บทที่ 3
วิธีการคำนวณและตัวอย่าง

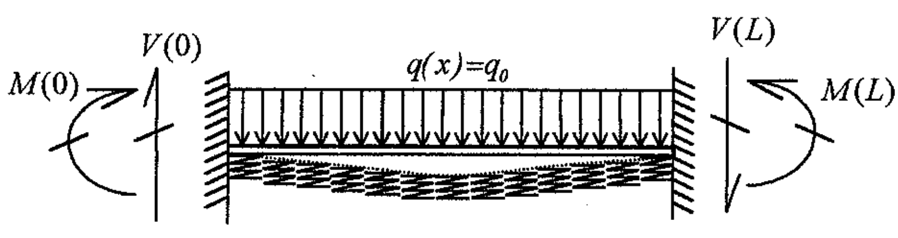
ในบทนี้จะอธิบายถึงรูปแบบทั่วไปของการคำนวณหาค่าฟังก์ชันต่างๆ ของคานบนฐานรากยืดหยุ่น ซึ่งในปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการวิเคราะห์จากลักษณะของแรงกระทำ (Load) ที่กระทำกับคานบนฐานรากยืดหยุ่นในสองกรณีคือ

1.แรงกระจายขนาดสม่ำเสมอ (Uniform Load) กระทำตลอดความยาวของคาน

2. แรงกระจายแบบสามเหลี่ยม (Linear Load) กระทำตลอดความยาวของคาน

โดยอาศัยวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยการรวมสติฟเนสโดยตรงเพื่อคำนวณหาค่าสติฟเนสเมตริกซ์ของคานบนฐานรากยืดหยุ่น โดยกำหนดให้เกิดการเคลื่อนที่ขนาดหนึ่งหน่วยที่ปลายคานนั้นๆ ในลักษณะต่างๆ สำหรับชิ้นส่วนคานบนฐานรากยืดหยุ่นที่ไม่มีแรงกระทำภายในคาน (q=0) ซึ่งเมื่อเกิดการเคลื่อนที่ขึ้นในลักษณะใดลักษณะหนึ่งก็จะเกิดแรงภายในขึ้นที่ปลายชิ้นส่วนด้วยเสมอซึ่งวิธีการคำนวณหาค่าสติฟเนสเมตริกซ์ของคานบนฐานรากยืดหยุ่นนั้นได้มีผู้ทำการวิเคราะห์ไว้ก่อนหน้านี้แล้ว[1]ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้จึงไม่ได้กล่าวถึงแต่จะแสดงตัวอย่างการคำนวณหาค่าแรงยึดแน่นปลายบนฐานรากยืดหยุ่นซึ่งมีลำดับขั้นตอนดังนี้

<u>ตัวอย่างที่1</u> คานยึดแน่นปลายบนฐานรากยืดหยุ่น



<u>รูปที่ 3.1</u> แสดงการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนคานยึดปลายสองข้าง ซึ่งถูกแรงกระจายขนาดสม่ำเสมอกระทำบนฐานรากยืดหยุ่น

ฟังก์ชันการโก่งของคานบนฐานรากยืดหยุ่นในกรณีที่มีน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอกระทำตลอดคาน ($q=q_0$) สามารถเขียนในรูปสมการทั่วไปได้ดัง

$$w=\frac{q_0}{4\beta^4 EI}+e^{\beta x}\left[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right]+e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x)+D\sin(\beta x)\right] \quad \textbf{......(3.1)}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอต สมการข้างบนได้ฟังก์ชันของการหมุน (Slope) ดังนี้

$$\begin{aligned} w' = {} & \beta e^{\beta x}\left[A\cos(\beta x)-A\sin(\beta x)+B\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right] \\ & -\beta e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x)+C\sin(\beta x)-D\cos(\beta x)+D\sin(\beta x)\right] \end{aligned} \quad \textbf{.......(3.2)}$$

