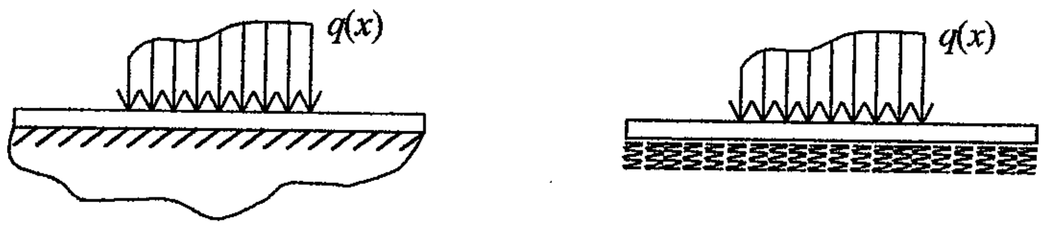
บทที่2

หลักการและทฤษฎี

2.1 คานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก (Beam on Elastic Foundation)

เราจะสืบสาวลำดับชั้นของปัญหาในการโก่งงอของคาน ที่จะนำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์ของ elastic curve ซึ่งมีความแตกต่างจากที่เราเคยศึกษามาก่อน โดย “elastic foundation” พวกเราหมายถึง คานที่รับแรงกระทำแล้วตอบรับโดยการเสียรูปของคาน และเกิดแรงต้านที่เป็นสัดส่วนกับการเบนออกของคาน เราจะคิดให้ฐานรากเป็นสปริงจำนวนมากวางอยู่อย่างสม่ำเสมอที่ใต้คาน ดังแสดงในรูปที่ 1



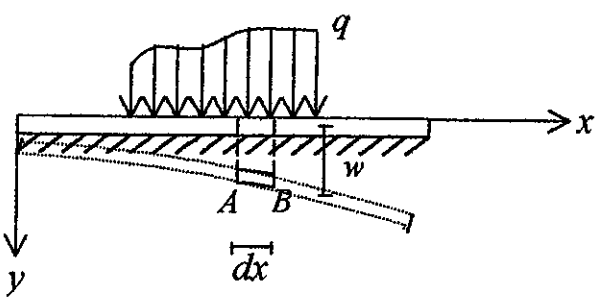
รูปที่ 1 แสดงการจำลองดินใต้คานเป็นฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก

2.2 สมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

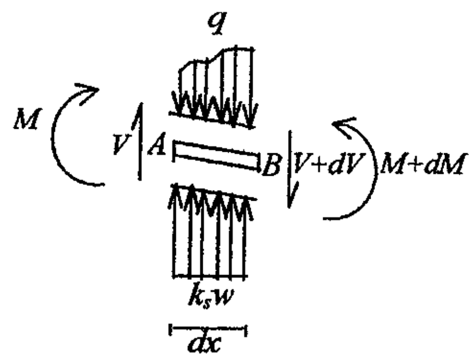
เมื่อคานดังกล่าวรับแรงกระทำในแนวดิ่งจะเกิดการโก่งตัวขึ้นจากแนวเดิมซึ่งเราจะใช้สมมุติฐานเพื่อช่วยในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

2.2.1 คานดังกล่าวมีพฤติกรรมเป็นตามทฤษฎีคานของ Bernulli – Navier’s

2.2.2 แรงปฏิกริยาจากสปริงที่แต่ละจุดจะมีความเข้มเป็นสัดส่วนกับระยะโก่งตัวของคานนั้นจากแนวเดิมโดยค่าสัดส่วนดังกล่าว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ k_s มีหน่วยเป็น แรงต่อความยาวกำลังสองและเรียกว่าโมดูลัสของฐานราก (สมมุติฐานของ Winkler)



รูปที่ 2ก แสดงการโก่งตัวจากแนวเดิมของคาน เมื่อรับแรงกระทำ



รูปที่ 2ข แสดงชิ้นส่วนเล็ก ๆ AB และแรงที่กระทำ

2.3 สมการควบคุม (Governing Equation)

