บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

2.1 บทนำ

วิธีการที่นำมาใช้ในการเขียนโปรแกรมมี 2 วิธีการหลัก ๆ ดังนี้คือ

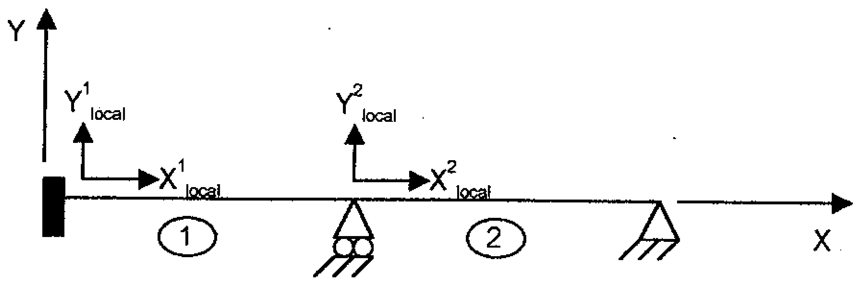
1 วิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง (The Direct Stiffness Method) เป็นวิธีการสังเคราะห์สติฟเนสของโครงสร้างทั้งระบบจากสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย โดยการเลือกระบบโคออร์ดิเนตที่เหมาะสมเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างใหญ่ ๆ หรือโครงสร้างยุ่งยากโดยอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์

2 วิธีการแยกตัวประกอบสำหรับเมตริกซ์สมมาตร (Factorization Method for Symmetric Matrices) เพื่อนำมาแก้สมการ $K * u = P$ โดยเราเลือกใช้วิธี Cholesky (modified Cholesky method)

2.2 ระบบโคออร์ดิเนตสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีเมตริกซ์

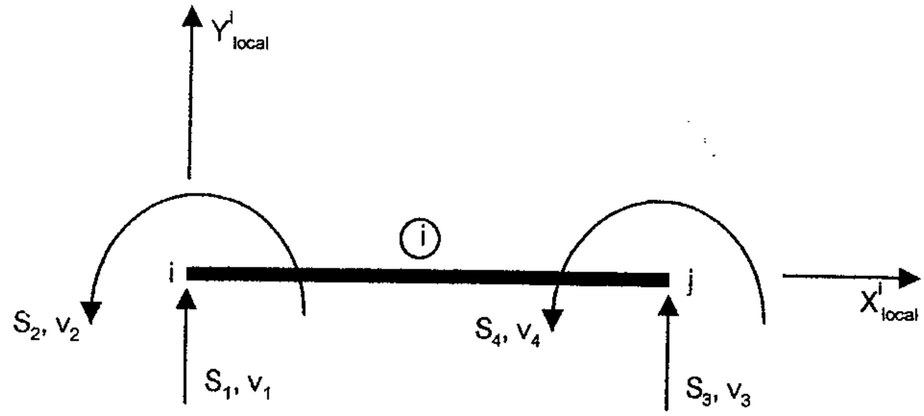
2.2.1 ระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว (Local Coordinate System)

ระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว คือ ระบบที่มีแกนใดแกนหนึ่งผ่านแนวแกนของชิ้นส่วน โดยปกติเป็นแกน X สำหรับชิ้นส่วนใด ๆ เลือกระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวซึ่งผ่านแนวแกนของชิ้นส่วนดังรูป 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว (X_{local} , Y_{local}) และระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล (X, Y)

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงที่ปลายชิ้นส่วน i ใด ๆ $\{S_{local}\}^i$ กับการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายชิ้นส่วน $\{v_{local}\}^i$ ซึ่งสอดคล้องกันดังแสดงในรูป 2.2 ได้ดังนี้



รูป 2.2 แสดงแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}^i$$

หรือแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\{ S_{local} \}^i = [K_{local}]^i \ \{v_{local}\}^i \tag{2.1}$$

โดยที่

$$[K_{local}]^i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ 6EI_z/L^2 & 4EI_z/L & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ -12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ 6EI_z/L^2 & 2EI_z/L & -6EI_z/L^2 & 4EI_z/L \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \tag{2.2}$$

