

การวิเคราะห์คานบนฐานรากยืดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง ด้วยวิธีปรับปรุงสติฟเนส

ANALYSIS OF BEAM ON TENSIONLESS ELASTIC FOUNDATION USING UPDATED

STIFFNESS METHOD

อนันตศักดิ์ ประภัสสร

5082134 ๑.๒

ของทุนอุดหนุนวิทยานิพนธ์

วันที่รับ 19 ก.ค. 2553

เลขทะเบียน 5200008

เลขเรียกหนังสือ

๑๗๒๓

๒๕๕๓

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2551



ใบรับรองโครงการวิศวกรรมโยธา

หัวข้อโครงการวิศวกรรมโยธา : การวิเคราะห์ความบนฐานรากยึดหุ่นที่ไม่รับแรงดึง ด้วย

วิธีปรับปรุงสตีเฟนส

ผู้ดำเนินงานวิศวกรรมโยธา : นายอนันตศักดิ์ ประภัสสร

ที่ปรึกษาโครงการวิศวกรรมโยธา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สลิกรณ์ เหลืองวิซชเจริญ

สาขาวิชา : วิศวกรรมโยธา

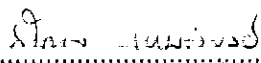
ภาควิชา : วิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนครพนม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนครพนม อนุมัติให้โครงการวิศวกรรมโยธาฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา

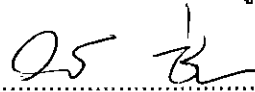
คณะกรรมการสอบโครงการวิศวกรรมโยธา

 ประธานกรรมการ

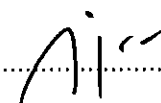
(ผศ.ดร. สลิกรณ์ เหลืองวิซชเจริญ)

 กรรมการ

(ผศ.ดร. สรัณกร เหมะวิบูลย์)

 กรรมการ

(อ. วราภรณ์ ชอนกลิ่น)

 หัวหน้าภาควิชา

(ดร. กำพล ทรัพย์สมบูรณ์)

หัวข้อโครงการวิศวกรรมโยธา : การวิเคราะห์คานบนฐานรากยึดหุ่่นที่ไม่รับแรงดึง ด้วย
วิธีปรับปรุงสติฟเนส

ผู้ดำเนินงานวิศวกรรมโยธา : นายอนันตศักดิ์ ประภัสสร รหัส 48370372

ที่ปรึกษาโครงการวิศวกรรมโยธา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สสิกรณีย์ เหลืองวิเศษเจริญ

สาขาวิชา : วิศวกรรมโยธา

ภาควิชา : วิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา : 2551

บทคัดย่อ

ในการออกแบบโดยทั่วไปคานคอดินจะถูกวิเคราะห์เป็นคานธรรมดาเพราะดินใต้คานถูกสมมติว่าไม่มี
ส่วนช่วยในการรับน้ำหนัก ซึ่งในความเป็นจริงดินจะช่วยรับแรงได้บางส่วนโดยสามารถต้านทานแรงกดได้
แต่ไม่สามารถต้านทานแรงดึง ดังนั้นหากวิเคราะห์เป็นคานบนฐานรากที่ไม่รับแรงดึงก็จะได้คำตอบที่
ใกล้เคียงกับพฤติกรรมจริงของคานคอดินมากกว่า แต่เนื่องจากเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้น การวิเคราะห์จึงมี
ความซับซ้อนพอสมควรและไม่เป็นที่นิยมสำหรับงานออกแบบทางวิศวกรรมเท่าใดนัก งานวิจัยนี้เสนอวิธีการ
ปรับปรุงสติฟเนส ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของปัญหาคานบนฐานรากยึดหุ่่นที่ไม่รับแรงดึง ซึ่งจัดเป็นวิธี
กระทำซ้ำวิธีหนึ่ง โดยใช้การรวมสติฟเนสโดยตรงช่วยในการวิเคราะห์จนคำตอบที่ได้ไม่เปลี่ยนแปลง จาก
การศึกษาพบว่าวิธีการนี้ช่วยให้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นไปได้อย่างสะดวกรวดเร็วและมีความถูกต้อง
เพียงพอสำหรับงานออกแบบทางวิศวกรรม

Project Title : ANALYSIS OF BEAM ON TENSIONLESS ELASTIC FOUNDATION
USING UPDATED STIFFNESS METHOD

Name : Mr. Anantasak Prapatsorn ID 48370372

Project Advisor : Assist. Prof. Dr. Sasikorn Leungvichcharoen

Major : Civil Engineering

Department : Civil Engineering Faculty of Engineering Naresuan University

Academic Year : 2008



Abstract

In practice, ground beam is analyzed as normal beam because the underneath soil is assumed to do not receive load. In fact, soil can resist load in compression but not in tension, hence, the realistic character of ground beam should be obtained by the analysis of beam on tensionless foundation. However, the analysis of beam on tensionless foundation can be very complicated and not suit for structural design. This project proposes the application of update stiffness method in analysis of beams on tensionless elastic foundation. This iteration scheme uses "direct stiffness method" with updated stiffness in solving the problem. It is found that the numerical analysis of beam on tensionless elastic foundation can be performed easily and fast where the results are appropriate for structural design work.

