บทที่ 3

ทฤษฎีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

3.1 พื้นฐานของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นการจำลองสะถานะที่สภาวะต่างๆ ให้เหมือนของจริงให้มากที่สุดโดยใช้การเก็บข้อมูลทางสถิติ และ ทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวของกับระบบการทำงานเครื่อง สามารถเขียนแบบจำลองที่สภาวะต่างๆเข้าในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีระบบเหมือนของจริง.

3.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การทำหม้อไอน้ำต้องอาศัย ค่าที่เป็นข้อมูลเกี่ยวกับเครื่องที่จะนำมาสร้างข้อมูลต่างๆที่เก็บไว้เป็นสถิติ และหาสูตรที่มีผลต่อเครื่องที่สามารถแทนค่าต่างๆเข้าไปในสูตรก็จะ ได้ค่าที่ต้องการ ตามความเป็นจริง แต่ว่าการเก็บข้อมูลต่างๆ ไม่สามารถเก็บได้ถูกต้องเต็มร้อยเปอร์เซ็นต์ ฉะนั้นอาจมีค่าผิดพลาดอยู่บ้างต้องพยายามให้ค่าเข้าใกล้เคียงกับของจริงให้มากที่สุด เป็นหัวใจในการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อให้แน่ใจว่าการทำถูกต้อง เราจะนำค่าที่ได้แต่เครื่องมาใส่สูตรที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมเพื่อจะสามารถเก็บข้อมูลเข้าทีละมากๆ แล้ว ค่าที่ออกมาทำการถดถอย เพื่อต้องการค่าที่ถูกต้องที่มีความเป็นไปได้ของเครื่องที่มาใส่จริงๆ

ดังนั้นได้มีการพัฒนาแบบจำลองขึ้นอย่างมากและได้จัดเป็นสามหมวดแตกต่างกันดังกลุ่มนี้

1.physical model ทฤษฎีของโมลเคลริงได้พัฒนาเข้าตามกฎทางเคมี และ ฟิสิกช์

2.Empirical models มาจากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่มีการเก็บสถิติไว้เป็นข้อมูล

3.Semiempirical models เป็นการรวมเข้ากันคือใช้ทั้งวิธีที่หนึ่งและสองหรือมีเครื่องวัด ข้อมูล

3.2.1 หลักการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหม้อไอน้ำ

ก่อนอื่นต้องเข้าใจถึงหม้อไอน้ำว่าทำไมถึงทำก็เพราะว่าหม้อไอน้ำมีประโยชน์มากในโรงงานอุตสาหกรรมที่ต้องใช้ไอน้ำเห็นว่ามันเป็นการสิ้นเปลืองที่นำเครื่องมาทดลองหลายครั้งมีความเสี่ยงเกิดอันตรายเพราะว่าหม้อไอน้ำเป็นระเบิดที่ทำงานตลอดเวลาที่ต้องการดูแลเป็นอย่างดี ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหม้อไอน้ำจะมีหลักการสร้างดังนี้คือ

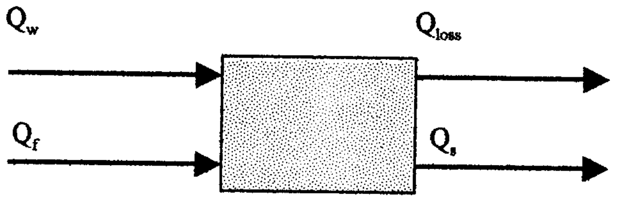
ขั้นแรก คือ การศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการทำแบบจำลองของสิ่งที่จะสร้างในโครงงานนี้คือหม้อไอน้ำเมื่อเราเข้าใจถึงระบบการทำงานต่างๆแล้วจึงทำการกำหนดว่าจะสร้างในแบบแผน อย่างไรซึ่งในโครงงานนี้เราได้ทดลองเก็บค่าข้อมูลแบ่งไว้เป็นชุดโดยที่ชุดที่ 1 จะนำมาสร้างเป็นตัวแปรที่จะหาค่าคงที่ของหม้อไอน้ำหรือในโปรแกรมคือค่า A ,B นั้นเอง

ขั้นที่สอง คือ นำข้อมูลที่ได้มาศึกษาหาสมการที่เกี่ยวข้องว่ามีตัวแปรต่างๆ จำนวนเท่าไรมีอะไรบ้างในสมการ

