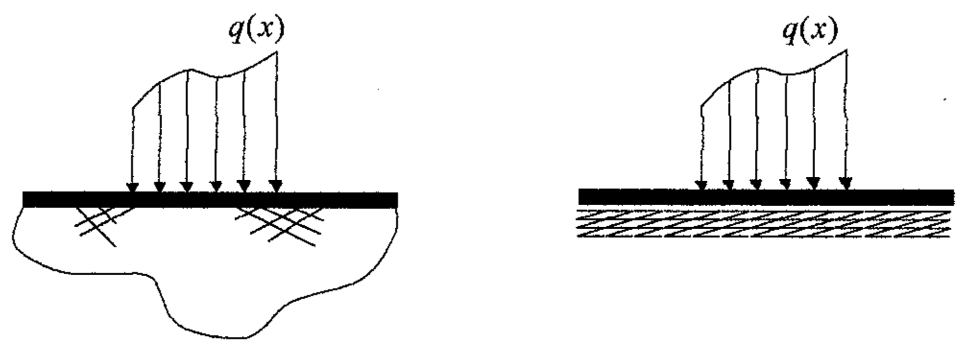
บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

2.1 คานบนฐานรากยืดหยุ่น (Beam on Elastic Foundation)

ในโครงการวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่สมมติให้ดินบริเวณฐานรากเป็นสปริงจำนวนมากวางเรียงติดกันที่ใต้คานเพื่อช่วยรับแรงกระทำที่เกิดขึ้น ดังรูป



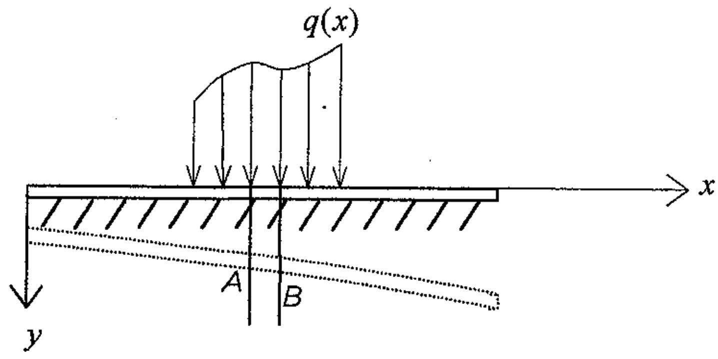
2.2 ทฤษฎีและสมมุติฐานประกอบการวิเคราะห์

การวิเคราะห์ในโครงงานทางวิศวกรรมของเราได้นำทฤษฎีและสมมุติฐานเพื่อมาวิเคราะห์ ดังนี้

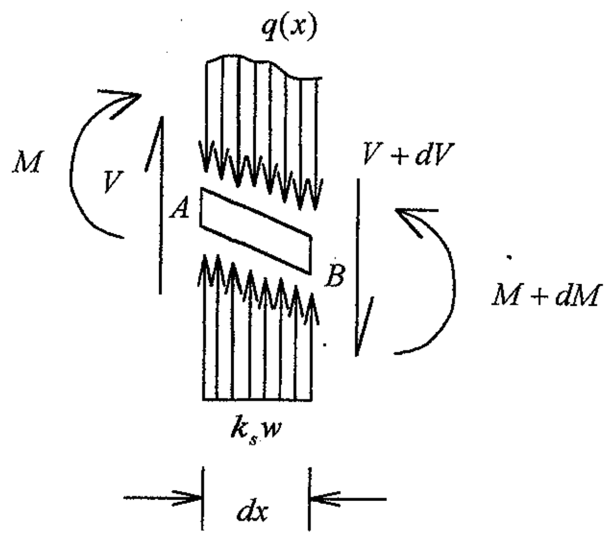
2.2.1 ทฤษฎีคานของ Bernulli – Navier's[2] คือ เมื่อเกิดการโก่งงอหน้าตัดของคานจะมีสภาพปรกติ