พึงสังเกตว่า การใช้ระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว ทำให้สามารถเขียนสติฟเนสของชิ้นส่วนต่าง ๆ ในรูปแบบเดียวกัน โดยไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางของชิ้นส่วนนั้น ๆ ทำให้ง่ายต่อการสร้าง (generate) สติฟเนสเมตริกซ์ประจำตัว โดยใช้โปรแกรมซับรูททีนอันเดียวสำหรับชิ้นส่วนประเภทเดียวกัน

2.2.2 ระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล (Global Coordinate System)

ระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล คือ การนิยามแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของแต่ละชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนตร่วมกัน เพราะว่าระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นหันในทิศทางต่าง ๆ กันทำให้ไม่สามารถรวมกันได้โดยตรงในการพิจารณาสมดุลย์ของข้อต่อ

แต่สำหรับในคานต่อเนื่องจะพบว่าระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว และระบบโคออร์ดิเนตโกลบัลจะซ้อนทับกันนั่นคือ

$$[K_{local}]^i = [K_{global}]^i \tag{2.3}$$

ดังแสดงในรูปที่ 2.1

2.3 หลักการรวมสติฟเนสโดยตรง

โดยการสังเคราะห์สติฟเนสของโครงสร้างทั้งระบบจากการรวมโดยตรงของสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย ๆ และโดยการเลือกระบบโคออร์ดิเนตที่เหมาะสม ดังนั้นสติฟเนสของโครงสร้างทั้งระบบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$[K] = \sum_{i=1}^{m} [K_{global}]^i \tag{2.4}$$

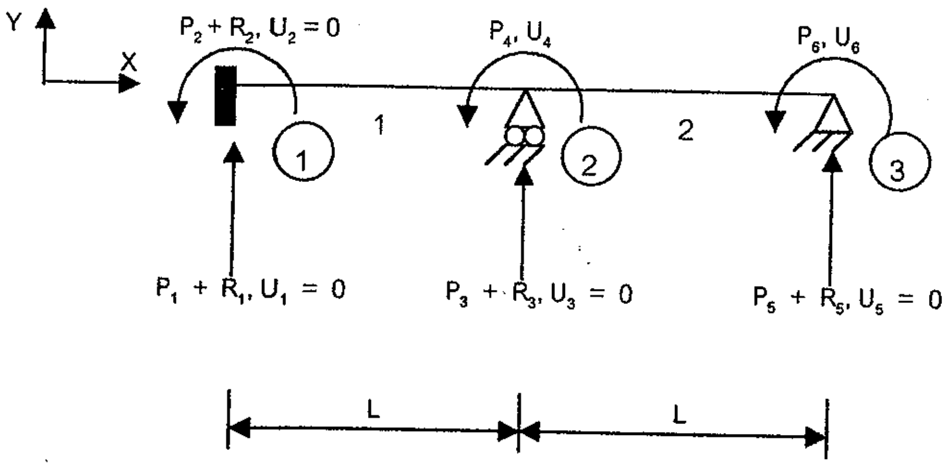
โดยที่-

$[K]$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์ของทั้งโครงสร้างในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล

$[K_{global}]^i$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์ของแต่ละชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล

m คือ จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดในโครงสร้าง

เพื่อให้เข้าในวิธีการรวมสติฟเนสโดยตรงได้ง่ายขึ้นจะอธิบายหลักการ โดยใช้ตัวอย่างของคานต่อเนื่องง่าย ๆ ดังแสดงในรูป 2.3



รูป 2.3 คานต่อเนื่องระบบ โคออร์ดิเนตโกลบัล

ค่าสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานแต่ละชิ้นจากรูป 2.3 จะสามารถหาได้จากสมการ 2.2 และ 2.3 ดังนี้คือ

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}^1_{global} = EI_z/L^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{global} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}_{global} \qquad (2.5)$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}^2_{global} = EI_z/L^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{global} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}_{global} \qquad (2.6)$$

2.3.1 เงื่อนไขความต่อเนื่อง (Compatibility Condition)

โดยการพิจารณาสภาวะความต่อเนื่องของการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายชิ้นส่วนแต่ละชิ้นของข้อต่อพบว่า สำหรับชิ้นส่วนที่ 1 ของคานดังแสดงในรูป 2.3

