บทที่ 3
วิธีการคำนวณ

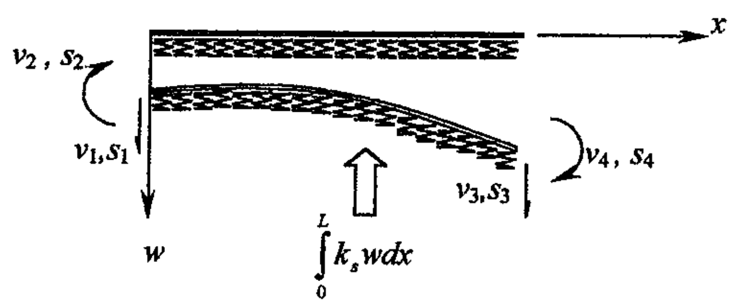
ในบทนี้จะได้อธิบายถึงขั้นตอนการคำนวณ ค่า สติฟเนสเมตริกซ์ของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก ซึ่งก่อนอื่นควรที่จะทำความเข้าใจถึง ความหมายของ สติฟเนสเมตริกซ์ ในปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เสียก่อน

สำหรับชิ้นส่วนคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติกที่ไม่มีแรงกระทำภายในคาน (q = 0) เมื่อเกิดการเคลื่อนที่ขึ้นในลักษณะใดลักษณะหนึ่งก็จะเกิดแรงภายในขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนด้วยเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 3 ซึ่งแรงภายในเหล่านั้นจะมีความสัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ที่ปลายของชิ้นส่วนเป็นดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{..............................(3.1a)}$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$\{s\} = [k]\{v\} \qquad \text{..............................(3.1b)}$$



รูปที่ 3 แสดงการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนคานบนฐานรากอีลาสติกยืดหยุ่นและแรงกระทำที่ปลาย

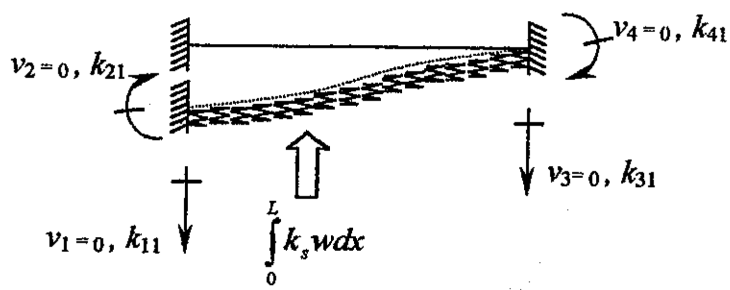
เมื่อ $\{s\}$ หมายถึง ชุดของแรงภายในที่ปลายของชิ้นส่วน ได้แก่ s_1 , s_2 , s_3 และ s_4

$\{v\}$ หมายถึง ชุดของการเคลื่อนที่ที่ปลายของชิ้นส่วน ได้แก่ v_1 , v_2 , v_3 และ v_4

$[k]$ หมายถึง สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานบนฐานรากอีลาสติกยืดหยุ่น

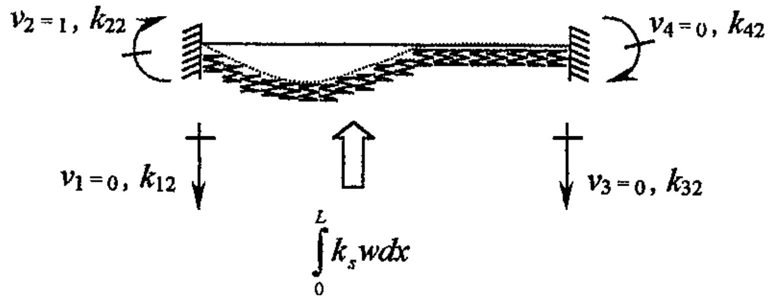
k_{11} , k_{12} , k_{ij} ...k_{44} หมายถึง สมาชิกภายในสติฟเนสเมตริกซ์นั้น

