

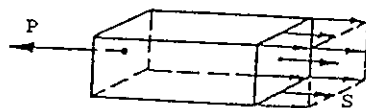
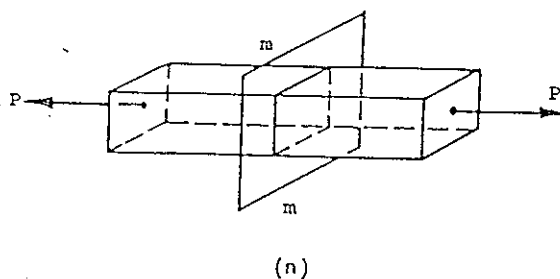
บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

2.1 ความเค้น (Stress)

พิจารณาท่อนวัสดุที่มีพื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากันตลอดดั่งรูปที่ 1 (ก) ถูกดึงด้วยแรงตามแนวแกน P ผ่านจุดเซ็นทรอยด์ (centroid) ของพื้นที่ภาคตัดขวางสมมุติว่าท่อนวัสดุนี้ถูกตัดออกเป็นสองส่วน ด้วยระนาบ mm ซึ่งตั้งฉากกับแนวแรง P จะต้องมีแรงภายใน S บนพื้นที่ภาคตัดขวาง A ด้านกับแรง P เพื่อให้ท่อนวัสดุอยู่ในสภาวะสมดุลดั่งรูปที่ 1 (ข) กล่าวคือ

$$S = P \quad (2.1)$$



รูปที่ 1 ความเค้นในท่อนวัสดุ

จะเห็นได้ว่า

$$S = \int \sigma dA$$

สำหรับภาคตัดขวางซึ่งห่างจากปลายที่แรง P กระทำพอสมควร สามารถสมมุติว่า ความเค้นกระจายสม่ำเสมอตลอดบนภาคตัดขวางนั้น ๆ ดังนั้น

หรือ

$$S = \frac{P}{A}$$

$$\sigma = \frac{S}{A} \quad (2.2)$$

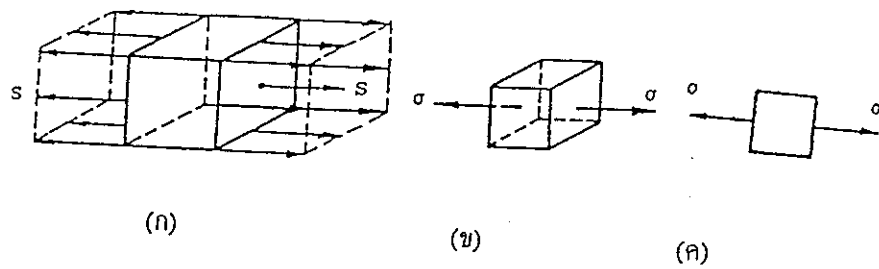
เมื่อ S เป็นแรงภายในบนพื้นที่ภาคตัดขวางที่ต้องการหาค่าความเค้น
 A เป็นพื้นที่ภาคตัดขวาง

σ เป็นความเค้นฉาก

จากสมการสมมูลย์ (2.1) และสมการ (2.2) ได้

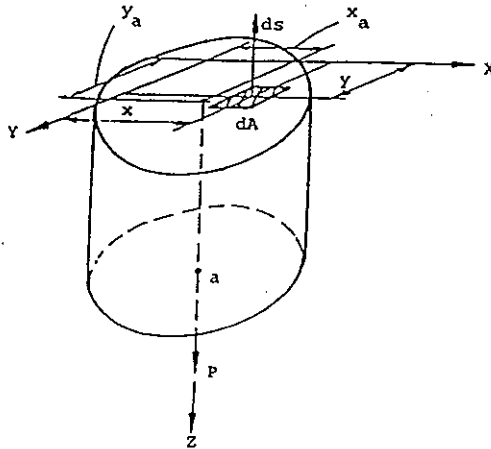
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

จากรูปที่ 1 (ก) ถ้าเพิ่มระนาบของการตัดขนานกับระนาบ mm ส่วนที่ถูกตัดแยกออกมาสามารถแสดงด้วยรูปที่ 2 (ก) และถ้าตัดออกเป็นรูปลูกบาศก์เล็กๆจะมีเพียงความเค้นฉากบนผิวทั้งสองของรูปลูกบาศก์ ดังแสดงในรูปที่ 2 (ข) สภาพของความเค้นดังกล่าวเป็นแบบความเค้นแนวแกนเดียว ในทางปฏิบัติเพื่อให้ง่ายขึ้นจึงเขียนแผนภาพดังแสดงในรูปที่ 2 (ค) แทนรูปลูกบาศก์เล็กๆ ดังนั้นจะต้องไม่ลืมว่ารูปที่ 2 (ค) เป็นรูป 3 มิติ



รูปที่ 2 ลำดับการวิเคราะห์ความเค้นในท่อนวัสดุต่อจากรูปที่ 1

จากสมการ (2.1) ถ้าแรงภายนอกทำให้เกิดแรงดึงภายในภาคตัดขวาง mm แล้วความเค้นฉากที่เกิดขึ้นถือว่าเป็นบวก เรียกว่า ความเค้นดึง (Tensile Stress) ถ้าแรงภายนอกทำให้เกิดแรงอัดภายในภาคตัดขวาง mm ความเค้นฉากที่เกิดขึ้นถือว่าเป็นลบ เรียกว่าความเค้นอัด (Compressive Stress)



รูปที่ 3 แรง P กระทำที่จุด a ใดๆ

การสมมุติว่าความเค้นกระจายสม่ำเสมอตลอดบนแต่ละภาคตัดขวาง จะเป็นไปได้เมื่อ

- (ก) เป็นท่อนวัสดุตรง
- (ข) แรงตามแนวแกนกระทำผ่านจุดศูนย์กลางของทุก ๆ พื้นที่ภาคตัดขวาง
- (ค) แนวคัตสมมุติอยู่ไกลจากจุดที่แรงภายนอกกระทำ และห่างจากบริเวณที่ภาคตัดขวางเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด
- (ง) เป็นท่อนขนาดสั้นเมื่อเทียบกับความกว้างของภาคตัดขวาง

พิจารณารูปที่ 3 สมมุติให้แรงตามแนวแกน P กระทำที่จุด a ใดๆบนภาคตัดขวาง ซึ่งห่างจากแกน y เท่ากับ x_a และห่างจากแกน x เท่ากับ y_a จากสภาวะสมดุลจะได้ว่า

$$(\sum F_z = 0) \quad P = \int dS = \int \sigma dA \quad (ข)$$

$$(\sum M_z = 0) \quad P x_a = \int x dS = \int x \sigma dA \quad (ค)$$

สมมุติว่าความเค้นกระจายสม่ำเสมอตลอดภาคตัดขวาง

$$P = \sigma \int dA$$

แทนค่า

$$P = \sigma \int dA \text{ ลงในสมการ (ค) ได้}$$

$$(\sigma \int dA) x_a = \sigma \int x dA$$

$$x_a = \frac{\int x dA}{\int dA} = \bar{x}$$

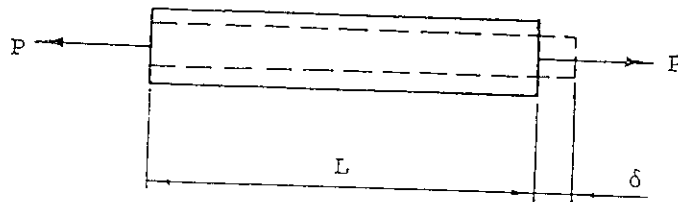
ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$y_a = \bar{y}$$

ดังนั้นกล่าวสรุปได้ว่าการกระจายของความเค้นจะสม่ำเสมอตลอดบนแต่ละภาคตัดขวาง เมื่อแรง P กระทำตามแนวแกนและผ่านจุดศูนย์กลางของทุก ๆ ภาคตัดขวางของท่อนวัสดุ

2.2 ความเครียดฉาก (Normal Strain)

จากรูปที่ 1 เมื่อท่อนวัตถุถูกกระทำด้วยแรงดึงตามแนวแกน และเพิ่มแรงดึงขึ้นอย่างช้าๆ ท่อนวัตถุก็จะเกิดการยืดออกทีละเล็กละน้อยตามขนาดของแรงดึงที่เพิ่มขึ้นที่แต่ละค่าของแรง P ท่อนวัตถุยืดออกเท่ากับ δ ดังแสดงในรูปที่ 4 ขณะที่ท่อนวัตถุยืดออกก็จะเกิดการหดตามแนวขวางด้วย



รูปที่ 4 ความเครียดฉาก

ภายใต้การกระทำของแรงดึง ดังรูปที่ 4 สมมติว่าทุกๆ ชั้นของเนื้อวัตถุตามแนวยาวถูกยืดออกเท่ากันตลอดท่อนจะได้ค่าความเครียดเฉลี่ยตามสมการ

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (2.3)$$

เมื่อ δ เป็นส่วนยืดหดของท่อนวัตถุภายใต้การกระทำของแรงภายนอก

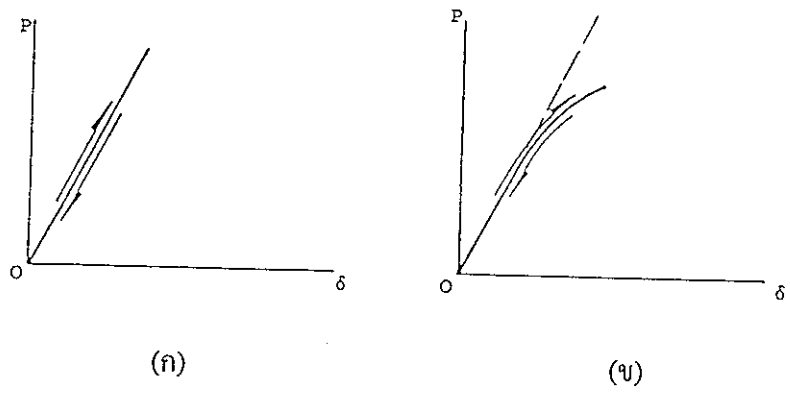
L เป็นความยาวเดิมของท่อนวัตถุ ก่อนที่จะมีแรงภายนอกมากระทำ