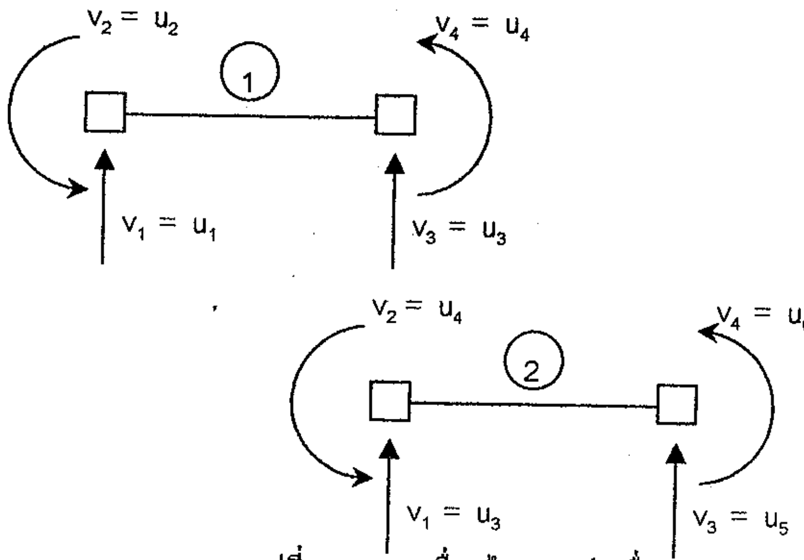
$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2$$

$$v_3 = u_3$$

$$v_4 = u_4 \tag{2.7}$$

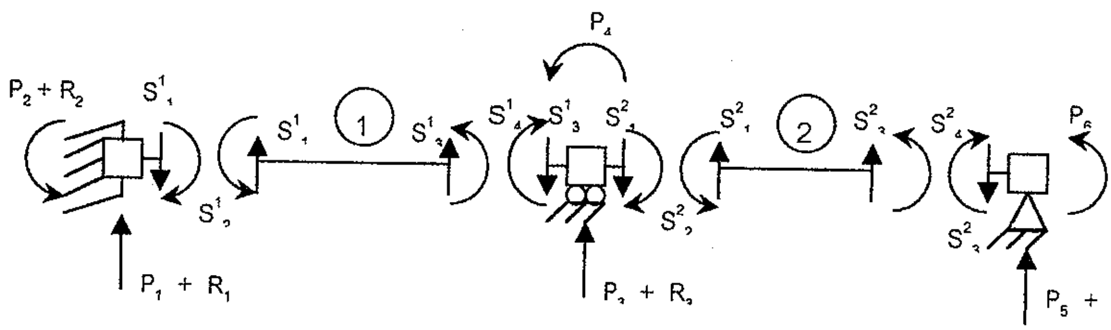
สำหรับสภาวะความต่อเนื่องของชิ้นส่วนอื่น แสดงไว้ในรูป 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงเงื่อนไขความต่อเนื่อง

2.3.2 สภาวะสมดุลย์ที่ข้อต่อ (Equilibrium Condition at Joint)

พิจารณาฟรีบอดีของตัวอย่างคานข้างต้นดังแสดงในรูป 2.5



รูปที่ 2.5 ฟรีบอดีของข้อต่อเมื่อรับแรงกระทำ

จากเงื่อนไขของการสมดุลย์ ผลบวกแรงภายในของชิ้นส่วนต่าง ๆ ที่ข้อต่อนั้นต้องอยู่ในสมดุลย์กับแรงกระทำภายนอกที่ข้อต่อเดียวกัน ดังนี้

ข้อต่อที่ 1

$$\sum Fy = 0;\ P_1 + R_1 - S^1_1 = 0$$
$$\sum M = 0;\ P_2 - S^1_2 = 0$$

ข้อต่อที่ 2

$$\sum Fy = 0;\ P_3 + R_3 + (-S^1_3 - S^2_1) = 0$$
$$\sum M = 0;\ P_4 + (-S^1_4 - S^2_2) = 0$$

ข้อต่อที่ 3

$$\sum Fy = 0;\ P_5 + R_5 - S^2_3 = 0$$
$$\sum M = 0;\ P_6 - S^2_4 = 0$$

แทนค่าแรงที่ปลายของแต่ละชิ้นส่วนในสมการข้างต้นด้วยค่าที่ได้จากสมการ 2.5 , 2.6 และใช้เงื่อนไขของความต่อเนื่องดังสมการ 2.7 พบว่า

