การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสีย
โดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและแนวแกน

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF LOSSLESS WAVEGUIDES
USING TANGENTIAL AND AXIAL ELECTRIC FIELD COMPONENTS

นาย สาธิต วรปัญญานนท์ รหัส 51364545

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
ปีการศึกษา 2554

ใบรับรองปริญญานิพนธ์

ชื่อหัวข้อโครงงาน วิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสีย โดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและแนวแกน

ผู้ดำเนินโครงงาน นาย สาธิต วรปัญญานนท์ รหัส 51364545

ที่ปรึกษาโครงงาน ดร.ชัยรัตน์ พินทอง

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2554

....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

....ที่ปรึกษาโครงงาน
(ดร.ชัยรัตน์ พินทอง)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุรเชษฐ์ กานต์ประชา)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อัครพันธ์ วงศ์กังแห)

ชื่อหัวข้อโครงงาน วิเคราะห์ท่อนำคลื่นไม่มีการสูญเสีย โดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและแนวแกน

ผู้ดำเนินโครงงาน นาย สาธิต วรปัญญานนท์ รหัส 51364545

ที่ปรึกษาโครงงาน ดร.ชัยรัตน์ พินทอง

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2554

....

บทคัดย่อ

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางสม่ำเสมอได้รับการเสนอขึ้น ในการวิเคราะห์สมการคลื่นรูปสนามไฟฟ้าสำหรับตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสียจะใช้ตั้งต้นสำหรับหาฟังก์ชันนอลโดยอาศัยวิธีของเรเลย์-ริทซ์ สนามไฟฟ้าจะได้รับการแยกออกเป็นองค์ประกอบในแนวตามขวางและในแนวแกน ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นนั้นจะแบ่งย่อยเป็นอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม โดยสนามในแนวตามขวางจะได้รับการสร้างจากองค์ประกอบในแนวสัมผัสของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ในขณะที่สนามในแนวแกนจะได้รับการสร้างจากอีลีเมนต์ที่โนด จุดต่ำสุดของฟังก์ชันนอลจะนำไปสู่ระบบสมการเมตริกซ์ค่าเจาะจงที่มีองค์ประกอบของสนามและค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์เป็นผลเฉลย ท่อนำคลื่นที่นำมาพิจารณาคือท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสียบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกบางส่วนและมีภาคตัดขวางรูปสี่เหลี่ยม การวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขคลื่นและค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์ในโมด *LSE* และ *LSM* ที่สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ เมื่อค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของวัสดุที่บรรจุในท่อนำคลื่นเพิ่มขึ้น โดยคงขนาดของวัสดุไว้ จะทำให้ความถี่ตัดของแบบแผนคลื่นมูลฐานมีค่าลดลง เมื่อไดอิเล็กตริกมีขนาดเพิ่มขึ้น โดยคงค่าค่าคงตัวไดอิเล็กตริกไว้ จะทำให้ความถี่ตัดในแบบแผนคลื่นมูลฐานมีค่าลดลงเหมือนที่ผ่านมา และค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์จะลู่เข้าสู่ค่าดัชนีหักเหของวัสดุเร็วขึ้น จำนวนอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางได้รับการแปรเปลี่ยนและแสดงให้เห็นว่า เมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ จะทำให้ความผิดพลาดของค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์ลดลง วิธีการนี้ได้รับการนำไปประยุกต์ใช้งานกับท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม ผลลัพธ์แสดงโมด *TE* และ *TM* สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ โปรแกรมแมทแล็บได้รับการพัฒนาขึ้นสำหรับการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์ของท่อนำคลื่นไม่มีการสูญเสีย และสามารถขยายต่อไปได้ในท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปทรงอิสระ

Project title	Finite Element Analysis of Lossless Waveguides Using Tangential and Axial Electric Field Components
Name	Mr. Satit Worapanyanon ID. 51364545
Project advisor	Chairat Pinthong, Ph.D.
Major	Electrical Engineering
Department	Electrical and Computer Engineering
Academic year	2011

Abstract

A Finite element method for waveguides with uniform cross-section is proposed. In the analysis, the wave equation of electric field for lossless media is initiated to find functional by means of Rayleigh-Ritz method. The electric field is decomposed into transverse and axial field components. The cross-section of waveguide is subdivided into triangle elements where constructed from the tangential components of a triangle element is transverse field and from nodal based element is the axial one. The minimum point of the functional derived is determined, yielding the system of Eigenvalue matrix equations with the field components and normalized phase constants as the solution. Under consideration is a partial filled-dielectric waveguide of lossless media with rectangular cross-section. The finite element analysis shows the relation between wave number and normalized phase constant of *LSE* and *LSM* modes owning good agreement with analytical solution. When dielectric constant of material filled in a waveguide is increased while its dimension is fixed, the cut-off frequency of fundamental mode is reduced. When the size of dielectric material is increased, while fixing its dielectric constant, the cut-off frequency is also reduced as before and the normalized phase constant has faster convergence to refractive index of material. The number of elements used on the cross-section of waveguide is varied, showing that if number of elements increases, the error of normalized phase constant is decreased. This method is then further applied to a circular cross-section hollow waveguide. The result shows *TE* and *TM* modes having good agreement with exact solutions. Matlab program is developed for the finite element analysis of waveguide filled with lossless media and can be extended further to include waveguides with arbitrary cross section.

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสียโดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและแนวแกน ซึ่งจะไม่มีทางสำเร็จไปได้ถ้าไม่ได้รับการช่วยเหลือจากบุคคลดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ดร.ชัยรัตน์ พินทอง อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ได้ให้ความรู้ ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ให้ความกรุณาในการตรวจทานปริญญานิพนธ์ และให้ความช่วยเหลือแก่ผู้จัดทำเป็นอย่างดีตลอดมา ผู้จัดทำโครงงานขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงและขอระลึกถึงความกรุณาของท่านไว้ตลอดไป

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชาและผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัครพันธ์ วงศ์กังแห อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นกรรมการคุมสอบโครงงานซึ่งเสียสละเวลาในการคุมสอบโครงงานและให้คำแนะนำเป็นอย่างดี ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้กับผู้จัดทำ

นอกจากนี้ยังต้องขอขอบพระคุณภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวรที่เอื้อเฟื้อสถานที่ในการจัดทำโครงงาน และทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เหนือสิ่งอื่นใดผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้มอบความรักความเมตตา สติปัญญา รวมทั้งเป็นผู้ให้ทุกสิ่งทุกอย่างตั้งแต่วัยเยาว์จวบจนถึงปัจจุบัน คอยเป็นกำลังใจทำให้ได้รับความสำเร็จอย่างทุกวันนี้ รวมทั้งขอขอบพระคุณทุกคนในครอบครัวของผู้จัดทำโครงงานที่ไม่ได้กล่าวมาด้วย

ท้ายนี้ผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ไม่ได้กล่าวนามมา ณ ที่นี้ ที่มีส่วนร่วมในการให้ข้อมูลเป็นที่ปรึกษาในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์ ผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

นาย สาธิต วรปัญญานนท์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

การวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์จะเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และงานทางวิศวกรรม วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้ได้อย่างกว้างขวางเนื่องจากเป็นวิธีที่มีความยืดหยุ่นสูง และสามารถประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาในหลายลักษณะ รวมถึงให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องและแม่นยำ

โครงงานฉบับนี้จะเสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนสำหรับวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไดอิเล็กตริกที่ไม่มีการสูญเสีย ผลลัพธ์ที่ได้จะได้รับการเปรียบเทียบผลเชิงวิเคราะห์ และสามารถนำวิธีที่เสนอไปประยุกต์ใช้กับโครงสร้างในสภาวการณ์จริงได้

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. ศึกษาทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
2. ศึกษาทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน
3. เพื่อให้ทราบถึงคุณลักษณะของท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกและท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัวขวางเป็นรูปวงกลม

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

1. ศึกษาทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
2. ศึกษาทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนในท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีการสูญเสีย ซึ่งบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกและท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม

1.4 ขั้นตอนและแผนการดำเนินงาน

กิจกรรม	ปี 2554							ปี 2555		ปี 2556
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.-พ.ค.	มิ.ย.-ธ.ค.	ม.ค
1. ศึกษาทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า	↔	↔	↔	↔						
2. ศึกษาวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนในปัญหาท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสีย ซึ่งบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกและท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม					↔	↔	↔			
3. ศึกษาและพัฒนาโปรแกรม MATLAB								↔		
4. รวบรวมผลการวิเคราะห์									↔	
5. สรุปและจัดทำเอกสารโครงงาน										↔

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงงาน

1. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน
3. ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับคุณลักษณะของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกและท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม
4. ได้โปรแกรมจากการวิเคราะห์

1.6 งบประมาณ

1. ค่าเอกสารในการค้นคว้าทำโครงงานและค่าเข้าเล่มโครงงาน	700 บาท
2. ค่าวัสดุคอมพิวเตอร์	300 บาท
รวม (หนึ่งพันบาทถ้วน)	1,000 บาท

หมายเหตุ: ถัวเฉลี่ยทุกรายการ

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาค่าขอบเขตของฟิสิกส์คณิตศาสตร์ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีประวัติยาวนานถึง 50 ปี โดยได้รับการเสนอขึ้นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ. 1940 และเริ่มนำมาใช้ในการออกแบบเครื่องบิน หลังจากนั้นก็ได้รับการพัฒนาและมีการนำไปใช้อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาการวิเคราะห์โครงสร้างและปัญหาอื่นๆ ปัจจุบันนี้ไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นที่นิยมใช้ในงานวิศวกรรมและปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.1 วิธีสำหรับปัญหาค่าขอบเขต

ในส่วนแรกจะเป็นการอธิบายปัญหาค่าขอบเขตและการแก้ปัญหาของสองวิธีทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ วิธีการแปรผัน (variational method) ของริทซ์ (Ritz method) และวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin'method) ทั้งสองวิธีนี้เป็นพื้นฐานของไฟไนต์อีลีเมนต์

2.1.1 ปัญหาค่าขอบเขต

ปัญหาค่าขอบเขตเกิดจากการจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกายภาพ การหาผลเฉลยของปัญหานี้ถือเป็นใจความสำคัญทางคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ โดยทั่วไปแล้ว ปัญหาค่าขอบเขตสามารถอธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์ บนโดเมน Ω ได้ดังนี้

$$\mathcal{L}\phi = f \tag{2.1}$$

พร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตบนขอบเขต Γ ที่ล้อมรอบด้วยโดเมน Ω

เมื่อ $\mathcal{L}$ คือ ตัวดำเนินการอนุพันธ์ ϕ คือ ตัวแปรไม่ทราบค่าและ คือ f ฟังก์ชันของแรง (forcing function) หรือ ฟังก์ชันกระตุ้น (exciting function)

ในสาขาวิชาแม่เหล็กไฟฟ้า รูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์จะอยู่ในรูปตั้งแต่ แบบที่ง่ายคือ สมการปัวส์ซอง หรือรูปแบบที่ซับซ้อนมากขึ้นคือ สมการคลื่นเชิงสเกลาร์ สมการคลื่นเชิงเวกเตอร์ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตจะเริ่มจากเงื่อนไขดีริชเลต์ (Dirichlet condition) และเงื่อนไขนอยมานน์ (Neumann condition) ไปจนถึง เงื่อนไขความต้านทานที่ซับซ้อนและเงื่อนไขการแผ่

พลังงาน รวมถึงเงื่อนไขอันดับสูงที่มีความซับซ้อนมาก ยังมีปัญหาในทางปฏิบัติทางวิศวกรรมศาสตร์หลายลักษณะที่ไม่ยังสามารถหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงวิเคราะห์โดยตรง จึงได้มีการพัฒนาวิธีการประมาณค่าขึ้น ซึ่งวิธีที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง คือ วิธีริทซ์ (Ritz method) และวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin method)

2.1.2 วิธีริทซ์

วิธีริทซ์ หรือที่รู้จักกันว่า เรเลย์-ริทซ์ (Rayleigh-Ritz method) เป็นวิธีการแปรผัน (Variational method) ที่ซึ่งปัญหาค่าขอบเขตจะได้รับการจัดสูตรให้อยู่ในรูปของนิพจน์การแปรผันที่มีชื่อว่า ฟังก์ชันนอล จุดต่ำสุดของฟังก์ชันนอล จะสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ คำตอบประมาณจะได้จากการให้ฟังก์ชันนอลมีค่าต่ำที่สุดเทียบกับตัวแปรที่สร้างขึ้น เพื่อแสดงให้เห็นขั้นตอนที่ว่านี้ จะให้นิยามผลคูณภายในเป็นอันดับแรก ดังต่อไปนี้

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \phi \psi^* d\Omega \tag{2.2}$$

เครื่องหมาย * เป็นสังยุคเชิงซ้อน และตัวดำเนินการ $\mathcal{L}$ มีคุณสมบัติผูกพันในตัว (self adjoint) นั่นคือ

$$\langle \mathcal{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathcal{L}\psi \rangle \tag{2.3}$$

และเป็นบวกเสมอ นั่นคือ

$$\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle = \begin{cases} > 0 & \phi \neq 0 \\ = 0 & \phi = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