ϵ เป็นความเครียดเฉลี่ย

จากสมการ (2.3) ขนาดของส่วนยืดต่อความยาวเดิมของวัตถุ เรียกว่า ความเครียดดึง (Tensile Strain) มีค่าเป็นบวกขนาดของส่วนหดต่อความยาวเดิมของวัตถุ เรียกว่า ความเครียดอัด (Compressive Strain) มีค่าเป็นลบ

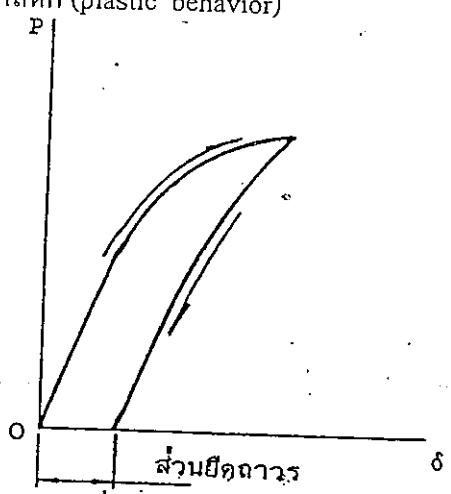
2.3 พฤติกรรมยืดหยุ่นและพลาสติก (Elastic and Plastic Behavior)

ขณะที่วัสดุยืดออกเมื่อได้รับแรงที่เพิ่มขึ้นอย่างช้าๆแล้วค่อยๆลดแรงลงจนเป็นศูนย์ถ้าวัสดุนั้นสามารถหดกลับสู่ขนาดเดิมได้ เรียกว่า มีพฤติกรรมยืดหยุ่น (elastic behavior) ดังแสดงในรูปที่ 5 ซีดจำกัดที่วัสดุยังคงสามารถคืนรูปได้เรียกว่า ซีดจำกัดความยืดหยุ่น (elastic limit) วัสดุบางชนิดแสดงช่วงพฤติกรรมยืดหยุ่นเป็นเส้นตรง ดังรูปที่ 5 (ก) เรียกวัสดุดังกล่าวว่า วัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น (linearly elastic materials) วัสดุบางชนิดแสดงช่วงพฤติกรรมยืดหยุ่นเป็นเส้นโค้งดังรูปที่ 5 (ข) เรียกวัสดุดังกล่าวว่า วัสดุยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น (nonlinearly elastic materials)



รูปที่ 5 พฤติกรรมยืดหยุ่น (ก) เส้นตรง (ข) เส้นโค้ง

ถ้าเพิ่มแรงเกินขีดจำกัดความยืดหยุ่นแล้วลดแรงลงจนเป็นศูนย์ วัสดุไม่สามารถกลับคืนสู่ขนาดเดิมได้วัสดุจะเกิดส่วนยืดถาวร (permanent set) ดังแสดงในรูปที่ 6 ขนาดของวัสดุเปลี่ยนไปอย่างถาวร เรียกว่า มีพฤติกรรมพลาสติก (plastic behavior)



รูปที่ 6 พฤติกรรมพลาสติก

2.4 กฎของฮุก (Hooke's Law)

จากการทดลองดึงท่อนวัสดุที่มีพื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากันตลอดหลายชนิดแสดงให้เห็นว่าภายในช่วงคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นของวัสดุ และเป็นสัดส่วนกลับกับพื้นที่ภาคตัดขวางของท่อนวัสดุ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{หรือ} \quad \sigma &\propto \frac{PL}{A} \\ \delta &= \frac{PL}{AE} \end{aligned} \quad (2.4)$$

เมื่อ P เป็นแรงตามแนวแกนที่กระทำต่อท่อนวัสดุ

L เป็นความยาวเดิมของท่อนวัสดุ

A เป็นพื้นที่ภาคตัดขวางเดิมของวัสดุ

E เป็นค่าคงที่ของวัสดุนั้นๆ เรียกว่า โมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) หรือ โมดูลัสของยัง (Young's Modulus)

ความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการ (2.4) โรเบิร์ตฮุกเป็นบุคคลแรกที่ได้จากการทดลองในปี ค.ศ. 1679 จึงเรียกกันว่า กฎของฮุก

$$\text{จาก} \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

$$\text{และ} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

กฎของฮุกสามารถเขียนได้ในรูปสมการ

$$\text{จาก} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.5)$$

$$\text{และ} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

จากสมการ (2.4) ผลคูณ EA เรียกว่า ความเกร็งตามแนวแกน (axial rigidity) $\frac{EA}{L}$ เรียกว่า สติฟเนส (stiffness) ก็คือแรงต่อหนึ่งหน่วยการยืดวัสดุที่มี สติฟเนส สูงจะยืดหรือหดได้ยากกว่าวัสดุที่มีสติฟเนสต่ำ

จากสมการ (2.5) กล่าวได้ว่า โมดูลัสยืดหยุ่นก็คือความเค้นที่ทำให้เกิดความเครียดเท่ากับหนึ่ง โมดูลัสยืดหยุ่นสำหรับวัสดุส่วนใหญ่จะมีค่าสูงมาก เช่น เหล็กกล้าละมุน (mild steel) มีค่า E ประมาณ 200-210 GN/m²

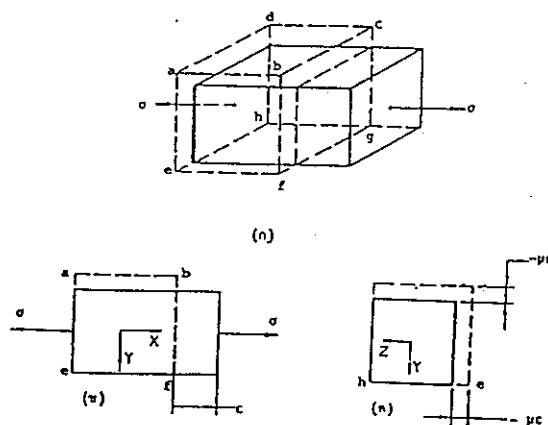
2.5 อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio)

จากรูปที่ 4 เมื่อท่อนวัสดุได้รับการดึงขณะที่วัสดุเกิดการยืดตามแนวแกนก็จะเกิดความหดตามแนวขวางแกนด้วย ดังนั้นความกว้างของท่อนวัสดุจะเล็กลง ขณะที่ความยาวเพิ่มขึ้น อัตราส่วนความเครียดตามแนวขวางแกนต่อความเครียดตามแนวแกนเรียกว่า อัตราส่วนปัวซอง แทนด้วยสัญลักษณ์ μ (mu) ดังนั้น

$$\mu = \frac{\text{ความเครียดตามแนวขวางแกน}}{\text{ความเครียดตามแนวแกน}} = - \frac{\text{ความเครียดตามแนวขวางแกน}}{\text{ความเครียดตามแนวแกน}} \tag{2.6}$$

อัตราส่วนปัวซองมีค่าคงที่สำหรับวัสดุนี้ๆภายในช่วงคุณสมบัติยืดหยุ่นซึ่ง เอส. ดี. ปัวซอง (S. D. Poisson) นักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศส (ค. ศ 1781 - 1840) เป็นผู้ใช้ทฤษฎีโมเมนต์ของวัสดุคำนวณหาอัตราส่วนนี้ โลหะต่างๆไป μ อยู่ในช่วง 0.25 ถึง 0.35

ในการหาการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของท่อนวัสดุเมื่อได้รับแรงดึงตามแนวแกน สมมุติว่ารูปร่างเดิมของเอลิเมนต์ abcdefgh มีด้านแต่ละด้านยาวหนึ่งหน่วยความยาวดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7 แสดงอัตราส่วนปัวซอง

ความเครียดในทิศทางของแรงคือ ϵ และการหดของด้านข้างตามขวางทั้งสองแนวคือ $\epsilon\mu$ ดังนั้นพื้นที่ภาคตัดขวางของเอลิเมนต์ใหม่คือ

$$A_1 = (1 - \mu\varepsilon)^2$$

และ

$$V_1 = (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)^2$$

เนื่องจาก ε มีค่าน้อยกว่าหนึ่งมาก $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ จึงมีค่าน้อยมาก ตัดทิ้งไปได้ ดังนั้น

$$V_1 = 1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon$$

$$\Delta V \text{ ปริมาตรที่เปลี่ยนแปลง } \Delta V = V_1 - V_0 = 1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon - 1$$

$$= \varepsilon (1 - 2\mu)$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon (1 - 2\mu)$$

หรือ

$$= \sigma \left(1 - \frac{2\mu}{E}\right)$$

(2.7)

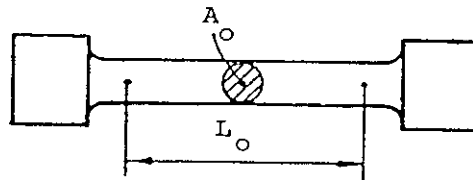
จากสมการ (2.7) ถ้าวัสดุไม่มีการเปลี่ยนแปลงในปริมาตรภายใต้การกระทำของแรงค่า μ ของวัสดุจะต้องเท่ากับ 0.5 จึงสรุปได้ว่าค่า μ ของวัสดุทุกชนิดจะต้องน้อยกว่า 0.5 เสมออย่างและพาราฟิน เป็นวัสดุที่มีค่า μ ใกล้เคียง 0.5 ในทางปฏิบัติจึงถือว่ามีปริมาตรคงที่ภายใต้การกระทำของแรง คอนกรีตมีค่า $\mu \approx 0.1$ เหล็กกล้าละมุน (mild steel) มีค่า $\mu \approx 0.3$ และไม้คอร์กมีค่า $\mu \approx 0$ เป็นต้น

กรณีที่ก่อนวัสดุได้รับแรงอัดก็จะเกิดการยืดตามแนวขวาง การคำนวณหาส่วนยืดนี้สามารถใช้ μ ค่าเดียวกันกับกรณีได้รับแรงดึงในทางปฏิบัติถือว่าค่า μ เท่ากันไม่ว่าวัสดุได้รับแรงดึงหรือแรงอัด