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \\ R_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI/L^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \;1 & \;\;2 & \;\;\;3 & \;\;\;\;4 & \;\;\;5 & \;\;6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$
= \quad EI_z/L^3 \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\
6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\
-12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\
6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\
0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\
0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}
$$

จะพบว่าสติฟเนสของระบบโครงสร้างหาได้จากการรวมโดยตรงจากสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยแต่ละชิ้น และจาก u_1, u_2, u_3, u_5 มีค่าเป็น 0 โดยที่ u_4และ u_6 เป็นค่าที่เราต้องการทราบค่า ดังนั้นทำการจัดเรียงสมการใหม่ได้ดังนี้

$$
\begin{pmatrix} P_4 \\ P_6 \\ \hline P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_5 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_5 \end{pmatrix}
= EI_z/L^3
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|cccc} 4 & 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|cccc}
8L^2 & 2L^2 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L \\
2L^2 & 4L^2 & 0 & 0 & 6L & -6L \\ \hline
6L & 0 & 12 & 6L & -12 & 0 \\
2L^2 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 0 \\
0 & 6L & -12 & -6L & 24 & -12 \\
-6L & 6L & 0 & 0 & -12 & 12
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}
\begin{pmatrix} U_4 \\ U_6 \\ \hline U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{pmatrix}
$$

หรือแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$
\begin{pmatrix} [P] \\ [P^s] \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} (0) \\ (R) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} [K_{rr}] & [K_{rx}] \\ [K_{xr}] & [K_{xx}] \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} [u] \\ [u^s] \end{pmatrix}
\qquad (2.8)
$$

โดยที่

[P] คือ เวกเตอร์ของแรงกระทำที่เราทราบค่า

$[P^s]$ คือ เวกเตอร์ของแรงที่กระทำลงจุดรองรับโดยตรง

[R] คือ เวกเตอร์ของแรงปฏิกิริยาที่เราต้องการทราบค่า

[u] คือ เวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่เราต้องการทราบค่า

$[u^s]$ คือ เวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดรองรับ โดยปกติมีค่าเป็น 0

2.3.3 การคำนวณการเปลี่ยนตำแหน่ง แรงปฏิกิริยา และแรงภายใน

จากสมการ 2.8 เราสามารถนำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$[P] = [K_{rr}]\,[u] + [K_{rx}]\,[u^{s}] \tag{2.9}$$

และสามารถแก้สมการเพื่อหาระยะเปลี่ยนตำแหน่งของข้อต่อ [u] ได้ดังนี้

$$[u] = [K_{rr}]^{-1}\left([P] - [K_{rx}]\,[u^{s}]\right) \tag{2.10}$$

สำหรับตัวอย่างคานที่กล่าวมาข้างต้นสามารถหาค่า [u] ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ U_6 \end{pmatrix} = L^3/EI_z \begin{pmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_4 \\ P_6 \end{pmatrix}$$

แก้สมการได้

$$U_4 = L/EI_z(0.1428\,P_4 - 0.071\,P_6)$$

$$U_6 = L/EI_z(-0.071P_4 + 0.1428\,P_6)$$

เมื่อทราบระยะเปลี่ยนตำแหน่งของข้อต่อ [u] เราสามารถหาค่าแรงภายในของชิ้นส่วนได้จากเงื่อนไขความต่อเนื่องและสมการ (2.5), (2.6) ดังนี้

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}^{1}_{\text{global}} = EI_z/L^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{\text{global}} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_{\text{global}}$$

$$= EI_z/L^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (L/EI_z)(0.1428\,P_4 - 0.071P_6) \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$= 1/L \begin{Bmatrix} 6\,(0.1428\,P_4 - 0.071P_6) \\ 2L(0.1428\,P_4 - 0.071P_6) \\ -6\,(0.1428\,P_4 - 0.071P_6) \\ 4L(0.1428\,P_4 - 0.071P_6) \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}^{2}_{global} = EI_z/L^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}_{global} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_{global}$$

$$= EI_z/L^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ (L/EI_z)(0.1428P_4 - 0.071P_6) \\ 0 \\ (L/EI_z)(-0.071P_4 + 0.1428P_6) \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$= 1/L \begin{Bmatrix} 0.4308P_4 + 0.4308P_6 \\ 0.4292\,LP_4 + 0.0016\,LP_6 \\ -0.4308P_4 - 0.4308P_6 \\ 0.0016\,LP_4 + 0.4292\,LP_6 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