ขั้นที่สาม คือ นำสมการที่ได้เขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยที่โปรแกรมแรกจะเป็นโปรแกรมที่ใช้หาค่าคงที่ของหม้อไอน้ำจากข้อมูลจำนวน 10 ตัวและเมื่อสามารถทำงานหาค่าคงที่ได้แล้วขั้นต่อไปคือสร้างโปรแกรมทำนายผล(Prediction) ซึ่งจะใช้ค่าคงที่ของโปรแกรมแรกนำมาประมาณหาค่าอุณหภูมิและความดันของข้อมูลที่เราใช้ทดสอบ

3.2.1.1 สมดุลความร้อนของหม้อไอน้ำ

เห็นว่าค่าความร้อนที่เกิดขึ้นของหม้อไอน้ำที่มีอยู่ในระบบมีดั่งนี้.



รูปที่ 3.1 ค่าความร้อนที่แสดงจากแบบจำลองของหม้อไอน้ำ

Q_w	เป็นความร้อนที่เกิดขึ้นจากน้ำที่เข้าหม้อไอน้ำ	(kJ/kg)
Q_f	เป็นความร้อนที่เกิดขึ้นจากน้ำมันที่เข้าหม้อไอน้ำ	(kJ/kg)
Q_{loss}	เป็นความร้อนที่เกิดขึ้นจากการศูนย์เสียต่างที่เกิดจากหม้อไอน้ำ	(kJ/kg)
Q_s	เป็นความร้อนที่เกิดขึ้นจากการไหลออกของไอน้ำ	(kJ/kg)

ค่าพลังงานความร้อนหาได้จากสูตร

$$Q_w = M_w * C_p * T_{win}$$

$$Q_f = M_f * (LHV)$$

$$Q_s = M_s * H_g$$

$$Q_{loss} = Q_f + Q_w - Q_s$$

ความหมายค่าแต่ละค่า.

M_w	อัตราการไหลของน้ำที่เข้าหม้อไอน้ำ	(kg/hr)
M_f	อัตราการไหลของน้ำมันที่ไหลเขาหม้อไอน้ำ	(kg/hr)

M_s อัตราการไหลของไอน้ำที่ออกจากหม้อไอน้ำ (kg/hr)

C_p ค่าความจุความร้อนของน้ำที่สภาวะต่างๆ (kJ/kg)

T_{win} อุณหภูมิที่น้ำไหลเข้าบอยเลอร์ (°C)

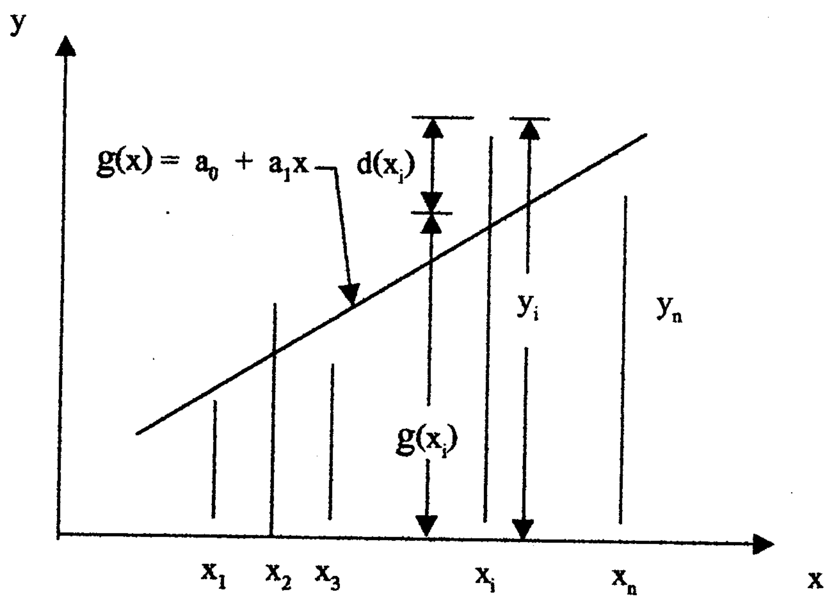
(LHV) ค่าความร้อนการเผาไหม้ของเชื้อเพลิง (kJ/kg)

H_g เอ็นโทรปีของไอน้ำที่ออกจากหม้อไอน้ำ (kJ/kg)

