บทที่ 4

ตัวอย่างการคำนวณ

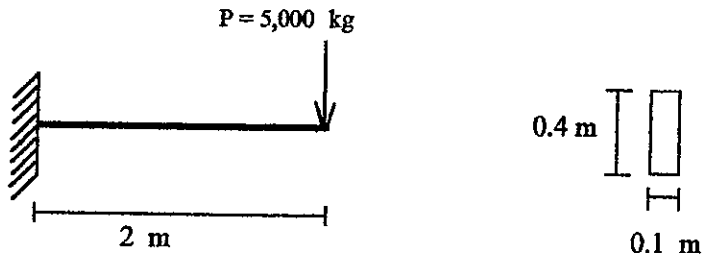
ในส่วนของบทนี้ จะเป็นการแสดงการแก้ปัญหาโจทย์ โดยนำค่า สติฟเนสเมตริกซ์มาประยุกต์ใช้ร่วมกับหลักการของ Beam on Elastic Foundation โดยจะแสดงวิธีการวิเคราะห์หาคำตอบ ในลักษณะต่าง ๆ อย่างเป็นลำดับขั้นตอน ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

Cantilever Beam ยาว 2 m หน้าตัดกว้าง 0.1 m ลึก 0.4 m รับแรงขนาด 5,000 kg กระทำที่ปลายดังรูปที่ 9 กำหนดให้ โมดูลัสของความยืดหยุ่นมีค่าเท่ากับ 2×10^6 ksc จงเปรียบเทียบค่าแรงเฉือน , โมเมนต์ และการโก่งของคานระหว่าง

ก) คานในสภาวะปกติ (Common Beam)

ข) คานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก (Beam on Elastic Foundation)



รูปที่ 10 แสดงตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ

กำหนดให้ b เป็นความกว้างของคาน

h เป็นความลึกของคาน

L เป็นความยาวของคาน

E เป็นโมดูลัสของความยืดหยุ่น

I เป็นโมเมนต์อินเนอร์เชียของหน้าตัดคาน

ก) คานในสภาวะปกติ (Common Beam)

คำนวณค่าโมเมนต์อินเนอร์เชียของหน้าตัดคาน

$$I = bh^3/12$$

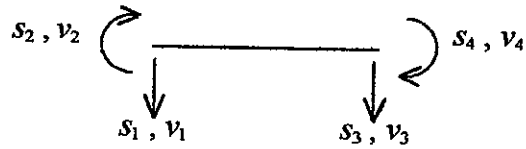
$$= (10)(40)^3/12$$

$$= 53{,}333.33 \quad \text{cm}^4$$

พิจารณาโคออร์ดิเนต และไม่คิดผลของแรงตามแนวแกน ตามรูปที่ 10

s = Internal force

v = Internal displacement



รูปที่ 11 แสดงทิศทางของแรงภายในและการเคลื่อนที่ภายใน

นำมาเขียนเป็นเมตริกซ์

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & & & SYM \\ k_{21} & k_{22} & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{.....(4.1)}$$

โดยที่ฟอร์มค่าสติฟเนสของคานตามโคออร์ดิเนตดังที่กำหนดตามรูป คือ

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & & & SYM \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & \\ \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

เพื่อให้ง่ายขึ้น เราจึงตัดแถวและหลัก ที่เป็น 0 จะได้เป็นเมตริกซ์ 2 x 2

$$\begin{Bmatrix} s_3 \\ s_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

แทนค่า $s_3 = 5{,}000$, $s_4 = 0$, E , I , L จะได้สมการ

$$\begin{Bmatrix} 5{,}000 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 3{,}314.89 & -320{,}939.49 \\ -320{,}939.49 & 42{,}390{,}471.88 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

แก้สมการได้ค่า v_3 (cm) , v_4 (rad)

$$\begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.125 \\ 9.37x10^{-4} \end{bmatrix}$$

ซึ่ง v_3 เป็น Deflection ที่ปลายคาน

v_4 เป็นมุมหมุนที่ปลายคาน

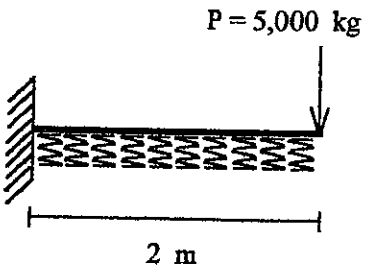
หาค่า k ที่เหลือตามสมการ (4.1) แล้วแทนค่า v_3 , v_4 จะได้ค่า s_1 , s_2 ซึ่งจะได้ว่า

s_1 เป็นค่า Shear force = - 5,000 kg

s_2 เป็นค่า Moment = - 1,000,000 kg . cm

ข) คานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก (Beam on Elastic Foundation)