ซึ่งจากสมการ (3.1a) เราจะสังเกตได้ว่า k_{11} , k_{21} , k_{31} และ k_{41} จะหมายถึงชุดของแรงภายในที่ปลายของคานเมื่อเกิดการเคลื่อนที่ที่ปลายขนาด 1 หน่วย ในทิศทางเดียวกับ v_1 ในขณะที่การเคลื่อนที่ ที่ปลายอื่นๆ (v_2 , v_3 และ v_4) ถูกตรึงแน่น (Fixed) ดังแสดงในรูปที่ 4



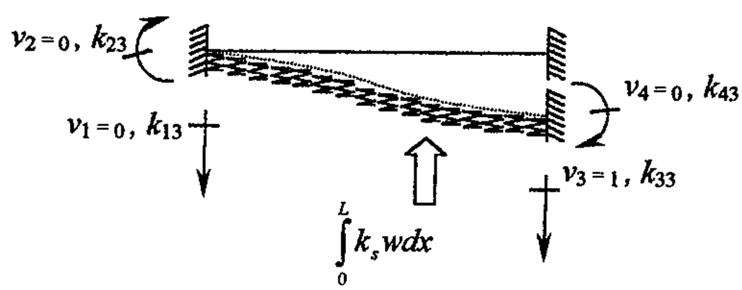
รูปที่ 4 แสดงการโก่งตัวในรูปแบบที่ 1 k_{11} , k_{21} , k_{31}
และ k_{41} เมื่อ $v_1 = 1$ และ $v_2 = v_3 = v_4 = 0$

และสำหรับ ค่าของสมาชิกในสติฟเนสเมตริกซ์ k_{12} , k_{22} , k_{32} และ k_{42} จะได้จากแรงภายในที่ปลายของคานเมื่อเกิดการเคลื่อนที่ที่ปลาย ขนาด 1 หน่วย ในทิศทางเดียวกับ v_2 ในขณะที่การเคลื่อนที่ที่ปลายอื่นๆ (v_1 , v_3 และ v_4) ถูกตรึงแน่นดังแสดงในรูปที่ 5

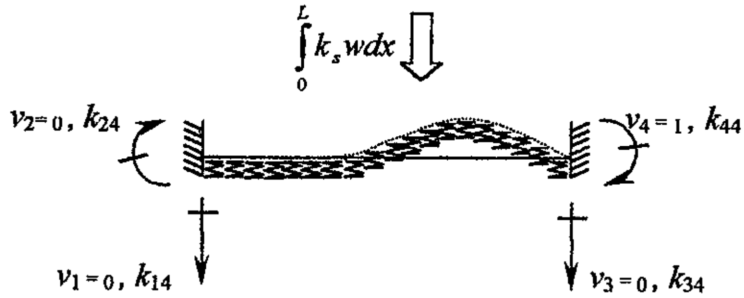


รูปที่ 5 แสดงการโก่งตัวในรูปแบบที่ 2 k_{12} , k_{22} , k_{32}
และ k_{42} เมื่อ $v_2 = 1$ และ $v_1 = v_3 = v_4 = 0$

ในทำนองเดียวกันค่าของสมาชิกในสติฟเนสเมตริกซ์ k_{13} , k_{23} , k_{33} , k_{43} แทน k_{14} , k_{24} , k_{34} และ k_{44} สามารถคำนวณได้จากรูปแบบของการเคลื่อนที่ที่ปลายของชิ้นส่วนคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก ดังแสดงในรูปที่ 6 และ 7 ตามลำดับ



รูปที่ 6 แสดงการโก่งตัวในรูปแบบที่ 3 k_{13} , k_{23} , k_{33}
และ k_{43} เมื่อ $v_3 = 1$ และ $v_1 = v_2 = v_4 = 0$



รูปที่ 7 แสดงการโก่งตัวในรูปแบบที่ 4 k_{14}, k_{24}, k_{34}
และ k_{44} เมื่อ $v_4 = 1$ และ $v_1 = v_2 = v_3 = 0$