หลังจากที่เก็บข้อมูลมา 4 ชุด ที่เวลา 5 นาที 2 ชุดและ ที่เวลา 10 นาที 2 ชุด แต่ละครั้งให้เก็บอย่างละ 10 ข้อมูลเพื่อนำมาใส่ในโปรแกรม แต่เนื่องจากเราดูความเป็นไปของข้อมูลว่ามีแนวโน้มอย่างไรเพื่อจะสามารถใช้วิธีทางการถดถอยว่าเป็นเชิงเส้นลักษณะอย่างไร เราตรวจสอบแล้วว่าเป็นเส้นตรงความชันเพิ่มขึ้น

สมการถดถอยเชิงเส้นดังนี้

สมการที่ (3.1) $$g(x) = a_0 + a_1x$$



รูปที่ 3.2 การถดถอยแบบเชิงเส้นโดยการประดิษฐ์ฟังก์ชันเส้นตรงจากชุดข้อมูลที่กำหนดมาให้

จากรูปจะเห็นได้ว่า ณ ตำแหน่ง x_I ของชุดข้อมูล i ใดๆ ค่าของฟังก์ชัน g(x) ที่เราจะประดิษฐ์ขึ้นจะมีค่าที่แตกต่างไปจากค่า ของข้อมูล y_i เท่ากับ $d(x_I)$ ที่ตำแหน่งนั้นนั่นหมายถึงว่าค่าความผิดพลาด E ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากข้อมูลทั้งหมด n ข้อมูล อาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

สมการที่ (3.2)

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left(d\left(x_i\right)\right)^2$$

ซึ่งในที่นี้เราทำการยกกำลังของค่าแตกต่าง $d(x_i)$ ก็เพื่อกำจัดค่าที่อาจมีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนั้น สมการ (3.2) จะให้ความหมายความผิดพลาดทั้งหมด สมการ (3.2) สามารถเขียนได้ว่า

สมการที่ (3.3)

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-g\left(x_i\right)\right)^2$$

แทนสมการ (3.1) ที่ $x=x_i$ ลงในสมการที่ (3.3)

สมการที่ (3.4)

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(a_o+a_1 x_1\right)\right]^2$$

จากสมการ (3.4) นี้เราสามารถหาตัวไม่รู้ค่า a_0 และ a_1 ที่ต้องการได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (least-squares) ซึ่งจากวิธีการหาค่าต่ำสุด (minimization) ของค่าความผิดพลาดโดยเกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่า นั้นคือ

สมการที่ (3.5a)

$$\frac{\delta E}{\delta a_o}=0$$

และสมการที่ (3.5b)

$$\frac{\delta E}{\delta a_1}=0$$

และเงื่อนไขในสมการ (3.5a) ให้ผลดังนี้

$$2\left[\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(a_o+a_1\cdot x_1\right)\right]\right](-1) = 0$$

$$\sum_{I=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_o - \sum_{i=1}^{n} a_1\cdot x_i = 0$$

$$na_o+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

และเงื่อนไขในสมการ (3.5a)ให้ผลดังนี้

$$2\left[\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(a_o+a_1\cdot x_1\right)\right]\right]\left(-x_i\right) = 0$$

$$\sum_{I=1}^{n} x_i\cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} a_o\cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1\cdot x_i^2 = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_o+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i$$

ทั้งสองสมการที่ได้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_o \\ a1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i \end{bmatrix}$$

ซึ่งเราสามารถใช้กฎของเครเมอร์ในการแก้ระบบสมการนี้เพื่อหาค่าคงตัว a_0 และ a_1 ได้ดังนี้

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

ค่าคงตัว a_0 และ a_1 ที่คำนวณได้นี้ เมื่อแทนกลับลงในสมการ (3.1) ก็จะได้สมการเส้นตรงที่แสดงการถดถอยแบบเชิงเส้นที่ต้องการ

ดังนั้น เมื่อสามารถหาค่าของ a_0 และ a_1 เพื่อนำเข้าไปใส่ในสูตรของพลังงานความร้อนของเชื้อเพลิงเพราะว่าพลังงานเชื้อเพลิงที่มีอัตราการไหลน้ำมันไหลสม่ำเสมอ และ เข็มชี้บอกก็มีความถูกต้องถึง 3 หน่วย และในนี้ให้ a_0 และ a_1 เท่ากับ A และ B เพื่อความเข้าใจง่ายขึ้นที่เขียนใส่ในโปรแกรมนี้

