$ = การกระจัด สถิตของมวล m_1 อันเนื่องจากแรง P_0

$r_1 = \omega_f/\omega_1$ และ $r_2 = \omega_f/\omega_2$

$b = \omega_2/\omega_1$ = อัตราส่วนของความถี่ธรรมชาติ

$\mu = m_2/m_1$ = อัตราส่วนของมวล

เมื่อแทนค่า x_1, x_2 และค่าต่างๆเหล่านี้ลงในสมการที่ 2.39 จะได้รูปสมการเป็น

$$\left(1+\frac{k_2}{k_1}-r_1^2\right)X_1-\left(\frac{k_2}{k_1}\right)X_1 = X_0 \qquad 2.41$$

$$(-1)X_1+\left(1-r_2^2\right)X_2 = 0$$

โดยใช้กฎของคาร์เมอร์

$$\frac{X_1}{X_0}=\frac{\left(1-r_2^2\right)}{\left(1+\frac{k_2}{k_1}-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)-\frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{X_0}=\frac{1}{\left(1+\frac{k_2}{k_1}-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)-\frac{k_2}{k_1}} \qquad 2.42$$

โดยให้ $\frac{k_2}{k_1}=\frac{m_2}{m_1}\bullet\frac{k_2}{m_2}\bullet\frac{m_1}{k_1}=\mu\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2=\mu b^2$ ดังนั้น

$$\frac{X_1}{X_0}=\frac{1-r_2^2}{\left[1+\mu(\omega_2/\omega_1)^2-(\omega_2/\omega_1)^2r_2^2\right]\left(1-r_2^2\right)-\mu(\omega_2/\omega_1)^2}=\frac{1-r_2^2}{b^2r_2^4-\left[1+(1+\mu)b^2\right]r_2^2+1} \qquad 2.43$$

และ

$$\frac{X_2}{X_0}=\frac{1}{b^2r_2^4-\left[1+(1+\mu)b^2\right]r_2^2+1} \qquad 2.44$$

ดังนั้น x_1, x_2 ในภาวะคงที่ตามสมการที่ 2.40 จะมีแอมพลิจูด X_1 และ X_2 ตามสมการที่ 2.42 หรือ 2.43 และ 2.44

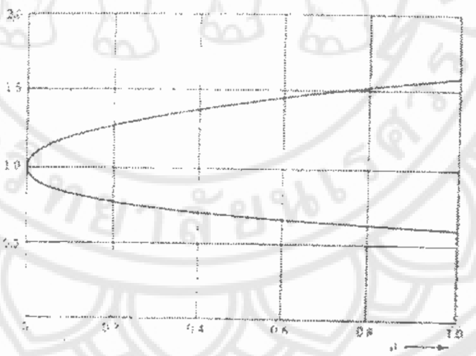
โดยทั่วไปจะพิจารณาค่าของ x_1, x_2 ดังนั้นสมการที่ 2.43 และ 2.44 ถ้าให้ $r_2 = 1$,$(\omega_f = \omega_1)$ เศษของสมการที่ 2.43 จะเท่ากับศูนย์ แต่ส่วนที่ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $X_1 = 0$ แต่ถ้าแทนค่าใน $r_2 = 1$ ลงในสมการที่ 2.43 จะได้รูปสมการเป็น

$$X_2 = \frac{-\omega_0}{\mu b^2} = \frac{k_1}{k_2} \bullet X_0 = -\frac{P_0}{k_2}$$

กรณีที่ $\omega_f = 0, X_1 = X_0$ และ $X_2 = X_0$ แต่ถ้า ω_f มีค่ามากขึ้น X_1/X_0 และ X_2/X_0 จะมีค่าน้อยลงหรืออีกนัยหนึ่งถ้าส่วนที่เท่ากับศูนย์ ค่าของ X_1/X_0 และ X_2/X_0 จะมีค่าเท่ากับ ∞ ส่วนความสัมพันธ์ระหว่าง r_2 และ ω_f ขณะที่ส่วนในสมการที่ 2.43 และ 2.44 มีค่าเท่ากับศูนย์คือ

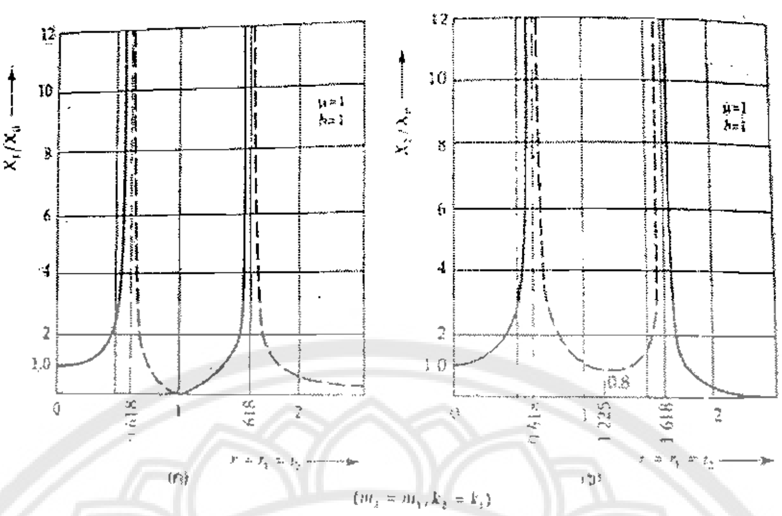
$$b^2 r_2^4 - \left[1 + (1+\mu) b^2\right] r_2^2 + 1 = 0 \qquad 2.45$$

จากสมการที่ 2.45 เป็นสมการกำลังสองในเทอมของ r_2^2 ดังนั้นความถี่ของแรงภายนอกที่ทำให้เกิดการสั่นพ้องจะมีสองค่า ซึ่งค่า ω_f ทั้งสองจะขึ้นอยู่กับค่าคงตัว m_1, m_2, k_1 และ k_2 ของระบบ เพื่อที่จะศึกษาความสัมพันธ์ดังกล่าวจะสมมุติให้ b = 1 ดังนั้นจากสมการที่ 2.45 จะได้ $r_2^4 - \left[1 + (1+\mu) b^2\right] r_2^2 + 1 = 0$ โดยสมมุติค่า r_2 หรือ μ ก็สามารถจะเขียนกราฟใน รูปที่ 2.18 ได้ดังรูปดังกล่าว ถ้า μ มีค่ามากกว่าศูนย์ r_2 หรืออัตราส่วน ω_f/ω_2 ที่ทำให้เกิดการสั่นพ้อง จะมีสองค่า คือค่ามากกว่า 1 และค่าที่น้อยกว่า 1



