บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

2.1 บทนำ

วิธีการที่นำมาใช้ในการเขียนโปรแกรมมี 2 วิธีการหลัก ๆ ดั้งนี้คือ

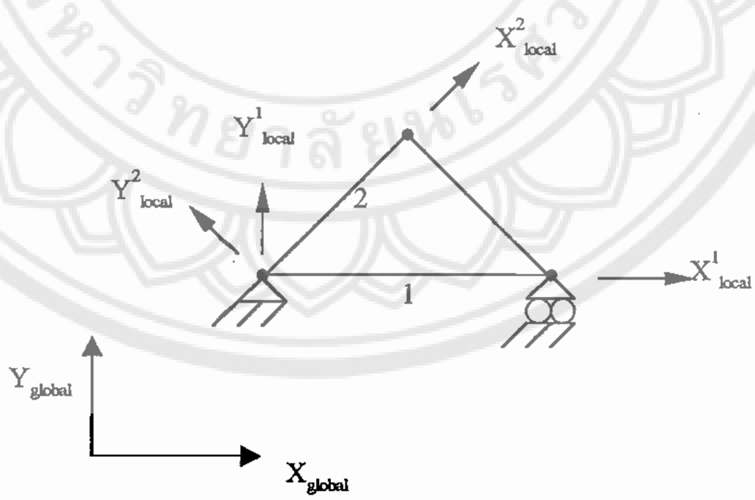
1 วิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง (The Direct Stiffness Method) เป็นวิธีการสังเคราะห์สติฟเนสของโครงสร้างทั้งระบบจากสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย โดยการเลือกระบบโคออร์ดิเนตที่เหมาะสมเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างใหญ่ๆ หรือโครงสร้างยุ่งยากโดยอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์

2 วิธีการแยกตัวประกอบสำหรับเมตริกซ์สมมาตร (Factorization Method for Symmetric Matrices) เพื่อนำมาแก้ระบบสมการเชิงเส้น ($K * u = P$) โดยเราเลือกใช้วิธีชอเลสกี้แบบประยุกต์ (modified cholesky method)

2.2 ระบบโคออร์ดิเนตสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีเมตริกซ์

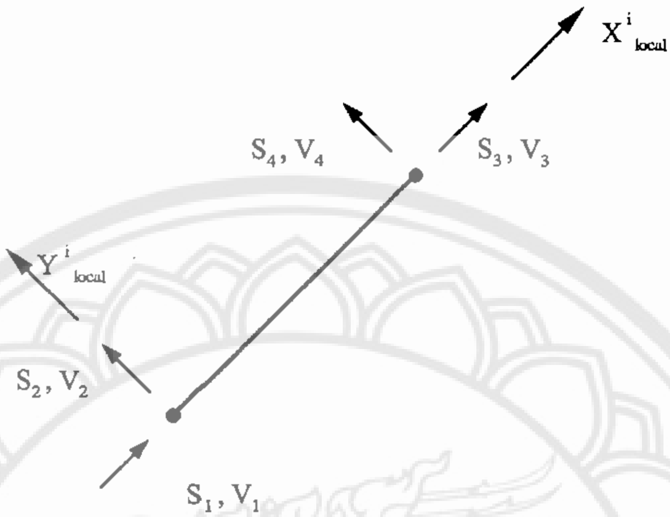
2.2.1ระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว (Local Coordinate System)

ระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว คือ ระบบที่มีแกนใดแกนหนึ่งผ่านแนวแกนของชิ้นส่วน ดังรูป 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว (X_{local}, Y_{local}) และระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล (X , Y)

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงที่ปลายชิ้นส่วน i ใด ๆ $\{ S_{local} \}^i$ กับการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายชิ้นส่วน $\{ V_{local} \}^i$ ซึ่งสอดคล้องกันดังแสดงในรูป 2.2 ดังนี้



รูป 2.2 แสดงแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนต ประจำตัว

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}^i$$

หรือแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\{ S_{local} \}^i = [K_{local}]^i \{ V_{local} \}^i \qquad (2.1)$$

