บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

ในการออกแบบชิ้นส่วนทางวิศวกรรม จำเป็นต้องรู้ขีดความสามารถในการรับภาระของชิ้นส่วนนั้นๆ หากรูปทรงของชิ้นส่วนไม่ซับซ้อน ก็สามารถคำนวณหาคำตอบที่แน่แท้ได้ แต่ถ้ารูปทรงของชิ้นส่วนซับซ้อนจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการหาผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เนื่องจากโครงสร้างรถ TSAE Student Formula รุ่น ลูกชินราช เทียบได้กับโครงถักสามมิติ ดังนั้นทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์หาภาระสถิต (Static analysis) ความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ที่เกิดขึ้นกับตัวโครงสร้างรถลูกชินราช อันเนื่องมาจากน้ำหนักคนขับ เครื่องยนต์ หม้อน้ำ และน้ำหนักจากตัวถัง รวมไปถึงการเลือกใช้ขนาดของวัสดุที่จะนำมาใช้ทำโครงสร้างมีดังต่อไปนี้

1. ทฤษฎีการวิเคราะห์แรงภายในโครงสร้าง
    - การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีวิเคราะห์ข้อต่อ (Method of joint)
    - การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีภาคตัด (Method of section)
2. ทฤษฎีทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการคำนวณโครงถักสามมิติ
3. ทฤษฎีการวิเคราะห์ความเสียหายจากภาระสถิต

2.1 การวิเคราะห์แรงภายในโครงสร้าง [1]

จากปัญหาเกี่ยวกับสภาวะสมดุลของโครงสร้างที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายๆชิ้นส่วนที่ได้รับการต่อเข้าด้วยกัน การศึกษาเกี่ยวกับภาวะสมดุลของโครงสร้างเหล่านี้ไม่เพียงแต่จะเป็นการพิจารณาถึงแรงภายนอกที่กระทำบนโครงสร้างเท่านั้น ยังรวมถึงการพิจารณาแรงภายในซึ่งยึดส่วนต่างๆ ของโครงสร้างเข้าด้วยกัน ซึ่งวิธีการวิเคราะห์แรงภายในที่ใช้มีดังต่อไปนี้

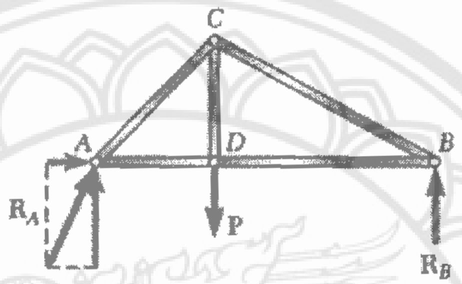
2.1.1 การวิเคราะห์ด้วยวิธีวิเคราะห์ข้อต่อ (Method of joint)

โดยทั่วไปในการวิเคราะห์โครงสร้างจะวิเคราะห์ภายใต้สมมุติฐานที่ว่าชิ้นส่วนทุกชิ้นรับแรงเพียง 2 แรง ที่อยู่ในแนวเดียวกัน ขนาดเท่ากัน ทิศทางตรงกันข้าม (Two-force member) และจุดเชื่อมต่อของโครงถักถือว่าเป็นสลักหรือหมุด (Pin) ทั้งหมดโดยไม่คิดน้ำหนักของชิ้นส่วนแต่ละชิ้น การวิเคราะห์โครงถักด้วยวิธีวิเคราะห์ข้อต่อ (Method of joint) เพื่อหาแรงที่ต้องการทราบทำได้โดยการหาแรงปฏิกิริยาที่ส่วนรองรับต่างๆ โดยเขียนแผนผังวัตถุอิสระของโครงถักรวมดังแสดงในรูป

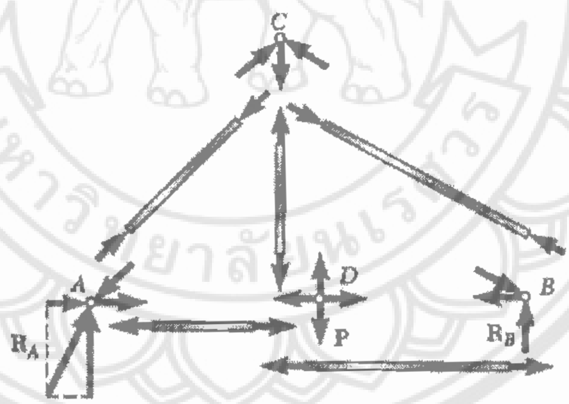
2.1.ก แล้วใช้สมการสมดุลหาแรงที่จุดรองรับ $\Sigma M = 0$ จะได้แรง R จากนั้นเขียนแผนผังวัตถุอิสระแต่ละข้อต่อ ซึ่งจะแสดงถึงแรงทั้งหมดที่กระทำกับข้อต่อ โดยทิศทางของแรงจะอยู่ตามแนวความยาวของชิ้นส่วนดังแสดงในรูป 2.1.ข ใช้สมการสมดุลในแนวแกน x และ y ในการพิจารณาหาแรง

$$\Sigma F_x = 0 \tag{2.1}$$

$$\Sigma F_y = 0 \tag{2.2}$$



(ก)