รูปที่ 2.18 แสดงการสั่นพ้อง

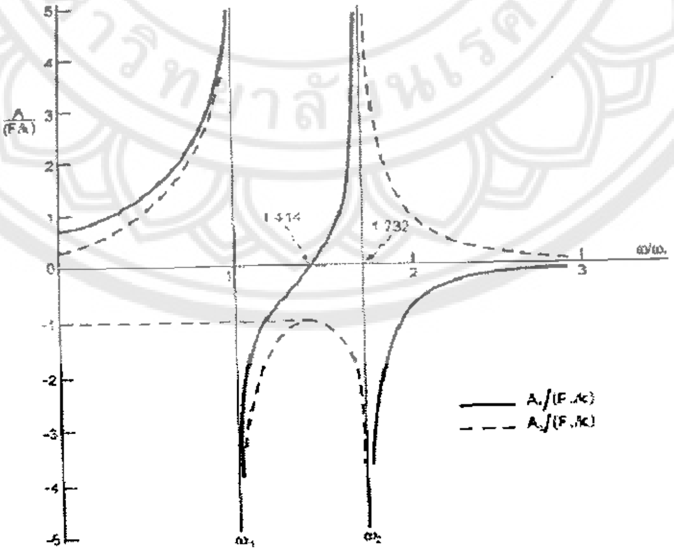
สำหรับความสัมพันธ์ระหว่าง X_1/X_0 และ X_2/X_0 กับอัตราของความถี่ที่กำหนดให้ $\omega_2 = \omega_1, \mu = 1$ และ $r_2 = r_1 = r$ จะเห็นได้จาก รูปที่ 2.19 เส้นทึบแสดงการสั่นสะเทือนของระบบขณะที่ X_1/X_0 หรือ X_2/X_0 มีค่าเป็นบวกส่วนเส้นไข่ปลา X_1/X_0 หรือ X_2/X_0 มีค่าเป็นลบเป็นที่น่าสังเกตว่าแม้แรงที่กระทำที่มวล m_1 แต่มวล m_2 ก็มีผลต่อการสั่นพ้องด้วย



รูปที่ 2.19 แสดงการสั่นสะเทือนของระบบ X_1/X_0 หรือ X_2/X_0 มีค่าเป็นบวก

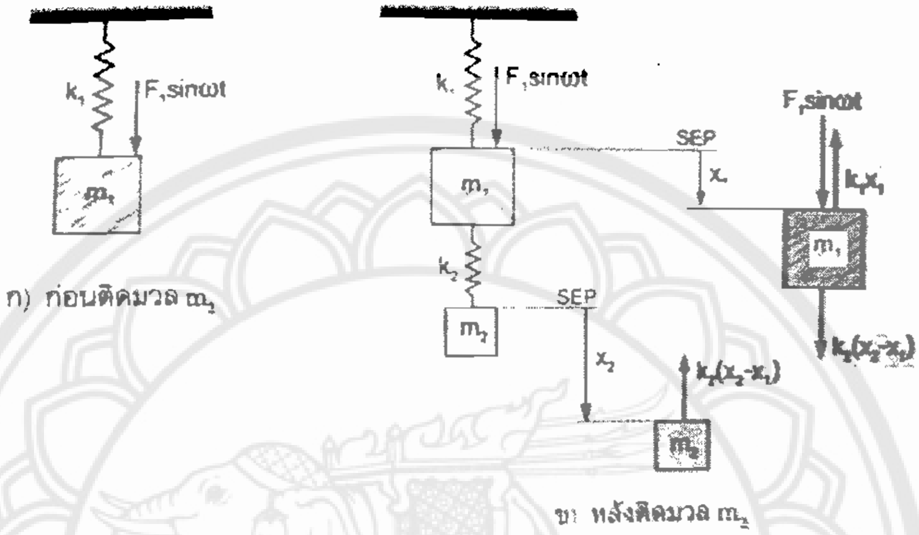
2.2.4 การดูดซับการสั่นสะเทือน(Vibration absorber)

จากระบบที่มีการสั่นสะเทือนแบบบังคับใน 2 ระดับขั้นความเสรีภายใต้แรงกระทำแบบฮาร์มอนิกส์ที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อเบื้องต้น จากรูปที่ 2.20 จะพบว่าที่ความถี่ของแรงภายนอกที่กระทำต่อมวลตัวบน $\omega = \sqrt{2}\omega_1$ โดยที่ ω_1 คือ ความถี่ธรรมชาติของฐานนิยมปรกติที่หนึ่ง แอมพลิจูดของการสั่นสะเทือนของมวลตัวบนเป็นศูนย์



รูปที่ 2.20 แสดงฐานนิยมปรกติของการสั่นสะเทือน

ทั้งนี้เนื่องมาจากการติดตั้งมวลตัวล่างเข้าไปในระบบด้วยนั้นเอง ที่ความถี่ค่านี้มวลตัวล่างจึงทำหน้าที่เป็น *ตัวดูดซับการสั่นสะเทือน* ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนจะทำหน้าที่กำจัดการสั่นสะเทือนของเครื่องจักรกลหรือโครงสร้างและ ลดแอมพลิจูดของการสั่นสะเทือน



รูปที่ 2.21 แสดงการติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือน

จาก รูปที่ 2.21 (ก) เป็นระบบหลักที่ประกอบด้วยมวล m_1 และสปริงที่มีค่าคงตัว k_1 มีการสั่นสะเทือนภายใต้แรงกระทำแบบฮาร์มอนิกส์ $F_t = F_1 \sin \omega t$ ถ้าต้องการลดแอมพลิจูดของมวล m_1 นี้จึงได้ติดตั้งมวล m_2 และสปริงที่มีค่าคงตัว k_2 เข้าไปในระบบหลักดังรูปที่ 2.21(ข)

เมื่อทำการพิจารณาแผนภาพอิสระของมวลแต่ละมวลในรูปที่ 2.21(ข) จากนั้นนำมาเขียนเป็นสมการการเคลื่อนที่ของแต่ละมวลจะได้

$$\begin{aligned} -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1 \sin \omega t &= m_1\ddot{x}_1 \\ -k_2(x_2 - x_1) &= m_2\ddot{x}_2 \end{aligned} \qquad 2.46$$

