รายงานการวิจัย
จากงบประมาณรายได้
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
พ.ศ. 2550-2551

เรื่อง

สหสัมพันธ์ของสปินของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนในคิวอีดี

Spin Correlations of e^-e^+ Produced in e^-e^+ Collision in QED

โดย

นาย นัฏพงษ์ ยงรัมย์

หน่วยวิจัยฟิสิกส์รากฐานและจักรวาลวิทยา
สถาบันสำนักเรียนท่าโพธิ์สำหรับฟิสิกส์ทฤษฎีและจักรวาลวิทยา
แห่ง
ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

กิตดิกรรมประกาศ

ทางผู้วิจัยขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ให้งบประมาณอุดหนุนการวิจัยสาขาฟิสิกส์ จากงบประมาณเงินรายได้ประจำปี 2550 จำนวนเงิน 50,000 บาท เพื่อให้ผู้วิจัยดำเนินการวิจัยในครั้งนี้

ผู้วิจัย

1.1 ชื่อโครงการ สหสัมพันธ์ของสปินของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันขออิเล็กตรอน-โพสิตรอนในคิวอีดี

Spin Correlations of e^-e^+ Produced in e^-e^+ Collision in QED

ชื่อผู้วิจัย นายนัฏพงษ์ ยงรัมย์

หน่วยงานที่สังกัด ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

หมายเลขโทรศัพท์ 0-5526-1000 ถึง 4 ต่อ 3531

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยสาขา ฟิสิกส์

งบประมาณเงินรายได้ประจำปี 2550

จำนวนเงิน 50,000 บาท **ระยะเวลาทำการวิจัย** 1 ปี

ตั้งแต่ 31 ตุลาคม 2550 **ถึง** 31 ตุลาคม 2551

บทคัดย่อ

ผลการคำนวณของความน่าจะเป็นสหสัมพันธ์ของสปินของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดจากการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนในคิวอีดี สำหรับกรณีสปินของอนุภาคเริ่มต้นเป็นแบบโพลาไรส์และไม่โพลาไรส์ พบว่าผลการคำนวณของความน่าจะเป็นสหสัมพันธ์ขึ้นอยู่กับความเร็วของอนุภาคเริ่มต้น เมื่อทดสอบกับวิธีการทดสอบของเบลล์พบว่าผลคำนวณที่ได้ขัดแย้งกับทฤษฎีของเบลล์ ผลการคำนวณนี้คาดหวังว่าจะเกิดการทดลองใหม่ๆ เกี่ยวกับสหสัมพันธ์ของโพลาไรส์ที่ขึ้นอยู่กับความเร็วเพื่อทดสอบทฤษฎีของเบลล์

Abstract

Exact computations of polarization correlations probabilities of $e^- e^+$ produced in $e^- e^+$ collision are carried out in QED, to the leading order, for initially *polarized* as well *as unpolarized* particles. Quite generally they are found to *be speed dependent* and are in clear violation of Bell's inequality of Local Hidden Variables (LHV) theories. These computations, based on QED are expected to lead to new experiments on polarization correlations monitoring speed in the light of Bell's theorem.

สารบัญเรื่อง

หน้า

สารบัญรูปประกอบ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ในการศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อนุภาคที่วัดค่าพร้อมกัน เมื่อเร็วๆนี้ (Yongram and Manoukian, 2003; Manoukian and Yongram, 2004; Manoukian and Yongram, 2005; Yongram, Manoukian and Siranan, 2006) ซึ่งคู่อนุภาคที่พิจารณาเกิดในกระบวนการต่างๆ ที่อธิบายได้โดยใช้ทฤษฎีสนามควอนตัม การคำนวณวิเคราะห์สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อนุภาคที่พิจารณา สามารถอธิบายโดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งคำนวณได้โดยตรงจากวิธีทางทฤษฎีสนามควอนตัม โดยความน่าจะเป็นของการวัด เรียกว่า "Joint probabilities of particles polarization correlations" ดังเช่นในงานตีพิมพ์ในการศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของคู่โฟตอนที่ได้จากกระบวนการรวมตัวกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนแล้วกลายเป็นโฟตอน 2 ตัว (Yongram and Manoukian, 2003) พบว่าค่าความน่าจะเป็นของการวัดนั้นขึ้นอยู่อัตราเร็วของอนุภาคเริ่มต้น และผลที่ได้ในงานตีพิมพ์ต่อๆ มา ดังเช่น สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อิเล็กตรอนที่ได้จากกระบวนการการกระเจิงเนื่องจากการชนกันเองของคู่อิเล็กตรอน (Manoukian and Yongram, 2004) สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่ได้จากนัมบุสตริงที่มีประจุและไม่มีประจุ (Manoukian and Yongram, 2005) และการศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่มิวออน-ปฏิมิวออนที่ได้จากกระบวนการการผลิตมิวออน-ปฏิมิวออนจากการรวมกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอน (Yongram, Manoukian and Siranan, 2006) โดยใช้อันตรกิริยาไฟฟ้าอย่างอ่อนของวายน์เบิร์ก--ซาลาม พบว่านอกจากค่าความน่าจะเป็นของการวัดจะขึ้นอยู่กับอัตราเร็วของอนุภาคเริ่มต้นแล้วยังขึ้นอยู่กับการคู่ควบด้วย ซึ่งการคำนวณวิเคราะห์ที่กล่าวมาเป็นการคำนวณเชิงพลวัตซึ่งต่างจากผลการพิจารณาโดยการรวมสปินของอนุภาคโดยตรง (Clauser and Shimoney, 1978) ซึ่งมักใช้ในการศึกษาเชิงจลนศาสตร์ (กรณีอัตราเร็วของคู่อนุภาคเริ่มต้นมีค่าต่ำๆ) ผลจากการคำนวณวิเคราะห์สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของคู่อนุภาคที่กล่าวมานั้นได้แสดงให้เห็นความขัดแย้งอย่างชัดเจนเมื่อทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์

จากการศึกษาสหสัมพันธ์ของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่มีแหล่งกำเนิดที่ต่างกันในกระบวนการทฤษฎีสนามควอนตัม ข้างต้น ดังนั้น สหสัมพันธ์ของสปินของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนในคิวอีดี เพื่อเปรียบเทียบผลกับการศึกษา

สหสัมพันธ์ของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่มีแหล่งกำเนิดที่ต่างกันในกระบวนการทฤษฎีสนามควอนตัม ดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น

1.2 กรอบแนวคิด และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ได้มีการศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อนุภาคที่วัดค่าพร้อมกัน ในช่วง 20 ปีที่ผ่านมา โดย

Yongram และ Manoukian การศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของคู่โฟตอนที่วัดค่าพร้อมกัน ซึ่งคู่โฟตอนเกิดจากกระบวนการ $e^{+}e^{-} \rightarrow \gamma\gamma$ ในทฤษฎีสนามควอนตัม พบว่าค่าความน่าจะเป็นของการวัดนั้นขึ้นอยู่อัตราเร็วของอนุภาคเริ่มต้น ผลจากการคำนวณวิเคราะห์สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของคู่โฟตอนที่กล่าวมานั้นได้แสดงให้เห็นความขัดแย้งอย่างชัดเจนเมื่อทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์

Manoukian และ Yongram การศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อิเล็กตรอนที่ได้จากกระบวนการการกระเจิงเนื่องจากการชนกันเองของคู่อิเล็กตรอน $(e^{-}e^{-} \rightarrow e^{-}e^{-})$ ในทฤษฎีสนามควอนตัม พบว่าค่าความน่าจะเป็นของการวัดนั้นขึ้นอยู่อัตราเร็วของอนุภาคเริ่มต้น ซึ่งการคำนวณวิเคราะห์ที่กล่าวมาเป็นการคำนวณเชิงพลวัตซึ่งต่างจากผลการพิจารณาโดยการรวมสปินของอนุภาคโดยตรง (Clauser and Shimoney, 1978) ซึ่งมักใช้ในการศึกษาเชิงจลนศาสตร์ (กรณีอัตราเร็วของคู่อนุภาคเริ่มต้นมีค่าต่ำๆ) ผลจากการคำนวณวิเคราะห์สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อิเล็กตรอนที่กล่าวมานั้นได้แสดงให้เห็นความขัดแย้งอย่างชัดเจนเมื่อทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์

Manoukian และ Yongram การศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่ได้จากนัมบุสตริงที่มีประจุและไม่มีประจุ ในทฤษฎีสนามควอนตัม พบว่าค่าความน่าจะเป็นของการวัดนั้นขึ้นอยู่อัตราเร็วของอนุภาคเริ่มต้น ผลจากการคำนวณวิเคราะห์สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กล่าวมานั้นได้แสดงให้เห็นความขัดแย้งอย่างชัดเจนเมื่อทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์