จากสมมุติฐานข้อที่ 2 เราจะใช้สมการสมดุลของชิ้นส่วนเล็ก ๆ AB (ในรูปที่ 2ข)เพื่อวิเคราะห์หาสมการควบคุมของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก ดังนี้

สมดุลของแรงในแนวดิ่ง $\left[\sum F_y = 0\right]$:

$$(V + dV) - V + q dx - k_s w\, dx = 0$$

จัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{dV}{dx} + q - k_s w = 0 \qquad \text{.....................................(2.1)}$$

โดยที่ dx หมายถึง ความยาวของชิ้นส่วนเล็ก ๆ AB

V หมายถึง แรงเฉือน (กำหนดให้มีทิศทางเป็นบวกถ้ามีทิศทางตามที่แสดงใน รูป 2ข)

dV หมายถึง การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน จากจุด A มายังจุด B

q หมายถึง ความเข้มของแรงที่กระทำลงบนคานในแนวดิ่ง

w หมายถึง ระยะโก่งตัวลงของชิ้นส่วน AB

<u>สมดุลของโมเมนต์</u> $\left[\sum M_B = 0\right]$:

$$Vdx + M - (M + dM) - q\,dx\frac{dx}{2} + k_s\, w\,dx\frac{dx}{2} = 0$$

เมื่อ dx มีค่าน้อยมาก ๆ จะได้ว่า

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad \text{.....................................(2.2)}$$

โดยที่ M หมายถึง โมเมนต์ดัด มีทิศทางที่เป็นบวกดังแสดงในรูปที่ 2ข

dM หมายถึง การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์จากจุด A มายังจุด B

และจากสมมติฐานข้อแรก ความสัมพันธ์ของ โมเมนต์ และ ความโค้งงอ (curvature) เป็นไปตามสมการของ Bernulli

$$M = -EI\frac{d^2 w}{dx^2} \qquad \text{.....................................(2.3)}$$

โดยที่ E หมายถึง ค่าอีลาสติกโมดูลัสของคาน

I หมายถึง โมเมนต์อินเนอร์เชียของหน้าตัดคาน

เมื่อแทนสมการที่ (2.3) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$V = -EI\frac{d^3w}{dx^3} \qquad \text{.......................................(2.4)}$$

จากนั้นแทนสมการที่ (2.4) ลงในสมการที่ (2.1) เราจะได้สมการควบคุมของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก เป็นไปตามสมการที่ (2.5) ดังนี้

$$-EI\frac{d^4w}{dx^4} + q - k_s w = 0$$

จัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{k_s w}{EI} = \frac{q}{EI} \qquad \text{.......................................(2.5)}$$

เมื่อค่าโมดูลัสของฐานราก k_s มีค่าคงที่ เราจะเรียกสมการควบคุมดังกล่าวว่าเป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นดีกรี 4 (Linearly Fourth Order Differential Equation) เพื่อความสะดวกในการแก้สมการจึงได้กำหนดค่าสัญลักษณ์ $\beta = \left(\frac{k_s}{4EI}\right)^{\frac{1}{4}}$ ขึ้น โดย $\beta \geq 0$ เสมอ แล้วแทนลงในสมการ ที่ (2.5) จะได้ สมการควบคุมของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติกอีกรูปแบบหนึ่ง ดังนี้

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{q}{EI} \qquad \text{.......................................(2.6)}$$

2.4 <u>คำตอบทั่วไป (General Solution)</u>

สำหรับคำตอบทั่วไป (w) ของสมการที่ (2.6) เราอาจเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของคำตอบเฉพาะและค่าคำตอบประกอบ ดังนี้

$$w = w_c + w_p \qquad \text{.....................................(2.7)}$$

เมื่อ w_p หมายถึง คำตอบเฉพาะ (Particular Integral) ใด ๆ ก็ได้ที่สามารถทำให้สมการที่ (2.7) เป็นจริง โดยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของแรงที่มากระทำ (q) เป็นสำคัญดังนี้

$$\frac{d^4 w_p}{dx^4} + 4\beta^4 w_p = \frac{q}{EI} \qquad \text{.....................................(2.8)}$$