เนื่องจากการสั่นสะเทือนแบบบังคับแต่ละมวลจะเคลื่อนที่ด้วยความถี่เดียวกันกับแรงภายนอกที่กระทำนั่นคือ จะกำหนดให้ $x_1 = A_1 \sin \omega t$ และ $x_2 = A_2 \sin \omega t$ แล้วแทนค่าลงในสมการที่ 2.46 จะเขียนอยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad 2.47$$

แก้สมการในรูปเมตริกอาศัยกฎของคาร์เมอร์ จะได้

$$\Delta = (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F_1 & -k_2 \\ 0 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix}$$

ดังนั้นจะได้
$$A_1 = \frac{F_1(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \qquad 2.48$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & F_1 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ดังนั้นจะได้
$$A_2 = \frac{F_1 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \qquad 2.49$$

เพื่อความสะดวกต่อการจัดรูปใหม่ จึงกำหนดให้พจน์ต่างๆไว้ดังนี้

$\omega_{11}^2 = \frac{k_1}{m_1}$ เรียกว่า ความถี่ธรรมชาติของระบบหลัก(มวล m_1 และสปริง k_1)

$\omega_{22}^2 = \frac{k_2}{m_2}$ เรียกว่า ความถี่ธรรมชาติของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน (มวล m_2 และสปริง k_2)

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ เรียกว่า อัตราส่วนของมวลของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนต่อมวลของระบบหลัก

$\beta = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}$ เรียกว่า อัตราส่วนความถี่ธรรมชาติของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนต่อความถี่ธรรมชาติ ของระบบหลัก

ซึ่งจะได้ $\frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2 \mu = \beta^2 \mu$

โดยที่ ω คือ ความถี่ของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบหลัก

จัดสมการที่ 2.48 และ 2.49 ใหม่ให้เขียนในพจน์ที่กำหนดข้างต้นจะได้อัตราส่วนแอมพลิจูดของแต่ละมวลดังนี้

$$\frac{A_1}{F_1/k_1} = \frac{\left|1 - (\omega/\omega_{22})^2\right|}{\left[1 + \mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right] - \mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2} \qquad 2.50 \text{ ก}$$

$$\frac{A_2}{F_1/k_1}=\frac{1}{\left[1+\mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]-\mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2} \qquad 2.50\ \text{ข}$$

พิจารณาสมการของความถี่ จากการกำหนดให้ดิเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จัตุรัสหน้า $\{A_1\}$ ในสมการที่ 2.47 เท่ากับศูนย์ จะได้

$$\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)-k_2^2=0$$

$$\left[1+\mu\beta^2-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]-\mu\beta^2=0$$

ดังนั้น
$$\beta^2\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^4-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\left[1-\beta^2(1+\mu)\right]+1=0 \qquad 2.51$$

จากสมการที่ 2.50 ก พบว่าแอมพลิจูดของมวล m_1 เท่ากับศูนย์ $(A_1=0)$ เมื่อขนาดของความถี่ธรรมชาติของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน (ω_{22}) เท่ากับความถี่เชิงมุมของแรงฮาร์มอนิกส์ที่กระทำต่อมวล $(m_1\omega)$ สำหรับการใช้งานของตัวดูดซับจะกำหนดให้ลดแอมพลิจูดของระบบหลัก (มวล m_1) จนเป็นศูนย์ที่ภาวะสั่นพ้องด้วยแรงฮาร์มอนิกส์ที่กระทำต่อระบบหลักนั้น ดังนั้นในภาวะสั่นพ้องความถี่ของแรงฮาร์มอนิกส์จึงเขียนในรูปของ $\omega^2=k_1/m_1$ แสดงว่าเมื่อใช้ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนแล้วทำให้แอมพลิจูดระบบหลักเป็นศูนย์ $(A_1=0)$ นั้น

$$\omega^2=\frac{k_2}{m_2}=\frac{k_1}{m_1} \qquad \text{เมื่อ } A_1=0$$

หรือ
$$\omega=\omega_{22}=\omega_{11} \qquad \text{เมื่อ } A_1=0 \qquad 2.52$$

สมการที่ 2.52 สรุปได้ว่า *"ถ้าต้องการลดแอมพลิจูดของระบบหลักให้เป็นศูนย์นั้น จะต้องออกแบบให้ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนมีความถี่ธรรมชาติเท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบหลักนั้น หรือเท่ากับความถี่ของแรงฮาร์มอนิกส์ที่กระทำต่อระบบหลัก"*

สำหรับความถี่ธรรมชาติของระบบที่มีตัวดูดซับการสั่นสะเทือน (ω_1,ω_2) ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความถี่ธรรมชาติ (β) และอัตราส่วนของมวล (μ) ของระบบ

2.2.5 การออกแบบตัวดูดซับการสั่นสะเทือน

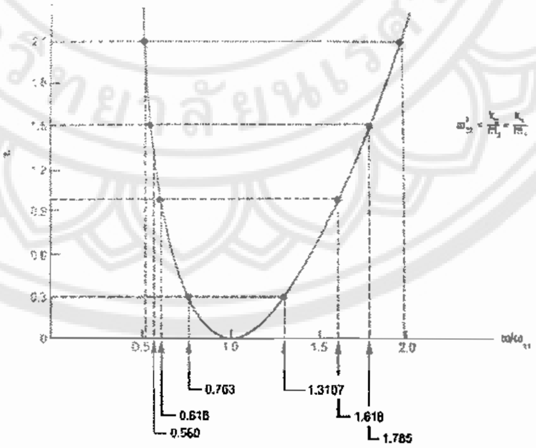
ถ้าต้องการให้แอมพลิจูดของระบบเป็นศูนย์ $(A_1=0)$ ขนาดของ $\sqrt{k_2/m_2}$ ของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนจะมีค่าเท่ากับความถี่ของแรงภายนอก (ω) ที่กระทำต่อระบบหลักดังกล่าว อย่างไรก็

ตามค่าของ k_2 และ m_2 จะมีได้หลายค่ามาก และจะสอดคล่องกับ $\sqrt{k_2/m_2} = \omega$ การพิจารณาขนาดของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนยังต้องคำนึงถึงอิทธิพลของอัตราส่วนมวล (μ) ที่มีต่อความถี่ธรรมชาติของระบบรวม และค่าของ k_2 ที่มีผลต่อแอมพิลจูดที่ยอมรับได้ (A_2) ของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน

ในการพิจารณาแอมพลิจูดของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน จากภาวการณ์ใช้งานเมื่อ $k_2 / m_2 = \omega^2$ พบว่าที่ $A_1 = 0$ ที่สภาวะนี้พบว่า $\omega_{22} = \omega_{11}$ และ $\omega = \omega_{11}$ ดังนั้น $\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} = \frac{\omega}{\omega_{11}} = \frac{\omega}{\omega_{22}} = 1$ เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ 2.50 ข จะได้แอมพลิจูด A_2

$$A_2 = \frac{-F_1}{\mu k_1} = \frac{-F_1}{k_2} \qquad 2.53$$

เครื่องหมายลบในสมการที่ 2.53 แสดงว่าตัวดูดซับการสั่นสะเทือนนำหน้าแรงฮาร์มอนิกส์ที่กระทำต่อระบบหลักอยู่ 180° ดังนั้นถ้ากำหนดให้แรงฮาร์มอนิกส์อยู่ในรูปของ $F_{(t)} = F_1 \sin \omega t$ แรงที่กระทำโดยตัวดูดซับการสั่นสะเทือนต่อระบบหลักจึงเขียนในรูปของ $-k_2 A_2 \sin \omega t$ หรือ $k_2 A_2 \sin(\omega t + \pi)$ ในกรณีที่ $A_1 = 0$ นั้นแสดงให้เห็นว่าแรงฮาร์มอนิกส์และแรงกระทำโดยตัวดูดซับการสั่นสะเทือนนั้นมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศตรงกันข้ามจึงทำให้ผลลัพธ์ที่กระทำต่อระบบหลักนั้นเป็นศูนย์ นั้นคือ ระบบหลักจะอยู่ในสภาวะสมดุลสถิตชั่วขณะหนึ่งและมีแอมพลิจูดเป็นศูนย์



รูปที่ 2.22 แสดงอิทธิพลของอัตราส่วนมวล (μ) ต่อความถี่ธรรมชาติของระบบรวม

อย่างไรก็ตาม การสั่นด้วย A_2 ที่มีค่ามากกว่าตัวดูดซับการสั่นสะเทือน อาจทำให้เกิดการเสียหายจากการลาของส่วนที่ยืดหยุ่นในตัวดูดซับการสั่นสะเทือน ภายใต้แอมพลิจูดค่าหนึ่งๆ ของแรงฮาร์มอนิกส์ การลดแอมพลิจูดของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนจึงทำได้โดย การเพิ่มค่า k_2 นอกจากนี้การเพิ่มค่า k_2 ยังต้องคำนึงถึงความสัมพันธ์ของ $\sqrt{k_2/m_2} = \omega$ นั่นคือ จะต้องเพิ่มมวล m_2 ไปอย่างสัมพันธ์กันภายใต้ค่ากำหนดหนึ่งของ ω ผลที่ได้ตามมาก็คือ ความถี่ธรรมชาติของระบบรวม จะถูกกำหนดในลักษณะเดียวกัน ดัง รูปที่2.22 กล่าวคือที่จุด $\omega = \omega_{11}$ นั้น $\omega_1 < \omega < \omega_2$

2.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพโดยวิธี The Routh - Hurwitz Stability Criterion

ความเสถียรของระบบควบคุมถือเป็นสิ่งที่สำคัญมากในการออกแบบระบบควบคุม และระบบควบคุมจะเสถียรหรือไม่จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของโพลใน s-plane หรือค่าของโพลของระบบนั่นเอง ดังนั้นสมการที่มีความสำคัญในการหาค่าของโพล คือ สมการของเทอมส่วนในฟังก์ชันถ่ายโอน ดังนั้นจึงเรียกสมการนี้ว่า “สมการเฉพาะ (characteristic equations)” และจะเรียกค่าโพลนี้ว่า “ค่าเฉพาะ (eigenvalues)” ของระบบในการพิจารณาค่าโพลในระบบ จะต้องหารากของสมการเฉพาะ การพิจารณาความเสถียรของระบบซึ่งพิจารณาจากสมการเฉพาะของระบบ โดยไม่ต้องหารากของสมการ ดังนั้นในด้านการออกแบบระบบที่ซับซ้อน Rath-Hurwitz Stability Criterion นี้ซึ่งสามารถเขียนทั่วไปได้ในรูป

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_1 s + a_0 = 0 \qquad 2.54$$

เพื่อที่จะหาความเสถียรของระบบเราจะต้องพิจารณาว่ารากของสมการนี้ มีค่าอยู่ในด้านขวามือของ s-plane หรือไม่ ซึ่งสมการที่2.54 สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$q(s) = a_n (s - r_1)(s - r_2)\ldots(s - r_n) = 0 \qquad 2.55$$

เมื่อ r_i เป็นรากของสมการเฉพาะ ถ้าเราคูณสมการนี้เข้าด้วยกันเราจะได้

$$\begin{aligned} q(s) = a_n s^n - a_n (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) s^{n-1} + a_n (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + \ldots) s^{n-2} \\ - a_n (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots) s^{n-3} + \ldots \\ + a_n (-1)_n r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = 0 \end{aligned} \qquad 2.56$$

หรือกล่าวอีกกรณีหนึ่ง เราจะได้ว่า

$q_s = a_n s^n - a_n$ (ผลรวมของรากทั้งหมด) s^{n-1}

$+$ a_n (ผลรวมของผลคูณของรากที่เลือกครั้งละ 2 ราก) s^{n-2}

- a_n (ผลรวมของผลคูณของรากที่เลือกครั้งละ 3 ราก) s^{n-3}

$+ \ldots + a_n(-1)^n$ (ผลคูณของรากทั้งหมด)$= 0$

จากสมการที่ 2.54 จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของพหุนามในสมการเฉพาะนี้จะมีเครื่องหมายเดียวกัน ถ้าหากว่าต้องการให้รากทั้งหมดนั้นอยู่ด้านซ้ายมือของ s-plane และจำเป็นที่สัมประสิทธิ์แต่ละตัวต้องไม่เป็นศูนย์ เพื่อให้ระบบเสถียรข้อกำหนดนี้ถือว่าเป็นสิ่งจำเป็นแต่ยังไม่เพียงพอที่จะกำหนดได้ว่าระบบจะเสถียร นั่นคือเราจะทราบได้ทันทีว่าระบบจะไม่เสถียรหากไม่เป็นไปตามข้อกำหนดนี้ แต่ถ้าเป็นไปตามข้อกำหนดนี้เราก็ยังจะไม่สามารถกำหนดอย่างแน่นอนได้ว่าระบบนี้จะเสถียร เรายังจะต้องมีการพิจารณาต่อไปอีกเพื่อหาความเสถียรของระบบ ยกตัวอย่างเช่นระบบที่มีสมการเฉพาะเป็น