3.1 ขั้นตอนการคำนวณ

จากรูปที่ 4 ถึงรูปที่ 7 จะสังเกตุได้ว่า k_{1i} และ k_{3i} จะหมายถึง แรงเฉือนที่ปลายทั้ง 2 ของคาน ในขณะที่ k_{2i} และ k_{4i} จะหมายถึง โมเมนต์ดัดที่ปลายคาน หรืออาจเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} k_{1i} &= -V_i(0) \\ k_{2i} &= M_i(0) \\ k_{3i} &= V_i(L) \\ k_{4i} &= -M_i(L) \end{aligned}\right\} \; ; i = 1,2,3,4 \qquad \text{.................................(3.2)}$$

เมื่อ V_i และ M_i หมายถึง ฟังก์ชั่นของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคานเมื่อเกิดการโก่งตัวตามรูปแบบที่ i

จากฟังก์ชั่นการโก่งของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติกในกรณีที่ไม่มีน้ำหนักกระทำภายในคาน ($q = 0$) ในสมการที่ (2.11) ดังนี้

$$w = e^{\beta x}\left[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right] + e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right]$$

ดิฟเฟอเรนชิเอต สมการข้างบนได้เป็นฟังก์ชั่นของมุมหมุน (Slope) ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} w' &= \beta e^{\beta x}\left[A\cos(\beta x) - A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right] \\ &\quad - \beta e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x) + C\sin(\beta x) - D\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right] \end{aligned}\right\} \ldots(3.3)$$

จากสมการ (2.3) และ (2.4) เราสามารถคำนวณฟังก์ชั่นของโมเมนต์ดัดและแรงเฉือน ได้ดังนี้

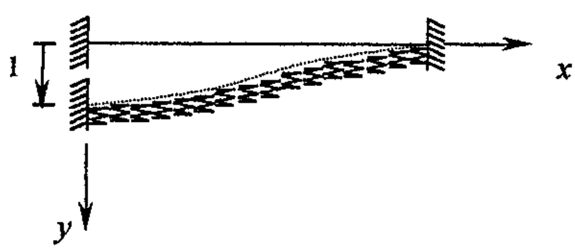
$$M(x) = 2\beta^2 e^{\beta x}\left[-A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\right] + 2\beta^2 e^{-\beta x}\left[C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)\right] \ldots\ldots(3.4)$$

$$\left.\begin{aligned} V(x) &= 2\beta^3 e^{\beta x}\left[-A\cos(\beta x) - A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x) - B\sin(\beta x)\right] \\ &\quad + 2\beta^3 e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x) - C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.5)$$

ซึ่งจะสังเกตได้ว่า ค่าของฟังก์ชั่นต่างๆ จะขึ้นกับค่าคงที่ A , B , C และ D ดังนั้นถ้าเราสามารถคำนวณค่า A , B , C และ D ในแต่ละกรณีได้เมื่อแทนลงในสมการข้างต้น ก็จะได้ฟังก์ชั่นการโก่งตัว มุมหมุน แรงเฉือน และ โมเมนต์ดัดในที่สุด

3.2 สติฟเนสเมตริกซ์ของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก

สำหรับการโก่งตัวในรูปแบบที่ 1



รูปที่ 8 แสดงการโก่งตัวในรูปแบบที่ 1

จากรูปมีเงื่อนไขสภาพขอบ (Boundary Conditions) เป็นดังนี้

$$w(0)=1\,, w'(0)=0\,, w(L)=0,\;\; w'(L)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.6)$$

$$A+0+C+0=w(0)=1\ldots\ldots\ldots(3.7a)$$

$$\beta A+\beta B-\beta C+\beta D=w'(0)=0\ldots\ldots\ldots(3.7b)$$

$$Ae^{\beta L}\cos(\beta L)+Be^{\beta L}\sin(\beta L)+Ce^{-\beta L}\cos(\beta L)+De^{-\beta L}\sin(\beta L)=w(L)=0\ldots\ldots\ldots(3.7c)$$

$$A\beta e^{\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L)+B\beta e^{\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L)$$

$$-C\beta e^{-\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L)+D\beta e^{-\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L)=w'(L)=0\ldots\ldots\ldots(3.7d)$$