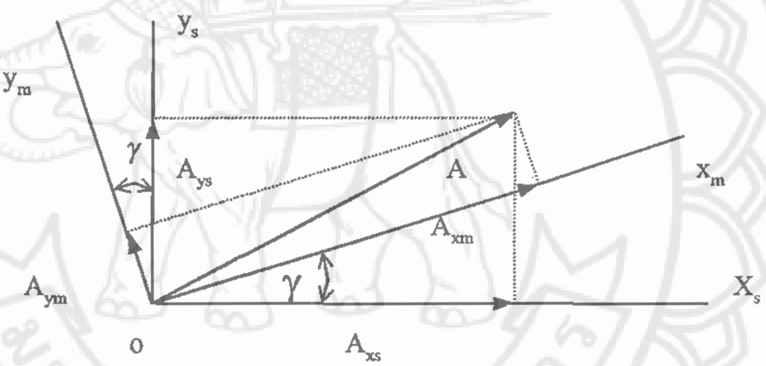
โดยที่

$$[K_{local}]^i = \frac{EA_x}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

พึงสังเกตว่า การใช้ระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว ทำให้สามารถเขียนสติฟเนสของชิ้นส่วนต่าง ๆ ในรูปแบบเดียวกัน โดยไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางของชิ้นส่วนนั้น ๆ ทำให้ง่ายต่อการสร้าง (generate) สติฟเนสเมตริกซ์ประจำตัว โดยใช้โปรแกรมซับรูทีนอันเดียวสำหรับชิ้นส่วนประเภทเดียวกัน

2.2.2ระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล (Global Coordinate System)

ระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล คือ การนิยามแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของแต่ละชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนตร่วมกัน เพราะว่าระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นหันในทิศทางต่าง ๆ กันทำให้ไม่สามารถรวมกันได้โดยตรงในการพิจารณาสมดุลย์ของข้อต่อ เพื่อให้สามารถทำการรวมเวคเตอร์ได้โดยตรง จำเป็นต้องนิยามแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของแต่ละชิ้นส่วนในระบบแกนร่วมกัน ในที่นี้ใช้ระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล ดังรูป



รูป 2.3 แสดงเวคเตอร์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบโคออร์ดิเนตที่ต่างกัน

$$\lambda_{11} = \cos\gamma$$

$$\lambda_{12} = \sin\gamma$$

$$\lambda_{21} = -\sin\gamma$$

$$\lambda_{22} = \cos\gamma$$

$$A_{xm} = \lambda_{11} A_{xs} + \lambda_{12} A_{ys}$$

$$A_{ym} = \lambda_{21} A_{xs} + \lambda_{22} A_{ys}$$

ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_x & C_y \\ -C_x & C_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \end{pmatrix}$$

หรือ $A_m = R_0 A_s$

$$\begin{pmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \end{pmatrix}$$

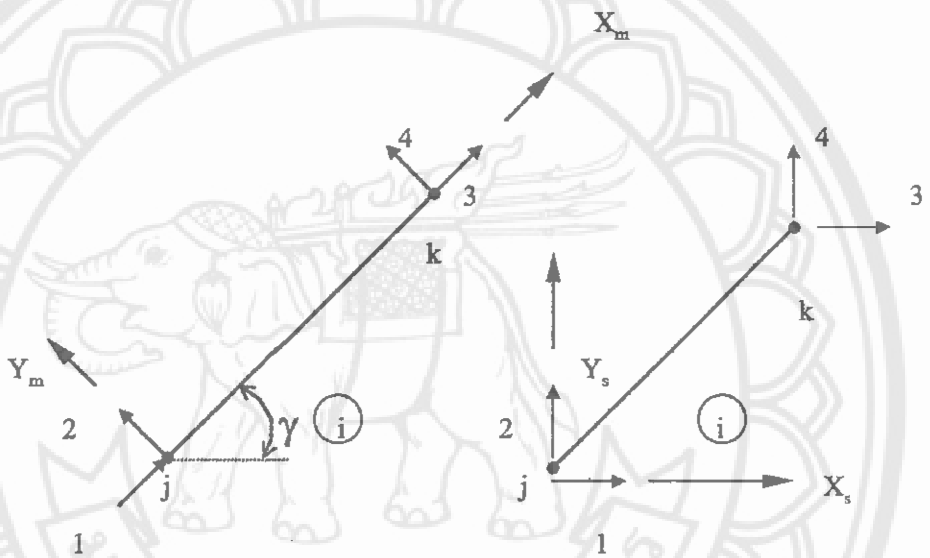
$$= \frac{1}{|R_0|} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \end{pmatrix}$$