$$q(s) = (s+2)(s^2 - s + 4) = s^3 + s^2 + 2s + 8 \qquad 2.57$$

ซึ่งเป็นระบบที่มีสัมประสิทธิ์ทุกตัวมีเครื่องหมายเป็นบวกเหมือนกัน แต่ระบบนี้จะมีค่าเฉพาะค่าหนึ่งเป็น , ซึ่งระบบจะเป็นระบบไม่เสถียรRouth – Hurwitz Criterion จะเป็นข้อกำหนดที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้กำหนดได้ว่าระบบนี้เป็นระบบเสถียรหรือไม่ วิธีการนี้ในตอนแรกที่มีการนำเสนอจะพิจารณาในรูปของดิเทอร์มิแนนท์ แต่ในการนำมาใช้ในภายหลังจะเปลี่ยนลักษณะออกมาในรูปของแถวลำดับ (array) มากกว่าRouth - Hurwitz Criterion จะมีพื้นฐานจากการจัดลำดับสัมประสิทธิ์ของสมการเฉพาะ

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad 2.58$$

ให้อยู่ในรูป

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

ส่วนแถวต่อ ๆ ไป เราสามารถเขียนได้ในรูป

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-3} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^{0} & h_{n-1} & & &
\end{array} \qquad 2.59
$$

เมื่อ

$$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n} & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$ เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

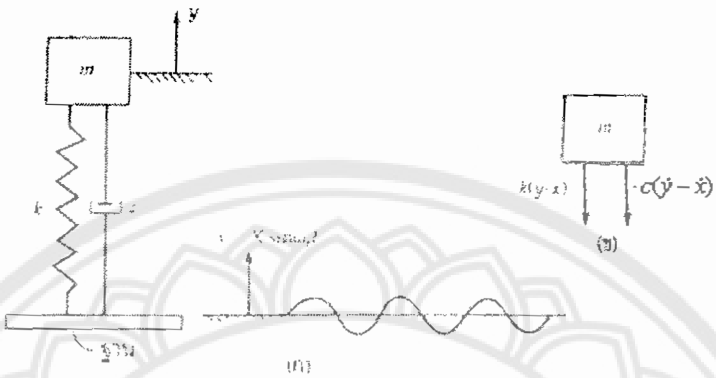
การคำนวณลำดับทั้งหมดจะใช้ดิเทอร์มิแนนต์ ที่มีพื้นฐานหรือใช้รูปแบบหาสมการที่หาค่าต่างๆ Routh – Hurwitz Criterion กำหนดไว้ว่าจำนวนราก q(s) ที่มีส่วนจริงเป็นบวกนั้นจะเท่ากับจำนวนการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย ในแถวตั้งแถวแรกในลำดับใน Routh's Array ซึ่งข้อกำหนดนี้เป็นข้อกำหนดที่จำเป็นและเพียงพอที่จะกำหนดสภาวะเสถียรของระบบ

2.4 เครื่องมือวัดการสั่นสะเทือน

2.3.1 การวัดการเคลื่อนที่และความสัมพันธ์พื้นฐาน

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของเครื่องจักร โครงสร้างและแบบจะลอง จำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือวัดการสั่นสะเทือน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทราบส่วนประกอบพื้นฐานและการทำงานของ

เครื่องมือวัด ส่วนประกอบที่สำคัญๆจะเห็นได้จากรูปที่ 2.23 ปกติจะวางหรือยึดฐานเครื่องมือวัดติดกับเครื่องจักรกลหรือโครงสร้างซึ่งเครื่องมือด้วยการกระจัดสัมบูรณ์



รูป 2.23 แสดงส่วนประกอบของระบบ

$x = X \sin \omega_f t$ เครื่องมือวัดจะเคลื่อนที่ในแนวดิ่งเท่านั้น และน้ำหนักของฐานมีค่าน้อยมาก ส่วนประกอบหลักของเครื่องมือก็คือ มวล m สปริง k และตัวหน่วงคงตัว c ถ้า x และ y เป็นการกระจัดสัมบูรณ์ ของฐานมวล m ตามลำดับ ผลต่างของการกระจัดระหว่างมวล m และ ฐาน คือ (y - x) = z ซึ่งจะเป็นค่าที่สามารถอ่านได้บนหน้าปัดของเครื่องมือวัดสมการการเคลื่อนที่ของเครื่องมือวัดในรูปที่ 2.23 คือ

$$m\ddot{y} = -k(y - x) - c(\dot{y} - \dot{x}) \qquad 2.60$$

แทน $y - x$ ด้วย z ดังนั้น

$$m(\ddot{z} + \ddot{x}) = -kz - c\dot{z}$$
$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{x} = m\omega_f^{\,2} X \sin \omega_f t \qquad 2.61$$

จะเห็นว่าด้านขวาของสมการที่ 2.47 คือแรงอันเนื่องจากการเคลื่อนที่ของฐาน และด้านซ้ายคือการเคลื่อนที่สัมพันธ์ของเครื่องมือ และการเคลื่อนที่ในภาวะคงที่ คือ

$$z = \frac{(m\omega_f^{\,2} X / k)\sin(\omega_f t - \psi)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$
$$z = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} X \sin(\omega_f t - \psi) \qquad 2.62$$

ซึ่ง $$\tan \psi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}, r = \frac{\omega_f}{\omega}, \omega = \sqrt{k / m} \qquad 2.63$$

นั้นคือสมการที่ 2.63 แสดงถึงความสัมพันธ์พื้นฐานของเครื่องมือวัดการสั่นสะเทือนของสิ่งที่ต้องการวัดหรือต้องการทราบก็คือ การกระจัด x ความเร็วและความเร่งของเครื่องจักรกล และ

เรียกเครื่องมือเหล่านั้นว่า *เครื่องมือวัดการสั่นไหว (vibrometer)* และเรียก *เครื่องมือวัดความเร็ว (velocity meter หรือ velometer)* และเรียก *เครื่องมือวัดความเร่ง (accelerometer)* หรือเรียกรวมๆ ว่า ***" vibration pickups"***