และจากสมการ (2.8) สามารถนำมาเขียนใหม่เพื่อหาค่าแรงปฏิกิริยาได้ดังนี้

$$[P^s] + [R] = [K_{xr}][u] + [K_{xx}][u^s] \qquad (2.11)$$

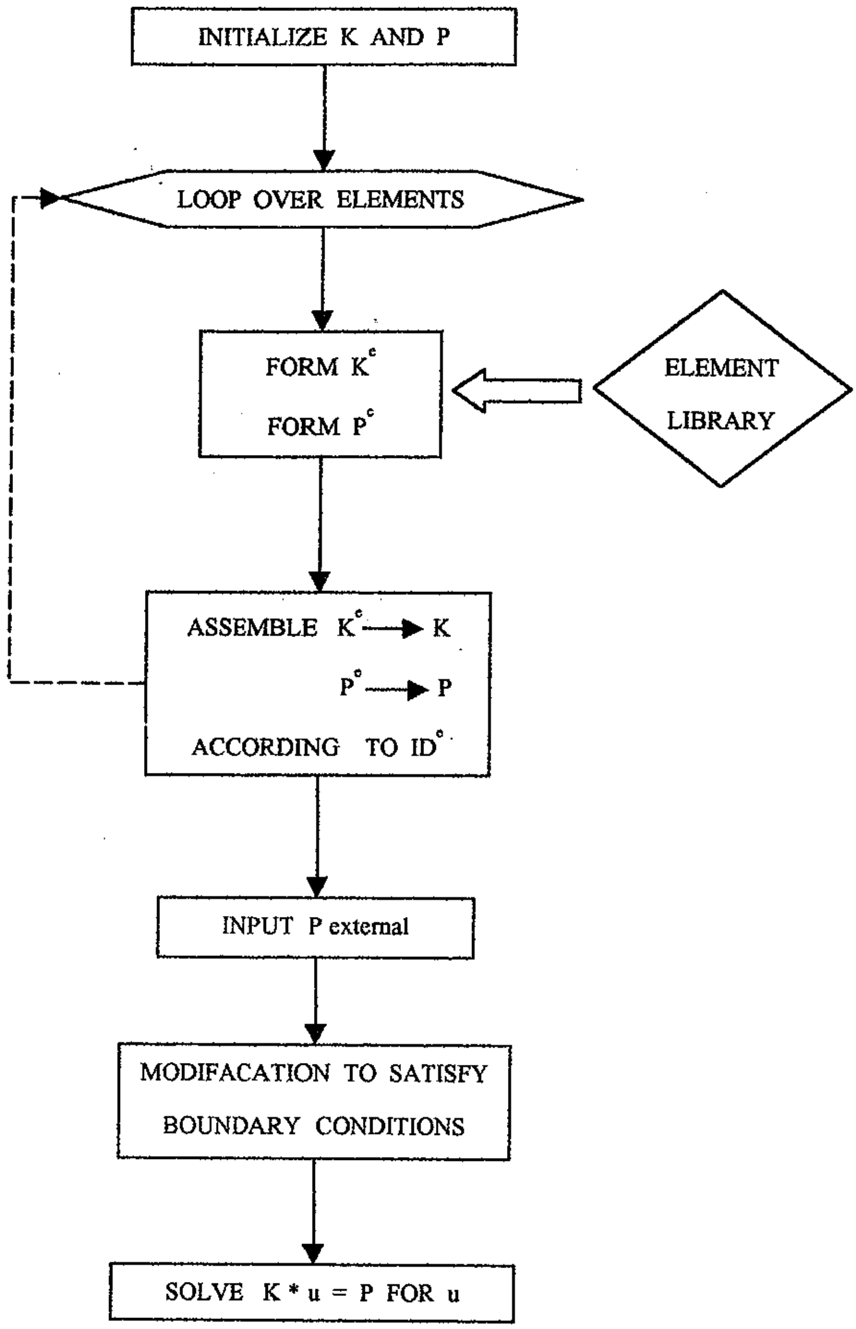
สำหรับตัวอย่างคานที่ยกมาเมื่อทราบค่า [u] สามารถหาค่าแรงปฏิกิริยาจากสมการ (2.11) ได้ดังนี้

$$[R] = [K_{xr}][u] - [P^s]$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_5 \end{bmatrix} = EI_z/L^3 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} (L/EI_z)(0.1428P_4 - 0.071P_6) \\ (L/EI_z)(-0.071P_4 + 0.1428P_6) \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 6 \end{array} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.8568P_4 - 0.426P_6)/L - P_1 \\ (0.2856LP_4 - 0.142LP_6)/L - P_2 \\ (-0.426P_4 + 0.8568P_6)/L - P_3 \\ (-0.4308P_4 - 0.4308P_6)/L - P_5 \end{bmatrix}$$