ฟังก์ชันนอลจะได้รับการนิยามดังสมการต่อไปนี้

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}\tilde{\phi}, \tilde{\phi} \rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{\phi}, f \rangle - \frac{1}{2}\langle f, \tilde{\phi} \rangle \tag{2.5}$$

เพื่อที่จะหาผลเฉลยของฟังก์ชันนอลที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ จะสมมุติให้ปัญหาเป็นค่าจำนวนจริง และให้ตัวแปรไม่ทราบค่า ϕ ใน (2.5) สามารถขยายโดยการประมาณได้เป็น

$$\widetilde{\phi} = \sum_{j=1}^{N} c_j v_j = \{c\}^T \{v\} = \{v\}^T \{c\} \tag{2.6}$$

เมื่อ v_j คือ ฟังก์ชันขยาย (expansion function) ที่เลือกมาใช้บนโดเมนทั้งหมด และเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า c_j คือ ค่าสัมประสิทธิ์ และเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า $\{\cdot\}$ เป็นสัญลักษณ์ของเวกเตอร์หลัก ตัวยก T คือ การสลับเปลี่ยนของเวกเตอร์ แทน (2.6) ลงใน (2.5) จะได้

$$F = \frac{1}{2}\{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} \mathcal{L} \{v\}^T d\Omega \{c\} - \{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} f d\Omega \tag{2.7}$$

จุดต่ำสุดของ $F(\widetilde{\phi})$ สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ย่อยของ $F(\widetilde{\phi})$ เทียบกับ c_i ทำให้ได้เซตของสมการพีชคณิตเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial c_i} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} v_i \mathcal{L}\{v\}^T d\Omega\{c\} + \frac{1}{2}\{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} \mathcal{L} v_i d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} c_j \int_{\Omega} (v_i \mathcal{L} v_j + v_j \mathcal{L} v_i) d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega \\ &= 0 \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N \end{aligned} \tag{2.8}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้เป็น

$$[S]\{c\} = \{b\} \tag{2.9}$$

องค์ประกอบในเมตริกซ์ $[S]$ และอีลีเมนต์ใน $\{b\}$ มีค่าเป็นดังนี้

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (v_i \mathcal{L} v_j + v_j \mathcal{L} v_i) d\Omega \tag{2.10}$$

$$b_i = \int_{\Omega} v_i f \quad d\Omega \tag{2.11}$$

โดยทั่วไปแล้ว $[S]$ เป็นเมตริกสมมาตร ถ้าใช้คุณสมบัติผูกพันในตัวของตัวดำเนินการ $\mathcal{L}$ และ S_{ij} สามารถเขียนได้เป็น

$$S_{ij} = \int_{\Omega} v_i \mathcal{L} v_j d\Omega \tag{2.12}$$

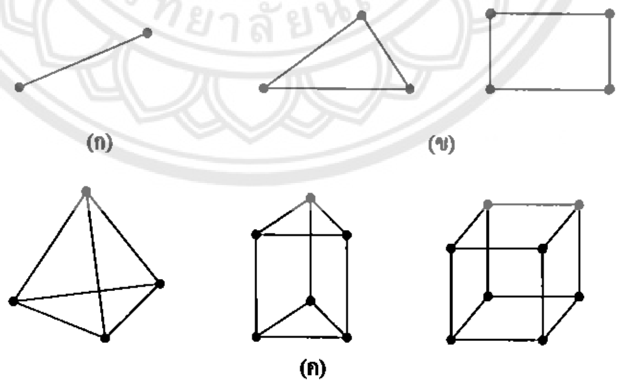
คำตอบประมาณสำหรับปัญหาค่าขอบเขต (2.1) สามารถหาได้จากสมการ (2.6) ที่ซึ่ง c_i คือผลเฉลยของสมการเมตริกซ์ (2.9)

2.2 ขั้นตอนการทำไฟไนต์อีลีเมนต์

ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยการใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะมีด้วยกัน 4 ขั้นตอน ซึ่งจะอธิบายในหัวข้อต่อไปนี้

2.2.1 การแบ่งโดเมนเป็นส่วนย่อย

การแบ่งโดเมน Ω เป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญที่สุดในการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์ เนื่องจากวิธีการจะกระทำในการเลือกโดเมนแบ่งออกเป็นส่วนย่อย อาจจะเกิดผลกระทบต่อความต้องการที่จะเก็บข้อมูลของคอมพิวเตอร์ เวลาในการคำนวณ และความแม่นยำของผลลัพธ์เชิงตัวเลข ในขั้นตอนนี้โดเมน Ω ทั้งหมดจะถูกแบ่งเป็นโดเมนย่อยๆ สัญลักษณ์คือ Ω^e (e=1,2,3,…,M) M คือจำนวนโดเมนย่อยทั้งหมด โดเมนย่อยนี้คืออีลีเมนต์จำนวนมาก สำหรับโดเมนหนึ่งมิติ อีลีเมนต์จะเป็นท่อนสั้นๆ ดังรูปที่ 2.1(ก) สำหรับโดเมนสองมิติ อีลีเมนต์จะเป็นรูปสามเหลี่ยมเล็กๆและสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปที่ 2.1(ข) ในผลเฉลยสามมิติ โดเมนจะถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยในรูปพีระมิด ปริซึมสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยมลูกบาศก์ดังรูปที่ 2.1(ค)



รูปที่ 2.1 ไฟไนต์อีลีเมนต์แบบต่างๆ (ก) แบบหนึ่งมิติ (ข) แบบสองมิติ (ค) แบบสามมิติ

เส้นอีลีเมนต์เชิงเส้นมี 2 โนด แต่ละโนดอยู่ที่ปลายทั้งสองข้าง อีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่เป็นรูปสามเหลี่ยมเชิงเส้นมี 3 โนด ตั้งอยู่ที่สามจุดยอด ขณะที่รูปพีระมิดเชิงเส้นมี 4 โนด ตั้งอยู่ที่ 4 มุม

2.2.2 การเลือกคำตอบทดลอง

ขั้นตอนที่ 2 ของการวิเคราะห์ไฟไนต์อีลีเมนต์คือการเลือกคำตอบทดลอง ด้วยการกำหนดการประมาณค่าผลเฉลยที่ไม่ทราบค่าภายในอีลีเมนต์ การประมาณค่าในช่วง (interpolation function) จะเลือกจากพหุนามอันดับหนึ่ง อันดับสองหรืออันดับสูงๆ พหุนามอันดับสูงๆแม้ว่าจะมีความแม่นยำสูง แต่การจัดสูตรจะมีความยุ่งยากกว่าพหุนามอันดับต่ำๆ ด้วยเหตุนี้การประมาณค่าในช่วงจะใช้เป็นเชิงเส้นง่ายๆ ซึ่งยังคงใช้อย่างกว้างขวาง อันดับของพหุนามที่ถูกเลือก สามารถหาได้จากนิพจน์ของผลเฉลยที่ไม่ทราบค่าในอีลีเมนต์ เมื่ออีลีเมนต์ e มีรูปแบบดังนี้

$$\widetilde{\phi}^{e} = \sum_{j=1}^{n} N_j^e \phi_j^e = \{N^e\}^T \{\phi^e\} = \{\phi^e\}^T \{N^e\} \tag{2.17}$$

เมื่อ n คือ จำนวนโนดในอีลีเมนต์, ϕ_j^e คือ ค่า ϕ ณ โนด j ของอีลีเมนต์, N_j^e คือฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงสำหรับโนด j การประมาณค่าในช่วงมีอาจมีชื่ออื่นว่า ฟังก์ชันการขยาย (expansion function) หรือ ฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) อันดับสูงสุดของฟังก์ชัน N_j^e จะเป็นตัวกำหนดอันดับของอีลีเมนต์ เช่น ถ้า N_j^e เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น อีลีเมนต์ e ก็จะเป็นอีลีเมนต์เชิงเส้น ลักษณะที่สำคัญของฟังก์ชัน N_j^e คือ ความไม่เป็นศูนย์อยู่ภายในอีลีเมนต์ e แต่จะเป็นศูนย์ภายนอกอีลีเมนต์

2.2.3 การจัดสูตรของระบบสมการ

ขั้นตอนที่ 3 ของการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ คือการจัดสูตรระบบสมการ ซึ่งจะใช้หนึ่งในวิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย นั่นคือ วิธีการแปรผันของริทซ์

พิจารณาปัญหาที่นิยามโดยสมการ (2.1) และสมมติว่าปัญหาเป็นค่าจำนวนจริง ฟังก์ชันนอล F ที่กำหนดโดยสมการ (2.5) เขียนได้เป็น

$$F(\widetilde{\phi}) = \sum_{e=1}^{M} F^e(\widetilde{\phi})^e \tag{2.18}$$

เมื่อ M คือจำนวนอีลีเมนต์ของโดเมนทั้งหมด

$$F^e(\widetilde{\phi}^e) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^e} \widetilde{\phi}^e \mathcal{L} \widetilde{\phi}^e d\Omega - \int_{\Omega^e} \widetilde{\phi}^e f d\Omega \tag{2.19}$$

แทน (2.17) ลงใน (2.19) จะได้

$$F^e = \frac{1}{2}\{\phi^e\}^T \int_{\Omega^e} \{N^e\} \mathcal{L} \{N^e\}^T d\Omega \{\phi^e\} \ - \{\phi^e\}^T \int_{\Omega^e} f \{N^e\} d\Omega \qquad (2.20)$$

สามารถเขียนในรูปแบบของเมตริกซ์ได้เป็น

$$F^e = \frac{1}{2}\{\phi^e\}^T [K^e] \{\phi^e\} \ - \{\phi^e\}^T \{b^e\} \qquad (2.21)$$

เมื่อ $[K^e]$ คือเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $\{b^e\}$ คือเวกเตอร์คอลัมน์ขนาด $n \times 1$ ในแต่ละอีลีเมนต์ซึ่งกำหนดโดย

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \mathcal{L} N_j^e \ d\Omega \qquad (2.22)$$

และ

$$b_i^e = \int_{\Omega^e} f N_i^e \ d\Omega \qquad (2.23)$$

เมตริกซ์อีลีเมนต์ $[K^e]$ เป็นเมตริกซ์ที่สมมาตร เนื่องจาก $\mathcal{L}$ เป็นคุณสมบัติผูกพันในตัว แทน (2.21) ลงใน (2.18) จะได้

$$F(\widetilde{\phi}) = \sum_{e=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\{\phi^e\}^T [K^e] \{\phi^e\} \ - \{\phi^e\}^T \{b^e\} \right) \qquad (2.24)$$

เมื่อรวมทุกอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน ทำให้ได้

$$F = \frac{1}{2}\{\phi\}^T [K] \{\phi\} - \{\phi\}^T \{b\} \qquad (2.25)$$

โดยที่ $[K]$ คือเมตริกซ์ที่สมมาตรมีขนาด $N \times N$ *เมื่อ* N คือจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด $\{\phi\}$ คือเวกเตอร์ที่ไม่ทราบค่ามีขนาดเป็น $N \times 1$ $\{b\}$ คือเวกเตอร์ที่ทราบค่ามีขนาดเป็น $N \times 1$ ผลเฉลยของสมการ (2.25) สามารถหาได้จากจุดต่ำสุดของ กำหนดโดย $\delta F = 0$ หรือเทียบเท่ากับการหาอนุพันธ์ย่อย F เทียบ ϕ_i เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(K_{ij} + K_{ji})\phi_j - b_i = 0 \qquad i = 1,2,3,\ldots,N \tag{2.26}$$

เนื่องจากเมตริกซ์ $[K]$ เป็นเมตริกซ์ที่สมมาตร นั่นคือ $K_{ij} = K_{ji}$ จาก (2.26) จะกลายเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \sum_{j=1}^{N} K_{ij}\phi_j - b_i = 0 \qquad i = 1,2,3,\ldots,N \tag{2.27}$$

หรือในรูปแบบเมตริกซ์

$$[K]\{\phi\} = \{b\} \tag{2.28}$$

หาอนุพันธ์ F^e เทียบกับ ϕ_i^e ทำให้ได้

$$\frac{\partial F^e}{\partial \phi_i^e} = \int_{\Omega^e}\{N_i^e\}\mathcal{L}\{N^e\}^T d\Omega\{\phi^e\} - \int_{\Omega^e} f\{N_i^e\}d\Omega \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{2.29}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้เป็น

$$\left\{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}\right\} = [K^e]\{\phi^e\} - \{b^e\} \tag{2.30}$$

เมื่อ

$$\left\{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}\right\} = \left[\frac{\partial F^e}{\partial \phi_1^e}, \frac{\partial F^e}{\partial \phi_2^e}, \ldots, \frac{\partial F^e}{\partial \phi_N^e}\right]^T$$

เมื่อรวมทุกอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน จะได้

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\} = \sum_{e=1}^{M}\left\{\overline{\frac{\partial F^e}{\partial \phi^e}}\right\} = \sum_{e=1}^{M}([\overline{K}^e]\{\overline{\phi}^e\} - \{\overline{b}^e\}) = \{0\} \tag{2.32}$$

ซึ่งสัญลักษณ์ $^{-}$ คือ เวกเตอร์ขยาย (expanded vector) หรือเมตริกซ์ขยาย ซึ่งสามารถหาได้จากการเติมศูนย์ในขบวนการส่งจากโนดในแต่ละอีลีเมนต์ (local node) ไปเป็นโนดของระบบ (global node) ยังผลให้ได้ เวกเตอร์หลัก $\{\overline{\phi}^e\}$ และ $\{\overline{b}^e\}$ มีขนาดเป็น $N\times 1$ และ $[\overline{K}^e]$ มีขนาดเป็น $N\times N$