สมมุติให้ค่าโมดูลัสของฐานราก (k_s) มีค่าเป็น 100 kg / cm^2 ดังรูปที่ 11



รูปที่ 12 สภาวะคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก

จากการวิเคราะห์ค่าสติฟเนสและจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ จะได้

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11} & & & SYM \\ k_{21} & k_{22} & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\beta^4 = \dfrac{k}{4EI}$

แทนค่า k, E, I จะได้ค่า

$\beta = 3.913 \times 10^{-3}$

แทนค่า β, E, I, L จะได้ค่า k (kg , cm)

$k_{11} = 3{,}314.86$ $\qquad$ $k_{33} = 3{,}314.86$

$k_{21} = 320{,}939.49$ $\qquad$ $k_{41} = 314{,}357.12$

$k_{22} = 42{,}390{,}471.88$ $\qquad$ $k_{42} = 21{,}007{,}229.14$

k_{31} = -3,117.28 k_{43} = -320,939.49

k_{32} = -314,357.12 k_{44} = 42,390,471.88

ใช้วิธีคิดทำนองเดียวกับสภาวะปกติ จะได้เมตริกซ์ 2 x 2

$$\begin{Bmatrix} s_3 \\ s_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

แทนค่า $s_3 = 5{,}000$, $s_4 = 0$, k_{33} , k_{34} , k_{43} , k_{44} จะได้สมการ

$$\begin{Bmatrix} 5{,}000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 167{,}417.65 & -16{,}209{,}065.44 \\ -16{,}209{,}065.44 & 2{,}140{,}932{,}932.44 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

แก้สมการได้ค่า v_3 (cm) , v_4 (rad)

$$\begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.112 \\ 8.47x10^{-4} \end{bmatrix}$$

จะได้ค่า v_3 เป็น Deflection ที่ปลายคาน

v_4 เป็นมุมหมุนที่ปลายคาน

หาค่า k ที่เหลือตามสมการ (1) แล้วแทนค่า v_3 , v_4 จะได้ค่า s_1 , s_2

s_1 เป็นค่า Shear force = -4 ,165.26 kg

s_2 เป็นค่า Moment = -877,435 kg . cm

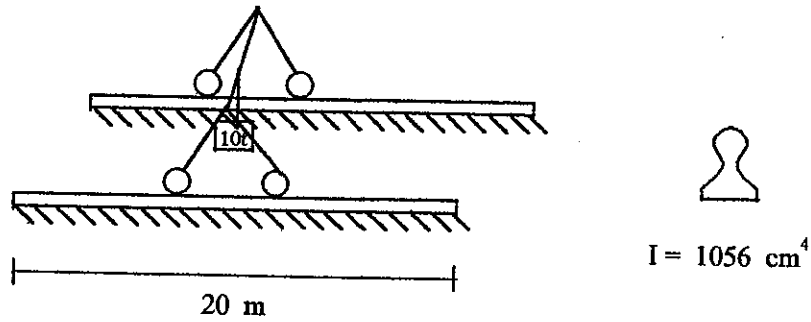
เปรียบเทียบค่าระหว่างสภาวะปกติกับ Beam on Elastic Foundation

	Common Beam	Beam On Elastic Foundation	Beam On Elastic Foundation (By STAAD-3)
v_3 (cm)	0.125	0.112	0.060
v_4 (rad)	9.37×10^{-4}	8.47×10^{-4}	-
s_1 (kg)	5,000	4,165	4,534
s_2 (kg.cm)	1,000,000	877,435	930,918

จะเห็นว่าค่า Shear force , Moment และ Deflection ที่ได้แบบ Beam on Elastic Foundation ได้ค่าน้อยกว่า เพราะฉะนั้นเราจึงสามารถลดขนาดของคานได้

ตัวอย่างที่ 2

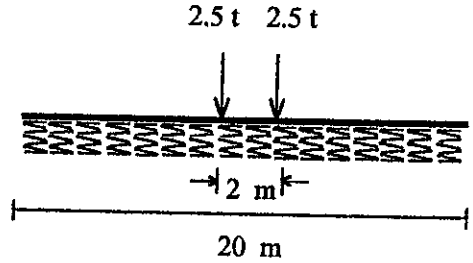
ในโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่ง จะต้องมีการขนถ่ายสินค้าและอุปกรณ์อยู่ตลอดเวลา โดยใช้เครนซึ่งมี 4 ล้อ วิ่งตามรางที่วางอยู่บนพื้น โดยมีโมเมนต์อินเนอร์เชีย ความยาวของราง และน้ำหนักของที่ยกดังแสดงในรูปที่ 12 จงคำนวณค่าแรงเฉือน , โมเมนต์ และการโก่งของราง