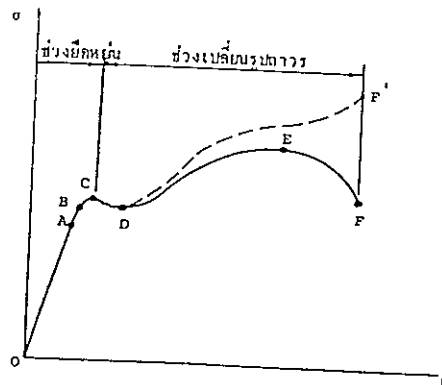
2.6 แผนภาพของความเค้นกับความเครียด

จากการทดลองดึงขึ้นทดสอบมาตรฐาน โดยการบันทึกค่าของแรงดึงและการยืดของขึ้นทดสอบ ขณะที่เพิ่มแรงขึ้นอย่างช้าๆจนกระทั่งขึ้นทดสอบขาดออกจากกันความเค้นดึงในขึ้นทดสอบคำนวณได้จากแรงดึงหารด้วยพื้นที่ภาคตัดขวางเดิม A_0 ภายในช่วงความยาวพิักัดความเครียดดึงคำนวณได้จากส่วนที่ยืดหารด้วยความยาวพิักัดเดิม L_0 จากรูปที่ 8

ความยาวพิักัด (gauge length) หมายถึงความยาวระหว่างจุดที่กำหนดขึ้นสองจุดบนขึ้นทดสอบเพื่อใช้หาส่วนยืดระหว่างการทดสอบ



รูปที่ 8 ลักษณะของชิ้นทดสอบภาคตัดขวางรูปวงกลม



รูปที่ 9 แผนภาพของความเค้นกับความเครียดของเหล็กกล้าเปอร์เซ็นต์คาร์บอนต่ำ เมื่อนำค่าความเค้นและความเครียดที่คำนวณได้มาเขียนกราฟ ดังตัวอย่างในรูปที่ 9 จะได้กราฟ ซึ่งแสดงคุณสมบัติทางกลที่สำคัญของวัสดุดังต่อไปนี้

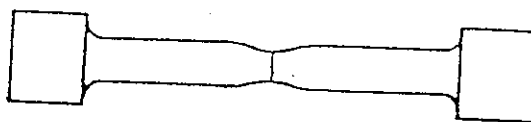
- 1) จุด A เรียกว่าขีดจำกัดสัดส่วน (proportional limit) กราฟช่วง OA เป็นเส้นตรงตามกฎของฮุก หลังจากจุด A กราฟไม่เป็นเส้นตรง
- 2) 2) จุด B เรียกว่าขีดจำกัดความยืดหยุ่น (elastic limit) เป็นจุดสูงสุดที่วัสดุยังคงสามารถคืนรูปสู่ขนาดเดิมได้ เมื่อเอาแรงออก ถ้าเลขจุดนี้ไปแล้วเอาแรงออกจะเกิดการยืดถาวรสำหรับวัสดุทางช่างต่างๆ ไปจุด B เกือบเท่ากับจุด A

3) เมื่อแรงเพิ่มขึ้นเลขจุด B ไปแล้วในบางกรณีแรงอาจจะขึ้นถึงจุดยอด (C) ก่อนแล้วลดลงมาที่ระดับหนึ่ง และรักษาระดับนี้ไว้จนเกือบจะถือได้ว่าคงที่ขณะที่การยืดเพิ่มขึ้นอย่างมาก CD จุด C เป็นจุดที่วัสดุเริ่มเกิดการยืดตัวได้มาก เรียกว่า จุดครากบน (upper yield point) และเรียกจุด D ว่า จุดครากล่าง (lower yield point) ที่จุด D วัสดุเริ่มเกิดการทำให้แข็งด้วยความเครียด (strain hardening) หรือการทำให้แข็งด้วยงาน (work hardening) ด้านแรงดึง จึงต้องเพิ่มแรงมากขึ้นในการทำให้เกิดการยืดหลังจุด D

ในทางปฏิบัติใช้จุดคราก C เป็นจุดเปลี่ยนระหว่างช่วงยืดหยุ่นกับช่วงพลาสติกแทนขีดจำกัดความยืดหยุ่น เนื่องจากการหาขีดจำกัดความยืดหยุ่นต้องใช้ความพิถีพิถันมาก

4) จุด E เรียกว่าจุดสูงสุด (ultimate point) เป็นจุดที่เกิดความเค้นสูงสุดหลังจากจุด E พื้นที่ภาคตัดขวางของวัสดุจะลดลงมาก ทำให้เกิดคอคอดออกจากกันตรงบริเวณคอคอด

5) จุด F เรียกว่าจุดขาด (breaking point) เป็นจุดที่วัสดุขาดออกจากกันตรงบริเวณคอคอด

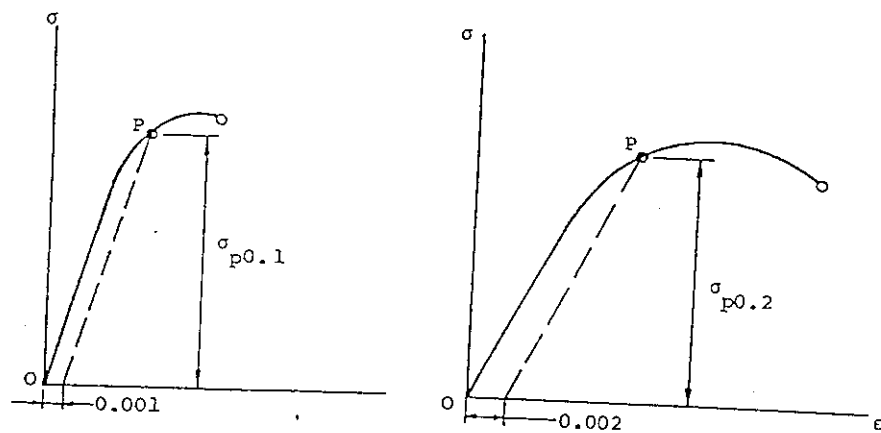


รูปที่ 10 คอคอดในชิ้นทดสอบ

เส้น OABCDEF เป็นแผนภาพของความเค้นกับความเครียดที่ตกลงใช้กันในทางวิศวกรรม ความเค้นคำนวณจากพื้นที่ภาคตัดขวางเดิมของชิ้นทดสอบ ถ้าใช้พื้นที่ภาคตัดขวางที่ลดลงแล้วมาคำนวณ จะได้แผนภาพของความเค้นกับความเครียดจริงตามเส้นประ DF' การที่แรงลดลงหลังจากถึงจุดสูงสุด (E) นั้นเนื่องจากการลดของพื้นที่ภาคตัดขวางไม่ใช่เนื่องจากการสูญเสียความต้านแรงดึงของวัสดุ (tensile strength)

แผนภาพความเค้นกับความเครียดของเหล็กกล้าเปอร์เซ็นต์คาร์บอนต่ำจะแสดงจุดครากให้เห็นชัดเจน (ดังรูปที่ 9) แต่เหล็กกล้าเปอร์เซ็นต์คาร์บอนสูง และโลหะที่ไม่ใช่เหล็กโดยทั่วไปไม่แสดงจุดครากให้เห็นอย่างชัดเจนจึงหาค่าความเค้นที่จุดเทียบจากค่าใดๆของการเปลี่ยนรูปถาวรที่วัสดุยังมีได้ โดยไม่ทำให้เกิดความเสียหายต่อชิ้นงานหรือโครงสร้างความเค้นที่จุดเทียบดังกล่าว โดยทั่ว

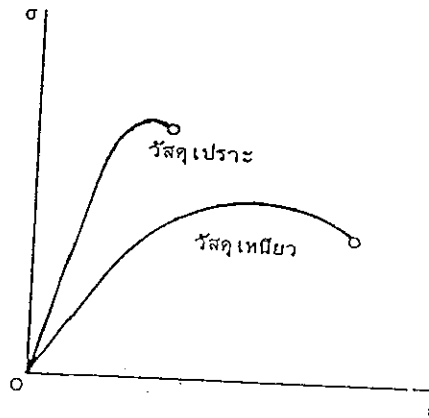
ไปหาค่าจากความเครียด 0.2% หรือน้อยกว่า และเรียกความเค้นที่จุดเทียบนี้ว่า ความเค้นพิสูจน์ (proof stress) ดังแสดงในรูปที่ 11 หากความเค้นพิสูจน์ได้โดยการลากเส้นตรงจากค่าความเครียด 0.1% หรือ 0.2% ขนานกับเส้นตรงของช่วงยืดจำกัดสัดส่วนไปตัดกับกราฟที่จุดหนึ่ง เช่น จุด P เมื่อจะระบุความเค้นพิสูจน์ ต้องบอกค่าร้อยละของความเครียดที่ลากหาจุดเทียบนั้น ๆ เช่น 0.2% ความเค้นพิสูจน์หรือระบุค่าร้อยละไว้ท้ายสัญลักษณ์ $\sigma_{p0.2}$ เช่น ความเค้นพิสูจน์ที่ความเครียด 0.2% โดยทั่วไปใช้กับเหล็กกล้า อะลูมิเนียม และ แมกนีเซียมผสม