2.2.4 ผลเฉลยของระบบสมการ

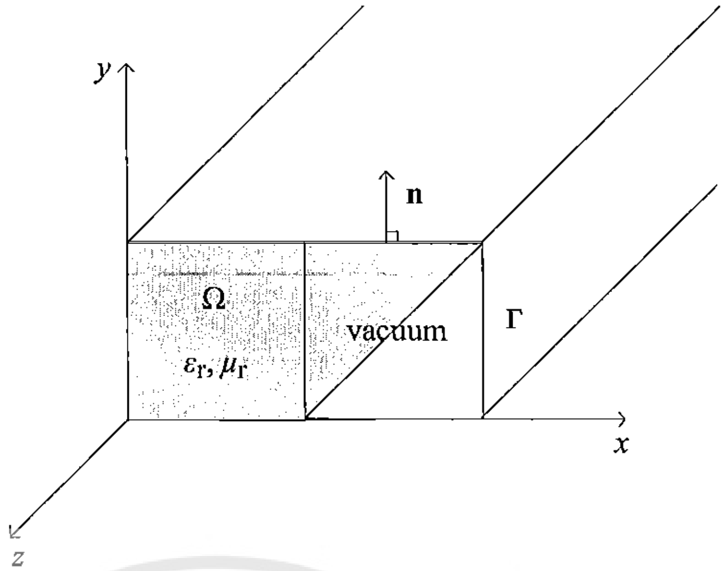
การหาผลเฉลยของระบบสมการเป็นขั้นตอนสุดท้ายของการวิเคราะห์วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อรวบทุกอีลีเมนต์เข้าด้วยกันทำให้ได้สมการระบบดังนี้

$$[K]\{\phi\} = \{b\} \tag{2.33}$$

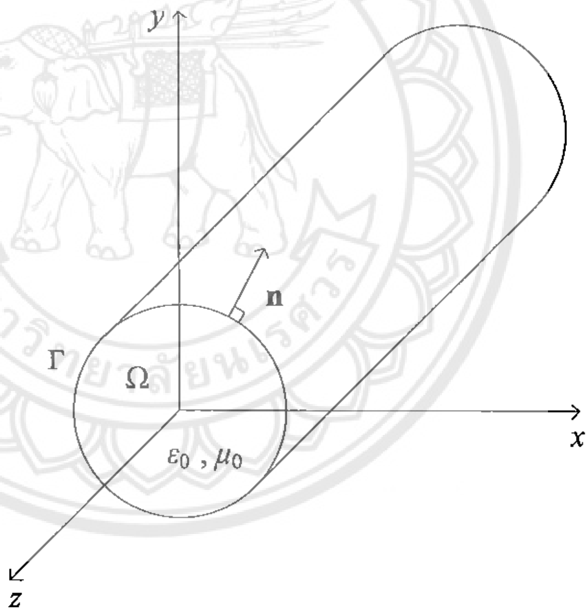
สมการ (2.33) เป็นสมการประเภทดีเทอร์มินิสติก (deterministic type) ซึ่งเป็นผลมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นเอกพันธ์(inhomogeneous differential equation) หรือเงื่อนไขขอบเขตไม่เป็นเอกพันธ์ (inhomogeneous boundary conditions) หรือทั้งคู่ ในปัญหาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบดีเทอร์มินิสติก (deterministic systems) จะเกี่ยวข้องกับปัญหาการกระเจิง การแผ่พลังงาน และปัญหาอื่นๆ ที่มีอยู่ในแหล่งกำเนิดหรือภาวะถูกกระตุ้น สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้น โดยที่ $[K]$ คือค่าสัมประสิทธิ์, $\{\phi\}$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และ $\{b\}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่ทราบค่า

2.3 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

พิจารณาท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสียและมีขนาดสม่ำเสมอ (uniform) ในแนวแกน z ในตัวอย่างที่เลือกมาศึกษาคือ ที่มีภาคตัดขวางรูปสี่เหลี่ยม และรูปวงกลม ดังแสดงในรูปที่ 2.2 และ 2.3 สำหรับท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปสี่เหลี่ยม ภายในจะได้รับการบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลางเท่ากับ ε_r และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของตัวกลางเท่ากับ μ_r เช่นเดียวกันมีความสม่ำเสมอตามแนวแกน และสำหรับท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมภายในจะเป็นอวกาศว่าง ท่อนำคลื่นทั้งสองนี้ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ



รูปที่ 2.2 ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปสี่เหลี่ยมบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก



รูปที่ 2.3 ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

พฤติกรรมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นสามารถอธิบายโดยอาศัยสมการคลื่นรูปเวกเตอร์เฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz vector equation) โดยอาศัยสนามไฟฟ้า สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{2.34}$$

เมื่อ $\mathbf{E}$ คือสนามไฟฟ้าเชิงอวกาศ (spatial field) โดยที่ $\mathbf{E}=\mathbf{E}(x,y,z)$ สนามไฟฟ้าจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต ดังนี้

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}=0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_1 \tag{2.35}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\nabla\times\mathbf{E})=0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_2 \tag{2.36}$$

เมื่อ Ω แสดงภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น ล้อมรอบด้วย ผนังไฟฟ้า (Γ_1) และผนังแม่เหล็ก (Γ_2) ผลเฉลยของ (2.34) สามารถพิจารณาได้จากจุดต่ำสุดของ F และเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\begin{cases}\delta F(\mathbf{E})=0 \\ \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}=0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_1\end{cases} \tag{2.37}$$

จากการแสดงรายละเอียดในภาคผนวกโดยอาศัยทฤษฎี จะได้ฟังก์ชันนอลของสมการ คือ

$$F(\mathbf{E})=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{E})^*\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{E}\right]d\Omega \tag{2.38}$$

สำหรับท่อนำคลื่นที่มีความสม่ำเสมอตามแนวแกน สนามไฟฟ้าเชิงอวกาศสามารถเขียนได้ในรูป $\mathbf{E}(x,y,z)=\mathbf{E}(x,y)\mathrm{e}^{-jk_z z}$ เมื่อ k_z คือค่าคงตัวเฟสในทิศทาง z จากสมการ (2.38) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}F(\mathbf{E})=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Bigg[&\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t\times\mathbf{E}_t)^*\cdot(\nabla_t\times\mathbf{E}_t)-k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{E} \\ &+\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t E_z+jk_z\mathbf{E}_t)^*\cdot(\nabla_t E_z+jk_z\mathbf{E}_t)\Bigg]d\Omega\end{aligned} \tag{2.39}$$

เมื่อ $\nabla_t=\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{a}}_x+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{a}}_y$ แทนตัวดำเนินการเดลบนภาคตัดขวาง $\mathbf{E}_t$ แทนสนามไฟฟ้าในแนวตามขวางและ E_z แทนสนามไฟฟ้าในแนวแกน z เพื่อให้ค่าเจาะจงเป็นค่าคงตัวเฟส (k_z) และเวกเตอร์เจาะจงเป็นจำนวนจริง จะใช้ตัวแปรหุ่น (dummy variable) ดังนี้

$$\mathbf{e}_t(x,y)=k_z\mathbf{E}_t(x,y) \quad \text{และ} \quad e_z(x,y)=-jE_z(x,y) \tag{2.40}$$

แทน (2.40) ลงใน (2.39) แล้วคูณด้วย k_z^2 จะได้

$$F(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left\{\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t \times \mathbf{e}_t)^* \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{e}_t^* \cdot \mathbf{e}_t \right.$$
$$\left. + k_z^2 \left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t)^* \cdot (\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) - k_0^2 \varepsilon_r e_z^* \cdot e_z\right]\right\} d\Omega \tag{2.41}$$

เมื่อป้อนค่า k_0 จะได้ผลลัพธ์ของระบบคือ k_z^2 ซึ่งเป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) หรือ ค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์

บริเวณพื้นที่ภาคตัดขวาง Ω ที่อยู่บนระนาบ xy จะได้รับการแบ่งย่อยเป็นสามเหลี่ยมเล็กๆ จำนวน M อีลีเมนต์ ภายในแต่ละอีลีเมนต์สนามไฟฟ้าตามแนวขวางจะขยายได้เป็น

$$\mathbf{e}_t^e = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i^e e_{ti}^e = \{\mathbf{N}^e\}^T \{e_t^e\} = \{e_t^e\}^T \{\mathbf{N}^e\} \tag{2.42}$$

ที่ซึ่ง n คือจำนวนของด้านของอีลีเมนต์ สำหรับอีลีเมนต์สามเหลี่ยมจะมี n=3 และองค์ประกอบตามแกน e_z สามารถขยายโดยการใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของโนดที่ใช้ทั่วไป ได้เป็น

$$e_z^e = \sum_{i=1}^{n} N_i^e e_{zi}^e = \{N^e\}^T \{e_t^e\} = \{e_t^e\}^T \{N^e\} \tag{2.43}$$

แทน (2.42) และ (2.43) ลงใน (2.41) จะได้

$$F = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{M}\left(\{e_t^e\}^{*T}\left[A_{tt}^e\right]\{e_t^e\} + k_z^2 \begin{Bmatrix} e_t^e \\ e_z^e \end{Bmatrix}^{*T} \begin{bmatrix} B_{tt}^e & B_{tz}^e \\ B_{zt}^e & B_{zz}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_t^e \\ e_z^e \end{Bmatrix}\right) \tag{2.44}$$

ซึ่งสมาชิกภายในเมตริกซ์คือ

$$\left[A_{tt}^e\right] = \iint_{\Omega^e}\left[\frac{1}{\mu_r^e}(\nabla_t \times \mathbf{N}^e)\cdot(\nabla_t \times \mathbf{N}^e)^T - k_0^2 \varepsilon_r^e \{\mathbf{N}^e\}\cdot\{\mathbf{N}^e\}^T\right] d\Omega \tag{2.45}$$

$$\left[B_{tt}^e\right] = \iint_{\Omega^e}\frac{1}{\mu_r^e}\{\mathbf{N}^e\}\cdot\{\mathbf{N}^e\}^T \, d\Omega \tag{2.46}$$

$$\left[B_{tz}^{e}\right]=\iint_{\Omega^{e}}\frac{1}{\mu_{r}^{e}}\left\{\mathbf{N}^{e}\right\}\cdot\left\{\nabla_{t}N^{e}\right\}^{T}d\Omega \tag{2.47}$$

$$\left[B_{zt}^{e}\right]=\iint_{\Omega^{e}}\frac{1}{\mu_{r}^{e}}\left\{\nabla_{t}N^{e}\right\}\cdot\left\{\mathbf{N}^{e}\right\}^{T}d\Omega \tag{2.48}$$

$$\left[B_{zz}^{e}\right]=\iint_{\Omega^{e}}\left[\frac{1}{\mu_{r}^{e}}\left\{\nabla_{t}N^{e}\right\}\cdot\left\{\nabla_{t}N^{e}\right\}^{T}-k_{0}^{2}\varepsilon_{r}^{e}\left\{N^{e}\right\}\cdot\left\{N^{e}\right\}^{T}\right]d\Omega \tag{2.49}$$

จากข้างบนนี้ Ω^{e} แสดงพื้นที่ของอีลีเมนต์ e และ ε_{r}^{e} คือ ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ และ μ_{r}^{e} คือ ค่าซึมซาบสัมพัทธ์ ของอีลีเมนต์ ทั้งสองเป็นค่าคงที่ภายในอีลีเมนต์ เมื่อรวมทุกอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน จากสมการ (2.44) จะได้

$$F=\frac{1}{2}\left\{e_{t}\right\}^{*T}\left[A_{tt}\right]\left\{e_{t}\right\}+\frac{1}{2}k_{z}^{2}\begin{Bmatrix}e_{t}\\ e_{z}\end{Bmatrix}^{*T}\begin{bmatrix}B_{tt} & B_{tz}\\ B_{zt} & B_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{t}\\ e_{z}\end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

ใช้กระบวนการของริทซ์จะได้ปัญหาค่าเจาะจงรูปทั่วไปเป็น

$$\begin{bmatrix}A_{tt} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{t}\\ e_{z}\end{Bmatrix}=-k_{z}^{2}\begin{bmatrix}B_{tt} & B_{tz}\\ B_{zt} & B_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{t}\\ e_{z}\end{Bmatrix} \tag{2.51}$$

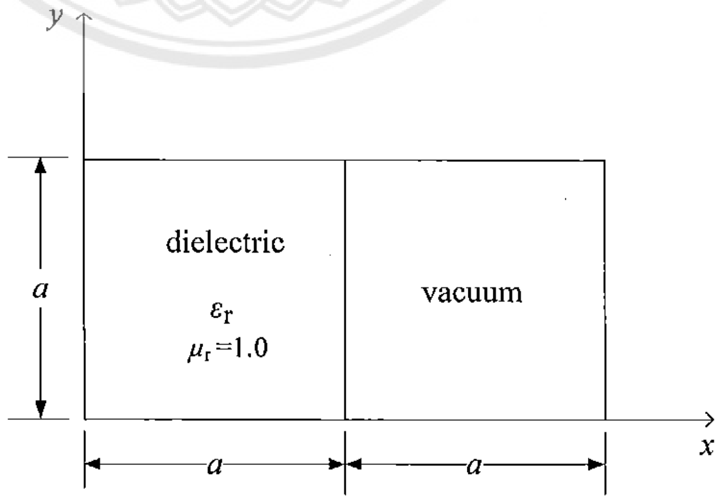
บทที่ 3
ผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไม่มีการสูญเสียโดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไม่มีการสูญเสียโดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน โดยอาศัยหลักการและทฤษฎีในบทก่อนหน้านี้ ซึ่งการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไม่มีการสูญเสียโดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน จะศึกษากรณีท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกและท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัวขวางเป็นรูปวงกลมกลวง