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณบิดา มารดาที่ได้ให้ความสนับสนุน และส่งเสริมในเรื่องการศึกษาตลอดมา อีกทั้งให้กำลังใจอย่างไม่ขาด

ปริญญาโทฉบับนี้ล่วงได้ด้วยดี เพราะได้รับความกรุณาจากอาจารย์ สติกรณ์ เหลืองวิเศษเจริญ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ ที่กรุณาให้คำปรึกษา ข้อเสนอแนะ ตลอดจนข้อมูลต่าง ๆ รวมทั้งตรวจสอบแก้ไขจนรายงานนี้เสร็จสมบูรณ์ ผู้เขียนรู้สึกสำนึกในความกรุณาและขอบพระคุณอาจารย์เป็นอย่างสูง ณ ที่นี้

ด้วย

นาย อนันตศักดิ์ ประภัสสร



สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ(ภาษาไทย)	ก
บทคัดย่อ(ภาษาอังกฤษ)	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญภาพ	จ
รากการสัญลักษณ์	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 หลักการและทฤษฎี	4
บทที่ 3 ตัวอย่างการคำนวณ	18
บทที่ 4 สรุปผล	26
บรรณานุกรม	27
ภาคผนวก	28
ประวัติผู้เขียน	29

สารบัญญภาพ

รูปที่	หน้า
รูปที่ 2.1 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักแผ่กระจาย	4
รูปที่ 2.2 การจำลองชิ้นส่วนย่อยของคานธรรมดา	4
รูปที่ 2.3 แสดงฟังก์ชันการประมาณ N_1 , N_2 , N_3 และ N_4 ตามลำดับ	8
รูปที่ 2.4 แสดงระยะที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมีแรง F_1 , F_2 , F_3 และ F_4 กระทำที่ปลายของชิ้นส่วนคานตามลำดับ	9
รูปที่ 2.5 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักแผ่กระจายโดยมีฐานรากยึดหยุ่นรองรับ	10
รูปที่ 2.6 การจำลองชิ้นส่วนย่อยของคานบนฐานรากยึดหยุ่น	11
รูปที่ 2.7 คานบนฐานรากยึดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง	16
รูปที่ 2.8 ชิ้นส่วนที่อยู่ในสภาพทั้ง 2 สภาวะ	17
รูปที่ 3.1 (ก) กราฟแรงเฉือนของตัวอย่างที่ 3.1	19
(ข) กราฟโมเมนต์ของตัวอย่างที่ 3.1	19
(ค) กราฟการแอ่นตัวของตัวอย่างที่ 3.1	20
รูปที่ 3.2 (ก) กราฟแรงเฉือนของตัวอย่างที่ 3.2	21
(ข) กราฟโมเมนต์ของตัวอย่างที่ 3.2	22
(ค) กราฟการแอ่นตัวของตัวอย่างที่ 3.2	22
รูปที่ 3.3 (ก) กราฟแรงเฉือนของตัวอย่างที่ 3.3	24
(ข) กราฟโมเมนต์ของตัวอย่างที่ 3.3	24
(ค) กราฟการแอ่นตัวของตัวอย่างที่ 3.3	25

รายการสัญลักษณ์

b, h	ความกว้างหรือความสูงของหน้าตัดคาน
a_0, a_1, a_2, a_3	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในชั้นส่วนคาน
b_0, b_1, b_2, b_3	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในชั้นส่วนคานบนฐาน
รากยึดหย่อน	
E	ค่าอีลาสติคโมดูลัส
I	โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด
K	สติเฟนสของคาน
K_b	สติเฟนสของคานบนฐานรากยึดหย่อน
K_s	Modulus of Subgrade Reaction
k_s	ผลคูณระหว่างค่า Modulus of Subgrade Reaction กับ ความกว้างคาน
L	ความยาวคาน
M	โมเมนต์ดัดของหน้าตัด
N	ฟังก์ชันการประมาณภายในชั้นส่วนคานรวม
N_1, N_2, N_3, N_4	ฟังก์ชันการประมาณภายในชั้นส่วนคาน
q	น้ำหนักแผ่กระจาย
V	แรงเฉือนของหน้าตัด
(x,y)	ระบบแกนคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนต

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาของการวิจัย

คานคอดินเป็นส่วนสำคัญส่วนหนึ่งของโครงสร้าง ผู้วิจัยได้เห็นถึงความแตกต่างในการรับน้ำหนักซึ่งแตกต่างจากคานทั่วไปในชั้นอื่น ๆ กล่าวคือ ในการออกแบบทางวิศวกรรมนั้น วิศวกรจะจำลองโครงสร้างของคานโดยมีน้ำหนักกระทำบนคานต่าง ๆ กัน โดยจะไม่นำดินที่รองรับได้คานคอดินมาคิดคำนวณ ทำเสมือนหนึ่งว่าดินที่รองรับได้คานนั้นไม่สามารถรับน้ำหนักได้เลย ซึ่งต่างจากความเป็นจริง