เราสามารถสรุปขั้นตอนของวิธีรวมสติฟเนสโดยตรงเป็น Flow Chart ดังนี้



2.4 วิธีแยกตัวประกอบสำหรับเมตริกซ์สมมาตร (Factorization Method for Symmetric Matrices)

งานทางด้านการคำนวณพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีเมตริกซ์ประกอบไปด้วยการแก้สมการของกลุ่มสมการเชิงเส้นจำนวน n สมการที่มี n ตัวแปร มีวิธีการคำนวณหาค่าตัวแปรมากมายหลายวิธี หนึ่งในนั้นมีวิธีที่เรียกว่า วิธีแยกตัวประกอบ (factorization method) โดยวิธีนี้ได้ใช้กระบวนการของ Gaussian elimination เนื่องจาก stiffness matrices ของระบบโครงสร้างที่มีคุณสมบัติอิลาสติกเชิงเส้น (linearly elastic structures) เป็นเมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติสมมาตร ดังนั้นเราจึงสามารถใช้วิธีแยกตัวประกอบแบบพิเศษที่รู้จักกันคือ Cholesky method

เริ่มต้นด้วยการให้สัญลักษณ์ A แสดงถึงเมตริกซ์ที่มีขนาด n x n มีคุณสมบัติค่าบวก (positive definite) และสมมาตร เราสามารถเขียนเมตริกซ์ A ได้ในรูปผลคูณระหว่างเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) และเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n1} & U_{n2} & U_{n3} & U_{n4} & \cdots & U_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & \cdots & U_{2n} \\ 0 & 0 & U_{33} & \cdots & U_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

หรือในรูปสัญลักษณ์

$$[A] = [L]\,[U] \quad (2.13)$$

โดยที่ $[L] = [U]^T$

จากสมการ 2.12 เราจะพบว่าสมาชิกของเมตริกซ์ [A] ประกอบด้วยผลคูณภายในระหว่างแถวของ [L] หรือ $[U^T]$ และคอลัมน์ของ [U] ซึ่งมีการคำนวณเสมือนว่าสมาชิกแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ A คือผลคูณระหว่างคอลัมนที่ 1 ของ [U] กับคอลัมน์อื่นนั่นคือ

$$A_{11} = U^2_{11}\,;\ A_{12} = U_{11}U_{12}\,;\ A_{13} = U_{11}U_{13}\,;\ \ldots\,;\ A_{1n} = U_{11}U_{1n}$$

ในทำนองเดียวกันผลคูณภายในของคอลัมน์ 2 ของ [U] กับคอลัมน์อื่น ๆ ภายใน [U] คือ

$$A_{22} = U^2_{12} + U^2_{22} \ ; \ A_{23} = U_{12}U_{13} + U_{22}U_{23} \ ; \ \ldots \ ; \ A_{2n} = U_{12}U_{1n} + U_{22}U_{2n}$$

สำหรับสมาชิกแถวที่ 3 ของ [A] คือ

$$A_{33} = U^2_{13} + U^2_{23} + U^2_{33} \ ; \ldots ; \ A_{3n} = U_{13}U_{1n} + U_{23}U_{2n} + U_{33}U_{3n}$$

ดังนั้นจากความสัมพันธ์ข้างต้นเราสามารถเขียนสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ [A] ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$A_{ii} = U^2_{1i} + U^2_{2i} + U^2_{3i} + \ldots + U^2_{ii} \qquad (2.14a)$$

หรือ

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^{i} U^2_{ki} \qquad (i = j) \qquad (2.14b)$$

ด้วยวิธีการเดียวกันสมาชิก A_{ij} ในตำแหน่งสามเหลี่ยมบนจะแสดงได้เป็น

$$A_{ij} = U_{1i}U_{1j} + U_{2i}U_{2j} + U_{3i}U_{3j} + \ldots + U_{ii}U_{ij} \qquad (2.15a)$$