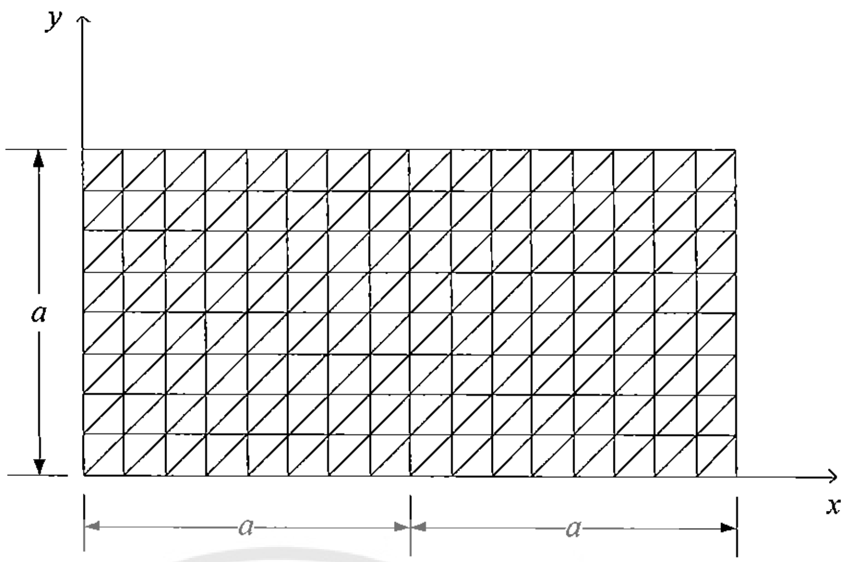
3.1 ท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a \times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ (ε_r)และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 3.1

เพื่อที่จะวิเคราะห์โดยอาศัยวิธีไฟไนต์อีเมนต์ ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นจะได้รับการแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยม ให้มีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 256 มีจำนวนโนดเท่ากับ 153 และจำนวนด้านของสามเหลี่ยมเท่ากับ 408 ดังแสดงในรูป 3.2 การแบ่งอีลีเมนต์ในลักษณะนี้จะทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า $\{e_t\}$ และ $\{e_z\}$ เท่ากับ 408 และ 153 ตามลำดับ เมื่อยังไม่ได้ให้เงื่อนไขขอบเขต

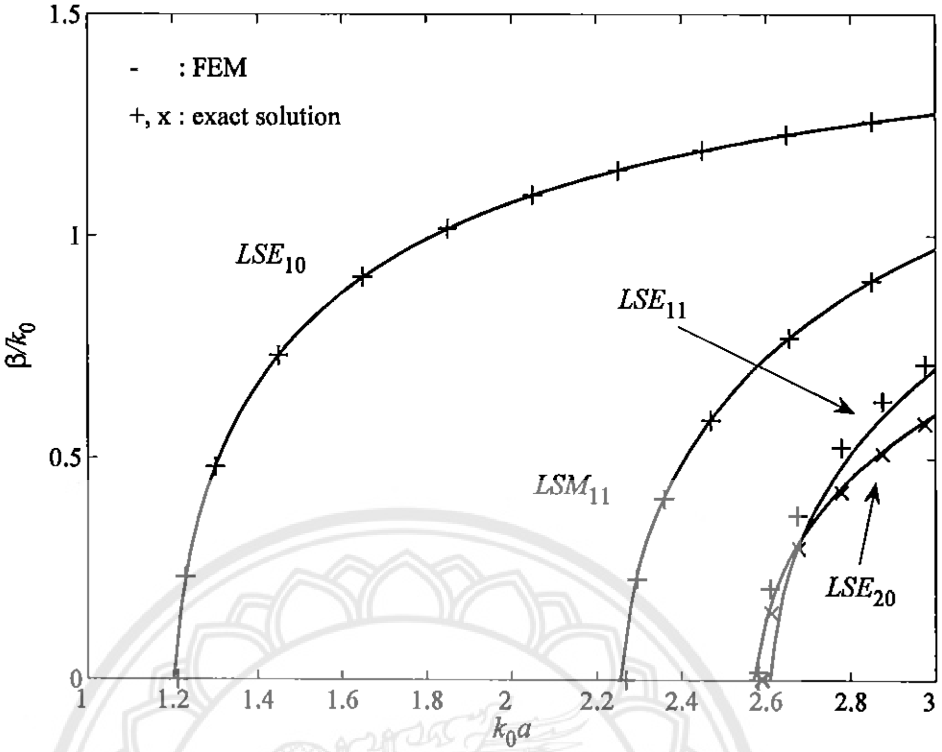


รูปที่ 3.1 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก



รูปที่ 3.2 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกออกเป็น 256 อีลีเมนต์ 153 โนด 408 ด้าน

ผลการวิเคราะห์คุณลักษณะท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกรูปที่ 3.3 โดยเส้นทึบเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และสัญลักษณ์ + คือผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) จากรูปที่ 3.3 พบว่าโมดมูลฐาน LSE_{10}, LSM_{11} และ LSE_{20} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลเฉลยแม่นตรง ส่วนโมด LSE_{11} ยังไม่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงมากนัก แต่อย่างไรก็ตาม โมดนี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น



รูปที่ 3.3 คุณลักษณะท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

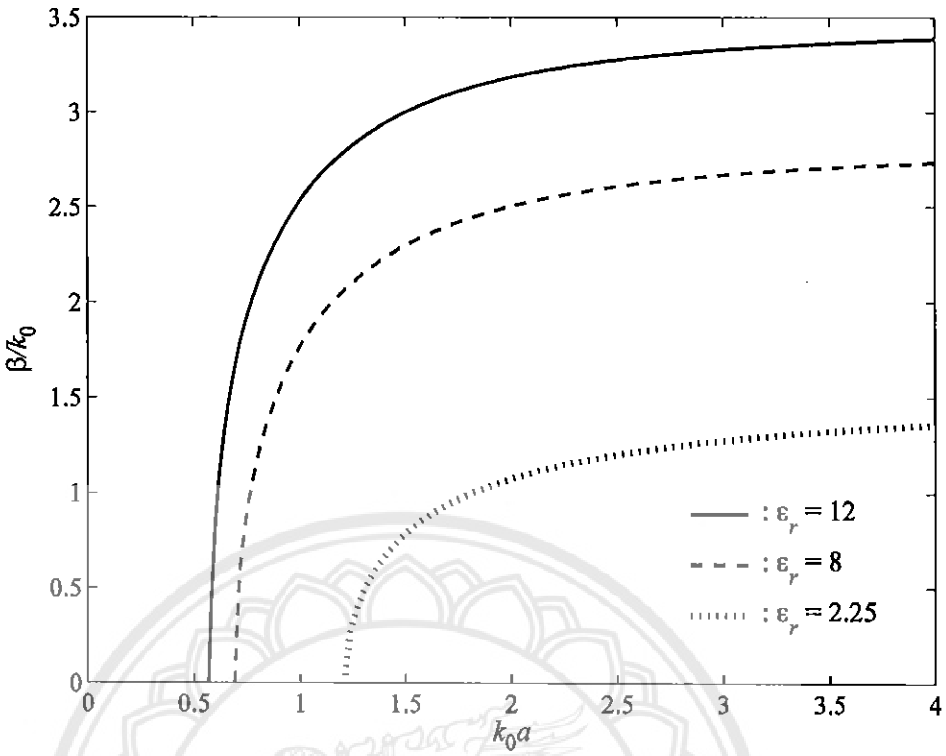
ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ของโมดมูลฐาน LSE_{10}, LSM_{11}, LSE_{11} และ LSE_{20} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และวิธีเชิงวิเคราะห์ แสดงได้ดังตาราง 3.1 สำหรับวิธีไฟไฟต์อีลีเมนต์จะใช้การแบ่งอีลีเมนต์ตามรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นทั้งหมดมีค่าไม่เกิน 4 เปอร์เซ็นต์ สำหรับโมด LSE_{10} และ LSM_{11} ความผิดพลาดจะอยู่ระดับที่ต่ำมาก

ตาราง 3.1 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ รวมขนาดความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง เมื่อแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 3.2

โมด	ผลเฉลยแม่นตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
LSE_{10}	1.275756	1.275278	0.037 %
LSM_{11}	0.971538	0.971899	0.037 %
LSE_{11}	0.728649	0.701975	3.661 %
LSE_{20}	0.593897	0.600459	1.105 %

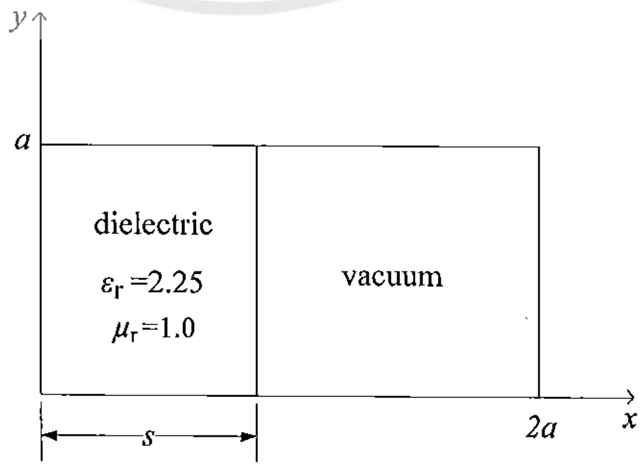
รูปที่ 3.4 จะพิจารณาโมด LSE_{10} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ที่มีโครงสร้างดังรูป 3.1 ไดอิเล็กตริกที่บรรจุในท่อนำคลื่นมีความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 1.0 และสภาพยอมสัมพัทธ์ได้รับการแปรเปลี่ยน (ε_r) เป็น 12,8 และ 2.25 ภาคตัดขวางจะได้รับการแบ่งอีลีเมนต์ ดังรูป 3.2

จากการวิเคราะห์รูปที่ 3.4 พบว่า เมื่อเพิ่มค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ของไดอิเล็กตริก ความถี่ตัดจะลดลง และเมื่อ k_0a สูงขึ้น ค่า β/k_0 แต่ละกรณีจะลู่เข้าสู่ค่าดัชนีหักเห นั่นคือ 3.464, 2.828 และ 1.5 ตามลำดับ โดยที่ค่าดัชนีหักเห $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$



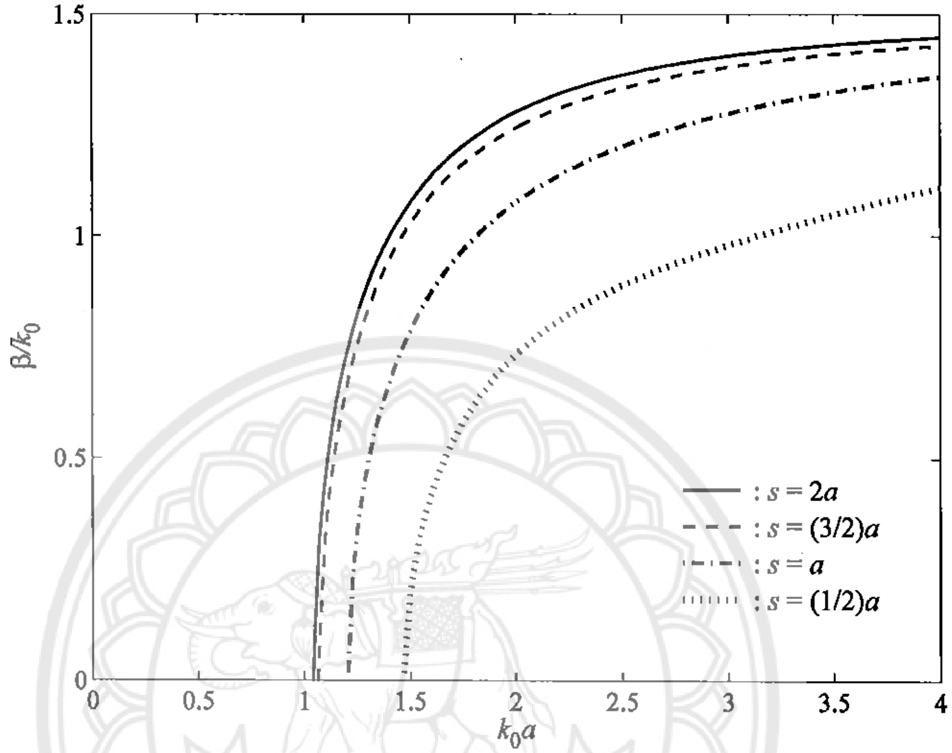
รูปที่ 3.4 คุณลักษณะของโมด LSE_{10} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ที่ความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 1.0 และแปรเปลี่ยนค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง(ε_r) เป็น 12, 8 และ 2.25