ถ้าหากเราจำลองคานคอดินเป็นคานบนฐานรากยืดหยุ่นที่ไม่รับแรงดิ่งนั้น ค่าของแรงที่เราคำนวณได้นั้นก็จะลดลง นั่นก็จะหมายถึงการออกแบบคานคอดินบนฐานรากยืดหยุ่นจะสามารถประหยัดจำนวนวัสดุหรืออุปกรณ์ก่อสร้างลงได้ แต่การจะคิดวิเคราะห์คานบนฐานรากยืดหยุ่นนั้นยังเป็นเรื่องยากเพราะต้องใช้สมการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนพอสมควร จึงไม่แปลกหากการจำลองด้วยวิธีนี้จึงยังไม่เป็นที่นิยมเท่าไรนัก ซึ่งหากเราสามารถแก้ไขปัญหาดังกล่าวนี้ได้ ทำให้การวิเคราะห์ง่ายขึ้น ไม่ซับซ้อน วิธีการวิเคราะห์แบบนี้จะต้องเป็นที่นิยม อันจะเป็นผลดีต่อวงการวิศวกรรมต่อไป

วิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness Method) เป็นวิธีการวิเคราะห์ปัญหาที่จะเป็นแนวทางในการขจัดอุปสรรคต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นลงไปได้ เพราะเป็นวิธีการที่เข้าใจง่ายมีขั้นตอนการทำงานที่แน่นอนตรงไปตรงมา และเนื่องจากในปัจจุบันเครื่องคำนวณมีประสิทธิภาพสูงมากกว่าในอดีตมาก ทำให้วิธีการรวมสติฟเนสโดยตรงนั้นสามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นไปด้วยตามลำดับ

สิ่งสำคัญในการรวมสติฟเนสโดยตรงนั้น คือ สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนย่อยต่าง ๆ จะมีรูปแบบที่แน่นอนในแต่ละชิ้นส่วน เช่น สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคาน (Stiffness Matrix of Beam Member) สติฟเนสเมตริกซ์ของคานบนฐานรากยืดหยุ่น (Stiffness Matrix of Beam on Elastic Foundation) สติฟเนสของทั้งสองแบบนี้จะนำมาใช้คำนวณทั้งหมดของการวิจัยครั้งนี้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เสนอวิธีปรับปรุงสตีเฟนส ในการวิเคราะห์คานบนฐานรากยึดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง (โดยการใช้วิธีรวมสตีเฟนสโดยตรงหลาย ๆ ครั้ง)

1.3 ประโยชน์ของการวิจัย

1. ศึกษาพฤติกรรมการรับน้ำหนักของคานบนฐานรากยึดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง
2. สามารถนำผลการคำนวณมาใช้ในการออกแบบได้จริง
3. เป็นแนวทางในการวิจัยที่เกี่ยวข้องต่อไปในอนาคต

1.4 ขอบข่ายของงาน

1. วิเคราะห์คานบนฐานรากยึดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง
2. การวิเคราะห์นี้ใช้กับคานที่รับ แรงเดียว หรือ โมเมนต์เดียว เท่านั้น ยังไม่สามารถใช้สำหรับแรงกระจายได้



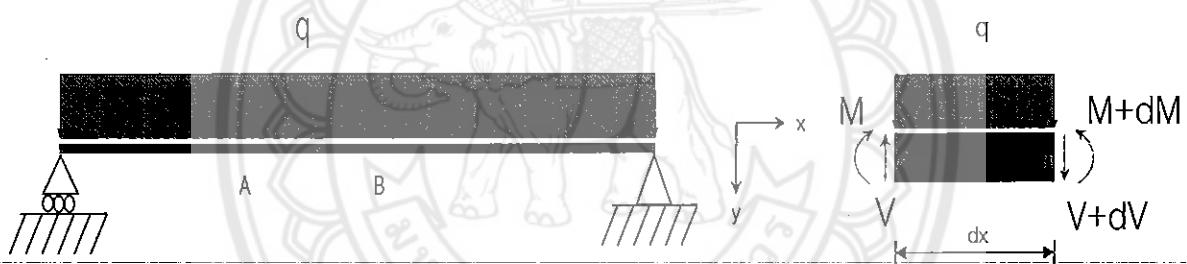
บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

2.1 คานธรรมดา

พิจารณาคานช่วงเดียวซึ่งรับน้ำหนักกระจาย q ต่อหนึ่งหน่วยความยาว (รูปที่ 2.1) ให้ A และ B เป็นจุด 2 จุดซึ่งอยู่บนคานที่ระยะห่างกันเท่ากับ dx แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุด A สามารถแทนได้ด้วย V และ M ตามลำดับและสมมติให้มีเครื่องหมายบวก สำหรับแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุด B ก็สามารแทนได้ด้วย $V + dV$ และ $M + dM$