2.2.2 สมมุติฐานของ Winkler[3] คือ แรงปฏิกิริยาจากสปริงแต่ละจุดจะมีความเข้มเป็นสัดส่วนกับระยะโก่งตัวของคานนั้นจากแนวเดิม ซึ่งสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนสัดส่วนดังกล่าวได้คือ k_s หรือเรียกว่าโมดูลัสของฐานราก มีหน่วยเป็นแรงต่อความยาวกำลังสอง (N/m^2)

เมื่อนำทฤษฎีและสมมุติฐานข้างต้นมาประกอบกันก็สามารถเขียนรูปแสดงการโก่งตัวของคานบนฐานรากยืดหยุ่นเมื่อมีแรงกระทำได้ดังรูปที่2ก



<u>รูปที่2ก</u> แสดงการโก่งตัวจากแนวเดิมของคาน เมื่อรับแรงกระทำ



<u>รูปที่2ข</u> แสดงชิ้นส่วนขนาด dx

2.3 <u>**สมการควบคุม**</u> <u>(Governing Equation)</u>

จากรูปที่ 2ข เราจะสามารถวิเคราะห์หาสมการควบคุมของคานบนฐานรากยืดหยุ่นได้โดยใช้สมการสมดุล ดังนี้

จากสมการสมดุลในแนวดิ่ง : $\left[\sum F_y = 0\right]$

$$(V+dV)-V+qdx+k_s wdx=0 \qquad \textbf{.....................(2.1)}$$

จัดรูปสมการจะได้ดังนี้

$$\frac{dV}{dx} + q - k_s w = 0$$

จากสมการสมดุลของโมเมนต์ : $\left[\sum M_B = 0\right]$

$$Vdx + M - (M + dM) - qdx\frac{dx}{2} + k_s wdx\frac{dx}{2} = 0$$

เมื่อ dx มีค่าน้อยมากๆ จะได้

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad \text{.....................(2.2)}$$

โดยที่ V หมายถึง แรงเฉือน (ทิศทางตามรูปที่2ข)

M หมายถึง โมเมนต์ดัด (ทิศทางตามรูปที่2ข)

dV หมายถึง การเปลี่ยนของแรงเฉือน จากจุด A มายังจุด B

dM หมายถึง การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ จากจุด A มายังจุด B

dx หมายถึง ความยาวของชิ้นส่วนเล็กๆ " AB "

$q(x)$ หมายถึง ความเข้มของแรงที่กระทำลงบนคานในแนวดิ่ง

w หมายถึง ระยะโก่งตัวของชิ้นส่วน " AB "

k_s หมายถึง โมดูลัสของฐานราก มีค่าคงที่

จากสมมุติฐานข้อแรกของ Bernulli กับ ความสัมพันธ์ของ โมเมนต์ และ ความโค้งงอจะได้

$$M = -EI\frac{d^2w}{dx^2} \qquad \text{.....................(2.3)}$$

โดยที่ E หมายถึง ค่าอีลาสติกโมดูลัสของคาน

I หมายถึง โมเมนต์ออฟอินเนอร์เชียของหน้าตัดคาน

เมื่อแทนสมการที่ (2.3) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้

$$V = -EI\frac{d^3w}{dx^3} \qquad \text{.....................(2.4)}$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.4) ลงในสมการที่ (2.1) จะได้ สมการควบคุมของคานบนฐานรากยืดหยุ่น ดังสมการที่ (2.5) ดังนี้

$$-EI\frac{d^4w}{dx^4}+q-k_s w=0$$

จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{k_s w}{EI}=\frac{q}{EI} \qquad \text{.....................(2.5)}$$

เพื่อความสะดวกในการแก้สมการจึงได้กำหนดสัญลักษณ์ ดังนี้

$$\beta \geq 0$$

โดยที่

$$\beta=\left[\frac{k_s}{4EI}\right]^{\frac{1}{4}}$$

แทนลงในสมการที่ (2.5) จะได้สมการควบคุมของคานบนฐานรากยืดหยุ่นในรูปอย่างง่าย คือ

$$\frac{d^4w}{dx^4}+4\beta^4 w=\frac{q}{EI} \qquad \text{.....................(2.6)}$$