หรือ

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{i} U_{ki}U_{kij} \qquad (i < j) \qquad (2.15b)$$

แล้วสมาชิกของ U อาจหาได้โดยสมการ 2.14b และ 2.15b นำมาเรียงดังนี้

$$U_{ij} = \sqrt{\left(A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} U^2_{ki}\right)} \qquad (1 < i = j) \qquad (2.16)$$

$$U_{ij} = (1 / U_{ii})\left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki}U_{kj}\right) \qquad (1 < i < j) \qquad (2.17)$$

$$U_{ij} = 0 \qquad (i > j) \qquad (2.18)$$

สมการนี้เราเรียกว่า Cholesky square root method โดยจะใช้ได้ก็ต่อเมื่อเป็นเมตริกซ์สมมาตรและมีค่าเป็นบวก (positive definite) เท่านั้น

แต่ถ้าเมตริกซ์ [A] ไม่มีคุณสมบัติเป็นบวก (positive definite) ในการแยกตัวประกอบจะแยกออกเป็นผลคูณของ 3 เมตริกซ์ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{U}_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{U}_{31} & \overline{U}_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{U}_{n1} & \overline{U}_{n2} & \overline{U}_{n3} & \overline{U}_{n4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{U}_{12} & \overline{U}_{13} & \dots & \overline{U}_{1n} \\ 0 & 1 & \overline{U}_{23} & \dots & \overline{U}_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \overline{U}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.19)$$

หรือแทนด้วยสัญลักษณ์

$$[A] = [\overline{U}]^T [D] [\overline{U}] \qquad (2.20)$$

โดยที่สัญลักษณ์ [D] แสดงถึงเมตริกซ์ทแยงมุมและสมาชิกเป็นค่ากำลังสองของสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมตริกซ์ [U] (สมการ (2.16)) นั่นคือ

$$D_{ii} = U^2_{ii} \qquad (I = 1, 2, \dots, n) \qquad (2.21)$$

จากสมการที่ (2.19) จะพบว่า

$$A_{11} = D_{11} \qquad (2.22)$$

และสมาชิกในแนวทแยงมุมในเมตริกซ์ [A] สามารถเขียนได้เป็น

$$A_{ii} = D_{11}\overline{U}^2_{1i} + D_{12}\overline{U}^2_{2i} + D_{33}\overline{U}^2_{3i} + \dots + D_{ii}$$

หรือ

$$A_{ii} = D_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}^2_{ki} \qquad (1 < i = j) \qquad (2.23)$$

ด้วยวิธีการเดียวกัน สมาชิกในแถว 1 ของ A คือ

$$A_{1j} = D_{11}\overline{U}_{1j} \qquad (2.24)$$

และในแถวอื่น ๆ คือ

$$Aij = D_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}_{ki}\overline{U}_{kj} \qquad (1 < i < j) \qquad (2.25)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.23), (2.24) และ (2.25) สมาชิกของเมตริกซ์ [D] และ[$\overline{U}$] สามารถเขียนได้ดังนี้

$$D_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}^2_{ki} \qquad (1 < i = j) \qquad (2.26)$$

$$\overline{U}_{ij} = (1 / D_{ii})\Big[A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\,\overline{U}_{ki}\,\overline{U}_{kj}\Big] \qquad (1 < i < j) \qquad (2.27)$$

$$U_{ij} = 0 \qquad (i > j) \qquad (2.28)$$

จากสมการที่ได้นี้พบว่ามีการคูณกันมากกว่าในสมการ (2.16) และ (2.17) เราสามารถหลีกเลี่ยงการเพิ่มจำนวนครั้งของการคูณโดยปรับขั้นตอนการคำนวณดังนี้

จากสมการ (2.26) และ (2.27) ชี้ให้เห็นว่าสมการของเทอม D_{ii} จะต้องทำการคำนวณก่อนตามด้วยการคำนวณในเทอมของแถว i ของเมตริกซ์ [U] ขั้นตอนการดำเนินการดังกล่าวเรียกว่า การดำเนินการเชิงแถว (row – wise generation) เราสามารถเปลี่ยนเป็นการดำเนินการเชิงหลัก (column - wise generation) ดังนี้

$$\overline{U}_{ij} = (1 / Dij)\Big[A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}_{ki}\overline{U}_{kj}\Big] \qquad (1 < i < j) \qquad (2.29)$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk}\overline{U}^2_{kj} \qquad (1 < i = j) \qquad (2.30)$$