ต่อไปเราจะถ่อช่วง AB ของคานออกมาแล้วเขียนรูปแสดงการสมดุล (รูปที่ 2.2) แรงกระทำบนชิ้นส่วนนี้ได้แก่น้ำหนักขนาดเท่ากับ qdx และแรงภายในและโมเมนต์ภายในที่จุด A และ B เนื่องจากเราได้สมมติให้แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดมีเครื่องหมายเป็นบวก ดังนั้นจึงมีทิศทางดังแสดงในรูป



รูปที่ 2.1 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักแผ่กระจาย

รูปที่ 2.2 ชิ้นส่วน AB

2.1.1 สมการควบคุม

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและแรงเฉือน เขียนสมการว่าผลรวมขององค์ประกอบของแรงในแนวตั้งทั้งหมดที่กระทำบนชิ้นส่วน AB มีค่าเป็นศูนย์จะได้ว่า

$$\sum F_y = 0$$

$$V + dV + qdx - V = 0$$

$$q = -\frac{dV}{dx} \quad (2.1)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ย้อนกลับไปดูรูปที่ 2.2 และเขียนสมการว่าผลรวมโมเมนต์รอบจุด B มีค่าเป็นศูนย์จะได้ว่า

$$\sum M_B = 0$$

$$M + dM - M - Vdx + qdx \frac{dx}{2} = 0$$

เมื่อ dx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (2.2)$$

และจากสมมติฐานที่ว่า ความสัมพันธ์ของ โมเมนต์ และความโค้ง (Curvature) เป็นไปตามสมการของ

Bernulli

$$Ely'' = -M \quad (2.3)$$

เมื่อสัญลักษณ์ ' หมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับ x จากนั้นแทนสมการ (2.3) ลงในสมการ (2.2) จะได้

$$Ely''' = -V \quad (2.4)$$

จากนั้นแทนสมการ (2.4) ลงในสมการที่ (2.1) เราจะได้สมการควบคุมของคาน

$$Ely^{IV} = q \quad (2.5)$$

2.1.2 สถิติเนสของชิ้นส่วน

ฟังก์ชันการประมาณภายในชิ้นส่วน (Element Interpolation Function) ของคานตามทฤษฎีของ Bernulli-Navier's สามารถเขียนได้ดังนี้

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.6)$$

จากนั้นทำการหา θ จากสมการ

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \quad (2.7)$$

สมการที่ (2.6) และ (2.7) อาจเขียนในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

จากนั้นกำหนดให้ $y_1 = y(0)$ เมื่อ $x=0$, $\theta_1 = \theta(0)$ เมื่อ $x=0$, $y_2 = y(L)$ เมื่อ $x=L$ และ $\theta_2 = \theta(L)$ เมื่อ $x=L$

จะได้สมการที่อยู่ในรูปของค่า y_1 , θ_1 , y_2 และ θ_2

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

จัดรูปใหม่ได้

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (2.9n)$$

แทนสมการ (2.9n) ลงในแถวแรกของสมการที่ (2.8) จะได้ว่า

$$y(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$y(x) :$

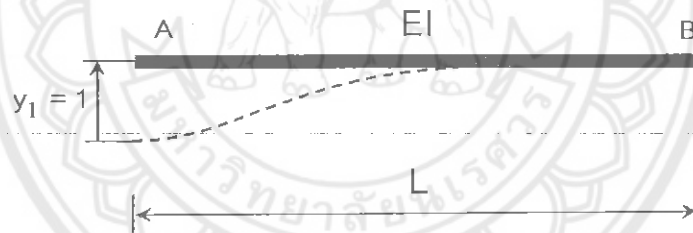
จัดรูปสมการที่ (2.10) จะได้ว่า

$$y(x) = \begin{bmatrix} \frac{(L-x)^2(L+2x)}{L^3} & \frac{(L-x)^2x}{L^2} & \frac{(3L-2x)x^2}{L^3} & \frac{x^2(-L+x)}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.10n)$$

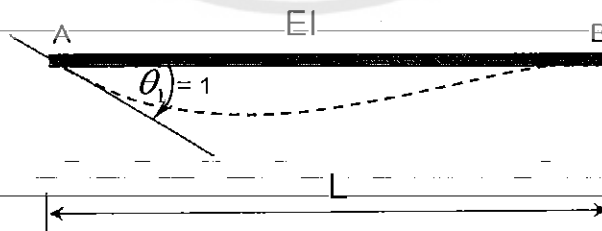
ซึ่งเขียนได้เป็น

$$y(x) = N \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

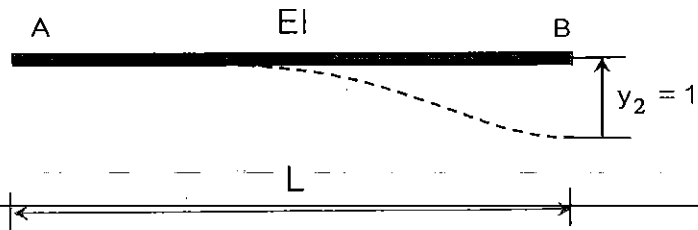
โดยที่ $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ และ $N_4(x)$ หมายถึงฟังก์ชันการประมาณภายในชิ้นส่วนคาน รูปแบบการโค้งตัว สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.3