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a \times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกขนาด $a \times s$ ที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ โดย s คือระยะที่สามารถแปรเปลี่ยนตามที่กำหนด ดังแสดงในรูป 3.5



รูปที่ 3.5 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกบางส่วน ขนาดเท่ากับ s

รูปที่ 3.6 แสดงโมด LSE_{10} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ที่แปรเปลี่ยนขนาดเป็น $s = 2a$, $s = (3/2)a$, $s = a$ และ $s = (1/2)a$ ตามรูปที่ 3.5 โดยมีสภาพยอมสัมพัทธ์ และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ คงที่เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ



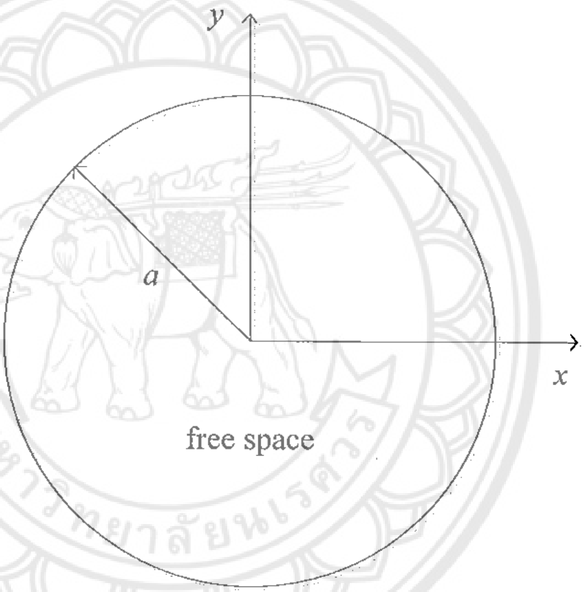
รูปที่ 3.6 คุณลักษณะของโมด LSE_{10} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ที่ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ เมื่อแปรเปลี่ยนขนาดไดอิเล็กตริกเป็น $s = 2a$, $s = (3/2)a$, $s = a$ และ $s = (1/2)a$

รูปที่ 3.6 แสดงให้เห็นว่า เมื่อเพิ่มขนาดของไดอิเล็กตริก (s) จะทำให้ความถี่ตัดลดลง และทำให้ค่า β/k_0 ลู่เข้าสู่ค่าดัชนีหักเหได้เร็วขึ้นเมื่อ k_0 เพิ่มขึ้น นั่นคือ เมื่อขนาดไดอิเล็กตริกเป็น $s = 2a$ ค่า β/k_0 จะลู่เข้าสู่ค่า 1.5 ได้เร็วที่สุด และความถี่ตัดจะต่ำที่สุด

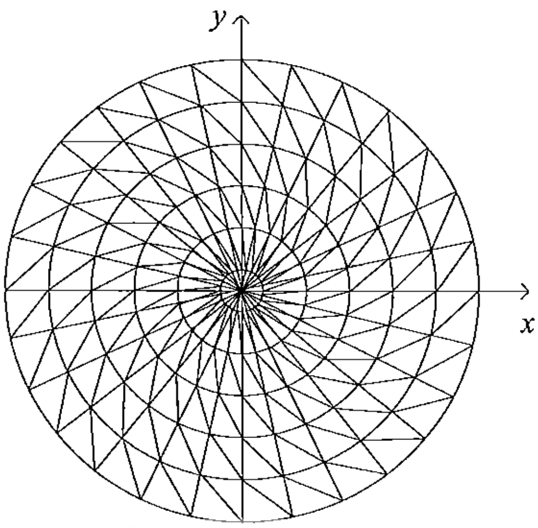
3.2 ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

พิจารณาท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ภายในเป็นอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 3.7

เพื่อที่จะวิเคราะห์โดยอาศัยวิธีไฟไนต์อีเมนต์ ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นจะได้รับการแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยม ให้มีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 312 มีจำนวนโนดเท่ากับ 169 และจำนวนด้านของสามเหลี่ยมเท่ากับ 480 ดังแสดงในรูปที่ 3.8 การแบ่งอีลีเมนต์ในลักษณะนี้ทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า $\{e_t\}$ และ $\{e_z\}$ เท่ากับ 480 และ 169 ตามลำดับ เมื่อยังไม่ได้ให้เงื่อนไขขอบเขต

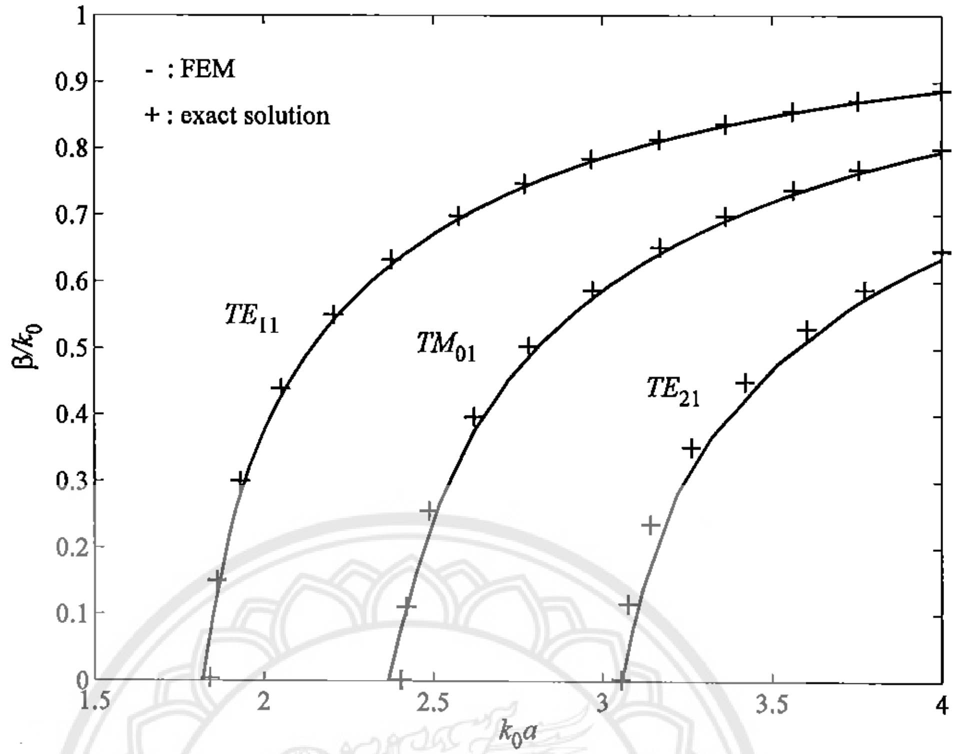


รูปที่ 3.7 ภาคตัดขวางท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม



รูปที่ 3.8 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็น 312 อีลีเมนต์ 169 โนด 480 ด้าน

ผลการวิเคราะห์คุณลักษณะท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมรูปที่ 3.9 โดยเส้นทึบเป็นผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และสัญลักษณ์ + คือผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ จากรูปที่ 3.9 พบว่าโมดมูลฐาน TE_{11} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลเฉลยแม่นตรง ส่วนโมด TM_{01} และ TE_{21} ยังไม่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงมากนัก แต่อย่างไรก็ตาม โมดนี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น



รูปที่ 3.9 คุณลักษณะท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

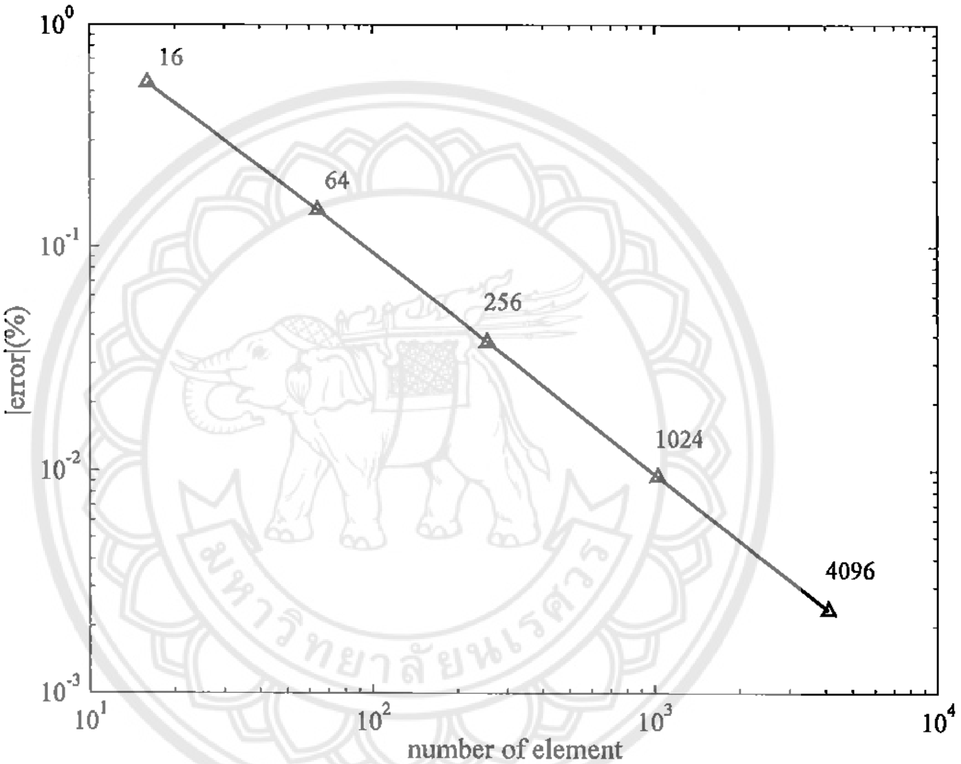
ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ของโมดมูลฐาน TE_{11}, TM_{01} และ TE_{21} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และวิธีเชิงวิเคราะห์ แสดงได้ดังตาราง 3.2 สำหรับวิธีไฟไฟต์อีลีเมนต์จะใช้การแบ่งอีลีเมนต์ตามรูปที่ 3.8 จะเห็นได้ว่า ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นทั้งหมดมีค่าไม่เกิน 2 เปอร์เซ็นต์ สำหรับโมด TE_{11} ความผิดพลาดจะอยู่ระดับที่ต่ำมาก

ตาราง 3.2 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ รวมขนาดความผิดพลาด เทียบกับผลเฉลยแม่นตรง แบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 3.8

โมด	ผลเฉลยแม่นตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
TE_{11}	0.887766	0.886579	0.133 %
TM_{01}	0.799094	0.795692	0.425 %
TE_{21}	0.645738	0.638541	1.114 %

3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความผิดพลาดและจำนวนอีลีเมนต์

โครงสร้างภายใต้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความผิดพลาดและจำนวนอีลีเมนต์คือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a\times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ ดังรูป 3.1 ค่า β/k_0 ในโมด LSE_{10} ณ $k_0a=3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะได้รับการเลือกมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง จำนวนอีลีเมนต์จะได้รับการแปรเปลี่ยนเป็น 16, 64, 256, 1024 และ 4096 ผลการวิเคราะห์สามารถแสดงได้ดังรูป 3.10



รูปที่ 3.10 ความสัมพันธ์ระหว่างความผิดพลาดของค่า β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ และจำนวนอีลีเมนต์ในโมด LSE_{10} จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

รูปที่ 3.10 พบว่า เมื่อมีการเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์จาก 16 ถึง 4096 จะทำให้เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่า β/k_0 ที่คำนวณได้มีค่าลงลงอย่างต่อเนื่อง โดยเมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 16 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดอยู่ในอันดับ 10^{-1} และเมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 4096 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดอยู่ในอันดับ 10^{-3} ผลที่ได้นี้สามารถนำไปคาดคะเนจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เพื่อให้ได้ระดับความผิดพลาดที่ต้องการได้

บทที่ 4
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผล

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่อาศัยสนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน สำหรับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นได้รับการเสนอขึ้นในวิธีนี้ สมการคลื่นในรูปของสนามไฟฟ้าจะได้รับการจัดสูตรเป็นฟังก์ชันนอลโดยอาศัยวิธีของเรเลย์-ริทซ์ สนามไฟฟ้าในแนวตามขวางของท่อนำคลื่นจะได้รับการสร้างจากคำตอบทดลองตามแนวขอบของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม และสนามในแนวแกนจะสร้างคำตอบทดลองที่โนดของอีลีเมนต์ ทำให้ได้สมการเมตริกซ์ปัญหาค่าเจาะจงที่ให้ผลเฉลยในรูปของค่าคงตัวเฟสและสนามในแนวสัมผัสและในแนวแกน ผลการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมและมีขนาดคงตัวตามแนวแกน พบว่า ผลที่ได้สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ การแปรเปลี่ยนค่าคงตัวไดอิเล็กตริกโดยขนาดคงที่ได้รับการศึกษาและพบว่า เมื่อค่าคงตัวไดอิเล็กตริกเพิ่มขึ้น จะทำให้ความถี่ตัดในแบบแผนคลื่นมูลฐานมีค่าลดลง และค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์ที่ได้จะลู่เข้าสู่ค่าค่าดัชนีหักเห และเมื่อแปรเปลี่ยนขนาดไดอิเล็กตริก โดยที่ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกคงที่ พบว่า เมื่อไดอิเล็กตริกมีขนาดเพิ่มขึ้น จะทำให้ความถี่ตัดในแบบแผนคลื่นมูลฐานมีค่าลดลง และค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์ที่ได้จะลู่เข้าสู่ค่าค่าดัชนีหักเหเร็วขึ้น การแปรเปลี่ยนจำนวนอีลีเมนต์แสดงให้เห็นว่า เมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ จะทำให้ความผิดพลาดของค่าคงตัวเฟสนอร์มัลไลซ์ที่ได้ลดลง และผลการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม พบว่า ผลที่ได้สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลเฉลยแม่นตรง

4.2 ข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไม่มีการสูญเสียโดยใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและแนวแกนที่เสนอมานี้ จะอาศัยหลักการวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบริทซ์ ทำให้ได้คุณลักษณะของคลื่นในโมดต่างๆ ซึ่งวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และงานทางวิศวกรรม สามารถประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาในหลายลักษณะ รวมถึงให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ แต่เนื่องจากการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอนี้ เป็นเพียงการวิเคราะห์ในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการจำลองทางทฤษฎีเท่านั้น ในการใช้งานจริงอาจมีปัจจัยภายนอกที่เกี่ยวข้องที่อาจทำให้ผลการวิเคราะห์นี้คลาดเคลื่อนไปบ้าง

เอกสารอ้างอิง

[1] Constantine A. Balanis. (1989). **Advanded Engineering Electromagnatics**, Canada : John Wiley & Sons.