เราสามารถวัดหรือบังคับค่า z หรือ $\dot{z}$ ซึ่งเป็นการกระจัดหรือความเร็วสัมพันธ์ระหว่างฐานและเครื่องมือวัด และเรียกอุปกรณ์ดังกล่าวว่า *"displacement-sensitive vibration หรือ velocity-sensitive"* การกระจัดและความเร็วดังกล่าวอาจจะบันทึกด้วยวิธีทางกลหรือวิธีทางไฟฟ้า

2.3.2 เครื่องมือวัดการสั่นสะเทือน

จากสมการที่ 2.63 ถ้าให้

$$\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \approx 1 \qquad 2.64$$

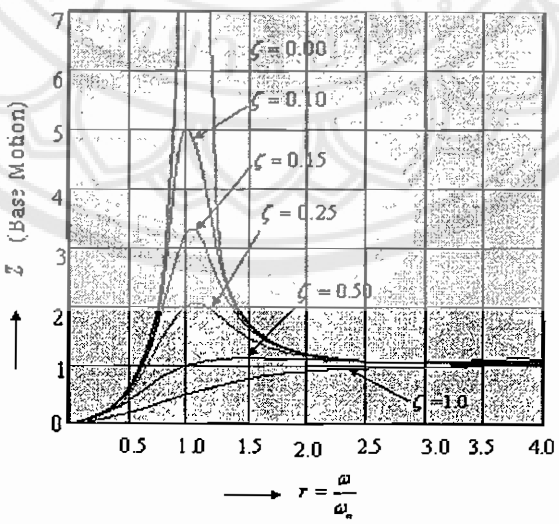
ดังนั้น

$$z = X\sin(\omega_f t-\psi) \qquad 2.65$$

ถ้าเปรียบเทียบสมการ 2.64 กับการเคลื่อนที่ของฐาน $x = X\sin\omega_f t$ จะเห็นว่า z ต่างจาก x ด้วยมุมเฟส ψ เท่านั้น ถ้าให้ t' เป็นเวลาที่การกระจัดของเครื่องมือเคลื่อนช้ากว่าฐานที่ยึดติดกับเครื่องจักรกล ดังนั้น

$$\omega_f t'-\psi = 0 \qquad t' = \psi/\omega_f \qquad 2.66$$

ถ้าเครื่องจักรกลสั่นสะเทือนแบบฮาร์มอนิกส์เดี่ยว เวลาที่ล่าช้าจะไม่มีผลต่อการกระจัด คือ z และ x จะเป็นค่าเดียวกัน



รูปที่ 2.24 การตอบสนองสัมพัทธ์เนื่องจากการสั่น

เพื่อให้เป็นไปตามที่สมสุติในสมการ ที่ 2.65 จะต้องมีค่ามากซึ่งจะสังเกตได้จากรูปที่ 2.24 และความถี่ธรรมชาติของเครื่องมือควรจะมีค่าต่ำ ส่วนค่าคงที่ของตัวหน่วง c หรือ ζ จะไม่มีผลต่อการสมมุติในสมการที่ 2.65 มากนัก แต่ที่ $\xi = 0.7$ (r ควรจะมีค่าตั้งแต่ 3 ขึ้นไป) จะทำให้เครื่องมือสั่นสะเทือนในช่วงภาวะคงที่เร็วขึ้น เนื่องจาก $\omega = \sqrt{k/m}$ ของเครื่องมือมีค่าคงตัว ดังนั้น ω_f และ r จะเป็นสัดส่วนกัน และช่วงการทำงานของหน้าปัดควรจะกำหนดในเทอมของ ω_f

2.3.3 เครื่องมือวัดความเร่ง

จากสมการที่ 2.63 เราสามารถจัดรูปสมการใหม่จะได้ดังนี้

$$-z\omega^2 = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\left[-X\omega_f^{\ 2}\sin(\omega_f t-\psi)\right] \qquad 2.67$$

และถ้าให้

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \approx 1 \qquad 2.68$$

ดังนั้น

$$-z\omega^2 \approx -X_f^2 \sin(\omega_f t-\psi) \qquad 2.69$$

ถ้าเปรียบเทียบสมการที่ 2.69 กับ $\ddot{x} = -X\omega_f^2 \sin\omega_f t$ จะเห็นว่าสมการทั้งสองต่างกันที่มุม ψ และความเร่งของฐาน $\ddot{x} = -z\omega^2$ เนื่องจาก $\omega^2 = k/m$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ของเครื่องมือวัด ดังนั้น $(-z\omega^2)$ จะเป็นค่าตรงข้ามที่เป็นสัดส่วนกับ z ที่วัดได้ ถ้าให้ t' เป็นเวลาที่การกระจัดของเครื่องมือเคลื่อนช้ากว่าฐานที่ยึดติดกับเครื่องจักรกล

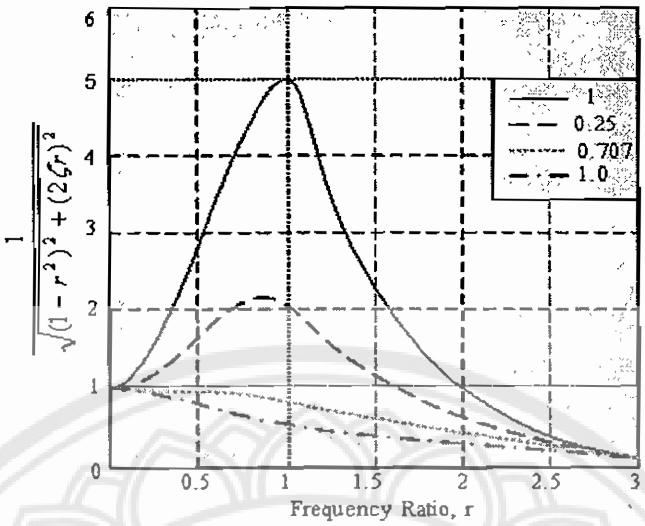
ดังนั้น

$$t' = \psi \ / \omega_t \qquad 2.70$$

ซึ่งจะไม่มีผลต่อค่าที่วัดได้ ถ้าการเคลื่อนที่ของเครื่องจักรกลเป็นแบบฮาร์มอนิกส์เดี่ยว

เพื่อให้เป็นไปตามที่สมมุติในสมการที่ 2.68 ในกรณีที่ $\zeta = 0.7$ ใน **รูปที่2.25** มีค่า r จะเป็นค่าอยู่ในช่วง 0 ถึง 0.6 และ r จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 0.3 ดังนั้นช่วงของเครื่องมือวัดจะจำกัดและช่วงการใช้งานจะขึ้นอยู่กับ ω_f เนื่องจากการทำงานของเครื่องมือใกล้กับ r = 1 จึงจำเป็นต้อง