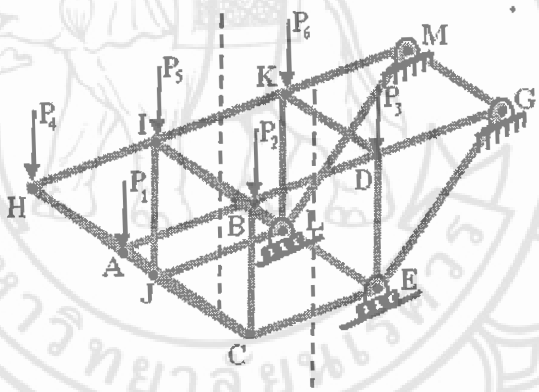


(ข)

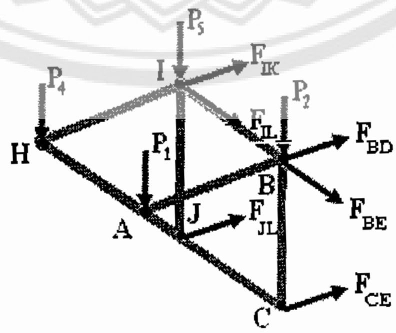
รูปที่ 2.1 การเขียนแผนผังวัตถุอิสระสำหรับวิธี Method of joint [1]

2.1.2 การวิเคราะห์ด้วยวิธีภาคตัด (Method of section)

การวิเคราะห์โครงถักด้วยวิธีวิเคราะห์ข้อต่อ (Method of joint) นั้นมีประโยชน์มากเมื่อต้องทราบแรงในทุกชิ้นส่วนของโครงถัก แต่ถ้าต้องการหาแรงเพียงบางชิ้นส่วน การวิเคราะห์โครงถักวิธีวิเคราะห์ข้อต่อ (Method of joint) อาจไม่เหมาะสมเพราะจะต้องเสียเวลามากจึงสามารถหาแรงในชิ้นส่วนที่ต้องการได้ และยังมีการวิเคราะห์โครงสร้างอีกแบบหนึ่งซึ่งเหมาะที่จะใช้สำหรับการหาแรงในบางชิ้นส่วนซึ่งเรียกว่า การวิเคราะห์ด้วยวิธีภาคตัด (Method of section) ซึ่งจะใช้สมการสมดุล $\Sigma M = 0$ รวมทั้งสมการสมดุลตามแนวแกน x และ y เพื่อใช้ในการพิจารณาหาแรง โดยเริ่มจากการเขียนแผนผังวัตถุอิสระของโครงถักรวม เพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับดังแสดงในรูปที่ 2.2.ก จากนั้นเลือกตัดโครงถักผ่านชิ้นส่วนที่เราต้องการทราบแรงเขียนแผนผังแสดงแนวของแรงภายในวัตถุดังรูป 2.2.ข และทำการพิจารณาหาแรงโดยใช้สมการสภาวะสมดุล เพื่อหาแรงดึงและแรงอัดในแต่ละNode เมื่อทำการคำนวณเสร็จผลลัพธ์ที่ได้ออกมาเป็นบวก (+) แสดงว่าเป็นแรงดึงในทางกลับกันผลลัพธ์ที่ได้เป็นลบ (-) แสดงว่าเป็นแรงอัด



(ก)



(ข)

รูป 2.2 การเขียนแผนผังวัตถุอิสระสำหรับวิธี Method of section

2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการคำนวณโครงถักสามมิติ [2]

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้เริ่มพัฒนาจากการแก้ปัญหาทางด้านของแข็งโดยสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จากวิธีการหาค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม ที่เกิดขึ้นมาจากแรงภายนอกที่มากระทำ ในการใช้วิธีดังกล่าว จะสมมุติลักษณะการกระจายของการเคลื่อนตัว ซึ่งเป็นตัวแปรหนึ่งบนเอลิเมนต์ แล้วจึงทำการแก้ปัญหาเพื่อหาผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัว ณ จุดต่อต่างๆ และจากนั้นจึงทำการคำนวณหาค่าความเค้นและความเครียด

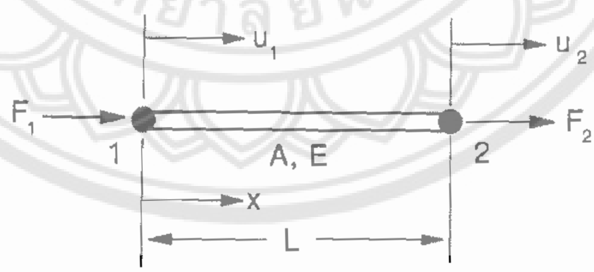
2.2.1 หาเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง (Stiffness Matrix) และสมการสทิฟเนส

ในกระบวนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกจากการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว การหาสทิฟเนสเมทริกซ์จะถือว่าเป็นสิ่งสำคัญที่สุดในกระบวนการวิเคราะห์ ซึ่งสามารถหาได้หลายวิธี ได้แก่

- การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากวิธีการโดยตรง
- การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการแปรผัน
- วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์