Yongram, Manoukian และ Siranan การศึกษาสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่มิวออน-ปฏิมิวออนที่ได้จากกระบวนการการผลิตมิวออน-ปฏิมิวออนจากการรวมกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอน ในทฤษฎีสนามควอนตัม โดยใช้อันตรกิริยาไฟฟ้าอย่างอ่อนของวายน์เบิร์ก--ซาลาม พบว่านอกจากค่าความน่าจะเป็นของการวัดจะขึ้นอยู่กับอัตราเร็วของอนุภาคเริ่มต้นแล้วยังขึ้นอยู่กับการคู่ควบด้วย ผลจากการคำนวณวิเคราะห์สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของคู่มิวออน-ปฏิมิวออนที่กล่าวมานั้นได้แสดงให้เห็นความขัดแย้งอย่างชัดเจนเมื่อทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์

1.3 สมมติฐานการวิจัย

ผลการคำนวณความน่าจะเป็นของสหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนในคิวอีดี และผลจากการคำนวณวิเคราะห์สหสัมพันธ์โพลาไรเซชันของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กล่าวมานั้นได้แสดงให้เห็นความขัดแย้งอย่างชัดเจนเมื่อทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์

1.4 วัตถุประสงค์ของโครงการ

เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลกับการศึกษาสหสัมพันธ์ของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่มีแหล่งกำเนิดต่างๆ ในกระบวนการทฤษฎีสนามควอนตัม

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ทำให้เข้าใจพฤติกรรมของสหสัมพันธ์ของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่มีแหล่งกำเนิดต่างๆ ในกระบวนการทฤษฎีสนามควอนตัม มากขึ้น

1.6 ขอบเขตการวิจัย

1. กระบวนการที่ศึกษาเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นในทฤษฎีสนามควอนตัม
2. คู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอน

1.7 วิธีดำเนินการวิจัย

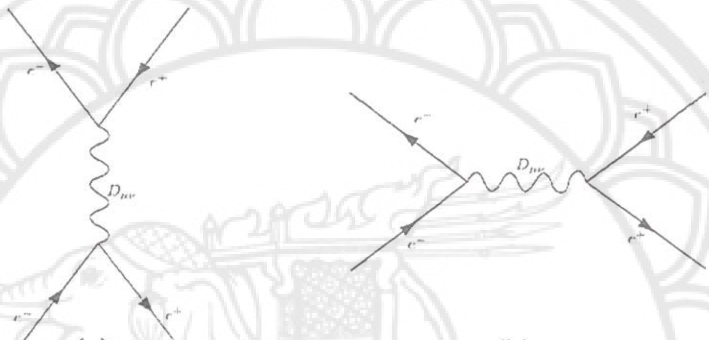
1. ศึกษาบทความวิจัยที่เกี่ยวข้องย้อนหลัง
2. คำนวณหาความน่าจะเป็นในการวัดค่าสหสัมพันธ์ของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอน
3. นำผลการวิเคราะห์คำนวณความน่าจะเป็นที่ได้มาทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์
4. ศึกษาเปรียบเทียบผลกับการศึกษาสหสัมพันธ์ของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอน กับผลของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
   วิเคราะห์ผลการวิจัย

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 Bhabha scattering ($e^+e^- \to e^+e^-$) in QED

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณากระบวนการกำเนิดอิเล็กตรอน-โพสิตรอนจากการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนในทฤษฎีสนามควอนตัม หรือ Bhabha scattering ($e^+e^- \to e^+e^-$) ซึ่งสามารถเขียนไฟน์แมนไดอะแกรมดังรูปที่ 2.1



(a) (b)

รูปที่ 2.1 ไฟน์แมนไดอะแกรมของกระบวนการ $e^+e^- \to e^+e^-$

แอมปลิจูด (amplitude) ที่สัมพันธ์กับกระบวนการในรูปที่ 2.1 (a) สามารถเขียนเป็นสมการได้ โดยใช้ประโยชน์จาก vacuum-to-vacuum transition amplitude [Yongram, 2006] ซึ่งรูปไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (a) สามารถเขียน vacuum-to-vacuum transition amplitude ในสเปซของตำแหน่ง (coordinate space) ดังนี้

$$\begin{aligned} &ie^2 \int (dx)[\overline{\eta}(x_1)S_+(x_1,x_2)\gamma^{\mu}S_+(x_2,x_3)\eta(x_3)] \\ &\quad \times (dx')[\overline{\eta}(x_1')S_+(x_1',x_2')\gamma^{\nu}S_+(x_2',x_3')\eta(x_3')]D_{\mu\nu}(x_2,x_2') \end{aligned} \tag{2.1}$$

โดยที่ $\eta(x)$ และ $\overline{\eta}(x)$ แทนแหล่งกำเนิดภายนอก (external source),

$S_+(x,x') = i\int \frac{d^3\overline{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}e^{ip(x-x')}(-\gamma p + m)$ แทนตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอน (the propagator of electron) ,

$D_{\mu\nu}(x,x') = \int \frac{dQ}{(2\pi)^4}\frac{g_{\mu\nu}}{Q^2 - i\varepsilon}e^{iQ(x-x')}, \varepsilon \to +0$ แทน ตัวแผ่กระจายไฟน์แมนของโฟตอน และ $(dx) \equiv dx_1dx_2dx_3$ โดยอาศัยประโยชน์จากการอินทิเกรต เราจะได้ว่า

$$\int (dx')\overline{\eta}(x')S_+(x',x) = i\int \frac{d^3\overline{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ipx}}{2p^0}\overline{\eta}(p)(-\gamma p + m) \text{ เมื่อ } x'^0 > x^0 \tag{2.2}$$

$$\int(dx')S_+(x',x)\eta(x)=i\int\frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{ipx}}{2p^0}(-\gamma p+m)\eta(p) \text{ เมื่อ } x^0>x'^0 \tag{2.3}$$

เราแปลงสมการที่ (2.1) โดยอาศัย สมการที่ (2.2) และ (2.3) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2.1) ในสเปซโมเมนตัม (momentum space) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &ie^2\int dx_2 e^{i(p_1+p_2)x_2}dx_2' e^{i(-p_1'-p_2')x_2'}\left[i\int\frac{d^3\bar{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2^0}\bar{\eta}(-p_2)(\gamma p_2+m)\gamma^\mu\right.\\ &\times i\int\frac{d^3\bar{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1^0}(-\gamma p_1+m)\eta(p_1)i\int\frac{d^3\bar{p}_1'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1'^0}\bar{\eta}(p_1')(-\gamma p_1'+m)\gamma^\nu \\ &\left.\times i\int\frac{d^3\bar{p}_2'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2'^0}(\gamma p_2'+m)\eta(-p_2')\right]D_{\mu\nu}(x_2,x_2') \end{aligned} \tag{2.4}$$

ในสมการที่ (2.4) เนื่องจากการอินทิเกรตห่างจากแหล่งกำเนิดมากๆ ดังนั้น อันตรกิริยาที่เกิดขึ้นช้ากว่าการกำเนิดและเร็วกว่าการวัดจากเครื่องวัด ดังนั้นเราจะได้ว่าบริเวณเกิดอันตรกิริยาอธิบายได้ดังนี้

$$i\sqrt{\frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{\eta}(p)u(\bar{p},\sigma_-)=i\eta^*_{\bar{p}\sigma_-}\text{ ; } e^- \text{ detection} \tag{2.5}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{u}(\bar{p},\sigma_-)\eta(p)=i\eta_{\bar{p}\sigma_-}\text{ ; } e^- \text{ emission} \tag{2.6}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{v}(\bar{p},\sigma_+)\eta(-p)=i\eta_{\bar{p}\sigma_+}\text{ ; } e^+ \text{ detection} \tag{2.7}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{\eta}(-p)v(\bar{p},\sigma_+)=i\eta^*_{\bar{p}\sigma_+}\text{ ; } e^+ \text{ emission} \tag{2.8}$$

และรูปแบบมาตรฐานของผลรวมสปินทั้งหมดของอิเล็กตรอนและโพสิตรอน สามารถเขียนได้ตามลำดับสมการดังนี้

$$(2m)\sum_\sigma u(\bar{p},\sigma)\bar{u}(\bar{p},\sigma)=(-\gamma p+m) \tag{2.9}$$

$$(2m)\sum_\sigma v(\bar{p},\sigma)\bar{v}(\bar{p},\sigma)=-(\gamma p+m) \tag{2.10}$$

โดยที่ $u(\bar{p},\sigma)$, $\bar{u}(\bar{p},\sigma)$ และ $v(\bar{p},\sigma)$, $\bar{v}(\bar{p},\sigma)$ แทน four-spinors ของอนุภาคเริ่มต้น, อนุภาคสุดท้าย ของ อิเล็กตรอนและโพสิตรอน ตามลำดับ