[2] Masanori koshiba. (1990). **Optical Waveguide Analysis**, Tokyo Japan : Asakura Shoten.

[3] Silvester, P.P., and Ferrari, R.I. **Finite element for electrical engineering**. 2^{nd} ed, Malta: Cambridge University press, 1991.

[4] Jianming Jin. (2002). **The Finite Element Method In Electromagnetics**. 2^{nd} ed, Canada: John Wiley & Sons.

[5] Constantine A. Balanis. (2005). **Antenna Theory**. 3^{th} ed, United States of America : John Wiley & Sons.

[6] ชัยรัตน์ พินทอง. (2539). **ประสิทธิภาพของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ไอเกนโมดในท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกที่ไม่มีการสูญเสีย**. วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[7] พรชัย พุกอูต. (2550). **การวิเคราะห์กลุ่มสายอากาศเส้นตรงระยะห่างคงรูปและแอมพลิจูดไม่คงรูป**. ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ภาคผนวก ก

รูปของสมการในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส และในแนวแกน

ภาคผนวก ก

รูปของสมการในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส และในแนวแกน

คุณลักษณะการแผ่กระจายของท่อนำคลื่นสำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} [S_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e_t\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} [M_{tt}] & [M_{tz}] \\ [M_{zt}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e_t\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix} = \{0\} \qquad (ก.1)$$

สนามไฟฟ้าตามขวางของท่อนำคลื่น จะได้รับการสร้างจากสนามที่ด้านของสามเหลี่ยม ในรูป

$$\mathbf{e}_t = \{\mathbf{N}\}^T \{e_t\}_e = \left(\{U\}^T \mathbf{a}_x + \{V\}^T \mathbf{a}_y\right)\{e_t\}_e \qquad (ก.2)$$

โดยที่ $\mathbf{a}_x$ และ $\mathbf{a}_y$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ x และ y ตามลำดับ, T คือ ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน, $\{e_t\} = \begin{bmatrix} e_{t,1} & e_{t,2} & e_{t,3} \end{bmatrix}^T$ คือ เมตริกซ์แถวตั้งที่มีอันดับเป็น 3×1 และองค์ประกอบของเมตริกซ์นี้คือ สนามในแนวขวางที่แต่ละด้านของอีลีเมนต์ ดังแสดงในรูป ก $\{\mathbf{N}\}$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ ซึ่งมีค่าดังสมการ

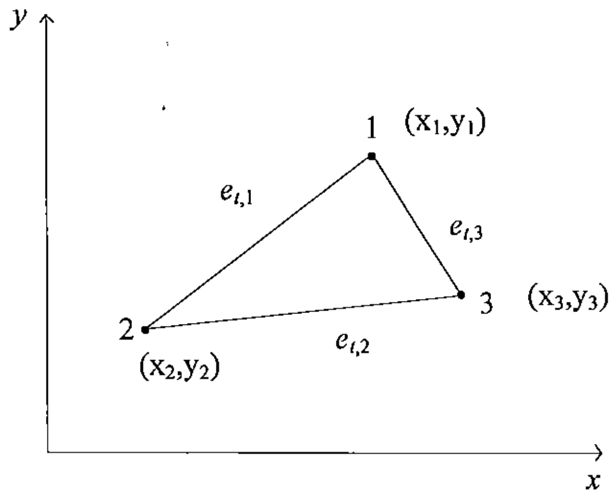
$$\{\mathbf{N}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 \end{bmatrix}^T \qquad (ก.3)$$

โดยที่

$$\mathbf{N}_1 = L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1 \qquad (ก.4a)$$

$$\mathbf{N}_2 = L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2 \qquad (ก.4b)$$

$$\mathbf{N}_3 = L_3 \nabla L_1 - L_1 \nabla L_3 \qquad (ก.4c)$$



รูป ก อีลีเมนต์สามเหลี่ยม พิกัดโนดและสนามไฟฟ้าตามขวางที่แต่ละด้านของอีลีเมนต์

เมื่อ ∇ คือตัวดำเนินการเดล, (L_1, L_2, L_3) คือฟังก์ชันเชิงเส้นที่สามารถหาได้จากสมการ

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{ก.5}$$

เมื่อ

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \tag{ก.6}$$

$$b_k = y_l - y_m \tag{ก.7}$$

$$c_k = x_m - x_l \tag{ก.8}$$

โดยที่ (k,l,m) เรียงลำดับในลักษณะมอดุโล 3, (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) คือพิกัดของมุม 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ตามลำดับ ดังแสดงในรูป ก, A_e คือ พื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{ก.9}$$

โดยที่ | | คือตัวกำหนด

สนามไฟฟ้าในแนวแกนท่อนำคลื่น จะได้รับการสร้างจากสนามที่โนดของสามเหลี่ยม ในรูป

$$e_z = \{N\}^T \{e_z\}_e \qquad (ก.10)$$

เมื่อ $\{e_z\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่มีอันดับเป็น 3×1 และองค์ประกอบของเมตริกซ์นี้คือ สนามไฟฟ้าในแนวแกน z ที่โนด 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์ ดังแสดงในรูป ก, $\{N\}$ คือฟังก์ชันรูปร่างซึ่งมีค่าดังสมการ

$$\{\mathbf{N}\} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T \qquad (ก.11)$$

เมื่อคำตอบทดลองของสนามไฟฟ้ามีค่าดังสมการ (ก.2) และ (ก.10) ตามลำดับ เมตริกซ์ย่อยในสมการ (ก.1) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S_{tt}] = \sum_e \iint_e \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\{V\}_x \{V\}_x^T - \{V\}_x \{U\}_y^T - \{U\}_y \{V\}_x^T - \{U\}_y \{U\}_y^T \right) - k_0^2 \left(\varepsilon_{xx} \{U\}\{U\}^T + \varepsilon_{yy} \{V\}\{V\}^T \right) \right] dxdy \qquad (ก.12)$$

$$[M_{tt}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r} \left(\{V\}\{V\}^T + \{U\}\{U\}^T \right) dxdy \qquad (ก.13)$$

$$[M_{tt}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r} \left(\{V\}\{N\}_y^T + \{V\}\{N\}_x^T \right) dxdy \qquad (ก.14)$$

$$[M_{tt}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r} \left(\{N\}_y \{V\}^T + \{N_x\}\{U\}^T \right) dxdy \qquad (ก.15)$$

$$[M_{zz}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r} \left[\{N\}_y \{N\}_y^T - \{N\}_x \{N\}_x^T - k_0^2 \vec{\varepsilon}_{r,zz} \{N\}\{N\}^T \right] dxdy \qquad (ก.16)$$

อินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละอีลีเมนต์ แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\iint_e \{U\}\{U\}^T dxdy = \frac{1}{4A_e}\begin{bmatrix} uu_{11} & uu_{12}-b_2^2/12 & uu_{13}-b_1^2/12 \\ uu_{21}-b_2^2/12 & uu_{22} & uu_{23}-b_3^2/12 \\ uu_{31}-b_1^2/12 & uu_{32}-b_3^2/12 & uu_{33} \end{bmatrix} \qquad (ก.17)$$

เมื่อ

$$uu_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6}(b_{i1}^2 - b_{i1}b_i + b_i^2), i = j \\ \frac{1}{12}(b_{i1}b_{j1} - b_i b_j - 2b_{j2}b_{i2}), i \neq j \end{cases} \qquad (ก.18)$$

$$\iint_e \{V\}\{V\}^T dxdy = \frac{1}{4A_e}\begin{bmatrix} vv_{11} & vv_{12}-c_2^2/12 & vv_{13}-c_1^2/12 \\ vv_{21}-c_2^2/12 & vv_{22} & vv_{23}-c_3^2/12 \\ vv_{31}-c_1^2/12 & vv_{32}-c_3^2/12 & vv_{33} \end{bmatrix} \qquad (ก.19)$$

เมื่อ

$$vv_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6}(c_{i1}^2 - c_{i1}c_i + c_i^2), i = j \\ \frac{1}{12}(c_{i1}c_{j1} - c_i c_j - 2c_{j2}c_{i2}), i \neq j \end{cases} \qquad (ก.20)$$

$$\iint_e \{U\}\{N\}_x^T dxdy = \frac{1}{12A_e} b_j (b_{i1} - b_i) \qquad (ก.21)$$

$$\iint_e \{V\}\{N\}_y^T dxdy = \frac{1}{12A_e} c_j (c_{i1} - c_i) \qquad (ก.22)$$

$$\iint_e \{V\}_x \{V\}_x^T dxdy = \frac{1}{16A_e^3}(b_i c_{i1} - b_{i1}c_i)(b_j c_{j1} - b_{j1}c_j) \qquad (ก.23)$$

$$\iint_e \{V\}_x \{V\}_y^T dxdy = \frac{1}{16A_e^3}(b_i c_{i1} - b_{i1}c_i)(c_j b_{j1} - c_{j1}b_j) \qquad (ก.24)$$

$$\iint_e \{U\}_y \{U\}_y^T dxdy = \frac{1}{16A_e^3}(c_i b_{i1} - c_{i1}b_i)(c_j b_{j1} - c_{j1}b_j) \qquad (ก.25)$$

$$\iint_e \{N\}_x \{U\}^T dxdy = \left[\iint_e \{U\}\{N\}_x^T dxdy\right]^T \qquad (ก.26)$$

$$\iint_e \{N\}_y \{V\}^T dxdy = \left[\iint_e \{V\}\{N\}_y^T dxdy \right]^T \tag{ก.27}$$

$$\iint_e \{U\}_y \{V\}_x^T dxdy = \left[\iint_e \{V\}_x \{U\}_y^T dxdy \right]^T \tag{ก.28}$$

โดยที่ $\{V\}_x \equiv \partial\{V\}/\partial x$, $\{U\}_y \equiv \partial\{U\}/\partial y$, $\{N\}_x \equiv \partial\{N\}/\partial x$, $\{N\}_y \equiv \partial\{N\}/\partial y$, $(i, i1, i2)$ และ $(j, j1, j2)$ เรียงลำดับในลักษณะมอดุโล 3

ภาคผนวก ข

อินทิกรัลฟังก์ชันรูปร่างของสมการในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

ภาคผนวก ข

อินทิกรัลฟังก์ชันรูปร่างของสมการในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

อินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในอีลีเมนต์สามเหลี่ยมสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้ (Kardestuncer , 1988; Sivester และ Ferrari, 1990)

$$I^e(l,m,n) = \iint_e (L_1)^l (L_2)^m (L_3)^n \, dxdy \qquad (ข.1)$$

$$= \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} 2A \qquad (ข.2)$$

เมื่อ (L_1, L_2, L_3) คือฟังก์ชันเชิงเส้นที่สามารถหาได้จากสมการ

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (ข.3)$$

เมื่อ

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \qquad (ข.4)$$

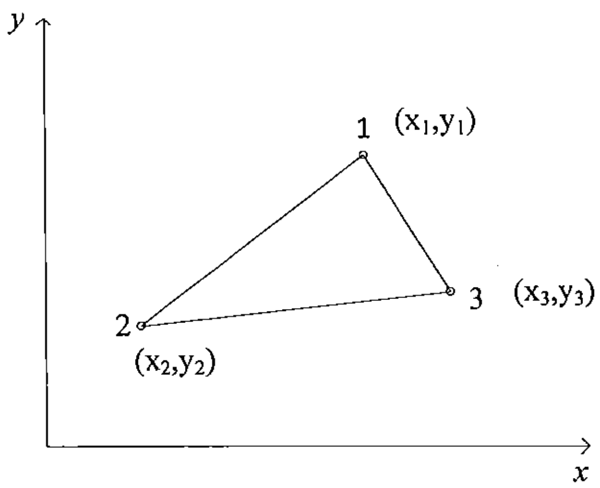
$$b_k = y_l - y_m \qquad (ข.5)$$

$$c_k = x_m - x_l \qquad (ข.6)$$

โดยที่ (k,l,m) เรียงลำดับในลักษณะมอดุโล 3, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) คือพิกัดของมุม 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ตามลำดับ ดังแสดงในรูป ข , A คือพื้นที่ของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมซึ่งหาได้จากสมการ