รูปที่ 11 การหาความเค้นพิสูจน์

ในการทดสอบวัสดุต่างๆ โดยการดึงจะได้แผนภาพของความเค้นกับความเครียดที่แตกต่างกันมาก ถึงแม้ว่าจะเป็นวัสดุชนิดเดียวกันก็ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของชิ้นทดสอบกรรมวิธีทางกลและทางความร้อนซึ่งได้กระทำกับชิ้นทดสอบ อัตราการเพิ่มความเครียดขณะที่ทดสอบซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราการเพิ่มแรงดึงรูปร่างของชิ้นทดสอบ และคุณลักษณะของเครื่องทดสอบตลอดจนวิธียึดชิ้นทดสอบ อัตราการเพิ่มความเครียดจะมีผลอย่างเห็นได้ชัดต่อค่าของความเค้นคราก และความเค้นพิสูจน์ แต่จะมีผลน้อยต่อค่าความเค้นดึงสูงสุดต่อการยืด และส่วนลดยของพื้นที่แต่อย่างไรก็ตามสามารถแบ่งแผนภาพของความเค้นกับความเครียดที่ได้จากการทดสอบออกได้อย่างกว้างๆ เป็น 2 ชนิด ชนิดแรกเป็นคุณสมบัติของวัสดุเหนียว (ductile material) เช่น เหล็กกล้าละมุน , อะลูมิเนียม , ทองเหลือง เป็นต้น วัสดุเหนียวดังกล่าวจะเกิดความเครียดได้มากกว่าก่อนที่จะขาด ดังรูปที่ 12 ชนิดที่สองเป็นคุณสมบัติของวัสดุเปราะ (brittle material) เช่น เหล็กหล่อ (cast iron) คอนกรีต เหล็กกล้าเปเปอร์เซนต์คาร์บอนสูง เป็นต้น วัสดุเปราะดังกล่าวจะเกิดความเครียดได้น้อยโดยจะเกิดส่วนยืด

ไม่เกิน 5 เปอร์เซ็นต์ก่อนที่จะขาดรูปที่ 12 ดังนั้นวัสดุที่เกิดส่วนยืดมากกว่า 5 เปอร์เซ็นต์จะเป็นวัสดุเหนียว



รูปที่ 12 ชนิดของวัสดุ

สำหรับการทดสอบวัสดุต่างๆ โดยการอัด เช่น เหล็กกล้าอะลูมิเนียมก็จะได้แผนภาพลักษณะเดียวกับการดึง ได้ค่าความต้านแรงอัดที่จุดครากเท่ากับการดึง แต่วัสดุเปราะจะมีความต้านแรงอัดสูงกว่าความต้านแรงดึง

2.7 ความเค้นใช้งาน (Working Stress)

จากแผนภาพของความเค้นกับความเครียดของวัสดุเหนียวและวัสดุเปราะที่แสดงในรูปที่ 9 และรูปที่ 12 จะเห็นได้ว่าการออกแบบโครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลให้มีความปลอดภัยจะต้องจำกัดไม่ให้ความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ เกินค่าขีดจำกัดส่วนเพื่อให้ชิ้นส่วนนั้น ๆ ยังอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเพื่อไม่ให้เกิดส่วนยืดถาวรเพื่อให้เป็นไปตามกฎของฮุกซึ่งเป็นฐานรองรับทุก ๆ ทฤษฎี และเพื่อผลกระทบอื่นๆ ที่ไม่คาดคิดเอาไว้ก่อนความเค้นที่ยอมให้เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ โดยมีความปลอดภัยดังกล่าว เรียกว่า ความเค้นใช้งาน (working stress) หรือความเค้นที่ยอมให้ (allowable stress) เนื่องจากการหาขีดจำกัดส่วนให้ได้ค่าที่เที่ยงตรงนั้นทำได้ยากในทางปฏิบัติจึงหาค่าความเค้นใช้งานจาก

$$\sigma_w = \frac{S_y}{n} \quad (2.8)$$

หรือ

$$\sigma_w = \frac{S_u}{n_1}$$

เมื่อ S_y เป็นค่าความต้านแรงคราก (yield strength)

S_u เป็นค่าความต้านแรงสูงสุด (ultimate strength)

n และ n_1 เป็นอัตราคูณเพื่อความปลอดภัย (factor of safety)

ในกรณีของวัสดุเหนียว เช่น เหล็กกล้าเปอร์เซ็นต์คาร์บอนต่ำ (low carbon steel) มักใช้ค่าความต้านแรงคราก S_y เป็นหลักในการหาค่าความเค้นใช้งาน การหาค่าความเค้นใช้งานหรือการกำหนดค่าความปลอดภัยที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับสภาพการใช้งานของชิ้นส่วนนั้นๆ เช่น ชิ้นส่วนได้รับโหลดพลวัต (dynamic load) กระทำทันทีทันใด (เช่น โหลดกระแทก) สามารถใช้คุณสมบัติทางสถิติของวัสดุจำพวกเหล็กและไม่ใช่เหล็กได้อย่างปลอดภัย ทั้งนี้เพราะวัสดุต่างๆเมื่อได้รับโหลดพลวัตก็มีความต้านแรงครากสูงขึ้นและลดลงเมื่อกระทำซ้ำกันเป็นเวลานานๆ ต้องการค่าความปลอดภัยสูงกว่ากรณีของโหลดสถิตกระทำ ทั้งนี้เพราะวัสดุจะเกิดความเสียหายล้า (fatigue failure) โดยที่ความเค้นใช้งานไม่เกินความต้านแรงคราก

โดยทั่วไปความเค้นใช้งานหรือค่าความปลอดภัยมักจะถูกกำหนดขึ้นจากกลุ่มวิศวกรที่มีประสบการณ์ในงานนั้นๆ เช่น งานเกี่ยวกับการสร้างถังความดัน (pressure vessels) งานสร้างอาคารเป็นต้น ชิดจำกัดสัดส่วนของวัสดุหลายๆชนิด จะมีค่าประมาณครึ่งหนึ่งของความต้านแรงสูงสุด (ultimate strength) ดังนั้นสำหรับชิ้นส่วนต่างๆที่ได้รับแรงสถิต มักกำหนดค่าความปลอดภัย $n = 1.3 - 2.0$ สำหรับวัสดุเหนียวที่แสดงจุดคดากหรือ $n_1 = 2.6 - 4.0$ สำหรับวัสดุเหนียวที่ไม่แสดงจุดคดาก

2.8 ความเค้นหนาแน่น (Stress concentration)

2.8.1 ธรรมชาติของความเค้นหนาแน่น

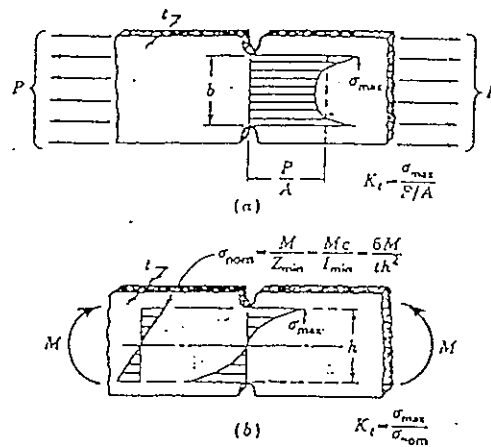
เมื่อวัสดุเสียหายขึ้น ปรากฏการณ์ของความเค้นหนาแน่นจะเป็นส่วนที่สำคัญที่จะสามารถแสดงว่าวัสดุนั้นจะเกิดความเสียหายตรงส่วนไหนคำว่าความเค้นหนาแน่นจะแสดงถึงการกระจายของความเค้นในวัสดุโดยทั่วไปในการคิดความเค้นจะใช้ค่าเฉลี่ยของแรง P และพื้นที่หน้าตัด คือ เท่ากับ P/A เช่น ชิ้นส่วนทศลงที่มีรอยบาก (notch) ค่าเฉลี่ยของความเค้นก็คือ P/A แต่บริเวณมุมของรอยบาก ความเค้นจะมีค่าสูงมากบางทีอาจจะหลายเท่าของค่าเฉลี่ย ดังรูปที่ 13

วิธีที่จะหาการกระจายของความเค้นไม่ว่าจะเป็นวัสดุที่มีรอยบาก หรือเจาะรูตรงกลางจะหาได้ค่อนข้างยากในทางทฤษฎี เนื่องจากรูปร่างที่ไม่มีหลักเกณฑ์แน่นอนของรอยบากหรือรู จึงได้มีวิธี

การทดลองขึ้นมาหลายแบบ เพื่อช่วยในการหา เช่น วิธีทาง Photoelastic จะเป็น pattern ที่มองเห็นได้และจะแสดงว่าความเข้มและทิศทางของความเค้น เป็นอย่างไรอีกวิธีหนึ่ง คือ วิธีการวิเคราะห์ด้วยการใช้ Computer - Aid Engineering (CAE) ซึ่งใช้หลักการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งวิธีนี้ใช้ในการทำโครงการนี้

2.9 ตัวประกอบความเค้นหนาแน่น (Stress Concentration Factor)

ตัวประกอบความเค้นหนาแน่น คือ อัตราส่วนระหว่างความเค้นสูงสุด (Maximum Local Stress) กับค่าความเค้นเฉลี่ย (Nominal Stress) พิจารณารูปที่ 13



รูปที่ 13 แสดงค่าจำกัดความของความเค้นหนาแน่น

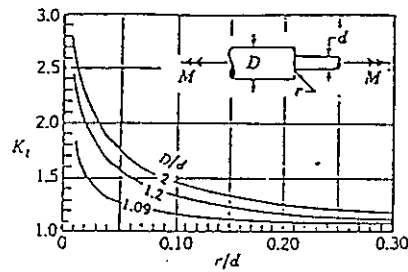
ค่าความเค้นเฉลี่ยคือ P/A ซึ่ง A จะเป็นค่าพื้นที่หน้าตัดส่วนแคบที่สุด จากรูป a) A จะเท่ากับ bt และ ความเค้นเฉลี่ย = P/A

ถ้าเป็นการคดก็คิดทำนองเดียวกัน

$$\text{ความเค้นเฉลี่ย} = MC/I_{min} = 6M/th^2 \text{ จะได้}$$

$$K_t = \text{Maximum Local Stress/Nominal Stress}$$

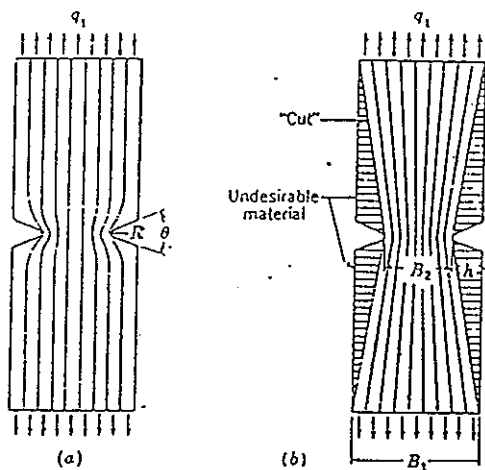
ซึ่ง K ก็คือ ค่า Stress Concentration Factor นั้นเอง ค่าตัวประกอบความเค้นหนาแน่นจะมีค่าเป็น 3 ในกรณีที่ Plate เจาะรูปและความกว้างของ Plate เป็น Infinite ถ้า Plate แคบลงค่าตัวประกอบความเค้นหนาแน่นจะลดลงถึง 1 ดังรูปที่ 14