เมื่อ A , B , C และ D เป็นค่าคงที่ใด ๆ ดังนั้นเราอาจเขียนแทนด้วย A_1, B_1 , C_1 และ D_1 เพื่อแสดงว่าเป็นค่าคงที่สำหรับการโก่งตัวในรูปแบบที่ 1 หรือเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & \beta & -\beta & \beta \\ e^{\beta L}\cos\beta L & e^{\beta L}\sin\beta L & e^{-\beta L}\cos\beta L & e^{-\beta L}\sin\beta L \\ \beta e^{\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L) & \beta e^{\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L) & -\beta e^{-\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L) & \beta e^{-\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.8)$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ A_1, B_1 , C_1 และ D_1 เป็นดังนี้

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= \left[\frac{1-2e^{2\beta L}+e^{2\beta L}\cos(2\beta L)-e^{2\beta L}\sin(2\beta L)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]\\
B_1 &= \left[\frac{-1+e^{2\beta L}\cos(2\beta L)+e^{2\beta L}\sin(2\beta L)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]\\
C_1 &= \left[\frac{e^{2\beta L}\left(-2+e^{2\beta L}+\cos(2\beta L)+\sin(2\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]\\
D_1 &= \left[\frac{e^{2\beta L}\left(e^{2\beta L}-\cos(2\beta L)+\sin(2\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{..........................(3.9)}
$$

จากนั้นแทนสมการข้างต้นลงในสมการที่ (3.4) และ (3.5) แล้วแทนฟังก์ชั่นที่ได้ ลงในสมการที่ (3.2) จะได้ค่า สมาชิกในสติฟเนสเมตริกซ์ k_{11} , k_{21} , k_{31} และ k_{41} เป็นดังนี้

$$
\left.\begin{aligned}
k_{11} &= \left[\frac{4\beta^3 EI(-1+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\sin(2\beta L))}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]\\
k_{21} &= \left[\frac{2\beta^2 EI(1+e^{4\beta L}-2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]\\
k_{31} &= \left[\frac{8\beta^3 e^{\beta L} EI(\cos(\beta L)-e^{2\beta L}\cos(\beta L)-\sin(\beta L)-e^{2\beta L}\sin(\beta L))}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]\\
k_{41} &= \left[\frac{8\beta^2 e^{\beta L} EI(-1+e^{2\beta L})\sin(\beta L)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{......(3.10)}
$$

สำหรับการโก่งตัวในรูปแบบที่ 2 (ดูรูปที่ 5)
มีเงื่อนไขของสภาพขอบเป็นดังนี้

$$w(0)=0\ ,w'(0)=1\ ,w(L)=0,\ \ w'(L)=0 \qquad \text{..............................(3.11)}$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.11) และ (3.3) ลงในเงื่อนไขสภาพขอบแล้วใช้สัญลักษณ์ A_2, B_2, C_2และ D_2 แทน A, B, C และ D จะได้สมการในรูปแบบเมตริกซ์เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & \beta & -\beta & \beta \\ e^{\beta L}\cos\beta L & e^{\beta L}\sin\beta L & e^{-\beta L}\cos\beta L & e^{-\beta L}\sin\beta L \\ \beta e^{\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L) & \beta e^{\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L) & -\beta e^{-\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L) & \beta e^{-\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..............................(3.12)