หรือ $\mathbf{A_s = R_0^T A_m}$

$R_0^T = R_0^{-1} \longrightarrow$ Orthogonal matric

สำหรับโครงข้อหมุน 2 มิติ



ระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว ระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล

สำหรับโครงข้อหมุน 2 มิติ เมตริกซ์ R คือ

$$R = \begin{pmatrix} R_0 & \\ & R_0 \end{pmatrix}$$

$$S_{local} = k_{local}\, V_{local}$$

$$R\, S_{global} = k_{local}\, R\, V_{vlobal}$$

$$S_{global} = R^{-1}\, k_{local}\, R\, V_{global}$$

$$= R^{T}\, k_{local}\, R\, V_{global}$$

$$= K_{global}\ V_{global}$$

$$K_{global} = R^{T}\ k_{local}\ R \qquad (2.2)$$

= สติฟเนสเมตริกซ์ในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล

ดังนั้น สำหรับชิ้นส่วนรับแรงตามแนวแกน 2 มิติ ค่าสติฟเนสเมตริกซ์ในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัลสามารถหาได้เป็น

$$K^{l}_{global} = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_x^2 & C_xC_y & -C_x^2 & -C_xC_y \\ C_xC_y & C_y^2 & -C_xC_y & -C_y^2 \\ -C_x^2 & -C_xC_y & C_x^2 & C_xC_y \\ -C_xC_y & -C_y^2 & C_xC_y & C_y^2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \qquad (2.3)$$

2.3หลักการรวมสติฟเนสโดยตรง

โดยการสังเคราะห์สติฟเนสของโครงสร้างทั้งระบบจากการรวมโดยตรงของสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย ๆ และโดยการเลือกระบบโคออร์ดิเนตที่เหมาะสม ดังนั้นสติฟเนสของดครงสร้างทั้งระบบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$[K] = \sum_{l=1}^{m} [K_{global}]^{l}$$

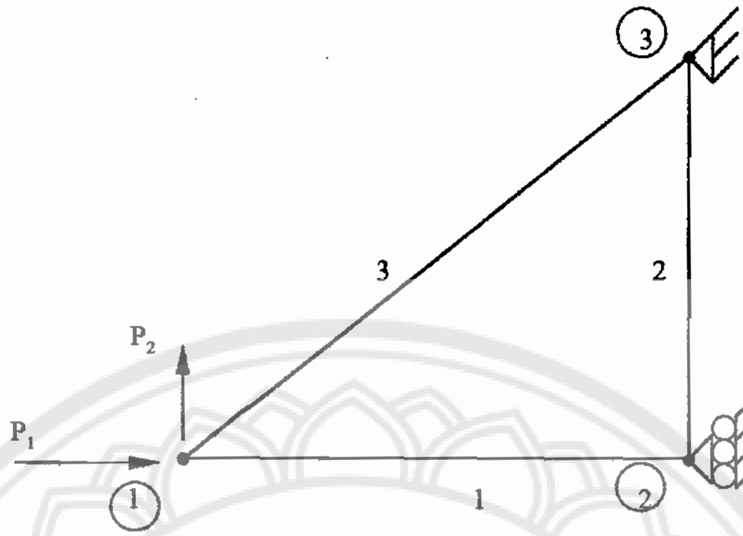
โดยที่

$[K]$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์ของทั้งโครงสร้างในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล

$\sum [K_{global}]^{l}$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์ของแต่ละชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล

m คือ จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดในโครงสร้าง

เพื่อให้เข้าใจวิธีการรวมสติฟเนสโดยตรงได้ง่ายขึ้นจะอธิบายหลักการโดยใช้ตัวอย่างของโครงข้อหมุนง่าย ๆ ดังแสดงในรูป 2.4



รูป 2.4 โครงข้อหมุน

ค่าสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนโครงข้อหมุนแต่ละชิ้นจากรูปจะสามารถหาได้จากสมการ 2.3 ดังนี้คือ