2.2.1.1 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากวิธีการโดยตรง

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากวิธีการโดยตรงเริ่มต้นจากสมการความสัมพันธ์ของความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ที่เรียกกันว่ากฎของฮุค (Hooke's law) นั้นคือ



รูปที่ 2.3 ลักษณะเอลิเมนต์แบบอย่างสำหรับโครงสร้าง [2]

โดยแทนค่า σ ของความเค้นและ ε แทนค่าของความเครียด จากรูป 2.3 เราจับยึดที่จุดต่อ 1 และดึงที่จุดต่อ 2 ด้วยแรง F_2 สมการ $\sigma = E\varepsilon$ จะเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$\frac{F_2}{A} = E\left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) \tag{2.3}$$

$$F_2 = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) \tag{2.4}$$

$$-\frac{AE}{L}(u_1 - u_2) = F_2 \tag{2.5}$$

แต่ภายใต้ความสมดุล $\sum F_x = 0$

$$F_1 + F_2 = 0 \tag{2.6}$$

$$F_1 = -F_2 \tag{2.7}$$

$$F_1 = \frac{AE}{L}(u_1 - u_2) \tag{2.8}$$

นั้นคือสมการ (2.7) และ (2.8) สามารถนำมาเขียนด้วยกันได้ ดังนี้

$$\frac{AE}{L}(u_1 - u_2) = F_1 \tag{2.9}$$

$$-\frac{AE}{L}(u_1 - u_2) = F_2 \tag{2.10}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกได้

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{2.13}$$

ในที่นี้

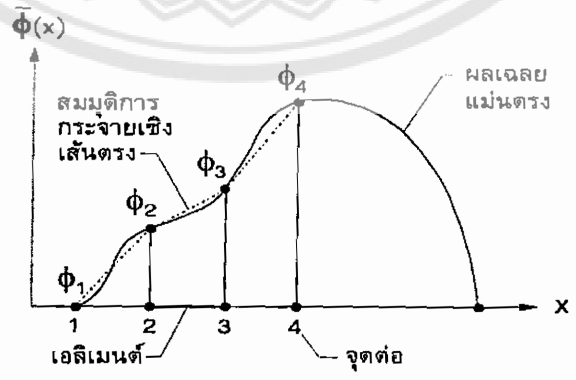
[K] เรียกว่า เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (Element stiffness matrix)

{u} เรียกว่า เมตริกซ์ของการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ (Vector of nodal displacements)

{F} เรียกว่า เมตริกซ์ของแรงกระทำที่จุดต่อ (Vector of nodal forces)

2.2.1.2 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการแปรผัน

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการแปรผัน เริ่มจากการสมมุติผลเฉลยโดยประมาณขึ้นมาซึ่งครอบคลุมทั้งขอบเขตปัญหาที่กำหนดมาให้ ในวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เราจะแบ่งขอบเขตออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งต่อกันเป็นจุดต่างๆ โดยค่าที่จุดต่อ Φ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ นั้นไม่รู้ค่าและต้องการหาการกระจายของผลเฉลยระหว่างจุดต่ออาจสมมุติให้อยู่ในรูปแบบง่ายๆ เช่น ในลักษณะเชิงเส้นตรง ดังแสดงในรูป 2.4

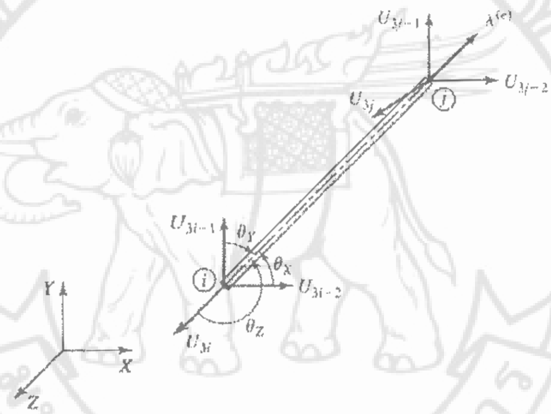


รูปที่ 2.4 การแบ่งขอบเขตออกเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์ [2]

2.2.1.3 วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง เป็นการสร้างสมการจากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง ไม่จำเป็นต้องรู้ฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกัน นำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาทั่ว ๆไป เช่น ปัญหาทางด้านโครงสร้าง การถ่ายเทความร้อน และการไหล ฯลฯ ซึ่งในกระบวนการแก้ปัญหาก็สามารถทำได้โดยลำดับขั้นตอนเช่นเดียวกับวิธีโดยตรง และวิธีแปรผัน นับตั้งแต่ การรวมสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากเอลิเมนต์ย่อยขึ้นเป็นสมการระบบรวม แล้วกำหนดกฎเกณฑ์ขอบเขต และแก้สมการระบบรวม เพื่อหาผลลัพธ์ที่ต้องการ

2.2.2 ปัญหาโครงถัก 3 มิติ [3]



รูปที่ 2.5 Bar element in a 3-D global coordinate system [3]