และ w_c หมายถึง คำตอบประกอบ (Complementary Solution) ซึ่งจะเป็นตามสมการอนุพันธ์ที่มีพจน์ขวามือเป็นศูนย์ ในที่นี้คือ

$$\frac{d^4 w_c}{dx^4} + 4\beta^4 w_c = 0 \qquad \text{.....................................(2.9)}$$

2.5 <u>คำตอบประกอบ (Complementary Solution)</u>

สมมติให้ w_c อยู่ในรูปของ e^{rx} แล้วแทนลงในสมการที่ (2.9) จะได้ว่า

$$r^4 e^{rx} + 4\beta^4 e^{rx} = 0$$

จัดรูปสมการ

$$e^{rx}(r^4 + 4\beta^4) = 0$$

ซึ่งสมการดังกล่าวจะเป็นจริงเมื่อ

$$r^4 + 4\beta^4 = 0 \qquad \text{.................................(2.10)}$$

สมการที่ (2.10) เป็นสมการพหุนามดีกรี 4 จะมีคำตอบ 4 ค่าคือ

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{2}\beta\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \beta(1+i) \\ r_2 &= \sqrt{2}\beta\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \beta(-1+i) \\ r_3 &= \sqrt{2}\beta\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \beta(-1-i) \\ r_4 &= \sqrt{2}\beta\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \beta(1-i) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.11)$$

เมื่อ r_1, r_2, r_3, r_4 คือ คำตอบของสมการ ที่ (2.10) นั่นเอง
จากสมการที่ (2.11) เราสามารถเขียน คำตอบประกอบ ได้ดังนี้

$$w_c = \overline{A}e^{(1+i)\beta x} + \overline{B}e^{(1-i)\beta x} + \overline{C}e^{(-1+i)\beta x} + \overline{D}e^{(-1-i)\beta x}$$

และจากสูตรของออยเลอร์ (Euler's Formular) จะได้ว่า

$$w_c = e^{\beta x}\left[\overline{A}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \overline{B}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] + e^{-\beta x}\left[\overline{C}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \overline{D}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$w_c = e^{\beta x}\left[\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\cos\beta x + \left(\overline{A}-\overline{B}\right)i\sin\beta x\right] + e^{-\beta x}\left[\left(\overline{C}+\overline{D}\right)\cos\beta x + \left(\overline{C}-\overline{D}\right)i\sin\beta x\right]$$

เมื่อ สัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน $\cos\beta x$ และ $\sin\beta x$ ล้วนเป็นค่าคงที่ทั้งสิ้น ดังนั้นสมการข้างบน
จึงอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$w_c = e^{\beta x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right] + e^{-\beta x}\left[C\cos\beta x + D\sin\beta x\right] \qquad \ldots..(2.12)$$

โดยที่ A , B , C และ D จะหมายถึงค่าคงที่ซึ่งจะขึ้นกับเงื่อนไขสภาพขอบ (Boundary Conditions) ที่ปลายทั้งสองของคาน

ในบทถัดไปเราจะได้กล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์เพื่อให้ได้สติฟเนสเมตริกซ์ของคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติก โดยจะใช้ค่าคำตอบประกอบที่ได้มานี้ ร่วมกับเงื่อนไขสภาพขอบที่เหมาะสม เพื่อให้ฟังก์ชันการโก่งตัวอยู่ในรูปแบบที่ต้องการ และจะได้กล่าวถึงแรงยึดแน่นปลายสำหรับคานบนฐานรากยืดหยุ่นอีลาสติกในกรณีที่รับแรงกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวของคานไว้อีกส่วนหนึ่งด้วย