โดยการแทนสมการที่ (2.5) – (2.10) ลงในสมการที่ (2.4) เราจะได้ว่า

$$ie^2\int\frac{dQ}{(2\pi)^4}\frac{1}{Q^2-i\varepsilon}\int dx_2 e^{i(p_1+p_2-Q)x_2}\int dx_2' e^{i(-p_1'-p_2'+Q)x_2'}$$
$$\times\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}}i\eta^*_{\vec{p}_2\sigma_2}\overline{v}(\vec{p}_2,\sigma_2)\gamma^\mu\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}}i\eta_{\vec{p}_1\sigma_1}\overline{u}(\vec{p}_1,\sigma_1) \quad (2.11)$$
$$\times\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1'^0}}i\eta^*_{\vec{p}_1'\sigma_1'}u(\vec{p}_1',\sigma_1')\gamma_\mu\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2'}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2'^0}}i\eta_{\vec{p}_2'\sigma_2'}v(\vec{p}_2',\sigma_2')$$

อินทิเกรต x_2 และ x_2' เราสามารถเขียนอยู่ในรูปของเดลต้าฟังก์ชันดังนี้

$$\int dx_2 e^{i(p_1+p_2-Q)x_2}=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-Q) \quad (2.12)$$
$$\int dx_2' e^{i(-p_1'-p_2'-Q)x_2'}=(2\pi)^4\delta^4(-p_1'-p_2'+Q) \quad (2.13)$$

จากสมการที่ (2.12) และ (2.13) เราจะได้ว่า

$$\int\frac{dQ}{(2\pi)^4}\frac{1}{Q^2}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-Q)(2\pi)^4\delta^4(-p_1'-p_2'+Q)$$
$$=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\frac{1}{(p_1+p_2)^2} \quad (2.14)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการอธิบายไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (a) ได้ดังนี้

$$ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}}\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}}\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1'^0}}\sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2'}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2'^0}} \quad (2.15)$$
$$\times i\eta^*_{\vec{p}_2\sigma_2}i\eta^*_{\vec{p}_1'\sigma_1'}i\eta_{\vec{p}_1\sigma_1}i\eta_{\vec{p}_2'\sigma_2'}[\overline{v}(\vec{p}_2,\sigma_2)\gamma^\mu u(\vec{p}_1,\sigma_1)][\overline{u}(\vec{p}_1',\sigma_1')\gamma_\mu v(\vec{p}_2',\sigma_2')]\frac{1}{(p_1+p_2)^2}$$

เช่นเดียวกันไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (b) สามารถเขียน vacuum-to-vacuum transition amplitude ในสแปซของตำแหน่ง (coordinate space) ดังนี้

$$ie^2\int(dx)[\overline{\eta}(x_1)S_+(x_1,x_2)\gamma^\mu S_+(x_2,x_3)\eta(x_3)]$$
$$\times(dx')[\overline{\eta}(x_1')S_+(x_1',x_2')\gamma^\nu S_+(x_2',x_3')\eta(x_3')]D_{\mu\nu}(x_2,x_2') \quad (2.16)$$

เราแปลงสมการที่ (2.16) โดยอาศัย สมการที่ (2.2) และ (2.3) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2. 16) ในสเปซโมเมนตัม (momentum space) ได้ดังนี้

$$-ie^2\int dx_2 e^{i(p_1-p_1')x_2}dx_2' e^{i(p_2-p_2')x_2'}\left[i\int\frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1'^0}\overline{\eta}(p_1')(-\gamma p_1'+m)\gamma^\mu\right.$$
$$\times i\int\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1^0}(-\gamma p_1+m)\eta(p_1)i\int\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2^0}\overline{\eta}(-p_2)(\gamma p_2+m)\gamma^\nu \quad (2.17)$$
$$\left.\times i\int\frac{d^3\vec{p}_2'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2'^0}(\gamma p_2'+m)\eta(-p_2')\right]D_{\mu\nu}(x_2,x_2')$$

โดยการแทนสมการที่ (2.5) – (2.10) ลงในสมการที่ (2.17) เราจะได้ว่า

$$ie^2 \int \frac{dQ}{(2\pi)^4} \frac{1}{Q^2 - i\varepsilon} \int dx_2 e^{i(p_1 - p_1' - Q)x_2} \int dx_2' e^{i(p_2 - p_2' + Q)x_2'}$$
$$\times \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1'^0}} i\eta_{\vec{p}_1'\sigma_1'} \overline{u}(\vec{p}_1', \sigma_1')\gamma^\mu \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1^0}} i\eta^*_{\vec{p}_1\sigma_1} u(\vec{p}_1, \sigma_1) \quad (2.18)$$
$$\times \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2^0}} i\eta_{\vec{p}_2\sigma_2} \overline{v}(\vec{p}_2, \sigma_2)\gamma_\mu \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2'}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2'^0}} i\eta^*_{\vec{p}_2'\sigma_2'} v(\vec{p}_2', \sigma_2')$$

จากสมการที่ (2.12) - (2.14) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการอธิบายไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (b) ได้ดังนี้

$$-ie^2(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2^0}} \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1^0}} \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1'^0}} \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2'}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2'^0}} \quad (2.19)$$
$$\times i\eta^*_{\vec{p}_2\sigma_2} i\eta^*_{\vec{p}_1'\sigma_1'} i\eta_{\vec{p}_1\sigma_1} i\eta_{\vec{p}_2'\sigma_2'} [\overline{u}(\vec{p}_1', \sigma_1')\gamma^\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)][\overline{v}(\vec{p}_2, \sigma_2)\gamma_\mu v(\vec{p}_2', \sigma_2')] \frac{1}{(p_1 - p_1')^2}$$

ดังนั้น เราจะได้ transition amplitude ของกระบวนการ $e^+e^- \to e^+e^-$ เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$ie^2(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2^0}} \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1^0}} \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1'^0}} \sqrt{\frac{d^3\vec{p}_2'}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2'^0}}$$
$$\times i\eta^*_{\vec{p}_2\sigma_2} i\eta^*_{\vec{p}_1'\sigma_1'} i\eta_{\vec{p}_1\sigma_1} i\eta_{\vec{p}_2'\sigma_2'} \Big\{ [\overline{v}(\vec{p}_2, \sigma_2)\gamma^\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)][\overline{u}(\vec{p}_1', \sigma_1')\gamma_\mu v(\vec{p}_2', \sigma_2')] \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \quad (2.20)$$
$$- [\overline{u}(\vec{p}_1', \sigma_1')\gamma^\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)][\overline{v}(\vec{p}_2, \sigma_2)\gamma_\mu v(\vec{p}_2', \sigma_2')] \frac{1}{(p_1 - p_1')^2} \Big\}$$

2.2 การทดสอบของเบลล์

ปริมาณที่เราสนใจในการทดสอบของความไม่เท่ากันของเบลล์ (Bell's inequality) สมการมาตรฐาน คือ

$$S = \frac{p_{12}(a_1, a_2)}{p_{12}(\infty, \infty)} - \frac{p_{12}(a_1, a_2')}{p_{12}(\infty, \infty)} + \frac{p_{12}(a_1', a_2)}{p_{12}(\infty, \infty)} + \frac{p_{12}(a_1', a_2')}{p_{12}(\infty, \infty)} - \frac{p_{12}(a_1', \infty)}{p_{12}(\infty, \infty)} - \frac{p_{12}(\infty, a_2)}{p_{12}(\infty, \infty)} \quad (2.21)$$

โดยที่

a_1, a_2, a_1' และ a_2' ทิศทางของโพลาไรซ์ของอนุภาคที่ทำการวัด

$p_{12}(a_1, a_2)/p_{12}(\infty, \infty)$ แทนความน่าจะเป็นของการวัดคู่อนุภาคพร้อมกัน (the joint probability)

$p_{12}(a_1, \infty)/p_{12}(\infty, \infty)$ และ $p_{12}(\infty, a_2)/p_{12}(\infty, \infty)$ แทนความน่าจะเป็นของการวัดอนุภาคตัวที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