เลือก ζ ให้เหมาะสม โดยทั่วๆไป จะเลือกใช้ ζ ที่มีค่าประมาณ 0.7 เนื่องจาก r มีค่าน้อย ดังนั้น ω จึงต้องมีค่ามาก หรือความถี่ธรรมชาติของเครื่องมือจะมีค่าสูงการกระจัด z จะมีค่าน้อย ดังนั้นจึงนิยมใช้อุปกรณ์ด้านทางไฟฟ้าวัดค่า z มากกว่าอุปกรณ์ทางกล



รูปที่ 2.25 กราฟแสดงผลการตอบสนองของขนาดการสั่นเทียบกับค่าความถี่ของแรงกระทำ

2.3.4 เครื่องมือวัดความเร็ว

จากสมการ 2.63 ความเร็วที่ได้คือ

$$z = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} X\omega_f \cos(\omega_f t - \psi) \qquad 2.71$$

และถ้าให้

$$\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \approx 1 \qquad 2.72$$

ดังนั้น

$$\dot{z} = X\omega_f \cos(\omega_f - \psi) \qquad 2.73$$

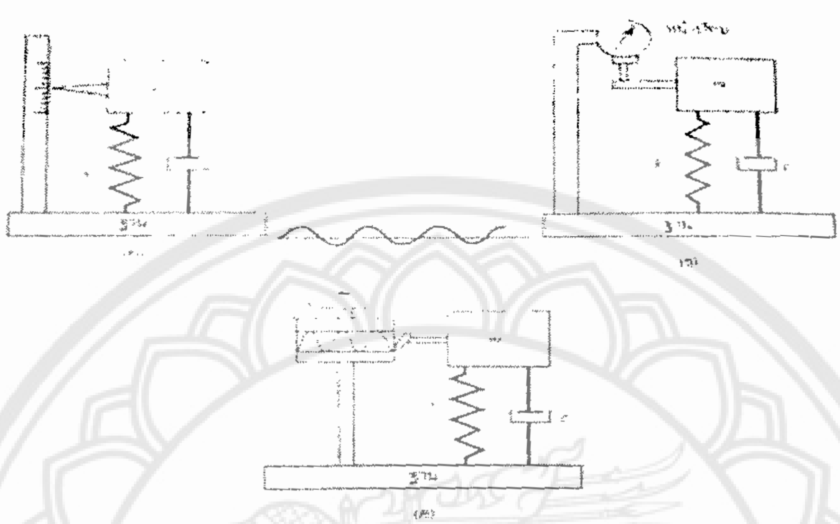
เนื่องจาก $\dot{x} = X\omega_f \cos\omega_f t$ ซึ่งต่างจากสมการที่ 2.73 เฉพาะมุมเฟส ψ เท่านั้น เครื่องมือจึงมีลักษณะคล้ายกับเครื่องมือวัดการสั่นสะเทือนในหัวข้อที่กล่าวมาแล้วคือ สามารถวัดความเร็วของเครื่องจักรได้โดยตรงด้วยค่า $\dot{z}$ ของเครื่องมือ

2.3.5 เครื่องมือวัดชนิดต่างๆ

เครื่องมือวัดตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ค่าที่ได้จะสัมพันธ์กับมวลของเครื่องมือ ซึ่งเป็นค่าที่อ่านหรือบันทึกโดยตรงหรืออาจจะเปลี่ยนเป็นสัญญาณอื่น เช่น สัญญาณไฟฟ้า เป็นต้น อุปกรณ์ตัวเปลี่ยนสัญญาณดังกล่าว เรียกว่า ทรานส์ดิวเซอร์ (transducers) ค่าที่อ่านได้จากตัวเปลี่ยนสัญญาณอาจจะเป็นหนึ่งเท่าหรือสองเท่าของค่าจริงของระบบหรืออาจจะเป็นรูปของคลื่น

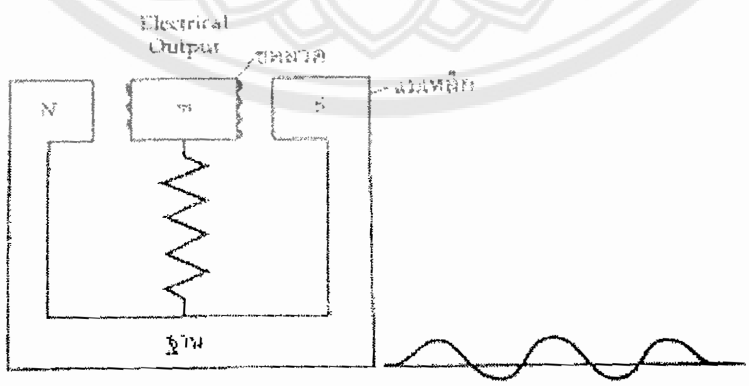
รูปที่2.26(ก) และรูปที่ 2.26(ข) เป็นเครื่องมือวัดที่อ่านหรือบันทึกค่าโดยตรงดังรูปที่ 2.26(ค) จะมีเหล็กแหลมติดอยู่ที่มวล เพื่อบันทึกการสั่นสะเทือนลงในกระดาษ ซึ่งหมุนรอบตัวเองด้วย

ความเร็วคงที่ เครื่องมือทั้งสามเครื่องเป็นเครื่องมือวัดการสั่นสะเทือน แต่อาจจะวัดความเร่งได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของหน้าปัด ความถี่ธรรมชาติ และตัวหน่วงตามที่กล่าวมาแล้ว