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \left[\frac{-2e^{2\beta L}\sin^2(\beta L)}{\beta(1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right] \\ B_2 &= \left[\frac{1-e^{2\beta L}+e^{2\beta L}\sin(2\beta L)}{\beta(1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right] \\ C_2 &= \left[\frac{2e^{2\beta L}\sin^2(\beta L)}{\beta(1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right] \\ D_2 &= \left[\frac{e^{2\beta L}\left[-1+e^{2\beta L}-\sin(2\beta L)\right]}{\beta(1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{..............................(3.13)}$$

แทน A_2 , B_2 , C_2 , D_2 ลงในสมการที่ (3.4) , (3.5) และ (3.2) จะได้

$$
\left.
\begin{aligned}
k_{12} &= \left[\frac{2\beta^2 EI\left(1+e^{4\beta L}-2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{22} &= \left[\frac{2\beta\ EI\left(-1+e^{4\beta L}-2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{32} &= \left[\frac{8\beta^2 e^{\beta L} EI\left(1-e^{2\beta L}\right)\sin(\beta L)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{42} &= \left[\frac{4\beta e^{\beta L} EI\left(\cos(\beta L)-e^{2\beta L}\cos(\beta L)+\sin(\beta L)+e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]
\end{aligned}
\right\}\text{.........}(3.14)
$$

สำหรับการโก่งตัวในรูปแบบที่ 3 และ 4 ด้วยวิธีการในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

$$
\left.
\begin{aligned}
A_3 &= \left[\frac{e^{\beta L}\left(-\cos(\beta L)+e^{2\beta L}\cos(\beta L)+\sin(\beta L)+e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
B_3 &= \left[\frac{e^{\beta L}\left(\cos(\beta L)-e^{2\beta L}\cos(\beta L)-3\sin(\beta L)+e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
C_3 &= \left[\frac{e^{\beta L}\left(\cos(\beta L)-e^{2\beta L}\cos(\beta L)-\sin(\beta L)-e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
D_3 &= \left[\frac{e^{\beta L}\left(\cos(\beta L)-e^{2\beta L}\cos(\beta L)+\sin(\beta L)-3e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]
\end{aligned}
\right\}\text{........................}(3.15)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
k_{13} &= \left[\frac{8\beta^3 e^{\beta L} EI\left(\cos(\beta L) - e^{2\beta L}\cos(\beta L) - \sin(\beta L) - e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{23} &= \left[\frac{8\beta^2 e^{\beta L} EI\left(1 - e^{2\beta L}\right)\sin(\beta L)}{1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{33} &= \left[\frac{4\beta^{3EI}\left(-1 + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\right)}{1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{43} &= \left[\frac{2\beta^2 EI\left(-1 - e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)\right)}{1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(3.16)
$$

และ

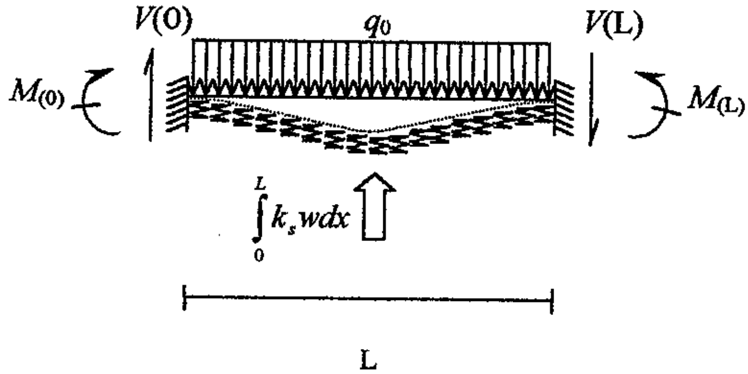
$$
\left.\begin{aligned}
A_4 &= \left[\frac{e^{\beta L}(1 - e^{2\beta L})\sin(\beta L)}{\beta(1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right] \\
B_4 &= \left[\frac{e^{\beta L}\left(-\cos(\beta L) + e^{2\beta L}\cos(\beta L) - 2\sin(\beta L)\right)}{\beta(1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right] \\
C_4 &= \left[\frac{e^{\beta L}(-1 + e^{2\beta L})\sin(\beta L)}{\beta(1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right] \\
D_4 &= \left[\frac{e^{\beta L}\left(\cos(\beta L) - e^{2\beta L}\cos(\beta L) + 2e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{\beta(1 - 4e^{2\beta L} + e^{4\beta L} + 2e^{2\beta L}\cos(2\beta L))}\right]
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.17)
$$