และสามารถคำนวณหาสมการสำหรับฟังชันของโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} V(x) = {} & 2EI\beta^3 e^{\beta x}\left[-A\cos(\beta x)-A\sin(\beta x)+B\cos(\beta x)-B\sin(\beta x)\right] \\ & +2EI\beta^3 e^{\beta x}\left[C\cos(\beta x)-C\sin(\beta x)+D\cos(\beta x)+D\sin(\beta x)\right] \end{aligned} \quad \textbf{......(3.3)}$$

$$M(x)=2EI\beta^2 e^{\beta x}\left[-A\sin(\beta x)+B\cos(\beta x)\right]+2EI\beta^2 e^{-\beta x}\left[C\sin(\beta x)-D\cos(\beta x)\right] \quad \textbf{...(3.4)}$$

ซึ่งจะสังเกตได้ว่าค่าของฟังก์ชันต่างๆ จะขึ้นกับค่าคงที่ A,B,C และ D ดังนั้นถ้าเราสามารถคำนวณค่า A,B,C และ D ในแต่ละกรณีได้เมื่อแทนลงในสมการข้างต้น ก็จะได้ฟังก์ชันของการโก่งตัว มุมหมุน โมเมนต์ดัด และ แรงเฉือนได้ในที่สุด
จากเงื่อนไขสภาพขอบจะได้

$$w(0)=0,\; w'(0)=0,\; w(L)=0,\; w(L)=0$$

และเมื่อแทนค่าลงในสมการทั่วไปจะได้

$$\frac{q_0}{4\beta^4 EI}+A+0+C+0 \;=\; w(0) \;=\; 0$$

$$\beta A+\beta B-\beta C+\beta D \;=\; w'(0) \;=\; 0$$

$$\frac{q_0}{4\beta^4 EI}+Ae^{\beta L}\cos(\beta L)+Be^{\beta L}\sin(\beta L)+Ce^{-\beta L}\cos(\beta L)+De^{-\beta L}\sin(\beta L)=w(L)=0$$

$$\begin{aligned} & A\beta e^{\beta L}\left(\cos(\beta L)-\sin(\beta L)\right)+B\beta e^{\beta L}\left(\cos(\beta L)+\sin(\beta L)\right) \\ & \quad -C\beta e^{-\beta L}\left(\cos(\beta L)+\sin(\beta L)\right)+D\beta e^{-\beta L}\left(\cos(\beta L)-\sin(\beta L)\right)=w'(L)=0 \end{aligned}$$

หรือจากเงื่อนไขสภาพขอบ (Boundary Conditions) ของคานบนฐานรากยืดหยุ่นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & \beta & -\beta & \beta \\ e^{\beta L}\cos(\beta L) & e^{\beta L}\sin(\beta L) & e^{-\beta L}\cos(\beta L) & e^{-\beta L}\sin(\beta L) \\ \beta e^{\beta L}\left(\cos(\beta L)-\sin(\beta L)\right) & \beta e^{\beta L}\left(\cos(\beta L)+\sin(\beta L)\right) & -\beta e^{-\beta L}\left(\cos(\beta L)+\sin(\beta L)\right) & \beta e^{-\beta L}\left(\cos(\beta L)-\sin(\beta L)\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-q_0}{4\beta^4 EI} \\ 0 \\ \frac{-q_0}{4\beta^4 EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

......................(3.5)

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ค่า A,B,C และ D เป็นดังนี้

$$A = \left[\frac{q_0\left(-1+e^{\beta L}\cos(\beta L)+e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}{4EI\beta^4\left(1-e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

$$B = \left[\frac{q_0\left(-1+e^{\beta L}\cos(\beta L)-e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}{4EI\beta^4\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

$$C = \left[\frac{e^{\beta L}q_0\left(-e^{\beta L}+\cos(\beta L)-\sin(\beta L)\right)}{4EI\beta^4\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

$$D = \left[\frac{e^{\beta L}q_0\left(-e^{\beta L}+\cos(\beta L)+\sin(\beta L)\right)}{4EI\beta^4\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