$$Q_{loss} = A + B * Q_f$$

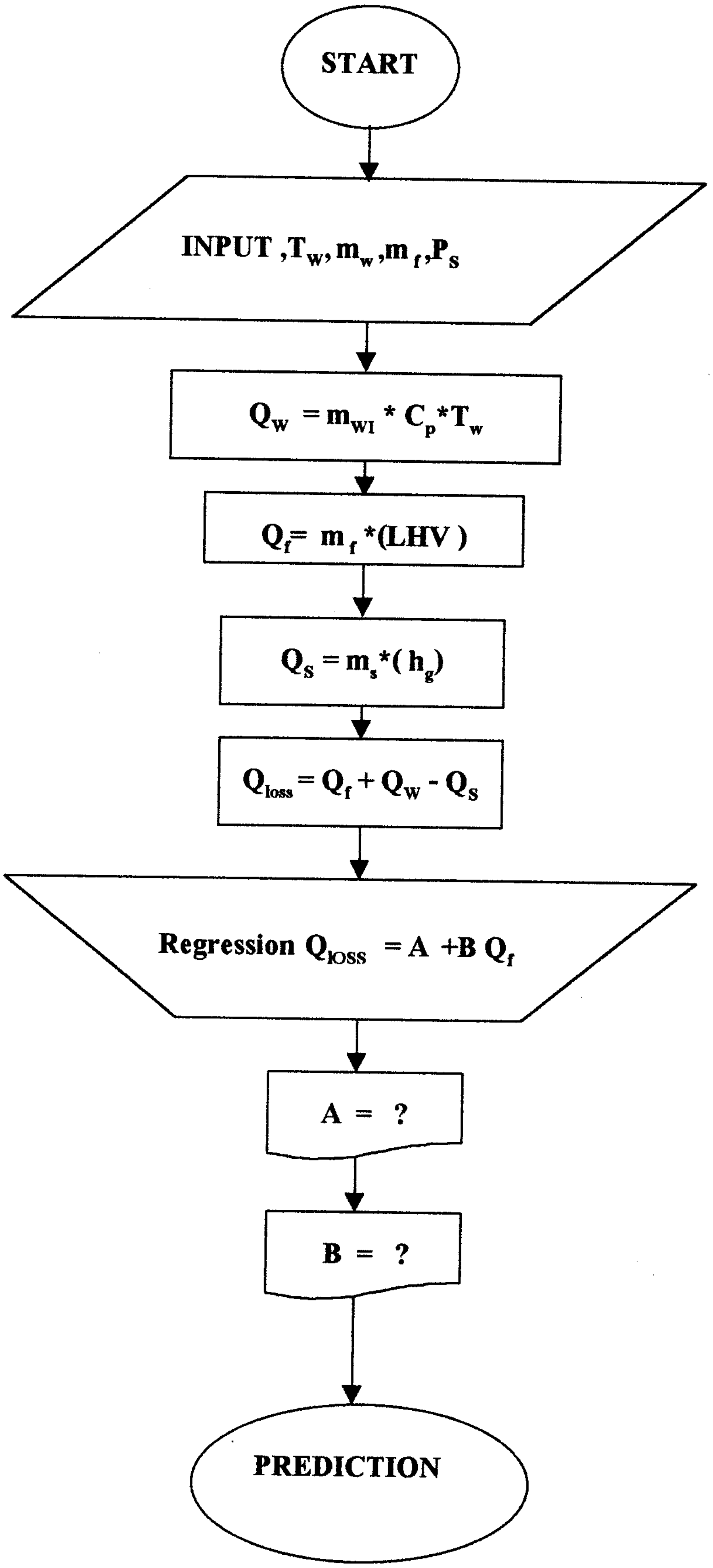
$$Q_w = M_w * C_p * T_{win}$$

$$Q_f = M_f * (HHV)$$

$$Q_s = Q_f + Q_w - Q_{loss}$$

เมื่อได้ค่าของพลังงานของไอน้ำที่ออกจากหม้อไอน้ำเพื่อหาค่าเอนทัลปีเพื่อจะรู้ค่าอุณหภูมิและความดันจากข้อมูลต่างรางมาตรฐานของหม้อไอน้ำ

$$H_g = Q_s / M_s \longrightarrow P\ ,\ T$$


START
INPUT ,T_W, m_w ,m_f ,P_S
$Q_W = m_{WI} * C_p * T_w$
$Q_f = m_f *(LHV)$
$Q_S = m_s *(h_g)$
$Q_{loss} = Q_f + Q_W - Q_S$
Regression $Q_{loss} = A + B\ Q_f$
A = ?
B = ?
PREDICTION

ขั้นตอนการทำนายผลอุณหภูมิและความดัน