2.4 <u>คำตอบทั่วไป (General Solution)</u>

สำหรับคำตอบทั่วไปนั้นก็คือคำตอบของสมการควบคุมของคานบนฐานรากยืดหยุ่น w หรือ คำตอบของสมการที่ (2.6) นั่นเอง ซึ่งเราจะเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของคำตอบเฉพาะและคำตอบประกอบ ดังนี้

$$w=w_c+w_p \qquad \text{.....................(2.7)}$$

เมื่อ w_p หมายถึง คำตอบเฉพาะ (Particular Integral) ใดๆที่สามารถทำให้สมการที่ (2.7) เป็นจริง โดยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของแรงที่มากระทำ(q) ดังนี้

$$\frac{d^4 w_p}{dx^4} + 4\beta^4 w_p = \frac{q}{EI} \qquad \text{.....................(2.8)}$$

และ w_c หมายถึงคำตอบประกอบ (Complementary Solution) ซึ่งเป็นคำตอบของสมการเมื่อพจน์ขวามือของสมการควบคุมเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\frac{d^4 w_c}{dx^4} + 4\beta^4 w_c = 0 \qquad \text{.....................(2.9)}$$

ในการหาคำตอบประกอบสำหรับสมการที่ (2.6) เราจะสมมุติให้

$$w_c = e^{rx}$$

แล้วแทนลงในสมการที่ (2.9) จะได้ว่า

$$r^4 e^{rx} + 4\beta^4 e^{rx} = 0$$

จัดรูปสมการจะได้

$$e^{rx}(r^4 + 4\beta^4) = 0$$

ซึ่งสมการดังกล่าวจะเป็นจริงเมื่อ

$$r^4 + 4\beta^4 = 0 \qquad \text{.....................(2.10)}$$

สมการที่ (2.10) เป็นสมการพหุนามดีกรี 4 จะมีคำตอบ 4 ค่าคือ

$$r_1 = \sqrt{2}\beta\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = \beta(1+i)$$
$$r_2 = \sqrt{2}\beta\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right) = \beta(-1+i)$$
$$r_3 = \sqrt{2}\beta\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right) = \beta(-1-i)$$
$$r_4 = \sqrt{2}\beta\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right) = \beta(1-i)$$

จากคำตอบของสมการที่ (2.10) เราสามารถเขียนคำตอบของสมการได้ดังนี้

$$w_c = \overline{A}e^{(1+i)\beta x} + \overline{B}e^{(1-i)\beta x} + \overline{C}e^{(-1+i)\beta x} + \overline{D}e^{(-1-i)\beta x}$$

และจากสูตรของออยเลอร์ (Euler's Formular) จะได้

$$w_c = e^{\beta x}\left[\overline{A}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \overline{B}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] + e^{-\beta x}\left[\overline{C}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \overline{D}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$w_c = e^{\beta x}\left[(\overline{A}+\overline{B})\cos\beta x + (\overline{A}-\overline{B})i\sin\beta x\right] + e^{-\beta x}\left[(\overline{C}+\overline{D})\cos\beta x + (\overline{C}-\overline{D})i\sin\beta x\right]$$

แต่เราจะเห็นว่าสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน $\cos\beta x$ และ $\sin\beta x$ ของสมการข้างต้นเป็นค่าคงตัวทั้งสิ้น ฉนั้นจึงจัดรูปได้ใหม่ ดังนี้

$$w_c = e^{\beta x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right] + e^{-\beta x}\left[C\cos\beta x + D\sin\beta x\right] \qquad \text{.....................(2.11)}$$

โดยที่ ค่า A , B , C และ D สามารถหาได้โดยจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขสภาพขอบ (Boundary Condition) ของคาน

ในบทต่อไปจะกล่าวถึงการวิเคราะห์เพื่อหาค่า A , B , C และ D ในแต่ละเงื่อนไขสภาพขอบเมื่อมีแรงกระทำเป็นแบบ Uniform load และ Linear load ตามลำดับ รวมทั้งจะได้แสดงการคำนวณหาค่าของฟังก์ชันต่างๆ เช่น การโก่งตัว มุมหมุน โมเมนต์ดัด แรงเฉือน ที่ปลายทั้งสองของคานด้วย