โดยค่า $D_{kk}\overline{U}_{kj}$ ที่ปรากฏในสมการ (2.29) และ (2.30) จะถูกลดรูปโดยให้

$$\overline{U^*}_{kj} = D_{kk}\overline{U}_{kj} \tag{2.31}$$

และทำการคำนวณหาค่า $\overline{U}_{ij}$ และ D_{jj} สำหรับ $j = 2,3,\ldots,n$ คือ

$$\overline{U^*}_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{U}_{ki}\,\overline{U^*}_{kj} \qquad (1 < i < j) \tag{2.32}$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \overline{U}_{ki}\,\overline{U^*}_{kj} \qquad (1 < i = j) \tag{2.33}$$

โดยที่

$$\overline{U}_{kj} = (1 / D_{kk})\,\overline{U^*}_{kj} \tag{2.34}$$

เทคนิคนี้เรารู้จักกันในชื่อว่า modified Cholesky method

หลังจากที่สามารถเขียนเมตริกซ์ในรูปของสมการ 2.20 แล้วขั้นตอนในการแก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebraic) ที่อยู่ในรูปเมตริกซ์สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ระบบสมการที่พิจารณามีรูปแบบ

$$[A]\,[X] = [B] \tag{2.35}$$

โดยที่ [X] คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่ต้องการทราบค่าซึ่งมีจำนวนเท่ากับ n

[B] คือ เวกเตอร์ของเทอมตัวคงที่

แทนสมการ (2.20) ในสมการ (2.35) จะได้

$$[\overline{U}]^T\,[D]\,[\overline{U}]\,[X] = [B] \tag{2.36}$$

กำหนดให้

$$[\overline{U}]\,[X] = [Y] \tag{2.37}$$

แสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{U}_{12} & \overline{U}_{13} & \dots & \overline{U}_{1n} \\ 0 & 1 & \overline{U}_{23} & \dots & \overline{U}_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \overline{U}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

และ

$$[D]\,[Y] = [Z] \tag{2.39}$$

แสดงได้ดังนี้ คือ

$$\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

แทนสมการที่ (2.37) และ (2.39) ลงในสมการ (2.25) ได้

$$[\overline{U}]^T\,[Z] = [B] \tag{2.41}$$

หรือแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_{12} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_{13} & U_{23} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{1n} & U_{2m} & U_{3n} & U_{4n} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \\ B_n \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

การคำนวณหา [X] ประกอบไปด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 จากสมการที่ (2.42) เราสามารถคำนวณหาโดยการแทนค่าไปข้างหน้า (forward substitution) นั่นคือ

$$Z_1 = B_1$$

$$Z_2 = B_2 - \overline{U}_{12} Z_1$$

$$Z_3 = B_3 - \overline{U}_{13} Z_1 - \overline{U}_{23} Z_2$$

$$Z_i = B_i - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{U}_{ki} Z_k \qquad (1 < i) \qquad (2.43)$$

ขั้นตอนที่ 2 ประกอบด้วยการแก้ปัญหาสำหรับเวกเตอร์ Y ในสมการ (19) เนื่องจาก D คือ เมตริกซ์ในแนวทแยงมุม (ดูในสมการ (20)) สมาชิกของ Y สามารถหาได้จากการนำเทอม Z มาหารด้วยเทอม D ดังสมการ

$$Y_i = Z_i / D_{ii} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (2.44)$$

ในขั้นตอนที่ 3 เทอมของ X สามารถหาได้จากสมการ (17) โดยที่ $\overline{U}$ คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน สมาชิกของ X จะหาได้จากการแทนค่ากลับ (backward substitution) ดังนี้

$$X_n = Y_n$$

$$X_{n-1} = Y_{n-1} - \overline{U}_{n-1,n} X_n$$

และรูปทั่วไปของสมาชิกในเมตริกซ์ X คือ

$$X_i = Y_i - \sum_{k=i+1}^{n} \overline{U}_{ik} X_k \qquad (i < n) \qquad (2.45)$$

โดยขั้นตอนนี้จะเป็นคำตอบของสมการ (2.24) โดยเป็นค่าของตัวที่เราไม่ทราบค่าคือ [X]