สำหรับการวิเคราะห์แบบ (3-D) Trusses ในการหา Stiffness matrix [K] จะใช้วิธีการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการโดยตรง จากรูป 2.5 ท่อนเหล็กมีจุดปลายเชื่อมต่อกับโหนด i และ j ในรูปแบบสามมิติ ซึ่งแรงที่กระทำตามแนวแกนก็คือ

$$\lambda^{(e)} = \frac{1}{L}\left[\left(X_j - X_i\right)I + \left(Y_j - Y_i\right)J + \left(Z_j - Z_i\right)K\right] \tag{2.14}$$

หรือ

$$\lambda^{(e)} = \cos\theta_x I + \cos\theta_y J + \cos\theta_z K \tag{2.15}$$

เมื่อ $\lambda^{(e)}$ คือ แรงดึงที่กระทำกับจุดต่อ j

L คือ ความยาวของเอลิเมนต์

ดังนั้นจะได้ค่าการเคลื่อนตัวของแบบสามมิติดังนี้

$$u_1^{(e)} = U_1^{(e)}\cos\theta_x + U_2^{(e)}\cos\theta_y + U_3^{(e)}\cos\theta_z \tag{2.16}$$

$$u_2^{(e)} = U_4^{(e)}\cos\theta_x + U_5^{(e)}\cos\theta_y + U_6^{(e)}\cos\theta_z \tag{2.17}$$

เมื่อ $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}$ คือ ค่าการเคลื่อนตัวของจุด i และ j ใน global X, Y, Z
แทน 1 และ 4 ในแนวแกน x แทน 2 และ 5 ในแนวแกน y แทน 3 และ 6 ในแนวแกน z จะได้ดังสมการ 2.18

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \\ U_5^{(e)} \\ U_6^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$= [R]\{U^{(e)}\} \tag{2.18}$$

$U_1^{(e)}, U_2^{(e)}, \ldots, U_6^{(e)}$ คือ ค่าการเคลื่อนตัวของจุด i และ j ใน local x, y, z
เมื่อ [R] คือ Transformation matrix ซึ่งในการหา Stiffness matrix สามารถทำได้จาก

$$[K^{(e)}] = [R]^T \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} [R] \tag{2.19}$$

เมื่อ k_e คือ Equivalent stiffness

$[K^{(e)}]$ คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (Element stiffness matrix)

แทนค่าเมตริกซ์ [R] จะได้

$$\left[K^{(e)}\right]=k_e\begin{bmatrix} c_x^2 & c_xc_y & c_xc_z & -c_x^2 & -c_xc_y & -c_xc_z \\ c_xc_y & c_y^2 & c_yc_z & -c_xc_x & -c_y^2 & -c_yc_z \\ c_xc_z & c_yc_z & c_z^2 & -c_xc_z & -c_yc_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_xc_x & -c_xc_z & c_x^2 & c_xc_y & c_xc_z \\ -c_xc_y & -c_y^2 & -c_yc_z & c_xc_y & c_y^2 & c_yc_z \\ -c_xc_z & -c_yc_z & -c_z^2 & c_xc_z & c_yc_z & c_z^2 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} c_x &= \cos\theta_x \\ c_y &= \cos\theta_y \\ c_z &= \cos\theta_z \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.2.3 การรวมระบบสมการ [2]

หลังจากที่สร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้นมาแล้ว จำเป็นต้องนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์มารวมกันก่อให้เกิดระบบสมการใหญ่ ในรูปแบบดังนี้

$$[K]_{sys}\{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \tag{2.22}$$

การรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยขึ้นมาเป็นเมตริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ 2.22 สามารถทำได้โดย ทำการเขียนสมการของเอลิเมนต์ต่างๆ ออกมาโดยกำกับหมายเลขของแถวนอนและแถวตั้งให้ถูกต้อง และก็ทำการรวมเป็นระบบสมการใหญ่

2.2.4 การหาค่าการเคลื่อนตัว (Displacements) [2]

ค่าการเคลื่อนตัว (u) สามารถคำนวณได้เมื่อใส่สภาวะที่ขอบเข้าไปในสมการ 2.22 โดยที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13}\cdots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\cdots K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\cdots K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3}\cdots K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

ก่อนที่จะทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าการเคลื่อนตัว จำเป็นต้องทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการดังกล่าวก่อน จึงจะสามารถคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ

ต่างๆได้ เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตได้แล้วก็ทำการแก้ระบบสมการหาค่าการเคลื่อนตัว ซึ่งสามารถหาผลเฉลยสำหรับค่าการเสียรูปได้โดยวิธีต่างๆ เช่น Gauss's method เป็นต้น

2.2.5 หาค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในเอลิเมนต์ [4]

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นสิ่งที่จำเป็นในการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนั้นในการวิเคราะห์ความเค้นสำหรับปัญหาโครงถัก 3 มิติ จะทำโดยการหาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในแต่ละเอลิเมนต์ รวมถึงการหาขนาดของแรงที่กระทำแต่ละโหนด ดังนั้นสมการที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างเหล็กก็คือ

$$\sigma = \frac{E}{L}[R]\{U^{(e)}\} \tag{2.24}$$

หรือ

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -\cos\theta_x & -\cos\theta_y & -\cos\theta_z & \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \\ U_5^{(e)} \\ U_6^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