รูปที่ 13 แสดงตัวอย่างที่ 2

<u>การวิเคราะห์</u>

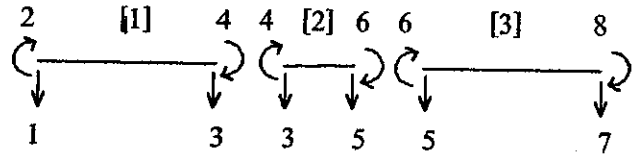
จากรูปแบบของปัญหา เราสามารถวิเคราะห์โดยใช้หลักการของ Beam on Elastic Foundation โดยสมมติให้รางมีสภาพเป็นคาน และ พื้นที่รองรับรางมีสภาพเป็นสปริง ($k_s = 60\ \text{kg/cm}^2$) ตลอดความยาวของคาน



รูปที่ 14 สภาวะคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก

<u>วิธีทำ</u>

- จัดลำดับ ของการเคลื่อนที่และแรงกระทำในระบบแกนพิกัดตามรูป



รูปที่ 14 แสดงระบบแกนพิกัดของส่วนโครงสร้าง เมื่อตัวเลขในวงเล็บเหลี่ยม [i] หมายถึงชิ้นส่วนที่ i

- หา Stiffness Matrix ของส่วนโครงสร้างตามระบบแกนพิกัดของโครงสร้าง

$$[K]_1=\begin{bmatrix} k_{11}^1 & & & SYM \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & & \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2=\begin{bmatrix} k_{33}^2 & & & SYM \\ k_{43}^2 & k_{44}^2 & & \\ k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & \\ k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K]_3=\begin{bmatrix} k_{55}^3 & & & SYM \\ k_{65}^3 & k_{66}^3 & & \\ k_{75}^3 & k_{76}^3 & k_{77}^3 & \\ k_{85}^3 & k_{86}^3 & k_{87}^3 & k_{88}^3 \end{bmatrix}$$

หา Stiffness Matrix รวมของโครงสร้างจะได้

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^2 & k_{33}^1 + k_{33}^2 & k_{34}^1 + k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{43}^2 & k_{44}^1 + k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 + k_{55}^3 & k_{56}^2 + k_{56}^3 & k_{57}^3 & k_{58}^3 \\ 0 & 0 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 + k_{65}^3 & k_{66}^2 + k_{66}^3 & k_{67}^3 & k_{68}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{75}^3 & k_{76}^3 & k_{77}^3 & k_{78}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{85}^3 & k_{86}^3 & k_{87}^3 & k_{88}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix}$$

จากการวิเคราะห์จะได้ค่าสติฟเนสต่างๆ ดังนี้

$k_{11}^1 = 6535.85$ $\quad$ $k_{21}^1 = 355977.69$

$k_{22}^1 = 38776931.85$ $\quad$ $k_{31}^1 = -1.76$

$k_{32}^1 = -337.34$ $\quad$ $k_{33}^1 + k_{33}^2 = 13977.74$

$k_{41}^1 = 337.34$ $\quad$ $k_{42}^1 = 26318.18$

$k_{43}^1 + k_{43}^2 = 78855.06$ $\quad$ $k_{44}^1 + k_{44}^2 = 85262612.48$

$k_{53}^2 = -1789.36$ $\quad$ $k_{54}^2 = -249718.87$

$k_{55}^2 + k_{55}^3 = 13977.74$ $\quad$ $k_{63}^2 = 249718.87$

$k_{64}^2 = 18005137.93$ $\quad$ $k_{65}^2 + k_{65}^3 = -78855.06$

$k_{66}^2 + k_{66}^3 = 85262612.48$ $\quad$ $k_{75}^3 = -1.76$

$k^3_{76} = -337.34$ $\quad$ $k^3_{77} = 6535.85$

$k^3_{85} = 337.34$ $\quad$ $k^3_{86} = 26318.18$

$k^3_{87} = -355977.68$ $\quad$ $k^3_{88} = 38776931.85$

ค่า P (kg) ตามโคออร์ดิเนตดังรูปที่ 14 มีค่าดังนี้

$P_1 = 0$ $\quad$ $P_2 = 0$

$P_3 = 2.5 \times 10^3$ $\quad$ $P_4 = 0$

$P_5 = 2.5 \times 10^3$ $\quad$ $P_6 = 0$

$P_7 = 0$ $\quad$ $P_8 = 0$

แทนค่า P (kg) และ k (kg, cm) ลงใน Stiffness Matrix รวมของโครงสร้าง แล้วแก้สมการ Matrix จะได้ค่า u ดังนี้