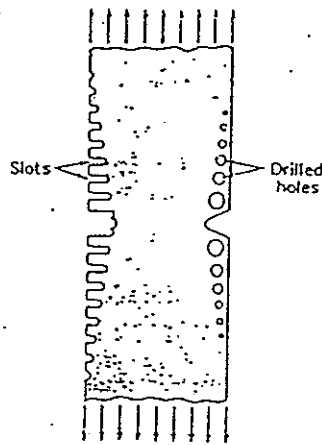
รูปที่ 14 แสดง Stress Concentration Factor

สำหรับกรณีที่เป็นรอยบาก (notch) ค่า K_t จะเข้าใกล้ Infinite ถ้ารัศมีของรอยบากต่อขนาดความลึกเข้าใกล้ศูนย์ แม้ว่าทฤษฎีนี้จะใช้สำหรับรัศมีของรอยบากที่เล็กมากแต่รูปร่างที่ต่างกันของรอยบากจะทำให้มีความแตกต่างกันด้วย เช่น ถ้าเป็นรอยบากแหลมจะทำให้เกิดการแตกหักได้ง่ายกว่ารอยบากมน

ถ้าพิจารณาในลักษณะ Stream Lines จะเป็นดังรูปที่ 15 จะเห็นว่าความเค้นจะไปหนาแน่นอยู่ที่ใกล้ๆรอยบาก จึงมีสมมุติฐานว่าถ้าทำให้ความเค้นกระจายทั่วทั้งแผ่นไม่ไปอัดแน่นอยู่จุดใดจุดหนึ่งก็น่าจะทำให้วัสดุแตกหักได้ยากขึ้น และวิธีหนึ่งที่จะลดความเค้นหนาแน่นอาจทำได้ตามรูปที่ 16 ซึ่งจะทำให้ไม่เกิดการอัดแน่นที่จุดใดจุดหนึ่ง



รูปที่ 15 แสดงการวิเคราะห์ stress concentration โดยเส้นของแรงคงที่



รูปที่ 16 แสดง 2 วิธีที่จะสามารถลดความเค้นหนาแน่น

2.10 พลังงานความเครียด

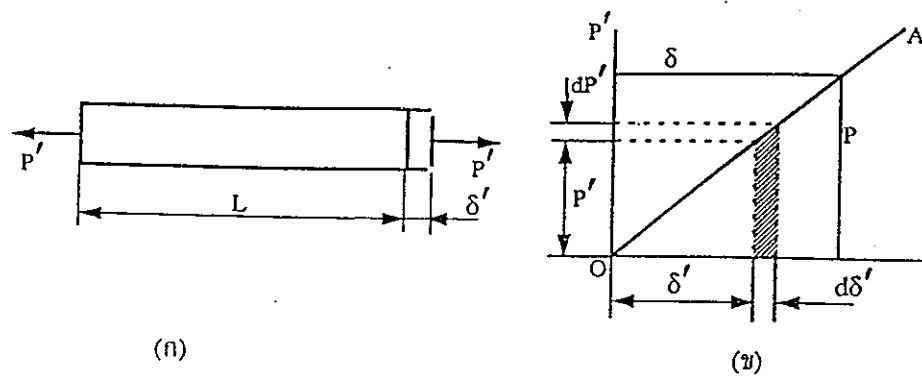
2.10.1 พลังงานความเครียดในการดึงและการอัด (Strain Energy in Tension and Compression)

พิจารณาท่อนวัตถุที่มีภาคตัดขวางเท่ากันตลอด ได้รับแรงดึงดังรูปที่ 17(ก) สมมติว่าความเค้นไม่เกินขีดจำกัดสัดส่วนตรง แผนภาพของแรงและส่วนยืดจะเป็นเส้นตรง OA ดังแสดงในรูปที่ 17(ข) แรงดึง P' ใดๆจะทำให้ท่อนวัตถุยืดออกเท่ากับ δ' ถ้าเพิ่มแรง dP' ให้กับแรง P' ส่วนยืด δ' จะเพิ่มขึ้นอีกเท่ากับจำนวน $d\delta'$ งานที่กระทำโดยแรง P' มีค่าเป็นบวก คือ

$$W = P' d\delta'$$

งานนี้แทนด้วยพื้นที่แรงในรูปที่ 17ข ซึ่งท่อนวัตถุสะสมไว้ในรูปของพลังงานศักย์หรือพลังงานความเครียด ต่อมาถ้าเอาส่วนที่เพิ่มแรง dP' ออกส่วนปลายล่างของท่อนวัตถุก็จะหดขึ้นเท่ากับระยะ $d\delta'$ ดังนั้นจะกล่าวได้ว่าท่อนวัตถุยืดหยุ่นสามารถสะสมพลังงานหรือปล่อยพลังงาน ขณะที่แรง P' เพิ่มขึ้นหรือลดลงคุณสมบัติของท่อนวัตถุยืดหยุ่นที่สามารถสะสมหรือปล่อยพลังงานเมื่อเปลี่ยนแปลงนี้มีความสำคัญมากในส่วนที่รูปที่ 17(ก) ภายใต้แรงดึง P ที่ทำให้ท่อนวัตถุยืดออกเท่ากับ δ จะเท่ากับผลรวมของช่วงแรงเล็กๆ เช่น $P' d\delta'$ ระหว่าง O และ B ซึ่งแทนด้วยพื้นที่ OAB ในรูปที่ 17(ข) เป็นพลังงานความเครียดซึ่งแทนด้วย

$$U = \frac{P\delta}{2} \tag{2.9}$$



รูปที่ 17 แสดงนิยามของพลังงานความเครียด

เนื่องจากสมการ (2.9) ใช้ได้เฉพาะภายใต้กฎของฮุก ความสัมพันธ์คือ

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

สมการ (2.9) สามารถเขียนได้เป็นสองรูปแบบดังนี้

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (2.10)$$

หรือ

$$U = \frac{AE\delta^2}{2L} \quad (2.11)$$

ในสมการ (2.10) พลังงานความเครียดถูกแทนด้วยฟังก์ชันของแรงดึง P ในท่อนวัสดุใน

สมการ (2.11) พลังงานความเครียดถูกแทนด้วยฟังก์ชันของส่วนยืด δ ของท่อนวัสดุ

พลังงานความเครียดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของท่อนวัสดุในรูปที่ 17(ก) หาได้จากการหาร

สมการ (2.11) ด้วยปริมาตร AL ของวัตถุ ถ้าใช้สัญลักษณ์ $u = \frac{U}{AL}$ จะได้ว่า

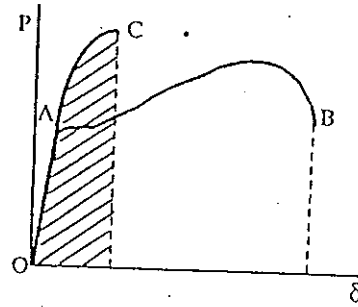
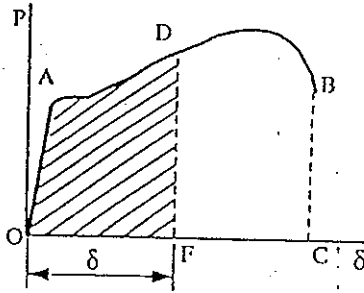
$$u = \frac{E\varepsilon^2}{2} \quad (2.12)$$

เมื่อ

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

การกระทำภายใต้ข้อสมมุติที่ว่าความเค้นในท่อนวัสดุยังคงอยู่ในขีดจำกัดสัดส่วนตรง หลังขีดจำกัดนี้ปัญหาจะยากขึ้น เนื่องจากส่วนยืดของท่อนวัสดุไม่เป็นสัดส่วนตรงกับแรงดึง สมมุติว่าแผนภาพการทดสอบแรงดึงไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วของการดึงท่อนวัสดุ ส่วนยืดหลังจากขีดจำกัดคือรูประหว่างการกระทำสามารถหาได้จากแผนภาพการทดสอบแรงดึงทั่วไปดังแสดงในรูปที่ 18 สำหรับส่วนยืดสูงสุดที่สมมุติใดๆ δ พื้นที่ $OADF$ จะให้งานที่จำเป็นต่อการทำให้เกิดส่วนยืดดังกล่าว และจะต้องเท่ากับงาน $W(h+\delta)$ ซึ่งเกิดจากค้ำน้ำหนัก W เมื่อ $W(h+\delta)$ เท่ากับหรือมากกว่า

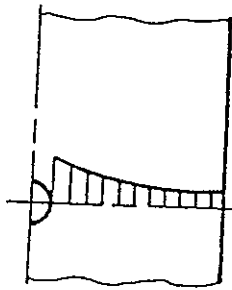
กว่าพื้นที่ทั้งหมด OABC ของแผนภาพการทดสอบแรงดึงค้ำน้ำหนักที่ตกลงมากระทำให้ท่อนวัสดุแตกหัก