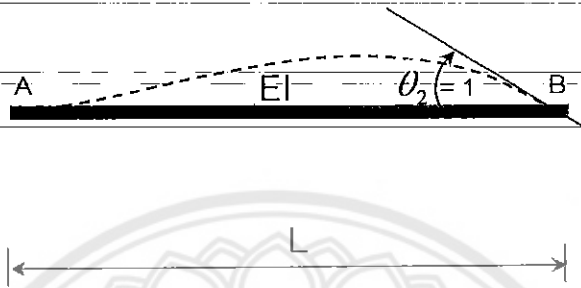
(ก) $N_1(x)$ เมื่อ $y_1 = 1$ และ $\theta_1 = y_2 = \theta_2 = 0$



(ข) $N_2(x)$ เมื่อ $\theta_1 = 1$ และ $y_1 = y_2 = \theta_2 = 0$



(ค) $N_3(x)$ เมื่อ $y_2 = 1$ และ $y_1 = \theta_1 = \theta_2 = 0$



(ง) $N_4(x)$ เมื่อ $\theta_2 = 1$ และ $y_1 = \theta_1 = y_2 = 0$

รูปที่ 2.3 แสดงฟังก์ชันการประมาณ N_1 , N_2 , N_3 และ N_4 ตามลำดับ

นั่นคือ

$$N_1(x) = \frac{(L-x)^2(L+2x)}{L^3}$$

$$N_2(x) = \frac{(L-x)^2 x}{L^2}$$

$$N_3(x) = \frac{(3L-2x)x^2}{L^3}$$

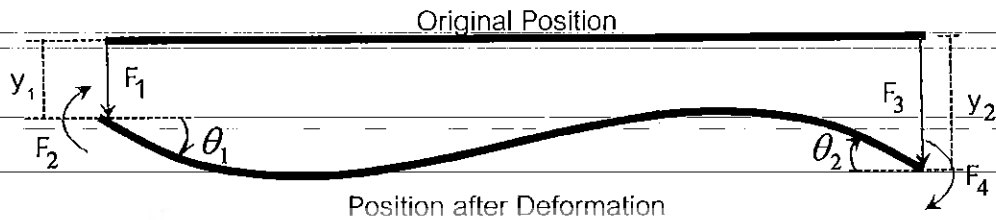
$$N_4(x) = \frac{x^2(-L+x)}{L^2}$$

โดยเราจะเรียกค่าเหล่านี้ว่าฟังก์ชันการประมาณภายในชิ้นส่วนคาน แทนสัญลักษณ์โดย N จากนั้นทำการหาค่าสติเฟเนสของคานโดยใช้วิธีโดยตรง ดังนี้แทนสมการ (2.11) ลงในสมการ (2.3) และ (2.4) จะได้ว่า

$$M(x) = -[EI y''(x)] = -[EI] [N_1''(x) \quad N_2''(x) \quad N_3''(x) \quad N_4''(x)] \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [EI N_1''(x) \quad EI N_2''(x) \quad EI N_3''(x) \quad EI N_4''(x)] \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} EIN_1''(x) & EIN_2''(x) & EIN_3''(x) & EIN_4''(x) \\ EIN_1'''(x) & EIN_2'''(x) & EIN_3'''(x) & EIN_4'''(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$



รูปที่ 2.4 แสดงระยะที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมีแรง F_1 , F_2 , F_3 และ F_4 กระทำที่ปลายของชิ้นส่วนคานตามลำดับ

จากนั้นเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์รวมได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V(0) \\ M(0) \\ V(L) \\ -M(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EIN_1'''(0) & EIN_2'''(0) & EIN_3'''(0) & EIN_4'''(0) \\ -EIN_1''(0) & -EIN_2''(0) & -EIN_3''(0) & -EIN_4''(0) \\ -EIN_1'''(L) & -EIN_2'''(L) & -EIN_3'''(L) & -EIN_4'''(L) \\ EIN_1''(L) & EIN_2''(L) & EIN_3''(L) & EIN_4''(L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 4EI & -\frac{6EI}{L^2} & 2EI \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 2EI & -\frac{6EI}{L^2} & 4EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