สำหรับทิศทางโพลาไรซ์ทฤษฎี Local hidden variable (LHV) ให้ขอบเขตของเบลล์ [Clauser and Horne, 1974; Clauser and Shimoney, 1978] ดังนี้

$$-1 \le S \le 0 \tag{2.22}$$

ซึ่งในทฤษฎีควอนตัมนั้นจะขัดแย้งกับการทดสอบของเบลล์และ คุณสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งคือ

$$p(a_1,a_2) \ne p(a_1,\infty)p(\infty,a_2) \tag{2.23}$$

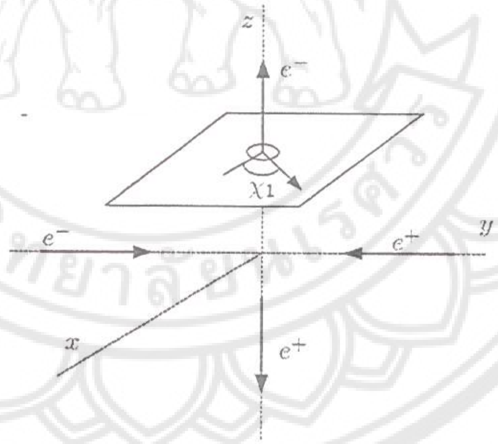
บทที่ 3

ผลการดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงการคำนวณหาความน่าจะเป็นในการวัดค่าสหสัมพันธ์ของสปินของคู่ อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอน โดยอาศัย transition amplitude ในหัวข้อที่ 2.1 ในบทที่ 2 ที่ผ่านมา จากนั้นนำผลการวิเคราะห์คำนวณความน่าจะเป็นที่ได้มาทดสอบตามวิธีการทดสอบของเบลล์ ศึกษาเปรียบเทียบผลกับการศึกษาสหสัมพันธ์ของสปินของคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนที่กำเนิดในการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนกับผลของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง วิเคราะห์ผลการวิจัย

3.1 สหสัมพันธ์ของสปิน: อนุภาคเริ่มต้นเป็นแบบสปินโพลาไรซ์

เราเริ่มต้นด้วยการพิจารณากระบวนการ $e^+e^- \to e^+e^-$ ในกรณีที่เป็นระบบศูนย์กลางมวล (ดูรูปที่ 3.1) โดยที่อนุภาคเริ่มต้น (อิเล็กตรอน, e^-) มีทิศทางสปินขึ้น ส่วนโพสิตรอน (e^+) มีทิศทางสปินลง และมีขนาดและทิศทางโมเมนตัมเป็น $\vec{p}_1 = \gamma m\beta(0,1,0) = -\vec{p}_2$ ตามลำดับ ซึ่ง $\beta = v/c$ คือความเร็วของอนุภาค (v) ต่อความเร็วแสง (c) และ $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$



รูปที่ 3.1 รูปแสดงการชนกันของ e^+e^- โดยที่อิเล็คตรอนและโพสิตรอนเริ่มต้นเคลื่อนที่ตามแนวแกน y ขณะที่อิเล็คตรอนและโพสิตรอนที่เกิดขึ้นเคลื่อนที่ตามแนวแกน z มุม χ_1 (วัดเทียบกับแกน x) แทนการหมุนของสปินของอิเล็คตรอนที่เกิดขึ้นเคลื่อน

จากนั้นเราพิจารณาอนุภาคที่กำเนิดจากกระบวนการการชนกันของอนุภาคเริ่มต้น มีขนาดและทิศทางโมเมนตัมดังนี้

$$\vec{k}_1 = \gamma m\beta(0,0,1) = -\vec{k}_2 \tag{3.1}$$

กำหนดให้ four-spinors ของ อนุภาคเริ่มต้น e^- และ e^+ คือ

$$u(p_1) \sim \begin{pmatrix} \uparrow \\ i\rho\downarrow \end{pmatrix} \text{ และ } \bar{v}(p_2) \sim \begin{pmatrix} i\rho\uparrow^\dagger & \downarrow^\dagger \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\rho = \frac{\gamma\beta}{\gamma+1} = \frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.3}$$

โดยที่ $\uparrow \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ แทนสปินขึ้น, $\downarrow \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ แทนสปินลง, $\uparrow^\dagger \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ แทนเมทริกซ์ทรานสโพสของสปินขึ้น และ $\downarrow^\dagger \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ แทนเมทริกซ์ทรานสโพสของสปินลง สำหรับ four-spinors ของอนุภาคสุดท้าย e^- และ e^+ คือ

$$\bar{u}(k_1) \sim \begin{pmatrix} \zeta_1^\dagger & \rho\sigma_3\zeta_1^\dagger \end{pmatrix} \text{ และ } v(k_2) \sim \begin{pmatrix} \rho\sigma_3\zeta_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

โดยที่ ζ_1 และ ζ_2 แทน two-spinors ซึ่งจะระบุค่าในภายหลัง

จากแอมปลิจูดของการเลื่อนตำแหน่งของกระบวนการ $e^+e^- \to e^+e^-$ ในบทที่ 2 คือ

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \propto & [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)][\bar{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)]\frac{1}{(p_1+p_2)^2} \\ & -[\bar{u}(k_1)\gamma^\mu u(p_1)][\bar{v}(p_2)\gamma_\mu v(k_2)]\frac{1}{(p_1-p_1')^2} \end{aligned} \tag{3.5}$$

จากสมการที่ 3.5 เราสามารถใช้ในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการวัดค่าสปินของอนุภาคสุดท้าย e^- และ e^+ ทิศทางที่กำหนดตามมุม χ_1 และ χ_2 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 3.1 ดังนั้นเราได้ two-spinors คือ

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} \\ e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \text{ และ } \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} \\ e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

ในที่นี้เราได้พิจารณาในกรณี single state (สปินรวมของอนุภาคเท่ากับศูนย์) ใช้สมการที่ (3.2), (3.4) และ (3.5) เพื่อใช้ในการคำนวณหาแอมปลิจูดของกระบวนการดังรูปที่ 3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \propto & \left[A(\beta)\cos\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right) + B(\beta)\sin\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)\right] \\ & +i\left[C(\beta)\sin\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right) + D(\beta)\cos\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

โดยที่

$$A(\beta) = 1 - \rho^2(1-\rho) + 2\beta^2(1-\rho^2)^2$$
$$B(\beta) = \rho(1+\rho) + 8\beta^2\rho^2$$
$$C(\beta) = 1 + \rho^2(1-\rho) + 2\beta(1-\rho^4)$$
$$D(\beta) = \rho(1+\rho)$$

กำหนดให้ $F[\chi_1,\chi_2]$ แทนกำลังสองสัมบูรณ์ของค่าด้านขวามือสมการที่ (3.7) การกระจายความน่าจะเป็นเงื่อนไขร่วม (the conditional joint probability distribution) ของการวัดสปินตามทิศทางกำหนดโดยมุม χ_1 และ χ_2 เป็น

$$P[\chi_1,\chi_2] = \frac{F[\chi_1,\chi_2]}{N(\beta)} \tag{3.8}$$

นอร์แมไลเซชันแฟกเตอร์ (normalization factor, $N(\beta)$) ได้จากการรวมโพลาไรเซชันทั้งหมดของอนุภาคกำเนิดนั้นเท่ากับผลรวมของ $F[\chi_1,\chi_2]$ ที่คู่มุมต่างๆ ทั้งหมดตามลำดับ

$$(\chi_1,\chi_2),\quad (\chi_1+\pi,\chi_2),\quad (\chi_1,\chi_2+\pi),\quad (\chi_1+\pi,\chi_2+\pi) \tag{3.9}$$

จากสมการที่ (3.9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N(\beta) &= F[\chi_1,\chi_2] + F[\chi_1+\pi,\chi_2] \\ &\quad + F[\chi_1,\chi_2+\pi] + F[\chi_1+\pi,\chi_2+\pi] \\ &= 2[A^2(\beta)+B^2(\beta)+C^2(\beta)+D^2(\beta)] \end{aligned} \tag{3.10}$$

จะได้

$$\begin{aligned} P[\chi_1,\chi_2] &= \frac{\left[A(\beta)\cos\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)+B(\beta)\sin\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)\right]^2}{2[A^2(\beta)+B^2(\beta)+C^2(\beta)+D^2(\beta)]} \\ &\quad \frac{+\left[C(\beta)\sin\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)+D(\beta)\cos\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)\right]^2}{2[A^2(\beta)+B^2(\beta)+C^2(\beta)+D^2(\beta)]} \end{aligned} \tag{3.11}$$

ถ้าเราสปินของอนุภาคเพียงตัวเดียวสัมพันธ์กับมุม χ_1 ความน่าจะเป็นเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} P[\chi_1,-] &= P[\chi_1,\chi_2] + P[\chi_1,\chi_2+\pi] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2[A(\beta)B(\beta)+C(\beta)D(\beta)]\sin\chi_1}{2[A^2(\beta)+A^2(\beta)+C^2(\beta)+D^2(\beta)]} \end{aligned} \tag{3.12}$$