$u_1 = -1.03 \times 10^{-4}$	cm	$u_2 = 2.43 \times 10^{-6}$	rad
$u_3 = 0.21$	cm	$u_4 = 5.40 \times 10^{-4}$	rad
$u_5 = 0.21$	cm	$u_6 = -5.40 \times 10^{-4}$	rad
$u_7 = -1.03 \times 10^{-4}$	cm	$u_8 = -2.43 \times 10^{-6}$	rad

จากค่า การโก่งที่ได้ จะเห็นว่า รางส่วนที่รับแรงจากล้อเครนจะทรุดตัวลง 0.21 cm ส่วนด้านปลายราง จะยกตัวขึ้น 1.03×10^{-4} cm

ค่า แรงเฉือน และ โมเมนต์ สามารถคำนวณได้โดย นำชิ้นส่วนที่ [1] และ [2] มาเขียนเป็นเมตริกซ์

$$\begin{Bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \\ s_3^1 \\ s_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & & & SYM \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & & \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^1 = u_1 \\ v_2^1 = u_2 \\ v_3^1 = u_3 \\ v_4^1 = u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \\ s_3^2 \\ s_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33}^2 & & & SYM \\ k_{43}^2 & k_{44}^2 & & \\ k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & \\ k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^2 = u_3 \\ v_2^2 = u_4 \\ v_3^2 = u_5 \\ v_4^2 = u_6 \end{Bmatrix}$$

แทนค่า k (kg , cm) และ u (cm , rad) จะได้ค่า P (kg , kg.cm)