ชิ้นส่วนที่ 1

$$K^{1}_{global} = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$K^{2}_{global} = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 3

$$K^{3}_{global} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ในที่นี้เลขตัวพ่วงบนเมตริกซ์ K หมายถึง หมายเลขของชิ้นส่วน เมื่อพูดถึงสติฟเนสเมตริกซ์ นั้นคือเรากำลังหมายถึงความสัมพันธ์ของแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่งที่โดออร์ดิเนตของการเปลี่ยนตำแหน่งอิสระของชิ้นส่วน เช่น ชิ้นส่วนที่ 1 มี สติฟเนส K^1 หมายความว่า [S] และ [V] ของชิ้นส่วนที่ 1 สัมพันธ์กันโดย

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}^1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}^1 \qquad (2.4)$$

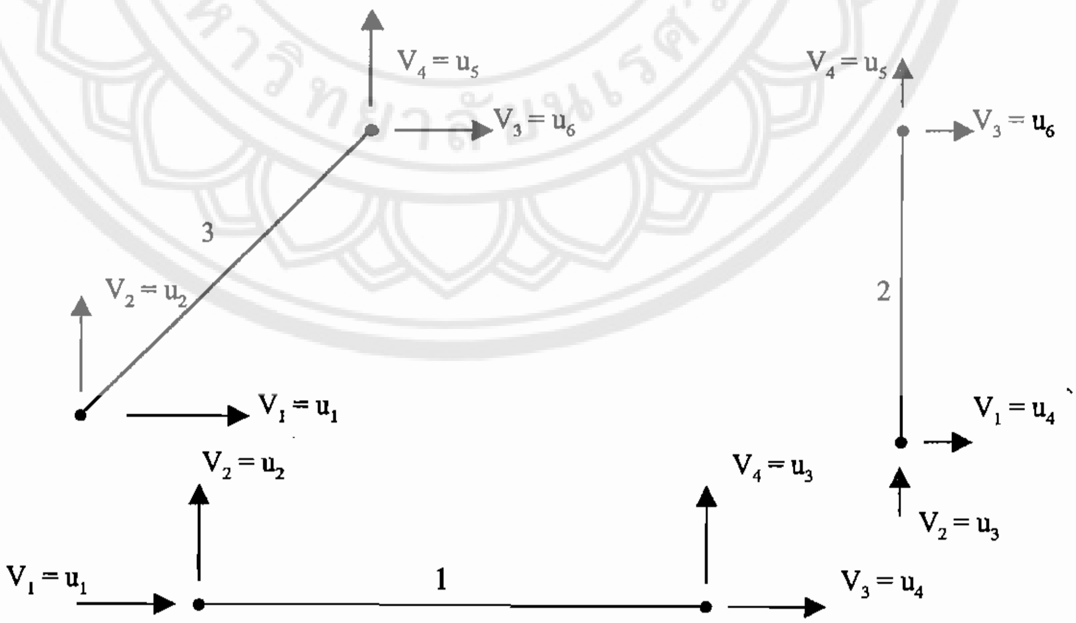
เป็นต้น

2.3.1 เงื่อนไขความต่อเนื่อง (Compatibility)

โดยพิจารณาสภาวะความต่อเนื่องของการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายชิ้นส่วนแต่ละชิ้นของข้อต่อพบว่า สำหรับชิ้นส่วนที่ 1 ของโครงข้อหมุนดังแสดงในรูป 2.4

$$\begin{aligned} V_1 &= u_1 \\ V_2 &= u_2 \\ V_3 &= u_3 \\ V_4 &= u_4 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

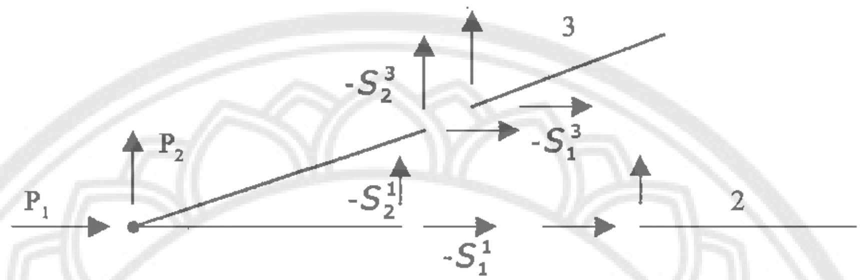
สำหรับสภาวะความต่อเนื่องของชิ้นส่วนอื่น แสดงไว้ในรูป 2.5