จากนั้นแทนค่าสมการข้างต้นเพื่อหาการโก่งตัว มุมหมุน แรงเฉือน และ โมเมนต์ดัดจากสมการ (3.3) และ (3.4) จะได้ค่า $V(0), V(L), M(0)$ และ $M(L)$ เป็นดังนี้

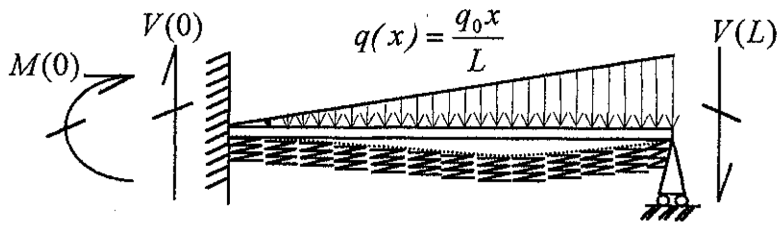
$$V(0) = \left[\frac{q_0\left(1+e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\cos(\beta L)\right)}{\beta\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

$$M(0) = \left[\frac{q_0\left(1-e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}{2\beta^2\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

$$V(L) = \left[\frac{-q_0\left(1+e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\cos(\beta L)\right)}{\beta\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

$$M(L) = \left[\frac{q_0\left(1-e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}{2\beta^2\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right]$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> คานบนฐานรากยืดหยุ่นซึ่งถูกแรงกระจายแบบสามเหลี่ยมกระทำตลอดความยาวคาน เมื่อที่รองรับเป็นแบบยึดแน่น (fixed) และ ยึดหมุน (hinge) ดังแสดงตามรูปที่ 3.2



<u>รูปที่ 3.2</u> แสดงการเคลื่อนที่ของคานบนฐานรากยืดหยุ่นซึ่งถูกแรงกระจายแบบสามเหลี่ยมกระทำตลอดความยาวคาน เมื่อที่รองรับเป็นแบบยึดแน่น (fix) และ ยึดหมุน (hinge)

คำตอบเฉพาะของสมการซึ่งขึ้นอยู่กับแรงกระทำ (Load) ที่กระทำต่อคานบนฐานรากยืดหยุ่นโดย $q = \dfrac{q_0 x}{L}$ จะได้คำตอบเฉพาะของสมการเท่ากับ $w_p = \dfrac{q_0 x}{4\beta^4 EIL}$

และเงื่อนไขสภาพขอบ (Boundary Condition) คือ $w(0) = 0, w'(0) = 0, M(L) = 0, w(L) = 0$

จากนั้นแทนค่าคงที่ A, B, C และ D และค่าจากเงื่อนไขสภาพขอบ (Boundary Condition) ลงในสมการทั่วไปสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$0 + A + 0 + C + 0 = w(0) = 0$$

$$\beta A + \beta B - \beta C + \beta D = w'(0) = 0$$

$$\frac{q_0}{4\beta^4 EI} + Ae^{\beta L}\cos(\beta L) + Be^{\beta L}\sin(\beta L) + Ce^{-\beta L}\cos(\beta L) + De^{-\beta L}\sin(\beta L) = w(L) = 0$$

$$2\beta^2 e^{\beta L}\left[-A\sin(\beta L) + B\cos(\beta L)\right] + 2\beta^2 e^{-\beta L}\left[C\sin(\beta L) - D\cos(\beta L)\right] = M(L) = 0$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & \beta & -\beta & \beta \\ e^{\beta L}\cos(\beta L) & e^{\beta L}\sin(\beta L) & \dfrac{\cos(\beta L)}{e^{\beta L}} & \dfrac{\sin(\beta L)}{e^{\beta L}} \\ -2\beta^2 e^{\beta L}\sin(\beta L) & 2\beta^2 e^{\beta L}\cos(\beta L) & \dfrac{2\beta^2\sin(\beta L)}{e^{\beta L}} & \dfrac{-2\beta^2\cos(\beta L)}{e^{\beta L}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-q_0}{4\beta^4 EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..................(3.6)