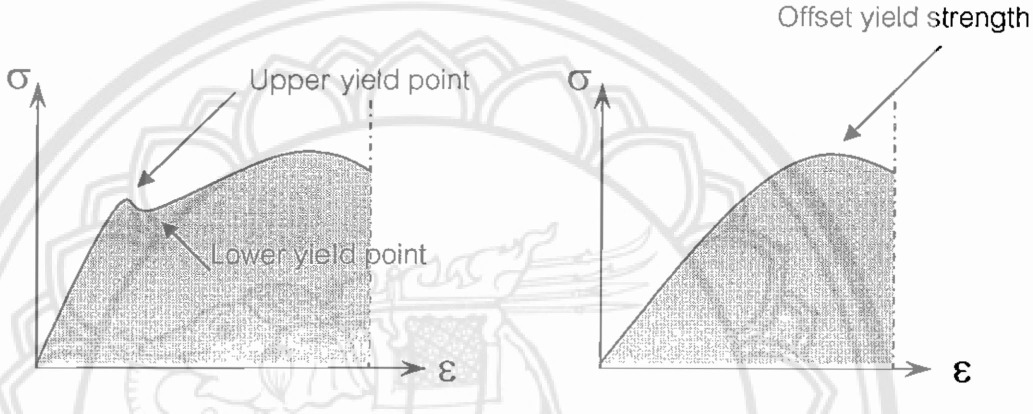
2.3 ทฤษฎีการวิเคราะห์ความเสียหายจากภาระสถิต [5]

ทฤษฎีความเสียหายได้มีการเขียนไว้เนื่องจากในการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม COMSOL Multiphysics™ ใน mode 3D-truss จะให้ค่า Axial stress ออกมา ซึ่งเมื่อชิ้นส่วนโครงสร้างมีค่าความเค้นเกิดขึ้น อาจทำให้เกิดความเสียหายได้ ดังนั้นเพื่อป้องกันความเสียหายที่จะเกิดขึ้น จึงต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าพลังงานของการเปลี่ยนรูป

ในการวิเคราะห์ความเสียหายจากภาระสถิต เมื่อชิ้นงานได้รับแรงมากจนเกิดการคราก ขึ้น มีรอยร้าว แตกหัก และเกิดการโก่งงอมากกว่าปกติจนเสียรูป จะเกิดการล้าจนหักพังในที่สุด ดังนั้นเพื่อป้องกันไม่ให้เกิดความเสียหายขึ้น ในการออกแบบจะต้องกำหนดค่าตัวแปรที่ใช้ออกแบบ เช่น แรง ความเค้น การยืดตัว และอื่นๆ ให้มีค่าต่ำกว่าค่าสูงสุดที่ได้จากการคำนวณ โดยอัตราส่วนของค่าสูงสุดที่ชิ้นงานสามารถรองรับได้ ต่อค่าในการออกแบบนี้ เรียกว่า แฟกเตอร์ในการออกแบบ หรือค่าความปลอดภัย ทฤษฎีที่ใช้เกี่ยวกับการรับภาระแบบสถิต หรือแรงคู่ควบซึ่งกระทำต่อชิ้นงานโดยมีค่าคงที่ ดังนั้น การออกแบบจึงจำเป็นต้องวิเคราะห์ค่าความเค้นเฉลี่ย เพื่อทำนายการเกิดค่าความเสียหาย ณ ตำแหน่งวิกฤติ เพื่อที่จะป้องกันไม่ให้เกิดความเสียหาย

วัสดุที่ถูกแรงกระทำแล้วเกิดความเครียดที่มีค่ามากๆก่อนเกิดการแตกหัก เรียกว่า "วัสดุเหนียว" จะมีค่า $\varepsilon_f \geq 0.05$ และมีค่าความต้านแรงครากอย่างชัดเจน ซึ่งมีค่าเดียวกันสำหรับการดึงและการอัด คือ ($S_{yt} = S_{yc} = S_y$)

วัสดุที่มีจุดครากต่ำมาก หรือไม่มีจุดครากก่อนเกิดการแตกหัก และ $\varepsilon_f < 0.05$ จะเรียกว่า "วัสดุเปราะ" ซึ่งสามารถแสดงกราฟค่าความเค้นที่เป็นความต้านแรงครากของวัสดุ"เปราะ" และวัสดุ "เหนียว"ได้ดังรูปที่ 2.6



วัสดุเหนียว วัสดุเปราะ

รูปที่ 2.6 กราฟแสดงค่าความเค้นที่เป็นความต้านแรงครากของวัสดุ "เหนียว" และวัสดุ "เปราะ" [5]

อัตราส่วนของค่าสูงสุดที่ชิ้นงานสามารถรองรับได้ต่อค่าที่ใช้ในการออกแบบ หรือค่าความปลอดภัย (n) สำหรับการออกแบบที่ใช้ความเค้นเป็นหลัก

$$\text{ค่าความปลอดภัย} \qquad n = \frac{\sigma_y}{\sigma_{max}} \tag{2.26}$$

2.3.1 หลักเกณฑ์ในการป้องกันความเสียหายที่อาจเกิดขึ้นกับชิ้นงานที่ออกแบบ

เนื่องจากวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างรถ TSAE Student Formula รุ่น ลูกชินราช เป็นเหล็กท่อกลมดำ จัดอยู่ในกลุ่มของเหล็กจำพวกวัสดุเหนียว ซึ่งมีหลักเกณฑ์ในการป้องกันความเสียหายที่อาจเกิดขึ้นกับชิ้นงานที่ออกแบบดังต่อไปนี้