รูป 2.5 แสดงเงื่อนไขความต่อเนื่อง

2.3.2 สภาวะสมดุลย์ที่ข้อต่อ (Eguilibrium Condition at Joint)

พิจารณาฟรีบอดีของตัวอย่างโครงข้อหมุนข้างต้นดังแสดงในรูป 2.6 จากเงื่อนไขของการสมดุลย์ ผลบวก (Vector) ของแรงภายในของชิ้นส่วนต่าง ๆ ที่ต่อกับข้อต่อนั้น ต้องอยู่ในสมดุลย์กับแรงกระทำภายนอกที่ข้อต่อเดียวกัน



รูปที่ 2.6 สภาวะสมดุลย์ของข้อต่อ

$$\sum F_x = 0 ; P_1 + (-S_1^1 - S_1^3) = 0 \tag{2.6}$$

$$\sum F_y = 0 ; P_2 + (-S_2^1 - S_2^3) = 0 \tag{2.7}$$

จากสมการ 2.4 และ2.6 จะได้

$$P_1^E = (k_{11}^1 V_1^1 + k_{12}^1 V_2^1 + k_{13}^1 V_3^1 + k_{14}^1 V_4^1) + (k_{11}^3 V_1^3 + k_{12}^3 V_2^3 + k_{13}^3 V_3^3 + k_{14}^3 V_4^3)$$

จากเงื่อนไขความต่อเนื่อง (สมการ 2.5) จะได้

$$P_1^E = (k_{11}^1 u_1 + k_{12}^1 u_2 + k_{13}^1 u_4 + k_{14}^1 u_3) + (k_{11}^3 u_1 + k_{12}^3 u_2 + k_{13}^3 u_6 + k_{14}^3 u_5)$$

$$P_1^E = \{ k_{11}^1 + k_{11}^3 \quad k_{12}^1 + k_{12}^3 \quad k_{13}^1 + k_{13}^3 \quad k_{14}^1 + k_{14}^3 \} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}$$

ทำการคำนวณเช่นเดียวกับข้างต้น จนครบทุกข้อต่อจะได้ความสัมพันธ์ของแรงภายนอกกับการเปลี่ยนตำแหน่งของข้อต่อดังนี้

$$\begin{pmatrix} P_1^E \\ P_2^E \\ P_3^E \\ \hline P_4^E \\ P_5^E \\ P_6^E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_x^2 \\ R_y^3 \\ R_x^3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{array}\right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \hline U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} P^{EF} \\ P^{ES} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [0] \\ [R] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{rr} & K_{rx} \\ K_{xr} & K_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u] \\ [u^S] \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

<u>2.3.3 การคำนวณการเปลี่ยนตำแหน่งแรงปฏิกิริยาและแรงภายใน</u>

จากสมการ 2.8 เราสามารถนำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$[P] = [K_{rr}]^{-1}[u] + [K_{rx}][u^S] \qquad (2.9)$$

และสามารถแก้สมการเพื่อหาระยะเปลี่ยนตำแหน่งของข้อต่อ [u] ได้ดังนี้

$$[u] = [K_{rr}]^{-1}([P] - [K_{rx}][u^S]) \qquad (2.10)$$

สำหรับตัวอย่างที่กล่าวมาสามารถหาค่า [u] ได้ดังนี้

$$U_1 = \frac{L}{EA}(P_1 - P_2)$$

$$U_2 = \frac{L}{EA}\{-P_1 + (1+2\sqrt{2})P_2\}$$

$$U_3 = \frac{L}{EA}P_3$$

เมื่อทราบระยะเปลี่ยนตำแหน่งของข้อต่อ [u] เราสามารถหาค่าแรงภายในของชิ้นส่วนได้จากเงื่อนไขความต่อเนื่องและสมการ

$$[S] = [K][V]$$
$$= [K][a][V]$$
$$= [K][a][u]$$

ยกตัวอย่างชิ้นส่วนที่ 3

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \text{Cos } 45^\circ & \sin 45^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Cos } 45^\circ & \sin 45^\circ \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} P_2 \\ -P_2 \end{pmatrix}$$