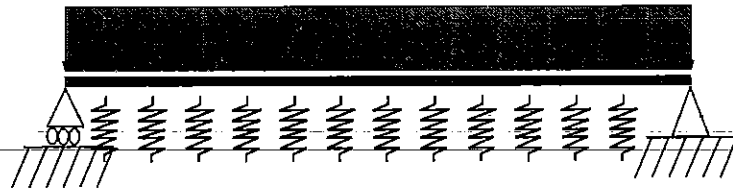
ดังนั้น สติฟเนสเมตริกซ์ของคานนี้คือ

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

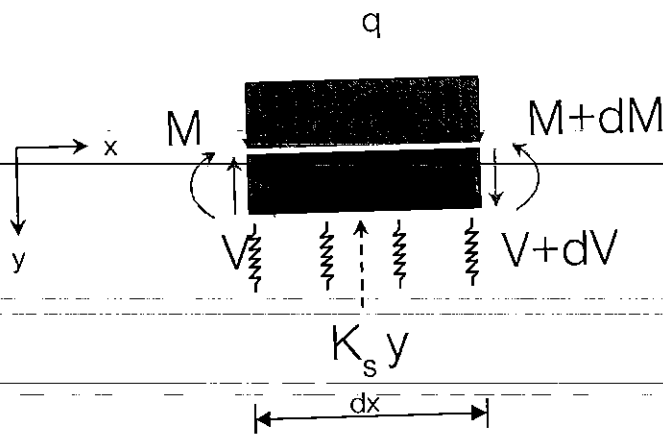
2.2 คานบนฐานรากยึดหยุ่น

พิจารณาคานช่วงเดี่ยวซึ่งรับน้ำหนักกระจาย q ต่อหนึ่งหน่วยความยาวโดยมีฐานรากชนิดยึดหยุ่นรองรับ (รูปที่ 2.5) ให้ A และ B เป็นจุด 2 จุดซึ่งอยู่บนคานที่ระยะห่างกันเท่ากับ dx แรงเฉือนและโมเมนต์ตัดที่จุด A สามารถแทนได้ด้วย V และ M ตามลำดับและสมมติให้มีเครื่องหมายบวก สำหรับแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดที่จุด B ก็สามารทดแทนได้ด้วย $V + dV$ และ $M + dM$

ต่อไปเราจะถอดช่วง AB ของคานออกมาแล้วเขียนรูปแสดงการสมดุล (รูปที่ 2.6) แรงกระทำบนชิ้นส่วนนี้ได้แก่น้ำหนักขนาดเท่ากับ qdx แรงบนฐานรากยึดหยุ่นมีขนาดเท่ากับ $K_y y$ และแรงภายในและโมเมนต์ภายในที่จุด A และ B เนื่องจากเราได้สมมติให้แรงเฉือนและโมเมนต์ตัดมีเครื่องหมายเป็นบวก ดังนั้นจึงมีทิศทางดังแสดงในรูป



รูปที่ 2.5 คานช่วงเดี่ยวรับน้ำหนักแผ่กระจายโดยมีฐานรากยึดหยุ่นรองรับ



รูปที่ 2.6 ชิ้นส่วน AB โดยมีฐานรากยึดหยุ่นรองรับ

2.2.1 สมการควบคุม

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและแรงเฉือน เขียนสมการว่าผลรวมขององค์ประกอบของแรงในแนวตั้งทั้งหมดที่กระทำบนชิ้นส่วน AB มีค่าเป็นศูนย์จะได้ว่า

$$\sum F_y = 0$$

$$V + dV + qdx - K_s y dx - V = 0$$

$$q - K_s y = -\frac{dV}{dx} \quad (2.16)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนและโมเมนต์ตัด ย้อนกลับไปดูรูปที่ 2.6 และเขียนสมการว่าผลรวมโมเมนต์รอบจุด B มีค่าเป็นศูนย์จะได้ว่า

$$\sum M_B = 0$$

$$M + dM + qdx \frac{dx}{2} - K_s y dx \frac{dx}{2} - Vdx - M = 0$$

เมื่อ dx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (2.17)$$

และจากสมมติฐานที่ว่า ความสัมพันธ์ของ โมเมนต์ และความโค้ง (Curvature) เป็นไปตามสมการของ

Bernulli

$$EIy'' = -M \quad (2.18)$$

เมื่อสัญลักษณ์ ' หมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับ x จากนั้นแทนสมการ (2.18) ลงในสมการ (2.17) จะได้

$$EIy''' = -V \quad (2.19)$$

จากนั้นแทนสมการ (2.19) ลงในสมการที่ (2.16) เราจะได้สมการควบคุมของคานบนฐานรากยึดหยุ่น

$$y^{iv} + \frac{K_s y}{EI} = \frac{q}{EI} \quad (2.20)$$

เมื่อค่า Modulus of Subgrade Reaction (K_s) มีค่าคงที่ เราจะเรียกสมการควบคุมดังกล่าวว่าเป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นดีกรี 4 (Linearly Fourth Order Differential Equation) เพื่อความสะดวกในการแก้สมการจึงได้กำหนดค่าสัญลักษณ์ $\beta = \sqrt[4]{\frac{K_s}{4EI}}$ จะได้

$$y^{iv} + 4\beta^4 y = \frac{q}{EI} \quad (2.21)$$

2.2.2 สถิติเนสของคานบนฐานรากยึดหยุ่น

เราจะเลือกลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในชิ้นส่วนคาน (Element Interpolation Function) ของคานบนฐานรากยึดหยุ่น ในที่นี้คำตอบทั่วไปของคานบนฐานรากยึดหยุ่นสมการ (2.21) สามารถเขียนได้เป็น

$$y(x) = b_0 e^{\beta x} \cos(\beta x) + b_1 e^{\beta x} \sin(\beta x) + b_2 e^{-\beta x} \cos(\beta x) + b_3 e^{-\beta x} \sin(\beta x) \quad (2.22)$$