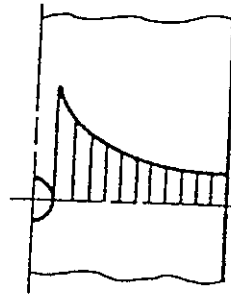
รูปที่ 18 แผนภาพการทดสอบแรงดึง รูปที่ 19 แผนภาพการทดสอบแรงดึงค้ำน้ำหนักเหล็ก ความต้านทานของท่อนวัสดุต่อการกระแทกยังขึ้นอยู่กับความเหนียวของวัสดุด้วย จะเห็นได้จากแผนภาพการทดสอบแรงดึงในรูปที่ 19 เส้นโค้ง OAC แทนวัสดุที่มีแรงต้านสูงแต่ความเหนียวต่ำ ขณะที่เส้นโค้ง OAB แทนวัสดุที่มีความต้านทานแรงต่ำแต่ความเหนียวสูง วัสดุที่มีความเหนียวสูงจะสามารถดูดซับพลังงานก่อนแตกหักได้มากกว่าวัสดุที่มีความเหนียวต่ำ จะเห็นได้ชัดจากการเปรียบเทียบพื้นที่แรเงาใต้เส้น OAB กับ OAC ด้วยเหตุผลนี้วัสดุเหนียวจึงมีความต้านทานต่อการแตกหักภายใต้โหลดกระแทกสูงกว่าวัสดุเปราะ

2.11 การรวมจุดความเค้นกับโหลดคงที่

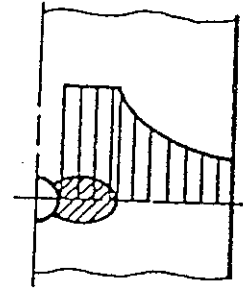
กรณีวัสดุเหนียว เช่น เหล็กกล้า ถ้าความเค้นไม่เกินขีดจำกัดสัดส่วนแต่หลังจากความเค้นสูงสุดถึงจุดครากก็จะเกิดการไหลแบบพลาสติก (plastic flow) ขึ้นในบริเวณการรวมจุดความเค้นทำให้การกระจายความเค้นเปลี่ยนเป็นค่อนข้างสม่ำเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 20 รูปที่ 20(ก) แสดงครึ่งของรูปกลมในแผ่นราบและการกระจายของความเค้น เมื่อความเค้นข้อยมีค่าน้อย รูปที่ 20(ข) เป็นการกระจายความเค้นเมื่อความเค้นสูงสุดถึงจุดคราก รูปที่ 20(ค) เกิดการไหลแบบพลาสติก (ดังพื้นที่แรเงา) ขึ้นในบริเวณจุดรวมความเค้น ทำให้การกระจายของความเค้นเปลี่ยนไปค่อนข้างสม่ำเสมอ ดังนั้นกรณีวัสดุเหนียวได้รับ โหลดคงที่ไม่ต้องคิดผลกระทบจากการรวมจุดความเค้น



(ก) ความเค้นสูงสุด
ต่ำกว่าจุดคราก



(ข) ความเค้นสูงสุด
ถึงจุดคราก

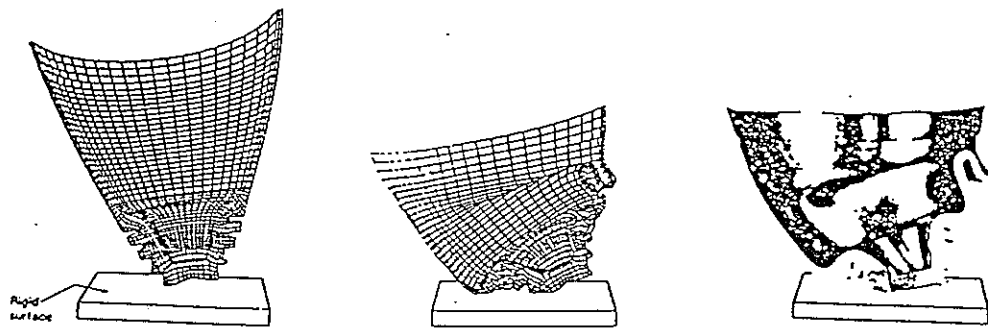


(ค) เกิดการไหลแบบ
พลาสติก

รูปที่ 20 การกระจายของความเค้นรอบรูวงกลมในแผ่นราบวัสดุเหนียว

2.12 การวิเคราะห์ด้วยวิธี Finite Elements

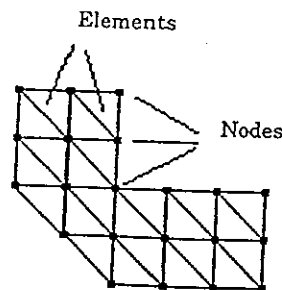
Finite Elements Analysis (FEA) เป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์อันเกี่ยวข้องกับสภาพของวัตถุหรือโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากมีแรงมากระทำ (รูปที่ 21) FEA นี้นิยมใช้ในการวิเคราะห์เพื่อให้ผู้ออกแบบสามารถออกแบบชิ้นงานให้มีความปลอดภัยสูง โดยชิ้นงานนี้อาจจะหมายถึง ชิ้นส่วนอุปกรณ์ที่ได้รับการออกแบบเพื่อประกอบเข้าเป็นเครื่องมือหรืออาจเป็นการวิเคราะห์โครงสร้างใหญ่ๆ ขึ้นทีเดียวก็ได้ โดยการวิเคราะห์ลักษณะนี้จะใช้เทคนิคการแบ่งชิ้นงานออกเป็นส่วนย่อยๆ เรียกว่า Finite Elements (รูปที่ 22) จากนั้นจึงวิเคราะห์ผลของแรงกระทำต่อจุดแต่ละจุดบนส่วนย่อยนี้จะประกอบด้วยส่วนที่เรียกว่า "Node" โดยมีเส้นเชื่อมแต่ละ Node เพื่อฟอร์มตัวเป็น Elements และแต่ละ Elements นี้เชื่อมโยกันกลายเป็น โครงสร้างที่เรียกว่า Element Mesh (รูปที่ 23)



รูปที่ 21 ตัวอย่างการใช้ FEA ในการวิเคราะห์สภาพวัตถุที่ตกจากที่สูง
ก.ก่อนกระทบ ข.หลังกระทบ ค.ภาพของวัตถุจริงหลังกระทบ

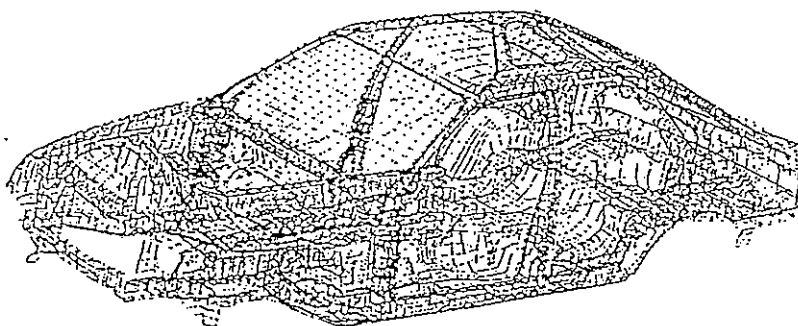
Etype	Element	Etype	Element
BE2		PE6	
BE3			
TR3		PE15	

รูปที่ 22 ลักษณะของ Finite Elements



รูปที่ 23 Finite Elements Mesh

หลักการของFEAนี้เป็นที่ทราบกันมานานแล้วแต่เนื่องจากความยุ่งยากในการคำนวณทางคณิตศาสตร์จึงไม่ได้รับความนิยมมากนัก จนเมื่อไม่นานมานี้ขีดความสามารถของคอมพิวเตอร์ได้ก้าวหน้าไปมาก จึงได้มีการนำเอาหลักการของ FEA นี้มาใช้อย่างกว้างขวาง โดยยุคแรกจะนำไปใช้ในการวิเคราะห์แบบรถยนต์ แต่ในปัจจุบันได้ประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมทุกประเภทที่ต้องการศึกษาสภาพของวัสดุที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากมีแรงกระทำ นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์ใช้ในด้านกรไหลของเหลว (Fluid Flow) การส่งผ่านความร้อน (Thermal Transport) รูปที่ 24 แสดงภาพการวิเคราะห์ด้วยเทคนิค FEA



รูปที่ 24 ตัวอย่างของการวิเคราะห์ด้วย FEA

2.12.1 หลักการของ Finite Element Analysis

เพื่อให้เห็นหลักการของ FEA ในที่นี้จะกล่าวถึงการใช้ FEA ในการวิเคราะห์แรงเค้น (Stress) ที่กระทำกับวัตถุ โดยในการอธิบายจะใช้ค่า Stiffness (ความแข็ง) เพื่อเป็นตัวบอกถึงการเปลี่ยนแปลงของ Node ในบริเวณที่มีแรงกระทำซึ่งเป็นเครื่องบอกความเค้นใน Element ได้

Stiffness ของวัสดุที่มีความยืดหยุ่นจะมีค่าดังนี้

$$F = kx$$

โดย $k =$ ค่า Stiffness

$F =$ แรงที่กระทำ

$x =$ ตำแหน่งที่เปลี่ยนไปเมื่อถูกแรงกระทำ

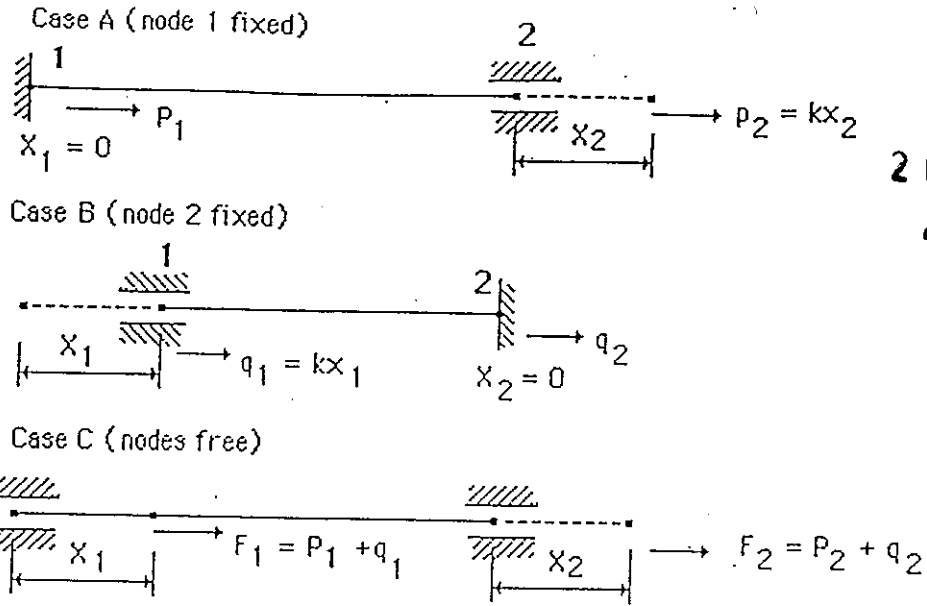
ปกติถ้ามีแรงมากระทำ ค่า x จะเปลี่ยนไปโดยค่า k จะยังคงที่ลองพิจารณา Element ใดๆ (รูปที่ 25) ซึ่งประกอบด้วยแท่งวัสดุที่บางเบาแต่มีความยืดหยุ่น โดย Stiffness มีค่า k