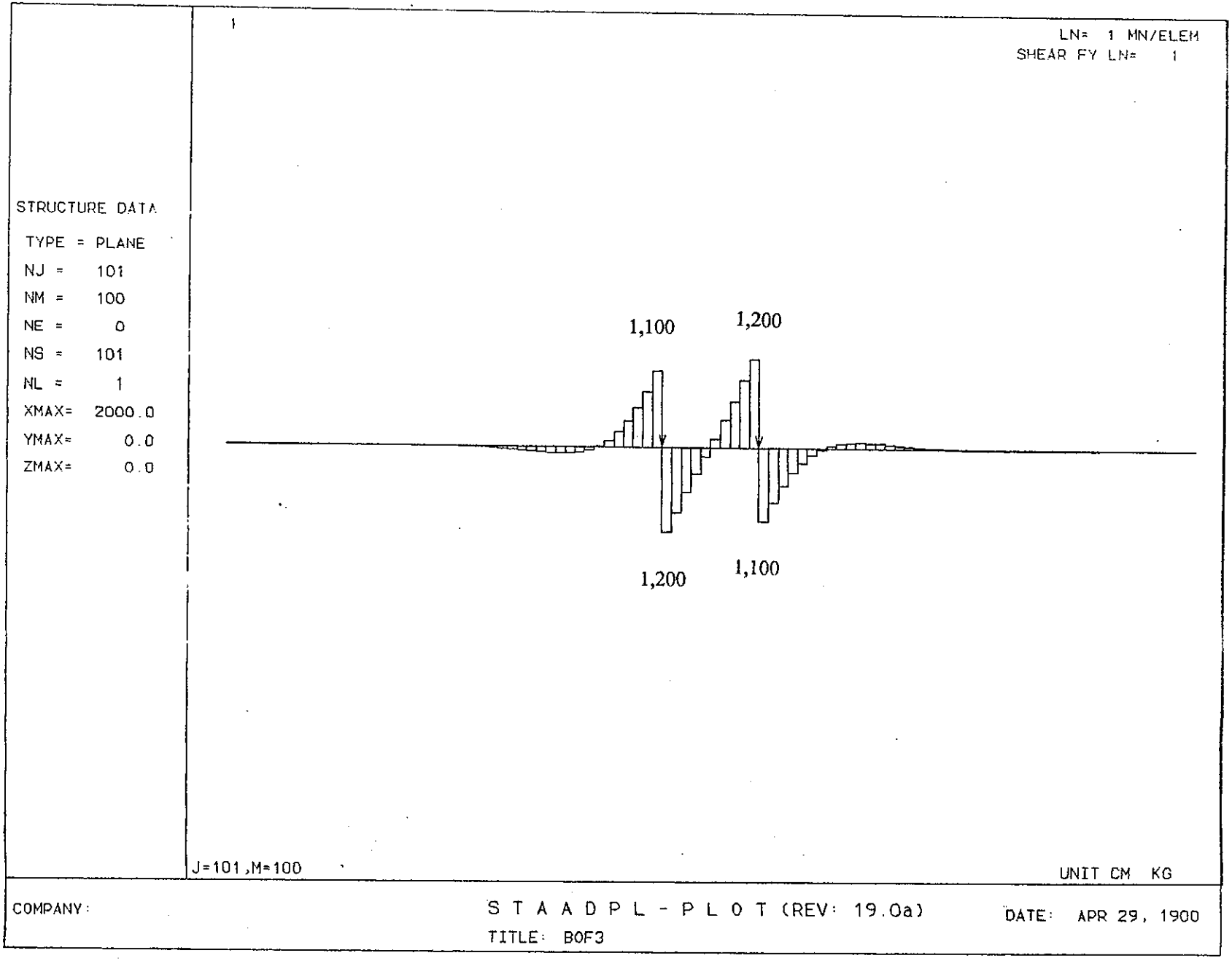
$s_1^1 = 0$ $\qquad$ $s_2^1 = 0$

$s_3^1 = 1197.75$ $\qquad$ $s_4^1 = -54760.14$

$s_1^2 = 1302.24$ $\qquad$ $s_2^2 = 54760.14$

$s_3^2 = 1302.24$ $\qquad$ $s_4^2 = -54760.14$

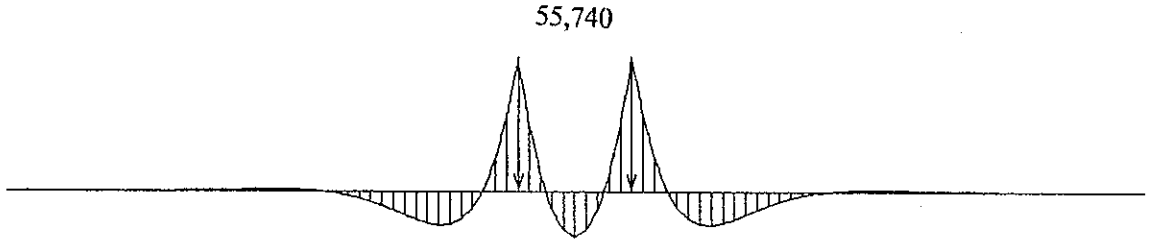
สามารถนำมาเขียนเป็น ไดอะแกรมได้ดังนี้


1
LN= 1 MN/ELEM
SHEAR FY LN= 1
STRUCTURE DATA
TYPE = PLANE
NJ = 101
NM = 100
NE = 0
NS = 101
NL = 1
XMAX= 2000.0
YMAX= 0.0
ZMAX= 0.0
1,100
1,200
1,200
1,100
J=101,M=100
UNIT CM KG
COMPANY:
S T A A D P L - P L O T (REV: 19.0a)
TITLE: BOF3
DATE: APR 29, 1900

STRUCTURE DATA

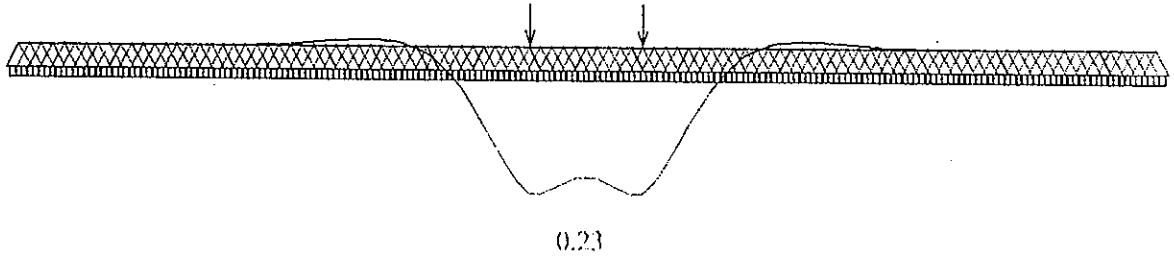
TYPE = PLANE
NJ = 101
NM = 100
NE = 0
NS = 101
NL = 1
XMAX= 2000.0
YMAX= 0.0
ZMAX= 0.0

LN= 1 MN/ELEM
MOMENT MZ LN= 1



1

LN= 1
DFOR LOAD= 1



J=101,M=100

UNIT CM KG

COMPANY:

S T A A D P L O T (RE: 19 0a)

TITLE: BOF3

DATE APR 29, 1900