2.3.1.1 ความเสียหายเนื่องจากการวิบัติ

ทฤษฎีนี้เกิดจากการสังเกตว่าวัสดุเหนียวจะเกิดการคราก เนื่องมาจากผลของการเลื่อน หรือเฉือนในระนาบของผลึก โดยทฤษฎีนี้กล่าวว่า "วัสดุจะเริ่มคราก" เมื่อความเค้นเฉือน

สูงสุดที่เกิดขึ้น มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับความเค้นเฉือนสูงสุดขณะที่เริ่มคราก ซึ่งมีการทดสอบด้วยการดึง

สำหรับการทดสอบแรงดึงอย่างง่าย $\sigma = P/A$ ความเค้นเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นบนระนาบที่ทำมุม 45 องศากับระนาบของการดึง โดยมีขนาด $\tau_{max} = \sigma/2$ ดังนั้น ความเค้นเฉือนสูงสุดที่จุดครากจึงมีค่า

$$\tau_{max} = S_y/2 \tag{2.27}$$

สำหรับสภาวะความเค้นใน 3 มิติ ความเค้นหลักในแต่ละระนาบจะมีขนาดเรียงตามลำดับคือ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ นั่นคือ ความเค้นสูงสุดจะมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \tag{2.28}$$

สำหรับสภาวะความเค้น โดยทั่วไปจะได้

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{S_y}{2} \quad \text{เมื่อ } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \tag{2.29}$$

$$\text{หรือ } \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y$$

ค่าความต้านแรงครากในการเฉือน $S_{sy} = 0.5S_y$

เพื่อวัตถุประสงค์ในการออกแบบเราสามารถปรับปรุงสมการที่ (2.29) ให้มีค่าแฟกเตอร์ในการออกแบบรวมอยู่ด้วย คือ

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n} \tag{2.30}$$

สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสามารถวิเคราะห์ โดยการกำหนดให้ความเค้นในระนาบใดระนาบหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ และทำการหาความเค้นหลักที่เหลือ σ_A และ σ_B

จากสมการ

$$\sigma' = \left(\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2\right)^{1/2} \tag{2.31}$$

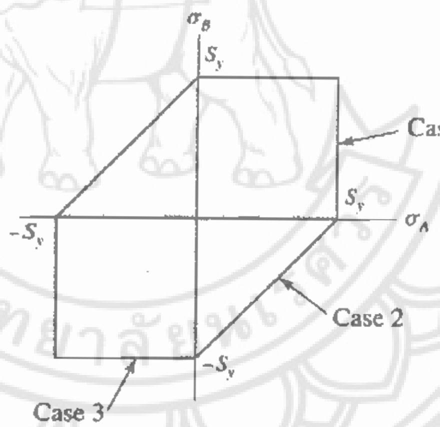
โดย $\sigma_A \geq \sigma_B$ ดังนั้น สำหรับความเค้นใน 3 มิติ การใช้สมการที่ (2.29) ในการพิจารณาความเค้นในระนาบจึงมี 3 กรณีที่จะต้องทำการพิจารณา

กรณีที่ 1 : $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$ สำหรับกรณีนี้ $\sigma_1 = \sigma_A$ และ $\sigma_3 = 0$ ดังนั้น เงื่อนไขของสมการที่ (1) จึงเป็น $\sigma_A = S_y$ (2.32)

กรณีที่ 2 : $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ สำหรับกรณีนี้ $\sigma_1 = \sigma_A$ และ $\sigma_3 = \sigma_B$ ดังนั้น เงื่อนไขของสมการที่ (1) จึงเป็น $\sigma_A - \sigma_B \geq S_y$ (2.33)

กรณีที่ 3 : $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ สำหรับกรณีนี้ $\sigma_1 = 0$ และ $\sigma_3 = \sigma_B$ ดังนั้น เงื่อนไขของสมการที่ (1) จึงเป็น $\sigma_A \geq -S_y$ (2.34)

สมการที่ (2) ถึง (4) แสดงให้เห็นโดยเส้น 3 เส้นในระนาบ σ_A, σ_B ตามรูปที่ 2.7 สำหรับเส้นที่เหลือซึ่งไม่มีเครื่องหมายแสดงไว้เป็นกรณีที่ $\sigma_B \geq \sigma_B$ ซึ่งจะไม่ถูกนำมาใช้ตามปกติ ส่วนการแปลงสมการที่ (2) ถึง (4) ให้เป็นสมการที่ใช้ในการออกแบบ แค่เพียงแทนค่า S_y ด้วย S_y / n