จากนั้นทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการเดียวกันกับคานธรรมดาตั้งแต่สมการที่ (2.7) จนถึง (2.21) จะได้ฟังก์ชันการประมาณภายในชิ้นส่วนของคานบนฐานรากยึดหยุ่นดังนี้

$$N_1(x) = \frac{e^{2L\beta - \beta x} \cos(\beta(2L - x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} + \frac{e^{-\beta x + 2\beta(L+x)} \cos(\beta(2L - x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{\beta x} \cos(\beta x)}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{2e^{2L\beta - \beta x} \cos(\beta x)}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{4L\beta - \beta x} \cos(\beta x)}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{2e^{-\beta x + 2\beta(L+x)} \cos(\beta x)}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{2L\beta - \beta x} \sin(\beta(2L - x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{e^{-\beta x + 2\beta(L+x)} \sin(\beta(2L - x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{4L\beta - \beta x} \sin(\beta x)}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{e^{\beta x} \sin(\beta x)}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} \quad (2.23n)$$

$$N_2(x) = \frac{e^{2L\beta + \beta x} \cos(\beta(2L - x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{2L\beta - \beta x} \sin(\beta(2L - x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))}$$

$$+ \frac{e^{2L\beta - \beta x} \cos(\beta x)}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{2L\beta + \beta x} \cos(\beta x)}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))}$$

$$+ \frac{e^{\beta x} \sin(\beta x)}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{2L\beta - \beta x} \sin(\beta x)}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))}$$

$$+ \frac{e^{4L\beta - \beta x} \sin(\beta x)}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{2L\beta + \beta x} \sin(\beta x)}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} \quad (2.23q)$$

$$N_3(x) = \frac{e^{\beta(L-x)} \cos(\beta(L-x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{2e^{2L\beta + \beta(L-x)} \cos(\beta(L-x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{\beta(L-x) + 2\beta(L+x)} \cos(\beta(L-x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{2e^{\beta(L-x) + 2\beta x} \cos(\beta(L-x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{2L\beta + \beta(L-x)} \cos(\beta(L+x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} + \frac{e^{\beta(L-x) + 2\beta x} \cos(\beta(L+x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{\beta(L-x) + 2\beta(L+x)} \sin(\beta(L-x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{e^{\beta(L-x)} \sin(\beta(L-x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)}$$

$$+ \frac{e^{\beta(L-x) + 2\beta x} \sin(\beta(L+x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} - \frac{e^{2L\beta + \beta(L-x)} \sin(\beta(L+x))}{1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta)} \quad (2.23r)$$

$$N_4(x) = \frac{e^{2L\beta + \beta(L-x)} \cos(\beta(L-x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{\beta(L-x) + 2\beta x} \cos(\beta(L-x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))}$$

$$+ \frac{e^{\beta(L-x) + 2\beta x} \cos(\beta(L+x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{2L\beta + \beta(L-x)} \cos(\beta(L+x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))}$$

$$+ \frac{e^{2L\beta + \beta(L-x)} \sin(\beta(L-x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{\beta(L-x)} \sin(\beta(L-x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))}$$

$$+ \frac{e^{\beta(L-x) + 2\beta x} \sin(\beta(L-x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} - \frac{e^{2L\beta + \beta(L-x) + 2\beta x} \sin(\beta(L-x))}{\beta(1 - 4e^{2L\beta} + e^{4L\beta} + 2e^{2L\beta} \cos(2L\beta))} \quad (2.23s)$$

โดยเราจะเรียกค่าเหล่านี้ว่า พังก์ชันการประมาณภายในชิ้นส่วนของคานบนฐานรากยึดหยุ่น แทน
สัญลักษณ์โดย N จากนั้นทำการหาค่าสติเฟนสของคานบนฐานรากยึดหยุ่นโดยใช้วิธีโดยตรงเมื่อ

$$y = N \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

จากสมการ (2.18) และ (2.19) จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EIN_1''(x) & EIN_2''(x) & EIN_3''(x) & EIN_4''(x) \\ EIN_1'''(x) & EIN_2'''(x) & EIN_3'''(x) & EIN_4'''(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

จากนั้นเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์รวมได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -V(0) \\ M(0) \\ V(L) \\ -M(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EIN_1'''(0) & EIN_2'''(0) & EIN_3'''(0) & EIN_4'''(0) \\ -EIN_1''(0) & -EIN_2''(0) & -EIN_3''(0) & -EIN_4''(0) \\ -EIN_1'''(L) & -EIN_2'''(L) & -EIN_3'''(L) & -EIN_4'''(L) \\ EIN_1''(L) & EIN_2''(L) & EIN_3''(L) & EIN_4''(L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