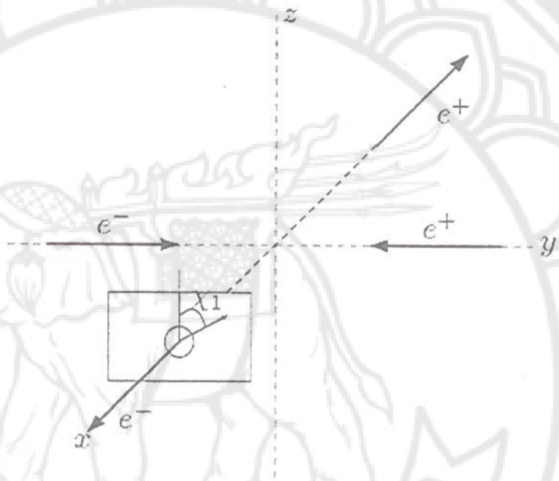
เช่นเดียวกันเราสปินของอนุภาคเพียงตัวเดียวสัมพันธ์กับมุม χ_2 ความน่าจะเป็นเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} P[-,\chi_2] &= P[\chi_1,\chi_2] + P[\chi_1+\pi,\chi_2] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2[C(\beta)D(\beta)-A(\beta)B(\beta)]\sin\chi_2}{2[A^2(\beta)+A^2(\beta)+C^2(\beta)+D^2(\beta)]} \end{aligned} \tag{3.13}$$

เมื่อนำค่าความน่าจะเป็นที่ได้ไปหาค่า S แล้วนำไปทดสอบกับเบลล์ พบว่าที่ $0 \le \beta \le 1$ มุม χ_1, χ_2, χ_1' และ χ_2' ขัดแย้งกับ Bell's inequality ของทฤษฎี LHV ยกตัวอย่างเช่น ที่ $\beta = 0.9$, $\chi_1 = 0°$, $\chi_2 = 45°$, $\chi_1' = 69°$ และ $\chi_2' = 200°$, $S = -1.311$

3.2 สหสัมพันธ์ของสปิน: อนุภาคเริ่มต้นเป็นแบบสปินไม่โพลาไรซ์

เราเริ่มต้นด้วยการพิจารณากระบวนการ $e^+e^- \to e^+e^-$ ในกรณีที่เป็นระบบศูนย์กลางมวล (ดูรูปที่ 3.2) โดยที่อนุภาคเริ่มต้นเป็นแบบสปินไม่โพลาไรซ์ และมีขนาดและทิศทางโมเมนตัมเป็น $\bar{p}_1 = \gamma m\beta(0,1,0) = -\bar{p}_2$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.2 รูปแสดงการชนกันของ e^+e^- เคลื่อนที่ตามแนวแกน y และอิเล็คตรอนและโพสิตรอนที่เกิดขึ้นเคลื่อนที่ตามแนวแกน x มุม χ_1 (วัดเทียบกับแกน z) แทนการหมุนของสปินของอิเล็คตรอนที่เกิดขึ้นเคลื่อน

จากนั้นเราพิจารณาอนุภาคที่กำเนิดจากกระบวนการการชนกันของอนุภาคเริ่มต้น มีขนาดและทิศทางโมเมนตัมดังนี้

$$\bar{k}_1 = \gamma m\beta(1,0,0) = -\bar{k}_2 \tag{3.14}$$

และ four-spinors ของ อนุภาคสุดท้าย e^- และ e^+ คือ

$$u(k_1) = \left(\frac{k^0 + m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \dfrac{\bar{k}_1 \cdot \bar{\sigma}}{k^0 + m}\zeta_1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_1 = \begin{pmatrix} -i\cos\chi_1/2 \\ \sin\chi_1/2 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

$$v(k_2)=\left(\frac{k^0+m}{2m}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\frac{\vec{k}_2\bullet\vec{\sigma}}{k^0+m}\zeta_2\\ \zeta_2\end{pmatrix},\quad \zeta_2=\begin{pmatrix}-i\cos\chi_2/2\\ \sin\chi_2/2\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

ค่ากำลังสองสัมบูรณ์ของค่าด้านขวามือสมการที่ 3.5 ในกรณีอนุภาคเริ่มต้นเป็นแบบไม่โพลาไรซ์ (รวมสปินทั้งหมดของอนุภาคเริ่มต้น) หลังจากทำการวิเคราะห์เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Prob}\propto&\frac{\mathrm{Tr}[\gamma^\sigma(\gamma p_2+m)\gamma^\mu(-\gamma p_1+m)]\overline{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)\overline{v}(k_2)\gamma_\sigma u(k_1)}{(p_1+p_2)^4}\\&-\frac{\mathrm{Tr}[(\gamma p_2+m)\gamma^\mu(-\gamma p_1+m)\gamma^\sigma]\overline{v}(k_2)\gamma_\sigma u(k_1)\overline{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)}{(p_1+p_2)^2(p_1-k_1)^2}\\&-\frac{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(-\gamma p_1+m)\gamma^\sigma(\gamma p_2+m)]\overline{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)\overline{v}(k_2)\gamma_\sigma u(k_1)}{(p_1+p_2)^2(p_1-k_1)^2}\\&+\frac{\overline{u}(k_1)\gamma^\mu(-\gamma p_1+m)\gamma^\sigma u(k_1)\overline{v}(k_2)\gamma_\sigma(\gamma p_2+m)\gamma_\mu v(k_2)}{(p_1-k_1)^4}\end{aligned} \tag{3.17}$$

ซึ่งหลังจากจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุดและจัดเทอมใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Prob}\propto&[2\beta^4(1+2\beta^2)-3(1+\beta^2)]\sin^2\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)\\&+[1+\beta^2+2\beta^4]\cos^2\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)+5(1-\beta^2)\\&\equiv F[\chi_1,\chi_2]\end{aligned} \tag{3.18}$$

โดยที่เราใช้ four-spinors ในสมการที่ (3.15) และ (3.16)

กำหนดให้ ความน่าจะเป็นเงื่อนไข (the conditional probability) ของการวัดค่าสปินของอนุภาคสุดท้าย e^- และ e^+ ทิศทางที่กำหนดตามมุม χ_1 และ χ_2 เทียบกับแกน z ตามลำดับดังที่แสดงในรูปที่ 3.2 ดังนั้นเราได้ว่า

$$P[\chi_1,\chi_2]=\frac{F[\chi_1,\chi_2]}{C} \tag{3.19}$$

ค่าคงที่นอร์แมไลเซชัน (normalization constant, C) ได้จากการรวมโพลาไรเซชันทั้งหมดของอนุภาคกำเนิดนั้นเท่ากับผลรวมของ $F[\chi_1,\chi_2]$ ที่คู่มุมต่างๆ ทั้งหมดดังสมการที่ (3.9) สำหรับตรึงการเลือกมุม χ_1 และ χ_2 ใดๆ สัมพันธ์กับ orthonormal spinors จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix}-i\cos\chi_j/2\\ \sin\chi_j/2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-i\cos(\chi_j+\pi)/2\\ \sin(\chi_j+\pi)/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\sin\chi_j/2\\ \cos\chi_j/2\end{pmatrix} \tag{3.20}$$

สำหรับแต่ละ $j=1,2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C &= F[\chi_1,\chi_2]+F[\chi_1+\pi,\chi_2] \\ &\quad +F[\chi_1,\chi_2+\pi]+F[\chi_1+\pi,\chi_2+\pi] \\ &= 8[2-3\beta^2+\beta^4+\beta^6] \end{aligned} \tag{3.21}$$

ซึ่งดังที่คาดหวังว่าไม่ขึ้นอยู่กับมุม χ_1 และ χ_2 และให้ผล

$$\begin{aligned} P[\chi_1,\chi_2] &= \frac{[2\beta^4(1+2\beta^2)-3(1+\beta^2)]\sin^2\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{8[2-3\beta^2+\beta^4+\beta^6]} \\ &\quad \frac{+[1+\beta^2+2\beta^4)]\cos^2\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)+5(1-\beta^2)}{8[2-3\beta^2+\beta^4+\beta^6]} \end{aligned} \tag{3.22}$$

โดยการรวมมุมของสปิน

$$\chi_1, \qquad \chi_2+\pi \tag{3.23}$$

ถ้าเราสปินของอนุภาคเพียงตัวเดียวสัมพันธ์กับมุม χ_1 ความน่าจะเป็นเขียนได้เป็น

$$P[\chi_1,-]=\frac{1}{2} \tag{3.24}$$

เช่นเดียวกันเราสปินของอนุภาคเพียงตัวเดียวสัมพันธ์กับมุม χ_2 ความน่าจะเป็นเขียนได้เป็น

$$P[-,\chi_2]=\frac{1}{2} \tag{3.25}$$

เมื่อนำค่าความน่าจะเป็นที่ได้ไปหาค่า S แล้วนำไปทดสอบกับเบลล์ พบว่าที่ $0\le\beta\le 1$ มุม χ_1, χ_2, χ_1' และ χ_2' ขัดแย้งกับ Bell's inequality ของทฤษฎี LHV ยกตัวอย่างเช่น ที่ $\beta=0.8$, $\chi_1=0^\circ$, $\chi_2=45^\circ$, $\chi_1'=210^\circ$ และ $\chi_2'=15^\circ$, $S=-1.167$