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (ข.7)$$

โดยที่ | | คือตัวกำหนด



รูป ข อีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม และพิกัดโนด

สำหรับอีลีเมนต์อันดับหนึ่ง ดังแสดงในรูป ข ฟังก์ชันรูปร่าง $\{N\}$ คือ

$$\{N\} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T \tag{ข.8}$$

ผลอินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนาม**ไฟฟ้าในแนวสัมผัส**และในแนวแกน มีดังนี้

$$\iint_e \{N\}\{N\}^T dxdy = \begin{cases} \dfrac{A}{6}, i = j \\ \dfrac{A}{12}, i \neq j \end{cases} \tag{ข.9}$$

$$\iint_e \{N\}_x \{N\}_x^T dxdy = \frac{1}{4A} b_i b_j \tag{ข.10}$$

$$\iint_e \{N\}_y \{N\}_y^T dxdy = \frac{1}{4A} c_i c_j \tag{ข.11}$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$

ภาคผนวก ค

ฟังก์ชันนอล และสมการรูปเมตริกซ์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

ภาคผนวก ค

ฟังก์ชันนอล และสมการรูปเมตริกซ์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

สมการคลื่นรูปเวกเตอร์เฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz vector equation) โดยอาศัยสนามไฟฟ้า สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{ค.1}$$

โดยที่ μ_r คือ ความซึมซาบได้สัมพัทธ์ และ ε_r คือ สภาพยอมสัมพัทธ์ สมการ (ค.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ทั่วไปได้เป็น

$$\mathcal{L}\phi = f \tag{ค.2}$$

โดยที่ $\mathcal{L}$ คือ ตัวดำเนินการอนุพันธ์ ϕ คือ ตัวแปรไม่ทราบค่า และ f คือ ฟังก์ชันของแรง หรือฟังก์ชันกระตุ้น ในที่นี้แทน

$$\mathcal{L} = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \right) - k_0^2 \varepsilon_r \tag{ค.3}$$

$$\phi = \mathbf{E} \tag{ค.4}$$

และ

$$f = 0 \tag{ค.5}$$

เพื่อที่จะวิเคราะห์โดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สมการเชิงอนุพันธ์จะได้รับการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันนอล ที่นิยามดังนี้

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle - \langle \phi, f \rangle \tag{ค.6}$$

แทน (ค.3), (ค.4) และ (ค.5) ลงในสมการ (ค.6) ทำให้ได้

$$F(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}\mathbf{E}, \mathbf{E}\rangle \tag{ค.7}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right) - k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E}\right]\cdot\mathbf{E}^* d\Omega \tag{ค.8}$$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ของเอกลักษณ์เวกเตอร์ข้างล่างนี้

$$\iiint_v u(\nabla\times\mathbf{a})\cdot(\nabla\times\mathbf{b}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times u\nabla\times\mathbf{b}) \;\; dv = \oiint_s u(\mathbf{a}\times\nabla\times\mathbf{b})\cdot\hat{\mathbf{n}} \;\; dS$$

สมการ (ค.8) สามารถเขียนได้เป็น

$$F(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{E})^*\cdot(\nabla\times\mathbf{E})\right] \; d\Omega - \frac{1}{2}\iint_{\Omega} k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{E} \;\; d\Omega$$
$$-\oint_{\Gamma}\frac{1}{\mu_r}\left(\mathbf{E}^*\times\nabla\times\mathbf{E}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}} \;\; d\Gamma \tag{ค.9}$$

เมื่อ $$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \tag{ค.10}$$

และเงื่อนไขขอบเขตคือ $$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E} = 0 \qquad \text{บน } \Gamma_1 \tag{ค.11}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right) = 0 \qquad \text{บน } \Gamma_2 \tag{ค.12}$$

โดยที่ Γ_1 และ Γ_2 คือ ผนังไฟฟ้า และผนังแม่เหล็ก ตามลำดับ และ Γ คือ ขอบเขตที่ล้อมรอบบริเวณ Ω

พิจารณาพจน์ที่สามด้านขวาของสมการ (ค.9) จากนั้นใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ ยังผลให้ได้

$$\frac{1}{\mu_r}\left(\mathbf{E}^* \times \nabla \times \mathbf{E}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\mathbf{E}^* \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}\right)\right] \tag{ค.13}$$

$$= -\mathbf{E}^* \cdot \left[\hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}\right)\right] \tag{ค.14}$$

$$= \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^*\right) \tag{ค.15}$$

แทน (ค.15) ลงใน (ค.9) จากนั้นแยกอินทิกรัลเชิงเส้นเป็นสองส่วนย่อยตาม**ผนังไฟฟ้าและผนังแม่เหล็ก** ทำให้สมการ (ค.9) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}) &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla \times \mathbf{E})^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}\right] d\Omega \\ &+ \oint_{\Gamma_1} \mathbf{E}^* \cdot \left[\hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}\right)\right] d\Gamma_1 - \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^*\right) d\Gamma_2 \end{aligned} \tag{ค.16}$$

ใช้เงื่อนไขขอบเขตดังสมการ (ค.11) และ (ค.12) ทำให้ได้

$$F(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla \times \mathbf{E})^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}\right] d\Omega \tag{ค.17}$$

สนามไฟฟ้าเชิงอวกาศ $(\mathbf{E})$ และตัวดำเนินการ (∇) สามารถเขียนให้อยู่ในแนวสัมผัสและในแนวแกนได้เป็น

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_t(x, y) + E_z \hat{\mathbf{a}}_z \tag{ค.18}$$

และ

$$\nabla(x, y, z) = \nabla_t(x, y) + \frac{\partial \hat{\mathbf{a}}_z}{\partial z} \tag{ค.19}$$

โดยที่ $\mathbf{E}_t$ คือ สนามไฟฟ้าในแนวตามขวาง และ ∇_t คือ ตัวดำเนินการเดลบนภาคตัดขวาง และ E_z คือ สนามไฟฟ้าในแนวแกน z

พิจารณาพจน์การหมุนวนของสนามไฟฟ้า ข้างล่างนี้

$$(\nabla \times \mathbf{E}) = \left(\nabla_t + \frac{\partial \hat{\mathbf{a}}_z}{\partial z}\right) \times (\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{a}}_z) \tag{ค.20}$$

$$= (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) + (\nabla_t \times E_z \hat{\mathbf{a}}_z) - \left(\frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} + \hat{\mathbf{a}}_z\right) \tag{ค.21}$$

$$= (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) + \left(\nabla_t E_z - \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z}\right) \times \hat{\mathbf{a}}_z \tag{ค.22}$$

โดยที่ $\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y)e^{-jk_z z} = \mathbf{E}_t(x,y)e^{-jk_z z} + E_z(x,y)\hat{\mathbf{a}}_z e^{-jk_z z}$

จะได้

$$(\nabla \times \mathbf{E}) = (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) + (\nabla_t E_z + jk_z \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{a}}_z \tag{ค.23}$$

และ

$$(\nabla \times \mathbf{E})^* = (\nabla_t \times \mathbf{E}_t)^* + (\nabla_t E_z + jk_z \mathbf{E}_t)^* \times \hat{\mathbf{a}}_z \tag{ค.24}$$

จากสมการ (ค.23) และ (ค.24) ทำให้สมการ (ค.17) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Bigg[& \frac{1}{\mu_r}(\nabla_t \times \mathbf{E}_t)^* \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) - k_0^2 \varepsilon_r (\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{a}}_z)^* \cdot (\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{a}}_z) \\ & + \frac{1}{\mu_r}(\nabla_t E_z + jk_z \mathbf{E}_t)^* \cdot (\nabla_t E_z + jk_z \mathbf{E}_t)\Bigg] d\Omega \end{aligned} \tag{ค.25}$$

เพื่อให้ค่าเจาะจงเป็นค่าคงตัวเฟส (k_z) และ เวกเตอร์เจาะจงเป็นจำนวนจริง จะใช้ตัวแปรหุ่น (dummy variable) ดังนี้

$$\mathbf{e}_t(x,y) = k_z \mathbf{E}_t(x,y) \quad \text{และ} \quad e_z(x,y) = -jE_z(x,y) \tag{ค.26}$$

แทน (ค.26) ลงใน (ค.25) แล้วคูณด้วย k_z^2 จะได้

$$F(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Bigg[\frac{1}{\mu_r}(\nabla_t \times \mathbf{e}_t)^* \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) - k_0^2\varepsilon_r \mathbf{e}_t^* \cdot \mathbf{e}_t + k_z^2\Bigg[\left(\frac{1}{\mu_r}\right)(\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t)^* \cdot (\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) - k_0^2\varepsilon_r e_z^* e_z\Bigg]\Bigg]d\Omega \qquad (ค.27)$$

ในที่นี้ $\mathbf{e}_t^e$ และ e_z^e สร้างจากคำตอบทดลองที่เป็นเชิงเส้น ซึ่งสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้ เมื่อ $n = 3$

$$\mathbf{e}_t^e = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i^e e_{ti}^e = \mathbf{N}_1^e e_{t1}^e + \mathbf{N}_2^e e_{t2}^e + \mathbf{N}_3^e e_{t3}^e \qquad (ค.28)$$

$$= \{\mathbf{N}^e\}^T\{e_t^e\} = \{e_t^e\}^T\{\mathbf{N}^e\} \qquad (ค.29)$$

$$e_z^e = \sum_{i=1}^{n}N_i^e e_{zi}^e = N_1^e e_{z1}^e + N_2^e e_{z2}^e + N_3^e e_{z3}^e \qquad (ค.30)$$

$$= \{N^e\}^T\{e_z^e\} = \{e_z^e\}^T\{N^e\} \qquad (ค.31)$$

แทนสมการ (ค.29) และ (ค.31) ลงในสมการ (ค.27) และจัดรูปเมตริกซ์ จะได้

$$F = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{M}\left[\{e_t^e\}^{*T}[G_{tt}^e]\{e_t\} + k_z^2\begin{Bmatrix} e_t^e \\ e_z^e \end{Bmatrix}^{*T}\begin{bmatrix} M_{tt}^e & M_{tz}^e \\ M_{zt}^e & M_{zz}^e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_t^e \\ e_z^e \end{Bmatrix}\right] \qquad (ค.32)$$

โดยที่

$$G_{tt}^e = \iint_{\Omega}\frac{1}{\mu_r}\{\nabla_t \times \mathbf{N}^e\}\cdot\{\nabla_t \times \mathbf{N}^e\}^T - k_0^2\varepsilon_r\{\mathbf{N}^e\}\cdot\{\mathbf{N}^e\}^T d\Omega \qquad (ค.33)$$

$$M_{tt}^e = \iint_{\Omega}\frac{1}{\mu_r}\{\mathbf{N}^e\}\cdot\{\mathbf{N}^e\}^T d\Omega \qquad (ค.34)$$

$$M_{tz}^e = \iint_{\Omega}\frac{1}{\mu_r}\{\mathbf{N}^e\}\cdot\{\nabla_t N^e\}^T d\Omega \qquad (ค.35)$$

$$M_{zt}^e = \iint_{\Omega}\frac{1}{\mu_r}\{\nabla_t N^e\}\cdot\{\mathbf{N}^e\}^T d\Omega \qquad (ค.36)$$

$$M_{zz}^e = \iint_{\Omega}\frac{1}{\mu_r}\{\nabla_t N^e\}\cdot\{\nabla_t N^e\}^T - k_0^2\varepsilon_r\{N^e\}\cdot\{N^e\}^T d\Omega \qquad (ค.37)$$

ภาคผนวก ง

โปรแกรมในการวิเคราะห์วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส

และในแนวแกน

ภาคผนวก ง

โปรแกรมสำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส และในแนวแกน

โปรแกรม MATLAB ได้รับการพัฒนาเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน สำหรับท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก และท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม

โปรแกรมแสดงการกำหนดขนาดของท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

```
%************************************************************
%********** full model of partial loaded waveguide **********
%************************************************************

    t=1;

    xscale=t*[0,1.0,2.0];
    yscale=t*[0,1.0];

    xnum=[8,8];
    ynum=[8];

    locate=[1:4];

    zone(1,locate)=t*[0.0,1.0,0,1.0];
    zone(2,locate)=t*[1.0,2.0,0,1.0];

    clear t;

%*********************** domain flag *****************************

%*** if domain is optical waveguide domain flag (dofg) equal 1 ***
%*** if domain is normal waveguide domain flag (dofg) equal 2 ****
%*****************************************************************

    dofg=2;

%*********************dispersive flag******************************

% if media loaded in waveguide is dispersive flag (disfg) equal 1 **
% if media loaded in waveguide is non-dispersive flag (disfg)equal 2
%******************************************************************

    disfg=2;
```

```
ehtnfg=2;
mhtnfg=2;
cwfg=2;
```

โปรแกรมแสดงการกำหนดตัวกลางของท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

```
media=2;
locate=[1:3];

epln(permit(1),locate)=[2.25,0,0;0,2.25,0;0,0,2.25];
epln(permit(2),locate)=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];

mu(permea(1),locate)=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];
mu(permea(2),locate)=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];

clear locate;
```