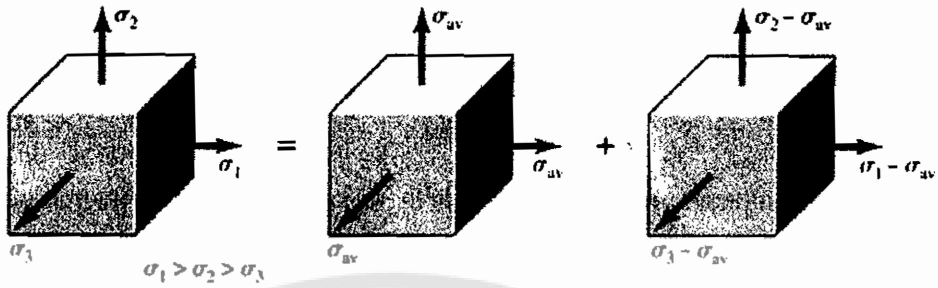


รูปที่ 2.7 แสดงเส้นในระนาบ σ_A, σ_B [5]

2.3.1.2 ทฤษฎีพลังงานของการเสียรูป (Distortion Energy-DE)

ทฤษฎีพลังงานของการเปลี่ยนรูป นี้เกิดจากการสังเกตพลังงานที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุเหนียว โดยทฤษฎีนี้กล่าวว่า “วัสดุจะเริ่มคราก” เมื่อพลังงานของการเปลี่ยนรูปต่อหน่วยปริมาตรของชิ้นงานที่อยู่ภายใต้ความเค้นรวม มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับพลังงานของการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการครากที่เกิดขึ้นในการทดสอบด้วยการดึงอย่างง่าย

ในการพัฒนาสมการสำหรับทฤษฎีนี้ ให้พิจารณาพลังงานของการเปลี่ยนรูปในชิ้นส่วนรูปทรงสี่เหลี่ยมลูกบาศก์เล็กๆ ที่อยู่ภายใต้ความเค้นในสามมิติ σ_1, σ_2 และ σ_3 ดังรูป 2.8



รูปที่ 2.8 รูปทรงสี่เหลี่ยมลูกบาศก์เล็กๆ ที่อยู่ภายใต้ความเค้นในสามมิติ [5]

โดย
$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{2.35}$$

ดังนั้นชิ้นส่วนในรูป (b) จะมีปริมาตรเปลี่ยนแปลงไปโดยไม่มีการบิดเบือนรูปร่างเชิงมุม ถ้าเราถือว่า σ_{av} เป็นองประกอบของ σ_1, σ_2 และ σ_3 องค์ประกอบนี้ก็สามารถนำไปลบออกได้ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังรูป (c) เป็นองค์ประกอบที่อยู่ภายใต้การบิดเบือนรูปร่างเชิงมุมโดยที่ปริมาตรไม่มีการเปลี่ยนแปลง

พลังงานความเครียดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรภายใต้ความเค้นใน 3 มิติคือ

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2 + \varepsilon_3\sigma_3)$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2v(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \tag{2.36}$$

พลังงานความเครียดที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเฉพาะปริมาตร u_v จึงหาได้โดยแทนค่า σ_{av} สำหรับ σ_1, σ_2 และ σ_3 ในสมการ (2.36) จะได้

$$u_v = \frac{3\sigma_{av}^2}{2E}(1-2v) \tag{2.37}$$

ถ้าแทนค่าสมการ (2.36) ยกกำลังสอง ลงในสมการ (2.37) และจัดให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่าย จะได้

$$u_v = \frac{1-2v}{6E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1\right] \tag{2.38}$$

ดังนั้นจะสามารถหาพลังงานของการเปลี่ยนรูปได้จากการนำสมการที่ (2.38) ไปลบออกจากสมการ (2.39) จะได้

$$u_d = u - u_v = \frac{1-v}{3E}\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right] \tag{2.39}$$

ให้สังเกตว่าพลังงานของการเปลี่ยนรูปจะมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

สำหรับการทดสอบแรงดึงอย่างง่าย ที่จุดคราก $\sigma_1 = S_y$ และ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ดังนั้นพลังงานของการเปลี่ยนรูปจะมีค่าเท่ากับ

$$u_d = \frac{1-v}{3E}S_y^2 \tag{2.40}$$

ดังนั้นสำหรับสภาวะความเค้นในสมการที่ (2.39) จะทำให้สามารถทำนายจุดครากของชิ้นงานได้ ถ้าสมการที่ (2.39) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสมการที่ (2.40) ซึ่งจะได้