2.4 วิธีแยกตัวประกอบสำหรับเมตริกซ์สมมาตร (Factorization Method for Symmetric Matrices)

งานทางด้านการคำนวณพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีเมตริกซ์ประกอบไปด้วยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นจำนวน n สมการที่มี n ตัวแปร มีวิธีการคำนวณหาค่าตัวแปรมากมายหลายวิธี หนึ่งในนั้นมีวิธีที่เรียกว่า วิธีแยกตัวประกอบ (factorization method) เนื่องจากสติฟเนสเมตริกซ์ของระบบโครงสร้างที่มีคุณสมบัติอิลาสติกเชิงเส้น (linearly elastic structures) เป็นเมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติสมมาตร ดังนั้นเราจึงสามารถใช้วิธีแยกตัวประกอบแบบพิเศษที่รู้จักกันคือ วิธีของชอเลสกี้แบบประยุกต์

เริ่มต้นด้วยการให้สัญลักษณ์ A แสดงถึงเมตริกซ์ที่มีขนาด n * n คุณสมบัติค่าบวก (positive definite) และสมมาตร เราสามารถเขียนเมตริกซ์ A ได้ในรูปผลคูณระหว่างเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) และเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) ดังนี้

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n1} & U_{n2} & U_{n3} & U_{n4} & \dots & U_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ 0 & 0 & U_{33} & \dots & U_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U_{nn} \end{pmatrix}
$$

หรืออยู่ในรูปสัญลักษณ์

$$[A] = [L]\,[U]$$

โดยที่ $[L] = [U]^T$

จากสมการ เราจะพบว่าสมาชิกของเมตริกซ์ [A] ประกอบด้วยผลคูณภายในระหว่างแถวของ [L] หรือ $[U]^T$ และคอลัมน์ของ [U] ซึ่งมีการคำนวณเสมือนว่าสมาชิกแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ A คือผลคูณระหว่างคอลัมน์ที่ 1 ของ [U] กับคอลัมน์อื่นนั้นคือ

$$A_{11} = U_{11}^2 \,;\, A_{12} = U_{11}U_{12} \,;\, A_{13} = U_{11}U_{13} \,;\, \dots \,;\, A_{1n} = U_{11}U_{1n}$$

ในทำนองเดียวกันผลคูณภายในของคอลัมน์ 2 ของ [U] กับคอลัมน์อื่น ๆ ภายใน [U] คือ

$$A_{22} = U_{12}^2 + U_{22}^2 \,;\, A_{23} = U_{12}U_{13} + U_{22}U_{23} \,;\, \dots \,;\, A_{2n} = U_{12}U_{1n} + U_{22}U_{2n}$$

สำหรับสมาชิกแถวที่ 3 ของ [A] คือ

$$A_{33} = U_{13}^2 + U_{23}^2 + U_{33}^2 \,;\, \dots \,;\, A_{3n} = U_{13}U_{1n} + U_{23}U_{2n} + U_{33}U_{3n}$$

ดังนั้นจากความสัมพันธ์ข้างต้นเราสามารถเขียนสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ [A] ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$A_{ii} = U_{1i}^2 + U_{2i}^2 + U_{3i}^2 + \dots + U_{ii}^2 \tag{2.14a}$$

หรือ

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^{i} U_{ki}^2 \qquad (i = j) \tag{2.14b}$$

ด้วยวิธีการเดียวกันสมาชิก A_{ij} ในตำแหน่งสามเหลี่ยมบนจะแสดงได้เป็น

$$A_{ij} = U_{1i}U_{1j} + U_{2i}U_{2j} + U_{3i}U_{3j} + \dots + U_{ii}U_{ij} \tag{2.15a}$$

หรือ

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{i} U_{ki}U_{kj} \qquad (i < j) \tag{2.15b}$$