สำนักหอสมุด
26 พ.ย. 2546

4740020

ป
๑๖
181
.F4
๒๕๔๖
๑541



รูปที่ 25 แท่งวัตถุบาง เบา ถูกกระทำในจุดต่างๆ

ในกรณีที่ 1 สมมติให้ Node1 ถูกตรึงแต่ Node2 เป็นอิสระที่จะเคลื่อนที่ได้ระยะ x_2 (ในแนว x) เมื่อมีแรงมากระทำ

เพราะฉะนั้น $P_2 = kx_2$

และที่จุดสมดุล

$$P_1 + P_2 = 0$$

เพราะฉะนั้น $P_1 = -P_2$

ในกรณีที่ 2 สมมติว่า Node2 ถูกตรึงและ Node1 เป็นอิสระที่จะเคลื่อนที่ได้ระยะ x_1 (ในแนว x) เมื่อมีแรง q มากระทำ

เพราะฉะนั้น $q = kx_1$

และที่จุดสมดุล $q_1 + q_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $q_1 = -q_2$

ในกรณีที่ 3 สมมติให้ Node 1 และ 2 เป็นอิสระที่จะเคลื่อนที่ (กรณีนี้เป็นการรวมกรณีที่ 1 และ 2 เข้าด้วยกัน โดยมีแรงลัพธ์ F_1 และ F_2 ที่ Node 1 และ 2 ตามลำดับ)

ที่ Node 1

$$F_1 = P_1 + q_1 = -P_2 + q_1 = -kx_2 + kx_1 = kx_1 - kx_2$$

ที่ Node2

$$F_2 = P_2 + q_2 = P_2 - q_1 = kx_2 - kx_1 = -kx_1 + kx_2$$

ดังนั้น

$$F_1 = kx_1 - kx_2$$

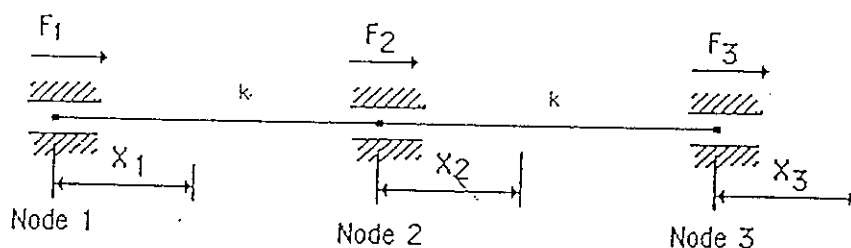
$$F_2 = -kx_1 + kx_2$$

ซึ่งอาจแสดงในรูปของเมตริกซ์ (Matrix) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Nodal Force = Stiffness Matrix \times Nodal Displacement

โดย Stiffness Matrix นี้อาจคิดว่าเป็นส่วนหลักของงานคำนวณ FEA ของโครงสร้างที่ถูกแรงเค้นก็ได้ ลองพิจารณาโครงสร้างที่ขึงขากขึ้นสัคนิด เช่น มีแท่งวัตถุ บาง เบา 2 ชุดซึ่งมีค่า Stiffness เท่ากันต่อกันอย่างอนุกรมและมีแรงมากระทำกับแต่ละ Node ดังรูปที่ 26



รูปที่ 26 แท่งวัตถุต่อกัน 2 ท่อน โดยมีแรงกระทำที่ Node ทั้งสาม

โดยใช้หลักการเดียวกันกับกรณีข้างต้นจะได้สมการเมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

สมมติว่าแท่งวัตถุในรูป 26 มีค่า Stiffness 12 kN/mm และแรงที่มากระทำที่ Node 2,3 คือ

$F_2 = 3 \text{ kN}$, $F_3 = 6 \text{ kN}$ ตามลำดับ โดย Node 1 ถูกตรึงไว้หากพิจารณาดำเนินการที่มีการเปลี่ยนแปลงไปของ Node 2,3 จะได้นี้

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -12 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + (-12x_2) + 0 \\ 0 + (24x_2) + (-12x_3) \\ 0 + (-12x_2) + (12x_3) \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ค่า} \quad 3 = 24x_2 - 12x_3 \quad (1)$$

$$6 = -12x_2 + 12x_3 \quad (2)$$

แก้สมการ (1), (2) จะได้

$$x_2 = 0.75 \text{ mm}$$

$$x_3 = 1.25 \text{ mm}$$

นั่นคือ Node 2, 3 มีตำแหน่งเปลี่ยนไป 0.75 และ 1.25 mm ตามลำดับ

จากตัวอย่างนี้หากนำค่าที่เปลี่ยนไปนี้ไปเทียบกับความยาวเดิม ก็จะหาค่าความเค้น (Stress) ได้นอก จากนี้ค่าอื่นๆเช่น Young's Modulus ก็หาได้เช่นกัน

2.12.2 การใช้งานจริง

ในทางปฏิบัติการวิเคราะห์จะยุ่งยากกว่าที่อธิบายมานี้ โดยเฉพาะในกรณี 2 มิติและ 3 มิติเพราะ ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่ง Node จะขึ้นอยู่กับรูปทรงของวัสดุด้วยดังนั้นการ คำนวณจึงไม่ขึ้นกับค่า k ตัวเดียว ดังเช่น กรณีแรก แต่ค่า Stiffness Matrix จะต้องหามาจาก กระบวนการทางคณิตศาสตร์ซึ่งยุ่งยากโดยรูปแบบทั่วไปจะเป็นดังนี้

$$\text{Stiffness Matrix} = V(B)'(D)(B)$$

โดย B คือ Matrix ซึ่งบอกถึงรูปทรงของ Element

D คือ Matrix ซึ่งให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) กับความเครียด (Strain) ซึ่งอาจ รวมค่า Young's Modulus และ Poisson's Ratio ด้วย

B' คือ Transposed Matrix ของ B

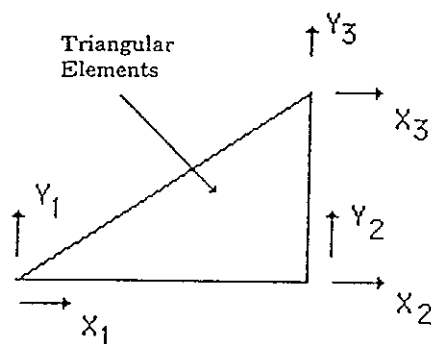
V คือ ปริมาตรของ Element

โดยชนิดของ Element อาจบอกในรูปของ

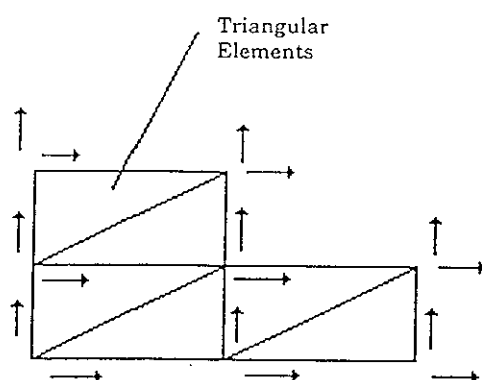
ก. รูปทรง

ข. ระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom)

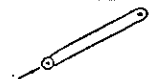
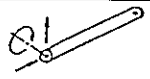
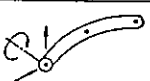
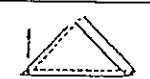


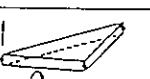



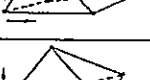
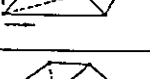
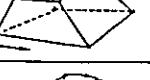
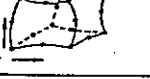
จำนวน Degree of Freedom ของโครงสร้างนี้จะบอกถึงขนาดของ Stiffness Matrix เช่น กรณี วัสดุเบาในรูปที่ 25 จะมีเพียง 1 Degree of Freedom ต่อ Node ดังนั้น Stiffness Matrix จะมีขนาด 2×2 (เพราะมี 2 Node) แต่สำหรับแท่งวัสดุ (รูปที่ 26) จะกลายเป็น 3×3 Matrix (เพราะมี 3 Node และแต่ละ Node มี 1 Degree of Freedom) หากพิจารณารูป 2 มิติ เช่น รูปที่ 27 แต่ละ Node จะมี 2 Degree of Freedom (และมีด้วยกัน 3 Node) ดังนั้น Stiffness Matrix จะมีขนาด 6×6 และหาก Element นี้เป็นส่วนหนึ่งของรูปทรงดังรูปที่ 27 ซึ่งมีด้วยกัน 8 Node ดังนั้น Stiffness Matrix จะมีขนาด 16×16 ซึ่ง การคำนวณค่าต่างๆจะยุ่งยากขึ้นดังนั้นจะต้องใช้คอมพิวเตอร์เข้ามาช่วย