$$\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \geq S_y \tag{2.41}$$

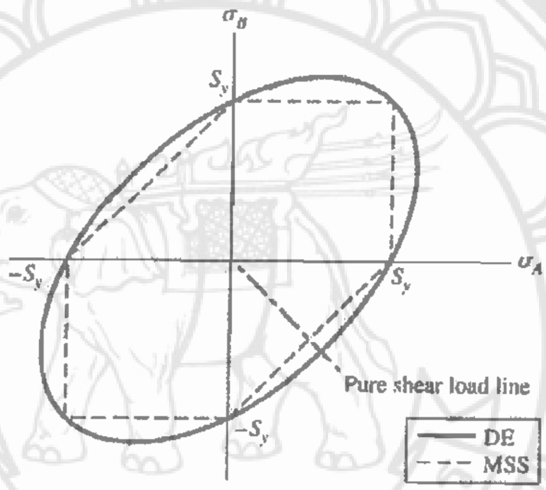
ในการทดสอบแรงดึงอย่างง่าย จะเกิดความเค้น σ การครากของชิ้นงานจะเกิดขึ้นเมื่อ $\sigma \geq S_y$ ดังนั้น เทอมทางซ้ายมือของสมการที่ (2.41) จะเป็นค่าความเค้นที่มีผลต่อพลังงานของการเปลี่ยนรูป (Effective Stress) ซึ่งนิยมเรียกว่า “Von Mises Stress” ตามชื่อของผู้คิดค้นทฤษฎีนี้ โดยใช้สัญลักษณ์ σ' ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการที่ (2.41) ได้เป็น $\sigma' \geq S_y$

เมื่อ $$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \tag{2.42}$$

สำหรับความเค้นในระนาบกำหนดให้ σ_A และ σ_B เป็นความเค้นหลักซึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\sigma' = \left(\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2\right)^{1/2} \tag{2.43}$$

สมการที่ (2.43) เป็นสมการของวงรีบนระนาบ $\sigma_A\sigma_B$ ดังแสดงตาม รูป 2.9 โดย $\sigma' = S_y$ เส้นประในรูปคือทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด (MSS) ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีขีดจำกัดมากกว่า



รูปที่ 2.9 วงรีบนระนาบ $\sigma_A\sigma_B$ [5]

การใช้องค์ประกอบของความเค้นในสามมิติ xyz จะสามารถเขียน Von mises stress ได้ดังนี้

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right]^{1/2} \tag{2.44}$$

ดังนั้น สำหรับความเค้นในระนาบ $\sigma_z = 0$

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \tau_{zx}^2\right)^{1/2} \tag{2.45}$$

2.4 การโก่งงอของเสา [6]

เนื่องจากแรงที่กระทำกับชิ้นส่วนโครงสร้างรถ TSAE Student Formula รุ่น ลูกชินราช ในบางชิ้นส่วนเป็นแรงกดตามแนวแกน ในทางทฤษฎี เมื่อเสาได้รับแรงกดมากขึ้นอาจทำให้เสาเกิดการโก่งงอ และถ้าลดขนาดของแรงกดลงแล้วเสากลับอยู่ในสภาพเหมือนเดิม เรียกสภาวะนี้ว่าเสถียร และแรงที่ทำให้เสาเกิดการโก่งงอ (bucking) เรียกว่า แรงวิกฤติ (bucking load) ดังนั้นแรงวิกฤติก็คือแรงที่น้อยที่สุดที่ทำให้เสาเกิดการโก่งงอโดยปกติแรงวิกฤติจะทำให้เกิดความเค้นในเสาซึ่งมีค่าน้อยกว่า proportional limit ของวัสดุที่ใช้เสมอ ดังนั้นเสาจะเสียหายก็ต่อเมื่อมีความเค้นภายในเสามีขนาดเกิน proportional limit ในการหาค่าแรงวิกฤติ (P_{cr}) ของเสาสามารถหาได้โดยใช้สูตรของออยเลอร์

การหาแรงวิกฤติของเสายาว จากการใช้สมการเชิงอนุพันธ์ของเส้นโค้งการยืดหยุ่นของคาน โดยให้สมมุติฐานเกี่ยวกับเสาที่จะคำนวณหาแรงวิกฤติคือ เสาทำต้องด้วยวัสดุที่มีเนื้อเดียวสม่ำเสมอ และมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากันตลอดความยาว นอกจากนี้ยังมีสมมุติฐานเพิ่มอีก 4 ประการคือ

1. จุดที่ปลายทั้งสองข้างของเสาเป็นการยึดแบบธรรมดา คือปลายด้านล้างยึดแบบฮินจ์ (hinge) ส่วนปลายด้านบนยึดแบบให้หมุนได้อย่างอิสระสามารถเคลื่อนที่ขึ้นลงได้ในแนวดิ่งเท่านั้น
2. เสาอยู่ในสภาพตรง และแรงภายนอกกระทำตามแนวแกน
3. ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นความเครียดเป็นไปตามกฎของ Hooke
4. สมมุติให้เสาโก่งเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ดังนั้นความโค้ง $\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}}\approx d^2y/dx^2$ ทั้งนี้เพราะ $(dy/dx)^2$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ 1

เนื่องจาก P_{cr} เป็นแรงที่น้อยที่สุดที่ทำให้เสาเกิดการโก่ง จึงสามารถหาได้จาก

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.46}$$

เมื่อแทนค่า I ด้วย Ar^2 เมื่อ A คือ พื้นที่หน้าตัด และ r เป็นรัศมีไจเรชัน ลงในสมการ 2.46 จะได้ว่า

$$\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}=\sigma_{cr} \tag{2.52}$$

โดยที่ σ_{cr} คือ ความเค้นวิกฤติ (Critical stress)

L คือ ความยาว

$\frac{L}{r}$ คือ อัตราส่วนความบอบบาง (Slenderness ratio)