$$\left.\begin{aligned}
k_{14} &= \left[\frac{8\beta^2 e^{\beta L} EI\left(-1+e^{2\beta L}\right)\sin(\beta L)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{24} &= \left[\frac{4\beta e^{\beta L} EI\left(\cos(\beta L)-e^{2\beta L}\cos(\beta L)+\sin(\beta L)+e^{2\beta L}\sin(\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{34} &= \left[\frac{2\beta^2 EI\left(-1-e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right] \\
k_{44} &= \left[\frac{2\beta\ EI\left(-1+e^{4\beta L}-2e^{2\beta L}\sin(2\beta L)\right)}{1-4e^{2\beta L}+e^{4\beta L}+2e^{2\beta L}\cos(2\beta L)}\right]
\end{aligned}\right\}\text{..................(3.18)}$$

จะสังเกตได้ว่า ถ้าเรานำค่า $[k]$ มาเขียนเรียงตั้งแต่ $k_{11}, k_{12}, k_{ij},..., k_{44}$ ในรูปแบบเมตริกซ์ขนาด 4x4 พบว่าสติฟเนสเมตริกซ์ที่ได้มีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์สมมาตร ($k_{ij}=k_{ji}$)

3.4 คานยึดปลายบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก

ในบางลักษณะของปัญหาที่เราพบบ่อยได้แก่ กำแพง ผนัง และ กำแพงกันดิน เราสามารถใช้ Beam on Elastic เพื่อช่วยประหยัดต้นทุนดังเช่นกล่าวมาในบทนำ



รูปที่ 9 แสดงการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนคานยึดปลายสองข้าง ซึ่งถูกแรงกระจายขนาดสม่ำเสมอกระทำบนฐานรากอีลาสติกยืดหยุ่น

ฟังก์ชั่นการโก่งของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติกในกรณีที่มีน้ำหนักกระจายขนาดสม่ำเสมอกระทำตลอดคาน ($q = q_0$) สามารถเขียนในรูปของคำตอบทั่วไปได้ดังนี้

$$w = \frac{q_0}{4\beta^4} + e^{\beta x}\left[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right] + e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right]$$

.................................(3.19)

ดิฟเฟอเรนชิเอต สมการข้างบนได้เป็นฟังก์ชั่นของมุมหมุน (Slope) ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} w' &= \beta e^{\beta x}\left[A\cos(\beta x) - A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right] \\ &\quad - \beta e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x) + C\sin(\beta x) - D\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right] \end{aligned}\right\}$$

.................................(3.20)

และจากสมการ (2.3) และ (2.4) เราสามารถคำนวณฟังก์ชั่นของโมเมนต์ดัดและแรงเฉือน ได้ดังนี้

$$M(x) = 2\beta^2 e^{\beta x}\left[-A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\right] + 2\beta^2 e^{-\beta x}\left[C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)\right] \ldots.(3.21)$$

$$\left.\begin{aligned} V(x) &= 2\beta^3 e^{\beta x}\left[-A\cos(\beta x) - A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x) - B\sin(\beta x)\right] \\ &\quad + 2\beta^3 e^{-\beta x}\left[C\cos(\beta x) - C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(3.22)$$

ซึ่งจะสังเกตได้ว่า ค่าของฟังก์ชั่นต่างๆ จะขึ้นกับค่าคงที่ A , B , C และ D ดังนั้นถ้าเราสามารถคำนวณค่า A , B , C และ D ในแต่ละกรณีได้เมื่อแทนลงในสมการข้างต้น ก็จะได้ฟังก์ชั่นการโก่งตัว มุมหมุน แรงเฉือน และ โมเมนต์ดัดในที่สุด