แล้วสมาชิกของ U อาจหาได้โดยสมการ 2.14b และ 2.15b นำมาเรียงดังนี้

$$U_{ij} = \sqrt{\left(A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki}^2\right)} \qquad (1 < i = j) \tag{2.16}$$

$$U_{ij} = \left(\frac{1}{U}\right)\left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki}U_{kj}\right) \qquad (1 < i < j) \tag{2.17}$$

$$U_{ij} = 0 \qquad (i > j) \tag{2.18}$$

สมการนี้เรียกว่า Cholesky square root method โดยจะใช้ได้ก็ต่อเมื่อเป็นเมตริกซ์สมมาตรและมีค่าเป็นบวก (positive definite) เท่านั้น

แต่ถ้าเมตริกซ์ [A] ไม่มีคุณสมบัติเป็นบวก (positive definite) ในการแยกตัวประกอบจะแยกออกเป็นผลคูณของ 3 เมตริกซ์ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{U}_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{U}_{31} & \overline{U}_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{U}_{n1} & \overline{U}_{n2} & \overline{U}_{n3} & \overline{U}_{n4} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{U}_{12} & \overline{U}_{13} & \dots & \overline{U}_{1n} \\ 0 & 1 & \overline{U}_{23} & \dots & \overline{U}_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \overline{U}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

หรือแทนด้วยสัญลักษณ์

$$[A] = [\overline{U}]^T [D] [\overline{U}] \tag{2.20}$$

โดยที่สัญลักษณ์ [D] แสดงถึงเมตริกซ์ทแยงมุมและสมาชิกเป็นค่ากำลังสองของสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมตริกซ์ [U] (สมการ (2.16)) นั้นคือ

$$D_{ii} = U^2_{ii} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.21)$$

จากสมการที่ (2.19) จะพบว่า

$$A_{11} = D_{11} \qquad (2.22)$$

และสมาชิกในแนวทแยงมุมในเมตริกซ์ [A] สามารถเขียนได้เป็น

$$A_{ii} = D_{11}\overline{U}^2_{1i} + D_{22}\overline{U}^2_{2i} + D_{33}\overline{U}^2_{3i} + \ldots + D_{ii}$$

หรือ

$$A_{ii} = D_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}^2_{ki} \qquad (1 < i = j) \qquad (2.23)$$

ด้วยวิธีการเดียวกัน สมาชิกในแถว 1 ของ A คือ

$$A_{1j} = D_{11}\overline{U}_{1j} \qquad (2.24)$$

และในแถวอื่น ๆ คือ

$$A_{ij} = D_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}_{ki}\overline{U}_{kj} \qquad (1 < i < j) \qquad (2.25)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.23) , (2.24) และ (2.25) สมาชิกของเมตริกซ์ [D] และ [$\overline{U}$] สามารถเขียนได้ดังนี้

$$D_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}^*_{ki} \qquad (1 < i = j) \qquad (2.26)$$

$$\overline{U}_{ij} = \left(\frac{1}{D_{ii}}\right)\left[A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}_{ki}\overline{U}_{kj}\right] \qquad (1 < i < j) \qquad (2.27)$$

$$U_{ij} = 0 \qquad (i > j) \qquad (2.28)$$

จากสมการที่ได้นี้พบว่ามีการคูณกันมากกว่าในสมการ (2.16) และ (2.17) เราสามารถหลีกเลี่ยงการเพิ่มจำนวนครั้งของการคูณ โดยปรับขั้นตอนการคำนวณดังนี้

จากสมการ (2.26) และ (2.27) ชี้ให้เห็นว่าสมการของเทอม D_{ii} จะต้องทำการคำนวณก่อนตามด้วยการคำนวณในเทอมของแถว i ของเมตริกซ์ [U] ขั้นตอนการดำเนินการดังกล่าวเรียกว่า การดำเนินการเชิงแถว (row – wise generation) เราสามารถเปลี่ยนเป็นการดำเนินการเชิงหลัก (column – wise generation) ดังนี้

$$\overline{U}_{ij} = \left(\frac{1}{D_{ij}}\right)\left[A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}_{ki}\overline{U}_{kj}\right] \qquad (1 < i < j) \qquad (2.29)$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk} \overline{U}_{kj}^{2} \qquad (1 < i < j) \qquad (2.30)$$