โปรแกรมแสดงการกำหนดขนาดของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

```
%**********************************************************
%***** quarter model of circular cross-section waveguide *****
%**********************************************************

    t=1;
    tscale=t*[0,1.0];

    tnum=[6];
    sector=7;
    media=1;

    clear t;

%*************************domain flag************************
%** if domain is optical waveguide domain flag (dofg) equal 1 **
%** if domain is normal waveguide domain flag (dofg) equal 2 ***
%************************************************************

    dofg=2;

%***********************dispersive flag**************************
%if media loaded in waveguide is dispersive flag (disfg) equal 1 ***
%if media loaded in waveguide is non-dispersive flag (disfg) equal 2
%****************************************************************

    disfg=2;
```

```
%***********************************
%*********** hermitial flag *********
%***********************************

    ehtnfg=2;
    mhtnfg=2;


%********************************************************
%********** circular cross-section waveguide flag ********
%********************************************************

    cwfg=1;
```

โปรแกรมแสดงการกำหนดตัวกลางของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

```
    locate=[1:3];

    epln(permit(1),locate)=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];

    mu(permea(1),locate)=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];

    clear locate;
```

โปรแกรมแสดงการสร้างสมการรูปเมตริกซ์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกนที่มีค่า beta (β) เป็นค่าเจาะจง

```
    tic

%***********************************
%                                  *
% Function of this program are     *
%  1. form stiffness               *
%  2. form mass matrix             *
% with z reflection rectangular    *
% waveguide                        *
% where beta is eigenvalue         *
%                                  *
%***********************************

    format short
    cnt=0;
    comp=(cnt/ne)*100;

    k0=temp98;

    clc
    home
```

```
    fprintf(' k0 = %g\n',k0)
    fprintf(' total complete %g percent\n',acomp)
    fprintf(' complete %g percent\n',comp)


%*************************************
%********* initialization ***********
%*************************************


%***************
%***** ga ******
%***************

    ga=sparse(ed+nd,ed+nd);

%***************
%***** mc ******
%***************

    mc=sparse(ed+nd,ed+nd);
    btwe=2*col;
    for loop4=1:row
    ofbtwe=(loop4-1)*btwe;
    for loop5=1:col
    for loop6=0:1
    loop1=ofbtwe+2*loop5+loop6-1;
    cnt=cnt+1;

%*************************************
%***** call for trial function ******
%*************************************

    s_shape

%**********************************
%**** assemble to global matrix ****
%**********************************

    for loop2=1:3
    ir2=ed+nl(loop1,loop2);
    gr=edg(loop1,loop2);
    for loop3=1:3
    ic2=ed+nl(loop1,loop3);
    gc=edg(loop1,loop3);

%*****************************************
%****determine each element in k matrix ****
%*****************************************

%****************
%** ga (ska11) **
%****************

    temp1=a33(loop1)*(vxvxt(loop2,loop3)-vxuyt(loop2,loop3)-
uyvxt(loop2,loop3)+uyuyt(loop2,loop3));
```

```
    temp2=(k0^2)*(b11(loop1)*uut(loop2,loop3)+b22(loop1)*vvt(loop2,l
oop3));
    ga(gr,gc)=ga(gr,gc)+temp1-temp2;



%**********
%*** mc ***
%**********

%***********
%** skb11 **
%***********

    temp1=a11(loop1)*vvt(loop2,loop3)+a22(loop1)*uut(loop2,loop3);
    mc(gr,gc)=mc(gr,gc)+temp1;

%***********
%** skb12 **
%***********

    temp1=a11(loop1)*vnyt(loop2,loop3)+a22(loop1)*unxt(loop2,loop3);
    mc(gr,ic2)=mc(gr,ic2)+temp1;

%***********
%** skb21 **
%***********

    temp1=a11(loop1)*nyvt(loop2,loop3)+a22(loop1)*nxut(loop2,loop3);
    mc(ir2,gc)=mc(ir2,gc)+temp1;

%***********
%** skb22 **
%***********

    temp1=a11(loop1)*nynyt(loop2,loop3)+a22(loop1)*nxnxt(loop2,loop3
);
    temp2=(k0^2)*b33(loop1)*nnt(loop2,loop3);
    mc(ir2,ic2)=mc(ir2,ic2)+temp1-temp2;

    end  %loop3
    end  %loop2

    end  %loop6
    end  %loop5

    comp=(cnt/ne)*100;

    home
    fprintf(' k0 = %g\n',k0)
    fprintf(' total complete %g percent\n',acomp)
    fprintf(' complete %g percent\n',comp)


    end  %loop4

    clear cnt comp beta k0 xl yl aae ae l m n;
    clear loop1 loop2 loop3
```

```
clear temp1 temp2 temp3 temp4 temp5 temp6 temp7 temp8 temp9;
clear temp11 temp12 temp13 temp14 temp15;
clear a b c leg i0 i1 i2 j0 j1 j2 ir2 ic2 gr gc;

clear nnt nxnxt nynyt nxnyt nynxt;
clear uut vvt uvt vut unxt nxut unyt nyut vnxt nxvt vnyt nyvt;
clear vxvxt vxuyt uyvxt uyuyt unt nut;
clear loop4 loop5 loop6 loop7 ofbtwe btwe;

time2=toc;
```

โปรแกรมแสดงฟังก์ชันรูปร่างและอินทิกรัลฟังก์ชันรูปร่าง

```
%*****************************************
%********form simplex coordinate**********
%*****************************************

    for loop2=1:3
     temp9=nl(loop1,loop2);
     xl(loop2)=x(temp9);
     yl(loop2)=y(temp9);
    end

    aae=([1,1,1;xl(1),xl(2),xl(3);yl(1),yl(2),yl(3)]');
    ae=0.5*det(aae);

    for loop2=1:3
     l=rem(loop2,3)+1;
     m=rem(loop2+1,3)+1;
     b(loop2)=yl(l)-yl(m);
     c(loop2)=xl(m)-xl(l);
    end

%*****************************************************************
%* form shape function and their derivative of nodal based element *
%*****************************************************************

    for loop2=1:3
     for loop3=1:3

      %form nnt matrix
      if loop2==loop3
       nnt(loop2,loop3)=ae/6;
      else
       nnt(loop2,loop3)=ae/12;
      end

      %form nxnxt matrix
      nxnxt(loop2,loop3)=b(loop2)*b(loop3)/(4*ae);

      %form nynyt matrix
```

```
      nynyt(loop2,loop3)=c(loop2)*c(loop3)/(4*ae);

      %form nxnyt matrix
      nxnyt(loop2,loop3)=b(loop2)*c(loop3)/(4*ae);

     end
    end

%****************
%** form nynxt **
%****************

    nynxt=nxnyt';

%****************************************
%** find length of each triangle's side **
%****************************************

    if (cwfg==2)  %rectangular waveguide

     for loop7=1:3
      leg(loop7)=1;
      if loop6==0  %upper element
       leg(loop7)=-leg(loop7);
      end
     end  %loop7

     temp2=rem(loop4+loop5,2);  %type B
     if (mhfg==2)&(temp2==1)
      if loop6==0    %upper element
       leg(1)=-leg(1);
      else
       leg(3)=-leg(3);
      end
     end

    else  %circular cross-section waveguide

     for loop7=1:3
      leg(loop7)=1;
     end

     if (loop5==1)&(loop6==0)  %inner element
      leg(3)=-leg(3);
     else

      if loop6==0  %upper element of type A and type B
       for loop2=1:3
        leg(loop2)=-leg(loop2);
       end  %loop2
      end  %loop6

      temp1=(loop10-1)*sector;
      temp2=rem(loop4+loop5+temp1,2);  %type B
      if (mhfg==2)&(temp2==0)
       if loop6==0  %upper element
        leg(1)=-leg(1);
       else
        leg(3)=-leg(3);
```

```
       end
      end

     end  %(loop5==1)&(loop6==0)

    end  %cwfg==2

%**************************************************************
%** form shape function and their derivative of edge element **
%**************************************************************

    for loop2=1:3
     for loop3=1:3

      i0=loop2;
      j0=loop3;
      i1=rem(i0,3)+1;
      j1=rem(j0,3)+1;
      i2=rem(i0+1,3)+1;
      j2=rem(j0+1,3)+1;

      temp1=leg(i0)*leg(j0)/(4*ae);

%*********************
%** form uut matrix **
%*********************

      if loop2==loop3
       uut(loop2,loop3)=((b(i1)^2)-b(i1)*b(i0)+(b(i0)^2))*temp1/6;
      else
       temp2=b(i1)*b(j1)+b(i0)*b(j0)-2*b(j2)*b(i2);
       temp3=i0+j0;
       temp4=rem(temp3+2,3);
       temp5=fix(temp3/4);
       temp6=fix(temp3/5);
       temp7=temp4+temp5+temp6;
       temp8=-(b(temp7)^2);
       uut(loop2,loop3)=(temp2+temp8)*temp1/12;
      end  %loop2==loop3

%*********************
%** form vvt matrix **
%*********************

      if loop2==loop3
       vvt(loop2,loop3)=((c(i1)^2)-c(i1)*c(i0)+(c(i0)^2))*temp1/6;
      else
       temp2=c(i1)*c(j1)+c(i0)*c(j0)-2*c(j2)*c(i2);
       temp8=-(c(temp7)^2);
       vvt(loop2,loop3)=(temp2+temp8)*temp1/12;
      end  %loop2==loop3

%*********************
%** form uvt matrix **
%*********************

      if loop2==loop3
       uvt(loop2,loop3)=(2*b(i1)*c(i1)-b(i1)*c(i0)-b(i0)*c(i1)+...
        2*b(i0)*c(i0))*temp1/12;
```

```
      else
       temp2=b(i1)*c(j1)+b(i0)*c(j0)-2*b(j2)*c(i2);
       temp8=-b(temp7)*c(temp7);
       uvt(loop2,loop3)=(temp2+temp8)*temp1/12;
      end  %loop2==loop3

      temp9=leg(i0)/(12*ae);

%**********************
%** form unxt matrix **
%**********************

      unxt(loop2,loop3)=(b(i1)-b(i0))*b(j0)*temp9;

%**********************
%** form unyt matrix **
%**********************

      unyt(loop2,loop3)=(b(i1)-b(i0))*c(j0)*temp9;

%**********************
%** form vnxt matrix **
%**********************

      vnxt(loop2,loop3)=(c(i1)-c(i0))*b(j0)*temp9;

%**********************
%** form vnyt matrix **
%**********************

      vnyt(loop2,loop3)=(c(i1)-c(i0))*c(j0)*temp9;

      temp11=leg(i0)*leg(j0)/(16*(ae^3));

      temp12=b(i0)*c(i1)-b(i1)*c(i0);
      temp13=c(i0)*b(i1)-c(i1)*b(i0);

      temp14=b(j0)*c(j1)-b(j1)*c(j0);
      temp15=c(j0)*b(j1)-c(j1)*b(j0);

%***********************
%** form vxvxt matrix **
%***********************

      vxvxt(loop2,loop3)=temp11*temp12*temp14;

%***********************
%** form vxuyt matrix **
%***********************

      vxuyt(loop2,loop3)=temp11*temp12*temp15;

%***********************
%** form uyuyt matrix **
%***********************

      uyuyt(loop2,loop3)=temp11*temp13*temp15;
```

```
      if (mhtnfg==1)  %eg. ferrite loaded waveguide

       temp1=leg(i0)*leg(j0)*(c(i1)-c(i0))/(24*(ae^2));

%**********************
%** form vvxt matrix **
%**********************

       vvxt(loop2,loop3)=temp1*temp14;

%**********************
%** form vuyt matrix **
%**********************

       vuyt(loop2,loop3)=temp1*temp15;

       temp2=c(i0)*leg(j0)/(8*(ae^2));

%***********************
%** form nyvxt matrix **
%***********************

       nyvxt(loop2,loop3)=temp2*temp14;

%***********************
%** form nyuyt matrix **
%***********************

       nyuyt(loop2,loop3)=temp2*temp15;

      end

     end
    end

%*********************
%** form vut matrix **
%*********************

    vut=uvt';

%**********************
%** form nxut matrix **
%**********************

    nxut=unxt';

%**********************
%** form nyut matrix **
%**********************

    nyut=unyt';
```

```
%*********************
%** form nxvt matrix **
%*********************

    nxvt=vnxt';

%*********************
%** form nyvt matrix **
%*********************

    nyvt=vnyt';

%**********************
%** form uyvxt matrix **
%**********************

    uyvxt=vxuyt';

    if mhtnfg==1

%*********************
%** form vxvt matrix **
%*********************

     vxvt=vvxt';

%*********************
%** form uyvt matrix **
%*********************

     uyvt=vuyt';

%**********************
%** form vxnyt matrix **
%**********************

     vxnyt=nyvxt';

%**********************
%** form uynyt matrix **
%**********************

     uynyt=nyuyt';

    end
```

ประวัติผู้ดำเนินโครงงาน

ชื่อ นาย สาธิต วรปัญญานนท์

ภูมิลำเนา 6/2 ถ.กสิกรทุ่งสร้าง ต.ในเมือง อ.เมือง จ.ขอนแก่น

ประวัติการศึกษา

- จบระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนขอนแก่นวิทยายน จ.ขอนแก่น
- ปัจจุบันกำลังศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 5 สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

Email: **music_toonsatit@hotmail.com**