จากรูปมีเงื่อนไขสภาพขอบ (Boundary Conditions) เป็นดังนี้

$$w(0) = 0\,,\, w'(0) = 0\,,\, w(L) = 0,\;\; w'(L) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.23)$$

$$\frac{q_0}{4\beta^4} + A + 0 + C + 0 = w(0) = 0 \ldots\ldots.(3.24a)$$

$$\beta A + \beta B - \beta C + \beta D = w'(0) = 0 \ldots\ldots(3.24b)$$

$$\frac{q_0}{4\beta^4} + Ae^{\beta L}\cos(\beta L) + Be^{\beta L}\sin(\beta L) + Ce^{-\beta L}\cos(\beta L) + De^{-\beta L}\sin(\beta L) = w(L) = 0 \ldots..(3.24c)$$

$$\begin{aligned} &A\beta e^{\beta L}(\cos\beta L - \sin\beta L) + B\beta e^{\beta L}(\cos\beta L + \sin\beta L) \\ &\qquad - C\beta e^{-\beta L}(\cos\beta L + \sin\beta L) + D\beta e^{-\beta L}(\cos\beta L - \sin\beta L) = w'(L) = 0 \ldots\ldots(3.24d) \end{aligned}$$

เขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & \beta & -\beta & \beta \\ e^{\beta L}\cos\beta L & e^{\beta L}\sin\beta L & e^{-\beta L}\cos\beta L & e^{-\beta L}\sin\beta L \\ \beta e^{\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L) & \beta e^{\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L) & -\beta e^{-\beta L}(\cos\beta L+\sin\beta L) & \beta e^{-\beta L}(\cos\beta L-\sin\beta L) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\dfrac{q_0}{4\beta^4} \\ 0 \\ -\dfrac{q_0}{4\beta^4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..............................(3.25)

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ A, B, C และ D เป็นดังนี้

$$\left.\begin{aligned} A&=\left[\frac{4q\left(-1+e^{\beta L}\cos(\beta L)+e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}{\beta^{4EI}\left(1-e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right] \\ B&=\left[\frac{4q\left(-1+e^{\beta L}\cos(\beta L)-e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}{\beta^{4EI}\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right] \\ C&=\left[\frac{4qe^{\beta L}\left(-e^{\beta L}+\cos(\beta L)-\sin(\beta L)\right)}{\beta^{4EI}\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right] \\ D&=\left[\frac{4qe^{\beta L}\left(-e^{\beta L}+\cos(\beta L)+\sin(\beta L)\right)}{\beta^{4EI}\left(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L)\right)}\right] \end{aligned}\right\}$$

..............................(3.26)

จากนั้นแทนสมการข้างต้นลงในสมการที่ (3.21) และ (3.22)
จะได้ค่า $V(0)$, $V(\mathrm{L})$, $M(0)$ และ $M(\mathrm{L})$ เป็นดังนี้

$$
\left.
\begin{aligned}
V(0) &= \left[\frac{16q(1+e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\cos(\beta L))}{\beta(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L))}\right] \\
M(0) &= \left[\frac{-8q(-1+e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\sin(\beta L))}{\beta^{2}(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L))}\right] \\
V(L) &= \left[\frac{16q(-1-e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\cos(\beta L))}{\beta(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L))}\right] \\
M(L) &= \left[\frac{-8q(-1+e^{2\beta L}-2e^{\beta L}\sin(\beta L))}{\beta^{2}(-1+e^{2\beta L}+2e^{\beta L}\sin(\beta L))}\right]
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.27)
$$

จากค่า $V(0)$, $V(\mathrm{L})$, $M(0)$ และ $M(\mathrm{L})$ ที่ได้ จะสังเกตุได้ว่า $V(0) = -V(\mathrm{L})$ และ $M(0) = M(\mathrm{L})$ ซึ่งเป็นตามคุณสมบัติการสมมาตร