โดยค่า $D_{kk}\overline{U}_{kj}$ ที่ปรากฏในสมการ (2.29) และ (2.30) จะถูกลดรูปโดยให้

$$\overline{U}_{kj}^{*} = D_{kk}\overline{U}_{kj} \qquad (2.31)$$

และทำการคำนวณหาค่า $\overline{U}_{ij}$ และ D_{jj} สำหรับ $j = 2, 3, \ldots, n$ คือ

$$\overline{U}_{ij}^{*} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{U}_{ki}\overline{U}_{kj}^{*} \qquad (1 < i < j) \qquad (2.32)$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{U}_{kj}\overline{U}_{kj}^{*} \qquad (1 < i < j) \qquad (2.33)$$

โดยที่

$$\overline{U}_{kj} = \left(\frac{1}{D_{kk}}\right)\overline{U}_{kj}^{*} \qquad (2.34)$$

เทคนิคนี้เรารู้จักกันในชื่อว่า วิธีชอเลสกี้แบบประยุกต์(Modified Cholesky Method)

หลังจากที่สามารถเขียนเมตริกซ์ในรูปของสาการ 2.20 แล้วขั้นตอนในการแก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebraic equation) ที่อยู่ในรูปเมตริกซ์สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ระบบสมการที่พิจารณามีรูปแบบ

$$[A]\,[X] = [B] \qquad (2.35)$$

โดยที่ [X] คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่ต้องการทราบค่าซึ่งมีจำนวนเท่ากับ n

[B] คือ เวกเตอร์ของเทอมตัวคงที่

แทนสมการ (2.20) ในสมการ (2.35) จะได้

$$[\overline{U}]^{T}[D][\overline{U}][X] = [B] \qquad (2.36)$$

กำหนดให้

$$[\overline{U}][X] = [Y] \qquad (2.37)$$

แสดงได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{U}_{12} & \overline{U}_{13} & \dots & \overline{U}_{1n} \\ 0 & 1 & \overline{U}_{23} & \dots & \overline{U}_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{U}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

และ

$$[D][Y] = [Z] \tag{2.39}$$

แสดงได้ดังนี้ คือ

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

แทนสมการที่ (2.37) และ (2.39) ลงในสมการ (2.25) ได้

$$[\overline{U}]^T [Z] = [B] \tag{2.41}$$

หรือแสดงได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_{12} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_{13} & U_{23} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{1n} & U_{2n} & U_{3n} & U_{4n} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

การคำนวณหา [X] ประกอบไปด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 จากสมการที่ (2.42) **เราสามารถคำนวณหาโดยการแทนค่าไปข้างหน้า** (forward subsutiution) **นั้นคือ**

$Z_1 = B_1$

$Z_2 = B_2 - \overline{U}_{12} Z_1$

$Z_3 = B_3 - \overline{U}_{13} Z_1 - \overline{U}_{23} Z_2$

$$Z_i = B_i - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{U}_{ki} Z_k \qquad (1 < i) \qquad (2.43)$$

ขั้นตอนที่ 2 ประกอบด้วยการแก้ปัญหาสำหรับเวกเตอร์ Y ในสมการ (19) เนื่องจาก D คือเมตริกซ์ในแนวทแยงมุม (ดูในสมการ (20)) สมาชิกของ Y สามารถหาได้จากการนำเทอม Z มาหารด้วยเทอม D ดังสมการ

$$Y_1 = \frac{Z_I}{D_{II}} \qquad (I = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (2.44)$$

ในขั้นตอนที่ 3 เทอมของ X สามารถหาได้จากสมการ (17) โดยที่ $\overline{U}$ คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน สมาชิกของ X จะหาได้จากการแทนค่ากลับ (backward substitution) ดังนี้

$X_n = Y_n$

$X_{n-1} = Y_{n-1} - \overline{U}_{n-1,n} X_n$

และรูปทั่วไปของสมาชิกในเมตริกซ์ X คือ

$$X_i = Y_i - \sum_{k=I+1}^{n} \overline{U}_{Ik} X_k \qquad (i < n) \qquad (2.45)$$

โดยขั้นตอนนี้จะเป็นคำตอบของสมการ (2.24) โดยเป็นค่าของตัวที่เราไม่ทราบค่าคือ [X]