บทที่ 4

สรุปผลการวิจัย

การศึกษาอย่างหนักเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของสหสัมพันธ์โพราไรเซชันในการชนกันของ $e^{-}e^{+}$ แบบยืดหยุ่น (สำหรับอนุภาคเริ่มต้นแบบโพราไรซ์และไม่โพราไรซ์) ได้แสดงให้เห็นว่าอนุภาคเหล่านี้ขึ้นอยู่กับความเร็วและผลการคำนวณที่ได้ในควอนตัมอิเล็คโตรไดนามิกส์ (QED) ความจำเป็นของการศึกษาเช่นนี้ในขอบเขตของทฤษฎีสนามควอนตัมอาจไม่สำคัญได้ซะทีเดียว เนื่องจากการประมาณค่าสหสัมพันธ์จากการรวมสปินอย่างง่าย (ดังเช่นที่มักจะกระทำกัน) นั้นไร้ความหมายเนื่องด้วยมันไม่ได้รวมสิ่งสำคัญหนึ่งคือการพิจารณาพลศาสตร์ พลศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกำหนดได้โดยตรงจากทฤษฎีสนามควอนตัม การคำนวณสำหรับสหสัมพันธ์โพราไรเซชันที่ได้นั้นกำลังเป็นที่สนใจของพวกเราในตอนนี้แต่ยังนำไปสู่การทดลองที่จะพิสูจน์สหสัมพันธ์อีกด้วยโดยการดูผลความเร็วไม่เฉพาะสำหรับอนุภาคเริ่มต้นแบบโพราไรซ์แต่ยังสำหรับอนุภาคเริ่มต้นแบบไม่โพราไรซ์ ผลลัพธ์ของเราที่ได้ของเราจะเกี่ยวข้องในขอบเขตของความไม่เท่ากันของเบลล์อีกด้วย (Bell's inequality) ด้วยการเน้นอธิบายในรูปแบบสัมพัทธภาพในทฤษฎีควอนตัมนั้นคือทฤษฎีสนามควอนตัม ผลคำนวณของเราได้แสดงให้เห็นว่าขัดแย้งอย่างชัดเจนกับความไม่เท่ากันของเบลล์ของทฤษฎีตัวแปรที่ซ่อนตัวประจำถิ่น(LHV) ในการสนับสนุนของทฤษฎีควอนตัมในขอบเขตสัมพัทธภาพ การทดลองต่างๆ ที่ทดลองหลายปีที่ผ่านมา (ยกตัวอย่างเช่น [14–18]) เกี่ยวกับสหสัมพันธ์ของโพราไรเซชันของอนุภาคและการคาดหวังว่าการบันทึกคุณสมบัติใหม่นี้โดยการคำนวณได้โดยตรงจากทฤษฎีสนามควอนตัม (หลักการของสัมพัทธภาพและทฤษฎีควอนตัม) จะนำไปสู่การทดลองใหม่ๆเกี่ยวกับสหสัมพันธ์โพราไรเซชันที่ขึ้นอยู่กับความเร็วเพื่อความกระจ่างแจ้งของทฤษฎีของเบลล์ เราหวังว่าการคำนวณเหล่านี้ (ในแนวทางทฤษฎีสนามควอนตัมทั่วไป) จะเป็นถูกนำไปใช้ในฟิสิกส์อื่นๆอีกด้วย เช่น quantum teleportation และ quantum information

บรรณานุกรม

[1] Yongram N and Manoukian E B (2003). Int. J. Theor. Phys. 42 : 1775.

[2] Manoukian E B and Yongram N (2004). Eur. Phys. J. D 3: 137.

[3] Manoukian E B and Yongram N (2005). Mod. Phys. Lett. A20: 979.

[4] Yongram N, Manoukian E B and Siranan S (2006). Mod. Phys. Lett. A21: 1.

[5] Howe H A and MacKenzie K R (1953). Phys. Rev. 90: 678.

[6] Ashkin A, Page L A and Woodward W M (1954). Phys. Rev. 94: 357.

[7] Augustin J -E and etal (1975). Phys. Rev. Lett. 34: 233.

[8] Learned J G, Resvanis L K and Spencer C M (1975). Phys. Rev. Lett. 35: 1688.

[9] O'Neill L H and etal (1976). Phys. Rev. Lett. 37: 395.

[10] Clauser, J. F. and Horne, M. A., (1974). Phys. Rev. D10: 526.

[11] Clauser, J. F. and Shimoney, A., (1978). Rep. Prog. Phys. 41:1881.

[12] Itzykson C and Zuber J -B (1980). Quantum Field Theory. New York: McGraw-Hill p280.

[13] Griffiths D (1987). Introduction to elementary particles. New York: John Wiley & Sons p233.

[14] Aspect A, Dalibard J and Roger G (1982). Phys. Rev. Lett. 49: 1804.

[15] Irby V D (2003). Phys. Rev. A67: 034102.

[16] Osuch S, Popkiewicz M, Szeflinski Z and Wilhelmi Z (1996). Acta. Phys. Pol. B27: 567.

[17] Kaday L R, Ulman J D and Wu C S (1975). Nuovo Cimento B25: 633.

[18] Fry E S (1995). Quantum Optics 7: 229.

ภาคผนวก

Eur. Phys. J. D **47**, 71–74 (2008)
DOI: 10.1140/epjd/e2008-00030-6

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D

Spin correlations in elastic e^+e^- scattering in QED

N. Yongram[a]

Fundamental Physics and Cosmology Research Unit, The Tah Poe Academia Institute (TPTP), Department of Physics, Naresuan University, 65000 Phitsanulok, Thailand

Received 13 November 2007
Published online 29 February 2008 –

Abstract. Spin correlations are carefully investigated in elastic e^+e^- scattering in QED, for initially *polarized* as well as *unpolarized* particles, with emphasis placed on energy or speed of the underlying particles involved in the process. An explicit expression is derived for the corresponding transition probabilities in closed form to the leading order. These expressions differ from those obtained from simply combining the spins of the relevant particles, which are of kinematic nature. It is remarkable that these explicit results obtained from quantum field theory show a clear violation of Bell's inequality at *all* energies, in support of quantum theory in the relativistic regime. We hope that our explicit expression will lead to experiments, of the type described in the bulk of this paper, that monitor speed.

PACS. 12.20.Ds Specific calculations – 12.20.Fv Experimental tests – 12.20.-m Quantum electrodynamics

1 Introduction

In recent years, we have been interested in studying joint polarization correlations of fundamental processes in quantum electrodynamics (QED) and in the electro-weak theory [1–4], for initially *polarized* and *unpolarized* particles. Our main conclusion, based on explicit computations in quantum field theory, is that the mere fact that particles emerging from a process have non-zero speeds upon reaching the detectors, implies, in general, that their spin polarization correlation probabilities *depend on speed* [1–4] and *may also depend on the underlying couplings* [4]. The explicit expressions of polarization correlations follow from these *dynamical* computations, and are non-speculative, involving no arbitrary input assumptions, and are seen to depend on speed, and possibly on the couplings as well. These are unlike those from the rather naïve method of simply combining the spins of the particles in question, which are of kinematical nature. Such a method is, in general, not applicable to relativistic particles, and the regularly used formal arguments (based on combining spins only) completely fail. In the limit of low energies, our earlier expressions [1–4] for the polarization correlations were shown to be reduced to the naïve ones just mentioned by simply combining spins. In our previous investigation [4], in which a process for the creation of a $\mu^+\mu^-$ pair (from e^+e^- scattering, for example) was considered under the electro-weak theory, it was noted that, due to the threshold needed to create such a pair, the zero-energy limit may not be taken, and that the study of polarization correlations by simply combining spins (without recourse to quantum field theory) has no meaning. The focus of this paper is the derivation of the *explicit* polarization correlation probabilities in elastic e^+e^- scattering in QED, for initially *polarized* as well as *unpolarized* particles, with emphasis put on the *energy* available in the process so that a detailed study can be carried out in the relativistic regime as well. The reasons for our present investigation are twofold. Firstly, several experiments on $e^+e^- \to e^+e^-$ have been carried out over the years [5–9], and it is expected that our explicit new expression for the polarization correlations, depending on speeds, may lead to new experiments on polarization correlations that monitor the speed of the underlying particles. Secondly, such a study may be relevant to experiments in the light of Bell's theorem (monitoring speed), as discussed below.