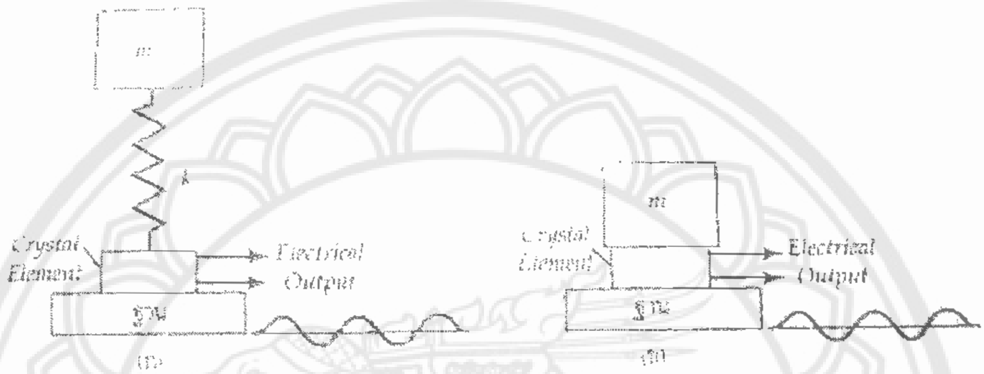
รูปที่ 2.26 เครื่องมือวัดชนิดต่างๆ

เครื่องมือวัดที่อ่านหรือบันทึกค่าโดยวิธีกลนั้นจะมีขนาดใหญ่ และค่าที่ได้อาจจะไม่ถูกต้อง จึงมักนิยมเปลี่ยนค่าที่อ่านได้เป็นสัญญาณไฟฟ้า ซึ่งจะทำให้ขนาดของเครื่องมือวัดมีขนาดเล็กลง ใช้สะดวกและมีความถูกต้องมากขึ้น เครื่องมือวัดความเร็วในรูปที่ 2.27 ประกอบด้วยแม่เหล็กถาวรยึดแน่นติดกับฐาน และมีขดลวดต่อคอยู่ที่มวล ขณะที่ขดลวดเคลื่อนที่เส้นฟลักซ์ของแม่เหล็กจะถูกตัด ทำให้เกิดแรงดันไฟฟ้าในขดลวด ซึ่งจะเป็นสัดส่วนกับความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างมวลและฐาน



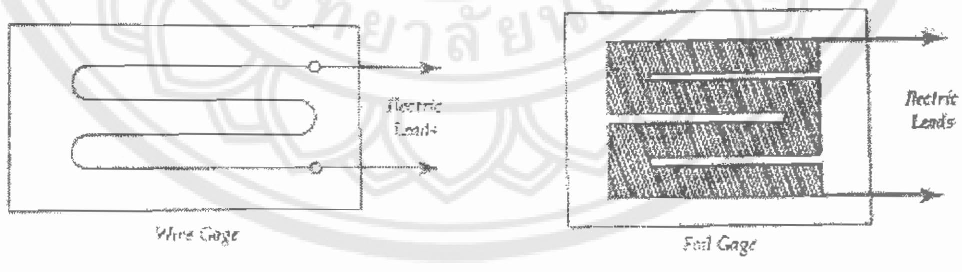
รูปที่ 2.27 เครื่องมือวัดประกอบด้วยแม่เหล็กถาวร

เครื่องมือวัดการสั่นสะเทือนในรูปที่ 2.28 ใช้หลักการของ piezo electric ซึ่งทำให้เกิดสัญญาณทางไฟฟ้า ขณะที่ผลัก quarty และ barium titanate ถูกเปลี่ยนมิติ จะเกิดการต่างศักย์ทางไฟฟ้าขึ้น ความดันไฟฟ้าจะเป็นสัดส่วนกับแรงหรือความดันที่เกิดขึ้นบนผลึกในรูปที่ 2.28(ก) แรงบนผลึกจะเท่ากับ kz และความดันไฟฟ้าจะขึ้นอยู่กับ z ผลึกอาจจะทำหน้าที่คล้ายสปริงและตัวรับสัญญาณด้วย เช่น ในรูปที่ 2.28(ข)



รูปที่ 2.28 แสดงการสั่นสะเทือนเมื่อรับสัญญาณทางไฟฟ้า

Stain gages เป็นอุปกรณ์อีกชนิดหนึ่งที่นิยมใช้วัดสัญญาณการสั่นสะเทือนของเครื่องมือ ลักษณะของ stain gages จะเห็นได้จากรูปที่ 2.29 ซึ่งเป็นลักษณะของ wire และ foil ตามลำดับ การเปลี่ยนแปลขนาดความยาวของ stain gages จะทำให้เกิดการต้านทานทางไฟฟ้า และทำให้ความดันไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงด้วย ซึ่งสามารถทำให้วัดการสั่นสะเทือนได้

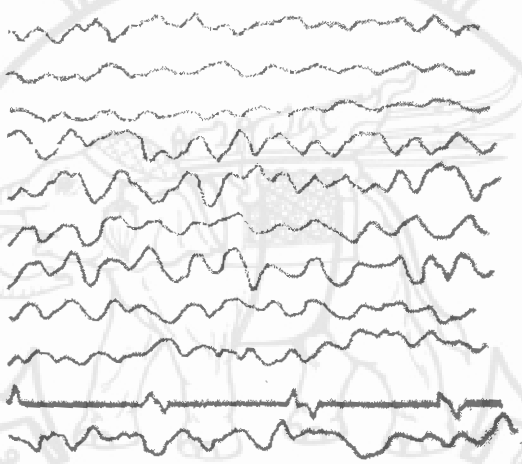


รูปที่2.29 ลักษณะของ wire และ foil

นอกจากเครื่องมือวัดการสั่นสะเทือนตามที่กล่าวมาแล้ว ยังมีเครื่องมือวัดการสั่นสะเทือนเนื่องจากการบิด ส่วนประกอบของเครื่องมือก็คล้ายกันคือ ประกอบด้วยมวลความเฉื่อยของจานหมุน สปริงที่รับแรงบิด หรือเพลา ส่วนวิธีการวัดหรือการบันทึกจะมีลักษณะเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว

2.3.6 การบันทึกสัญญาณและการวิเคราะห์

สัญญาณที่ได้จากเครื่องวัดการสั่นสะเทือนสามารถจะบันทึกได้อย่างต่อเนื่อง การทดลองสำรวจหาการสั่นสะเทือนของเครื่องจักรกล และโครงสร้างนั้นกระทำอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการทดสอบเครื่องบินที่สร้างใหม่ การบันทึกสัญญาณอาจจะกระทำหลายๆจุดในเวลาเดียวกัน เช่นในรูปที่ 2.30 จำนวนและความยาวของสัญญาณในลักษณะของคลื่น (wave forms) อาจจะมีจำนวนมาก ลักษณะของสัญญาณเหล่านี้จะเป็นตัวบอกลักษณะของการสั่นสะเทือนของระบบ เช่น สามารถหาความถี่ และขนาดของการสั่นสะเทือนสูงสุด เป็นต้น



รูปที่ 2.30 จำนวนและความยาวของสัญญาณ