รูปที่ 27 Element ซึ่งประกอบด้วย 3 Node แต่ละ Node มี 2 Degree of Freedom



รูปที่ 28 รูปนี้ประกอบด้วย Element ข่อยๆซึ่งให้ค่า Stiffness Matrix ขนาด 16x16

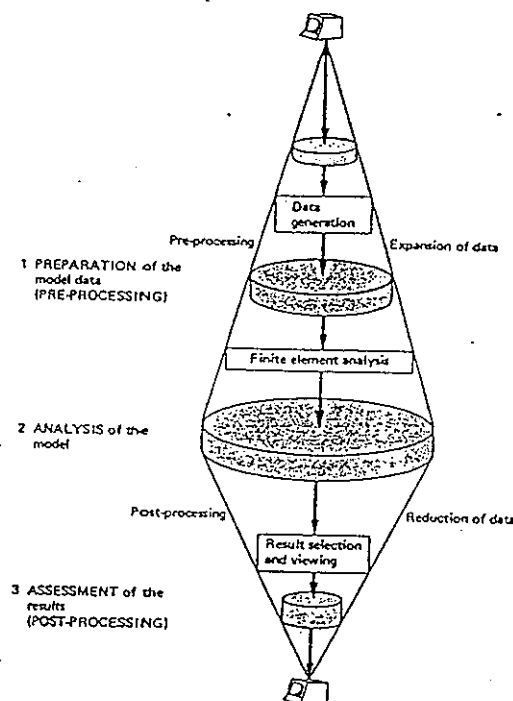
	ELEMENT TYPE	DESCRIPTION	D.O.F.s PER NODE	D.O.F.s PER ELEMENT
1		Thin rod; Two-dimensional; Two nodes	1	2
2		Thin rod; Beam bending type; Two-dimensional; Two nodes	3	6
3		Thin rod; Beam type; Two-dimensional; Three nodes	3	9
4		Triangular; Plane stress; Two-dimensional; Three nodes	2	6
5		Quadrilateral; Plane stress; Two-dimensional; Four nodes	2	8
6		Parabolic; Plane stress; Two-dimensional; Eight nodes	2	16
7		Triangular; Plate bending; Two-dimensional; Three nodes	5	15
8		Quadrilateral; Plate bending; Two-dimensional; Four nodes	5	20
9		Curved shell; Three-dimensional; Eight nodes	6	48
10		Triangular; 3D solid; Linear isoparametric; Six nodes	3	18
11		Tetrahedral; 3D solid; Linear isoparametric; Four nodes	3	12
12		Quadrilateral; 3D solid; Linear isoparametric; Eight nodes	3	24
13		3D solid; Quadratic isoparametric; Twenty nodes	3	60
14		Triangular ring; 3D solid; Axisymmetric; Three nodes	2	6

รูปที่ 29 Element ชนิดต่างๆ

2.12.3 การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการวิเคราะห์ FEA

ด้วยขีดความสามารถของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน ทำให้สามารถแก้ปัญหา FEA ได้สะดวกโดยขั้นตอนสำหรับการวิเคราะห์จะมี 3 ขั้นตอนด้วยกัน(ดังรูปที่ 30) คือ

1. การเตรียมข้อมูลสำหรับตัวแบบ (Model) ก่อนถูกกระทำ (Preprocessing)(รูปที่ 31)
2. วิเคราะห์แบบ
3. พิจารณาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นหลังกระทำ (Preprocessing)

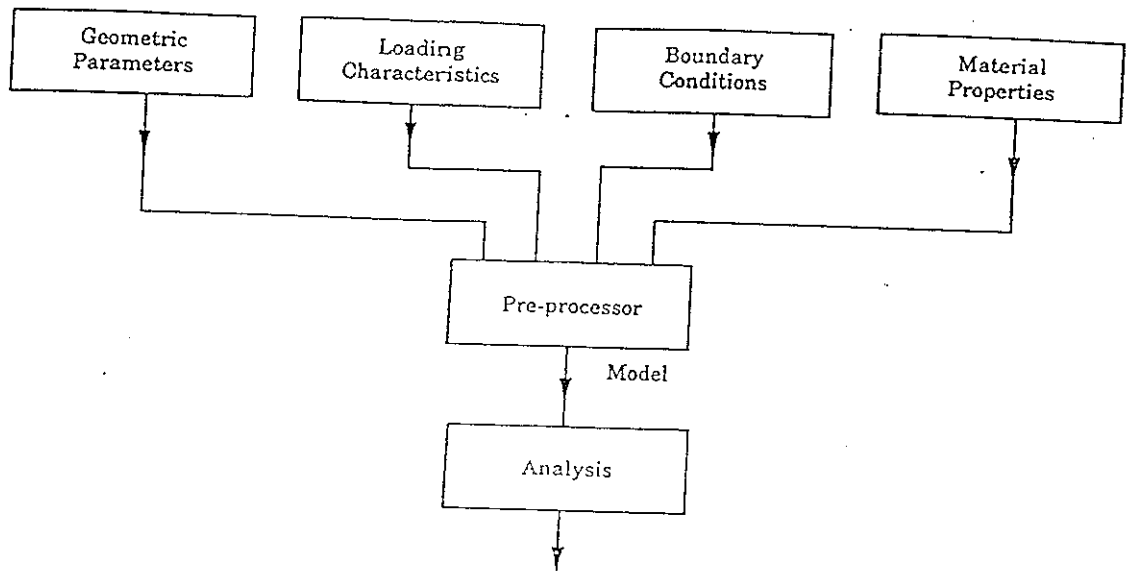


รูปที่ 30 ขั้นตอนของโปรแกรม FEA

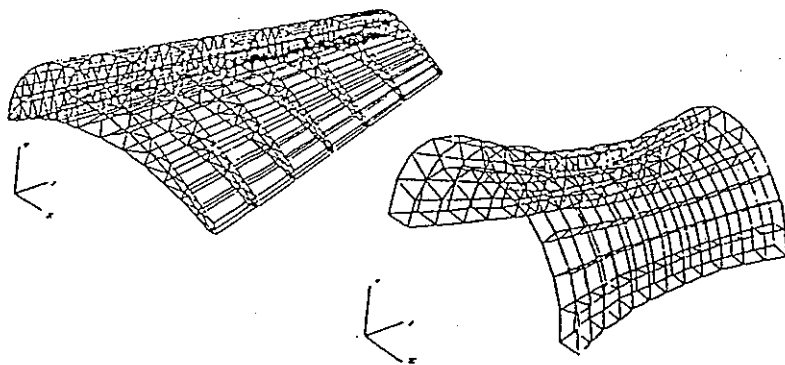
โดยในขั้น Pre-processing นี้จะเป็นการสร้างภาพหรือตัวแปรขึ้นมาก่อนจากนั้นจึงสร้างโครงข่าย (Mesh) ของ Finite Element ขึ้น (รูปที่ 32) แล้วจึงใส่ค่าต่างๆที่จะใช้ในการวิเคราะห์เข้าไปเพื่อคำนวณซึ่งค่าเหล่านี้มีอาทิเช่น

1. ค่าพารามิเตอร์ทางเรขาคณิต (Geometric Parameter)
2. คุณสมบัติของแรงที่มากระทำ (Loading Characteristics)
3. เงื่อนไขต่างๆ (Boundary Condition)
4. คุณสมบัติของวัสดุ (Material Properties)

ภาพสรุปของส่วน Pre-processing



รูปที่ 31 ขั้นตอน Pre-processing

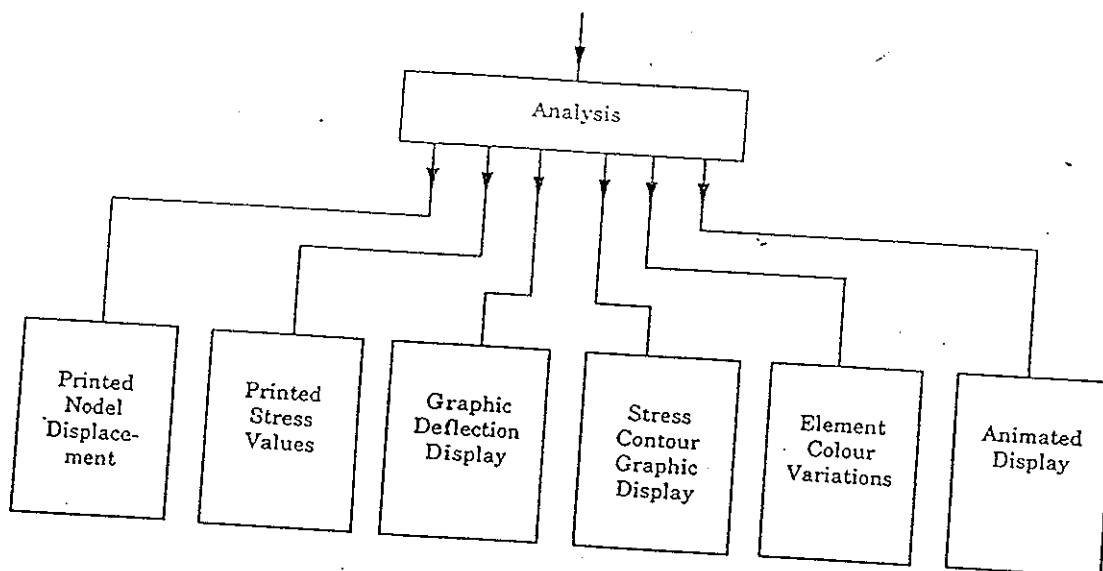


รูปที่ 32 ข้อมูลจากระบบ CAD ถูกนำมาสร้าง Mesh

ในส่วน Post-processing จะเป็น โปรแกรมที่ให้ผลลัพธ์หลังจากการวิเคราะห์แบบแล้วโดยสิ่งที่ได้ อาจอยู่ในรูปของข้อมูล หรืออาจอยู่ในลักษณะรูปภาพซึ่งปกติผลลัพธ์จะมีลักษณะดังนี้

- ก. ให้ค่า ตำแหน่ง Node ที่เปลี่ยนไป
- ข. ให้ค่า Element Stress
- ค. แสดงกราฟของ โครงข่าย ซึ่งบิดไป เนื่องจากแรงกระทำ
- ง. แสดงภาพ Stress Contour
- จ. แสดงภาพพร้อมให้สีส่วนที่ได้รับแรงเค้นหรือเกิดความเครียดต่างกัน
- ฉ. แสดงในรูปของภาพซึ่งตำแหน่ง Node เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมีแรงมากระทำ

ภาพสรุปของส่วน Post-processing แสดงไว้ในรูปที่ 33



รูปที่ 33 ขั้นตอน Post-processing