The relevant quantity of interest here in testing Bell's inequality [10,11] is, in a standard notation,

$$S = \frac{p_{12}(a_1,a_2)}{p_{12}(\infty,\infty)} - \frac{p_{12}(a_1,a_2')}{p_{12}(\infty,\infty)} + \frac{p_{12}(a_1',a_2)}{p_{12}(\infty,\infty)} + \frac{p_{12}(a_1',a_2')}{p_{12}(\infty,\infty)} - \frac{p_{12}(a_1',\infty)}{p_{12}(\infty,\infty)} - \frac{p_{12}(\infty,a_2)}{p_{12}(\infty,\infty)} \quad (1)$$

as is *computed from* QED. Here a_1, a_2 (a_1', a_2') specify directions along which the polarizations of two particles are measured, with $p_{12}(a_1,a_2)/p_{12}(\infty,\infty)$ denoting the joint probability, and $p_{12}(a_1,\infty)/p_{12}(\infty,\infty)$ and $p_{12}(\infty,a_2)/p_{12}(\infty,\infty)$ denoting the probabilities when the polarization of only one of the particles is measured ($p_{12}(\infty,\infty)$ is normalization factor). The corresponding probabilities, as computed from QED, will be denoted by $P[\chi_1,\chi_2]$, $P[\chi_1,-]$, and $P[-,\chi_2]$, with χ_1 and χ_2 denoting

[a] e-mail: nattapongy@nu.ac.th

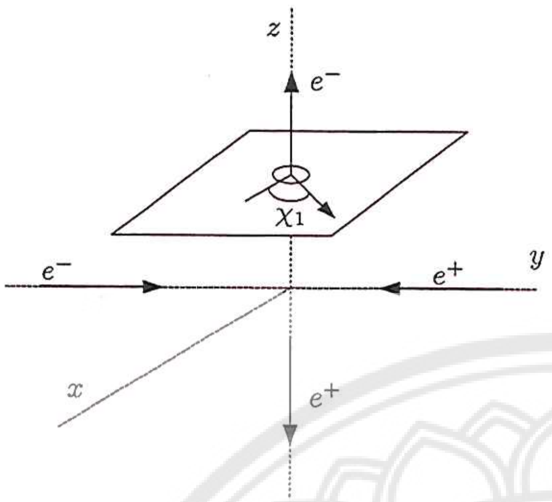


Fig. 1. The figure depicts e^+e^- scattering, with the electron and positron initially moving the y-axis, while the emerging electron and positron moving along the z-axis. The angle χ_1, measured relative to the x-axis, denotes the orientation of spin of the emerging electron.

angles specifying directions along which spin measurements are carried out with respect to certain axes spelled out in the bulk of the paper. To show that the QED process is in violation with Bell's inequality of local hidden variables (LHV), it is sufficient to find one set of angles χ_1, χ_2, χ_1', and χ_2', such that S, as computed in QED, has a value outside of the interval $[-1, 0]$. In this work, it is implicitly assumed that the polarization parameters in the particle states are directly observable and may be used for Bell-type measurements (as discussed). We show a clear violation of Bell's inequality for *all* speeds, in support of quantum theory in the relativistic regime, i.e. of quantum field theory.

2 Spin correlations; initially polarized particles

We consider the process $e^+e^- \to e^+e^-$ in the center of mass frame (see Fig. 1), with an electron-positron pair initially polarized with one spin up (along z-axis) and one spin down. With $p_1 = \gamma m\beta(0,1,0) = -p_2$ denoting the momenta of initial electron and positron, respectively, and $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, we consider the momenta of the emerging electron and positron as

$$k_1 = \gamma m\beta(0,0,1) = -k_2. \tag{2}$$

For four-spinors of the initial electron and positron, respectively, we have

$$u(p_1) \sim \begin{pmatrix} \uparrow \\ i\rho\downarrow \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \overline{v}(p_2) \sim \left(i\rho \uparrow^\dagger - \downarrow^\dagger \right) \tag{3}$$

$$\rho = \frac{\gamma\beta}{\gamma+1} = \frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4}$$

where $\uparrow \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is a spin up, $\downarrow \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is a spin down, $\uparrow^\dagger \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ is a transpose matrix of spin up, and $\downarrow^\dagger \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ is a transpose matrix of spin down. For four-spinors of the emerging electron and positron, respectively, we have

$$\overline{u}(k_1) \sim \left(\zeta_1^\dagger \;\; \rho\sigma_3\zeta_1^\dagger \right) \quad \text{and} \quad v(k_2) \sim \begin{pmatrix} \rho\sigma_3\zeta_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\rho = \frac{\gamma\beta}{\gamma+1} = \frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6}$$

where the two-spinors ζ_1, ζ_2 will be specified later.

The well-known expression for the amplitude of the process is [12,13]

$$\mathcal{M} \propto \overline{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\overline{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)\frac{1}{(p_1+p_2)^2} - \overline{u}(k_1)\gamma^\mu u(p_1)\overline{v}(p_2)\gamma_\mu v(k_2)\frac{1}{(p_1-k_1)^2}. \tag{7}$$

Given the amplitude of the process above, we compute the conditional joint probability of spin measurements of e^+, e^- along directions specified by the angles χ_1 and χ_2, as shown in Figure 1. We then have two-spinors as follows:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} \\ e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} \\ e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Here we have considered only the single state (cf. [2,4]). Using the four-spinors of initial and emerging e^+, e^-, and the two-spinors in term of the angles χ_1 and χ_2 to calculate the invariant amplitude of the process in Figure 1, gives

$$\mathcal{M} \propto \left[A(\beta)\cos\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right) + B(\beta)\sin\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right) \right] + i\left[C(\beta)\sin\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right) + D(\beta)\cos\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right) \right] \tag{9}$$

where

$$A(\beta) = 1 - \rho^2(1-\rho) + 2\beta^2(1-\rho^2)^2$$
$$B(\beta) = \rho(1+\rho) + 8\beta^2\rho^2$$
$$C(\beta) = 1 + \rho^2(1-\rho) + 2\beta(1-\rho^4)$$
$$D(\beta) = \rho(1+\rho).$$

Using the notation $F[\chi_1, \chi_2]$ for the absolute value square of the right-hand side of (9), the conditional joint probability distribution of spin measurements along the directions specified by angles χ_1 and χ_2 is given by

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{F[\chi_1, \chi_2]}{N(\beta)}. \tag{10}$$

The normalization factor $N(\beta)$ is obtained by summing over all the polarizations of the emerging particles. This is equivalent to the summing of $F[\chi_1, \chi_2]$ over the pairs of angles

$$(\chi_1, \chi_2), \quad (\chi_1, \chi_2), \quad (\chi_1 + \pi, \chi_2), \quad (\chi_1, \chi_2 + \pi) \tag{11}$$

which leads to

$$\begin{aligned} N(\beta) &= F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2] \\ &\quad + F[\chi_1, \chi_2 + \pi] + P[\chi_1 + \pi, \chi_2 + \pi] \\ &= 2[A^2(\beta) + B^2(\beta) + C^2(\beta) + D^2(\beta)] \end{aligned} \tag{12}$$

giving

$$\begin{aligned} P[\chi_1, \chi_2] &= \frac{\left[A(\beta) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + B(\beta) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right)\right]^2}{2[A^2(\beta) + B^2(\beta) + C^2(\beta) + D^2(\beta)]} \\ &\quad + \frac{\left[C(\beta) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + D(\beta) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right)\right]^2}{2[A^2(\beta) + B^2(\beta) + C^2(\beta) + D^2(\beta)]}. \end{aligned} \tag{13}$$

If only one of the spins is measured, say, corresponding to χ_1, the probability can be written as

$$\begin{aligned} P[\chi_1, -] &= P[\chi_1, \chi_2] + P[\chi_1, \chi_2 + \pi] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2[A(\beta)B(\beta) + C(\beta)D(\beta)] \sin \chi_1}{2[A^2(\beta) + B^2(\beta) + C^2(\beta) + D^2(\beta)]}. \end{aligned} \tag{14}$$

Similarly, if only one of the spins is measured corresponding to χ_2, the probability can be written as

$$\begin{aligned} P[-, \chi_2] &= P[\chi_1, \chi_2] + P[\chi_1 + \pi, \chi_2] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2[C(\beta)D(\beta) - A(\beta)B(\beta)] \sin \chi_2}{2[A^2(\beta) + B^2(\beta) + C^2(\beta) + D^2(\beta)]}. \end{aligned} \tag{15}$$

For all $0 \leq \beta \leq 1$, angles χ_1, χ_2, χ_1' and χ_2' are readily found to lead to a violation of Bell's inequality of LHV theories. For example, for $\beta = 0.9$, $\chi_1 = 0°$, $\chi_2 = 45°$, $\chi_1' = 69°$, and $\chi_2' = 200°$, $S = -1.311$, violating the inequality from below.