จากนั้นก็คำนวณหาค่า A,B,C และ D ได้ดังนี้

$$A = \left[\frac{e^{\beta L} q_0 \, cos(\beta L)\left(\beta L + e^{2\beta L}\beta L - 2e^{\beta L}\, sin(\beta L)\right)}{4\beta^5 EIL\left(1 - e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\, sin(2\beta L)\right)}\right]$$

$$B = \left[\frac{q_0\begin{pmatrix} -1 - 2e^{\beta L}\beta L\, cos(\beta L) + e^{2\beta L}\, cos(2\beta L) \\ + e^{\beta L}\beta L\, sin(\beta L) + e^{3\beta L}\beta L\, sin(\beta L) \end{pmatrix}}{4\beta^5 EIL\left(1 - e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\, sin(2\beta L)\right)}\right]$$

$$C = \left[\frac{e^{\beta L} q_0 \, cos(\beta L)\left(\beta L + e^{2\beta L}\beta L - 2e^{\beta L}\, sin(\beta L)\right)}{4\beta^5 EIL\left(-1 + e^{4\beta L} - 2e^{2\beta L}\, sin(2\beta L)\right)}\right]$$

$$D = \left[\frac{e^{\beta L} q_0\begin{pmatrix} -e^{3\beta L} + 2e^{2\beta L}\beta L\, cos(\beta L) + e^{\beta L}\, cos(2\beta L) \\ + \beta L\, sin(\beta L) + e^{2\beta L}\beta L\, sin(\beta L) \end{pmatrix}}{4\beta^5 EIL\left(-1 + e^{4\beta L} - 2e^{2\beta L}\, sin(2\beta L)\right)}\right]$$

จากนั้นก็แทนค่าในคำตอบทั่วไปเพื่อหาฟังก์ชันของการโก่งตัว มุมหมุน โมเมนต์ดัด หรือแรงเฉือน ที่ปลายทั้งสองได้ดังนี้

$$M(0)=\left[\frac{-q_0\begin{pmatrix}1+e^{4\beta L}+2e^{\beta L}\beta L\cos(\beta L)-2e^{3\beta L}\beta L\cos(\beta L)\\ -2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)-2e^{\beta L}\beta L\sin(\beta L)-2e^{3\beta L}\beta L\sin(\beta L)\end{pmatrix}}{2\beta^3 L\left(-1+e^{4\beta L}-2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\right)}\right]$$

$$V(0)=\left[\frac{q_0\begin{pmatrix}-1+e^{4\beta L}-4e^{\beta L}\beta L\cos(\beta L)\\ -4e^{3\beta L}\beta L\cos(\beta L)+2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\end{pmatrix}}{2\beta^2 L\left(-1+e^{4\beta L}-2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\right)}\right]$$

$$w'(L)=\left[\frac{q_0\left(1+e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\cos(\beta L)\right)\begin{pmatrix}1-e^{2\beta L}+\beta L+e^{2\beta L}\beta L\\ +2e^{\beta L}\beta L\cos(\beta L)-2e^{\beta L}\sin(\beta L)\end{pmatrix}}{4\beta^4 EIL\left(1-e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\right)}\right]$$

$$V(L)=\left[\frac{q\begin{pmatrix}\beta L+4e^{2\beta L}\beta L+e^{4\beta L}\beta L+2e^{\beta L}\cos(\beta L)-2e^{3\beta L}\cos(\beta L)\\ +2e^{2\beta L}\beta L\cos(2\beta L)-2e^{\beta L}\sin(\beta L)-2e^{3\beta L}\sin(\beta L)\end{pmatrix}}{2\beta^2 L\left(1-e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\right)}\right]$$