3 Spin correlations; initially unpolarized particles

For the process $e^+e^- \to e^+e^-$, in the center of mass (c.m.), with initially unpolarized spins, with momenta $\boldsymbol{p}_1 = \gamma m\beta(0, 1, 0) = -\boldsymbol{p}_2$, we take for the final electron and positron

$$\boldsymbol{k}_1 = \gamma m\beta(1, 0, 0) = -\boldsymbol{k}_2 \tag{16}$$

and for the four-spinors

$$u(k_1) = \left(\frac{k^0 + m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \frac{\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_1 \end{pmatrix}, \ \xi_1 = \begin{pmatrix} -i \cos \chi_1/2 \\ \sin \chi_1/2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$v(k_2) = \left(\frac{k^0 + m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \ \xi_2 = \begin{pmatrix} -i \cos \chi_2/2 \\ \sin \chi_2/2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

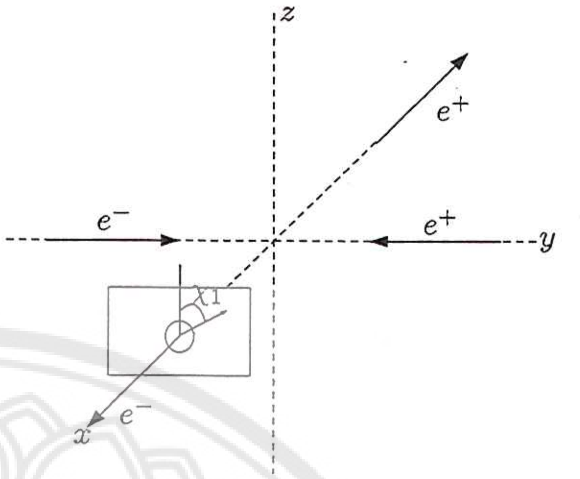


Fig. 2. The figure depicts e^+e^- scattering, with e^+, e^- moving along the y-axis, and the emerging electron and positron moving along the x-axis. The angle χ_1, measured relative to the z-axis, denotes the orientation of spin of the emerging electron.

The absolute value square of the right-hand side of (9), with initially unpolarized electrons and positron, leads to

$$\begin{aligned} &\text{Prob} \propto \\ &\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\sigma(\gamma p_2 + m)\gamma^\mu(-\gamma p_1 + m)\right] \overline{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)\overline{v}(k_2)\gamma_\sigma u(k_1)}{(p_1 + p_2)^4} \\ &- \frac{\mathrm{Tr}[(\gamma p_2 + m)\gamma^\mu(-\gamma p_1 + m)\gamma^\sigma]\, \overline{v}(k_2)\gamma_\sigma u(k_1)\overline{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)}{(p_1 + p_2)^2(p_1 - k_1)^2} \\ &- \frac{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(-\gamma p_1 + m)\gamma^\sigma(\gamma p_2 + m)]\, \overline{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)\overline{v}(k_2)\gamma_\sigma u(k_1)}{(p_1 + p_2)^2(p_1 - k_1)^2} \\ &+ \frac{\overline{u}(k_1)\gamma^\mu(-\gamma p_1 + m)\gamma^\sigma u(k_1)\overline{v}(k_2)\gamma_\sigma(\gamma p_2 + m)\gamma_\mu v(k_2)}{(p_1 - k_1)^4} \end{aligned} \tag{19}$$

which, after simplification and collecting terms, reduces to

$$\begin{aligned} \text{Prob} \propto &\left[2\beta^4(1 + 2\beta^2) - 3(1 + \beta^2)\right] \sin^2\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\ &+ (1 + \beta^2 + 2\beta^4) \cos^2\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + 5(1 - \beta^2) \\ &\equiv F[\chi_1, \chi_2] \end{aligned} \tag{20}$$

where we have used the expressions for the spinors in (17) and (18).

Given that the process has occurred, the conditional probability that the spins of the emerging electron and positron make angles χ_1 and χ_2, respectively, with the z-axis is obtained directly from (20) as

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{F[\chi_1, \chi_2]}{C}. \tag{21}$$

The normalization constant C is obtained by summing over the polarizations of the emerging electrons. This is equivalent to the summing of $F[\chi_1, \chi_2]$ over the pairs of angles in (11) for any arbitrarily chosen fixed χ_1 and χ_2, corresponding to the orthonormal spinors

$$\begin{pmatrix} -i\cos\chi_j/2 \\ \sin\chi_j/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i\cos(\chi_j+\pi)/2 \\ \sin(\chi_j+\pi)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin\chi_j/2 \\ \cos\chi_j/2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

providing a complete set, for each $j = 1, 2$, in reference to (17) and (18). This is,

$$\begin{aligned} C &= F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1+\pi, \chi_2] \\ &\quad + F[\chi_1, \chi_2+\pi] + F[\chi_1+\pi, \chi_2+\pi] \\ &= 8[2 - 3\beta^2 + \beta^4 + \beta^6] \end{aligned} \tag{23}$$

which as expected is independent of χ_1 and χ_2. This gives

$$\begin{aligned} P[\chi_1, \chi_2] &= \frac{[2\beta^4(1+2\beta^2) - 3(1+\beta^2)]\sin^2\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{8[2-3\beta^2+\beta^4+\beta^6]} \\ &\quad + \frac{[1+\beta^2+2\beta^4]\cos^2\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right) + 5(1-\beta^2)}{8[2-3\beta^2+\beta^4+\beta^6]}. \end{aligned} \tag{24}$$

By summing over

$$\chi_2, \quad \chi_2 + \pi \tag{25}$$

for any arbitrarily fixed χ_2, we obtain

$$P[\chi_1, -] = \frac{1}{2} \tag{26}$$

and similarly,

$$P[-, \chi_2] = \frac{1}{2} \tag{27}$$

for the probabilities when only one of the photons polarizations is measured.

A clear violation of Bell's inequality of LHV theories was obtained for all $0 \leq \beta \leq 1$. For example, for $\beta = 0.8$, with $\chi_1 = 0°$, $\chi_2 = 45°$, $\chi_1' = 210°$, and $\chi_2' = 15°$, $S = -1.167$, violating the inequality from below.

4 Conclusion

A critical study of polarization correlation probabilities in elastic e^+e^- scattering was carried out for initially *polarized* as well as *unpolarized* particles, emphasizing their dependence on speed, and an explicit expression was obtained for them in QED. The necessity of such a study within the realm of quantum field theory cannot be overemphasized, as estimates of such correlations from simply combining spins (as is often done), have no meaning, as they do not involve dynamical considerations. The relevant dynamics is, of course, dictated directly from quantum field theory. The explicit expression for the polarization correlation obtained is interesting in its own right, but may also lead to experiments that investigate such correlations by monitoring speed, not only for initially polarized particles, but also for unpolarized ones. Our results may also be relevant in the realm of Bell's inequality with emphasis put on relativistic aspects of quant! um theory, that is, of quantum field theory. Our expressions have shown clear violations of Bell's inequality of LHV theories, in support of quantum theory in the relativistic regime. In recent years, several experiments have been already performed (cf. [14–18]) on particles' polarization correlations. It is expected that the novel properties recorded here by explicit calculations following directly from field theory (which is based on the principle of relativity and quantum theory) will lead to new experiments on polarization correlations monitoring speed in the light of Bell's Theorem. We hope that these computations, within the general setting of quantum field theory, will also be useful in areas of physics such as quantum teleportation and quantum information.

I would like to thank Prof. Dr. E.B. Manoukian for discussions, guidance, and for carefully reading the manuscript. I also would like to thank Suppiya Siranan and Dr. Burin Gumjudpai for their discussions and comments. Finally, I would like to acknowledge with thanks both the Thailand Research Fund for the award of a New Researchers Grant (MRG5080288), and the Faculty of Science, Naresuan University.

References

1. N. Yongram, E.B. Manoukian, Int. J. Theor. Phys. **42**, 1775 (2003)
2. E.B. Manoukian, N. Yongram, Eur. Phys. J. D **31**, 137 (2004)
3. E.B. Manoukian, N. Yongram, Mod. Phys. Lett. A **20**, 979 (2005)
4. N. Yongram, E.B. Manoukian, S. Siranan, Mod. Phys. Lett. A **21**, 1 (2006)
5. H.A. Howe, K.R. MacKenzie, Phys. Rev. **90**, 678 (1953)
6. A. Ashkin, L.A. Page, W.M. Woodward, Phys. Rev. **94**, 357 (1954)
7. J.-E. Augustin et al., Phys. Rev. Lett. **34**, 233 (1975)
8. J.G. Learned, L.K. Resvanis, C.M. Spencer, Phys. Rev. Lett. **35**, 1688 (1975)
9. L.H. O'Neill et al., Phys. Rev. Lett. **37**, 395 (1976)
10. J.F. Clauser, M.A. Horne, Phys. Rev. D **10**, 526 (1974)
11. J.F. Clauser, A. Shimoney, Rep. Prog. Phys. **41**, 1881 (1978)
12. C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980), p. 280
13. D. Griffiths, *Introduction to elementary particles* (John Wiley & Sons, New York, 1987), p. 233
14. A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982)
15. V.D. Irby, Phys. Rev. A **67**, 034102 (2003)
16. S. Osuch, M. Popkiewicz, Z. Szeflinski, Z. Wilhelmi, Acta Phys. Pol. B **27**, 567 (1996)
17. L.R. Kaday, J.D. Ulman, C.S. Wu, Nuovo Cim. B **25**, 633 (1975)
18. E.S. Fry, Quantum Opt. **7**, 229 (1995)