สติเฟนสเมตริกซ์ของคานบนฐานรากยึดหยุ่นนี้คือ

$$[K_b] = \begin{bmatrix} EIN_1'''(0) & EIN_2'''(0) & EIN_3'''(0) & EIN_4'''(0) \\ -EIN_1''(0) & -EIN_2''(0) & -EIN_3''(0) & -EIN_4''(0) \\ -EIN_1'''(L) & -EIN_2'''(L) & -EIN_3'''(L) & -EIN_4'''(L) \\ EIN_1''(L) & EIN_2''(L) & EIN_3''(L) & EIN_4''(L) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

จะได้ค่าสตีเฟนเป็นดังนี้

$$k_{11} = \frac{4EI\beta^3(\sin(2L\beta) + \sinh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{12} = \frac{2EI\beta^2(\cos(2L\beta) - \cosh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{13} = \frac{8EI\beta^3(\cosh(L\beta)\sin(L\beta) + \cos(L\beta)\sinh(L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{14} = \frac{8EI\beta^2 \sin(L\beta)\sinh(L\beta)}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{21} = \frac{2EI\beta^2(\cos(2L\beta) - \cosh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{22} = \frac{2EI\beta(\sin(2L\beta) - \sinh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{23} = \frac{8EI\beta^2 \sin(L\beta)\sinh(L\beta)}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{24} = \frac{4EI\beta(\cosh(L\beta)\sin(L\beta) - \cos(L\beta)\sinh(L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{31} = \frac{8EI\beta^3(\cosh(L\beta)\sin(L\beta) + \cos(L\beta)\sinh(L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{32} = \frac{8EI\beta^2 \sin(L\beta)\sinh(L\beta)}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{33} = \frac{4EI\beta^3(\sin(2L\beta) + \sinh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{34} = \frac{2EI\beta^2(\cos(2L\beta) - \cosh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{41} = \frac{8EI\beta^2 \sin(L\beta)\sinh(L\beta)}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

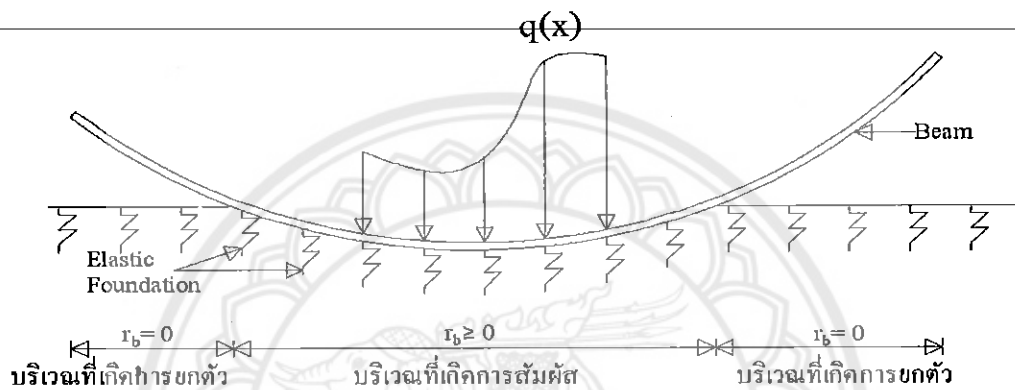
$$k_{42} = \frac{4EI\beta(\cosh(L\beta)\sin(L\beta) - \cos(L\beta)\sinh(L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{43} = \frac{2EI\beta^2 (\cos(2L\beta) - \cosh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)}$$

$$k_{44} = \frac{2EI\beta (\sin(2L\beta) - \sinh(2L\beta))}{-2 + \cos(2L\beta) + \cosh(2L\beta)} \quad (2.28)$$

$$\text{โดยที่ } \beta^4 = \frac{K_s'}{4EI}$$

2.3 คานบนฐานรากยืดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง



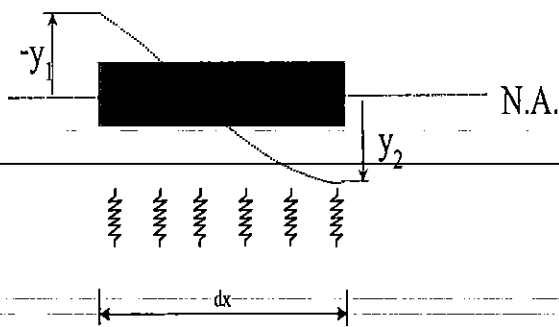
รูปที่ 2.7 คานบนฐานรากยืดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง

ปัญหาที่พบในการวิเคราะห์คือ ชิ้นส่วนที่อยู่ในทั้ง 2 สถานะนั้นไม่มีสติเฟเนสโดยตรงและเป็นปัญหาไม่เชิงเส้น เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวผู้วิจัยจึงเสนอทางออกโดย ในการวิเคราะห์คานครั้งแรก ทุกชิ้นส่วนจะถูกจำลองให้อยู่ในสถานะบนฐานรากยืดหยุ่น จากนั้นจะทำการวิเคราะห์ระยะแอ่นตัว (Deflection) ในทุกชิ้นส่วนโดยกำหนดให้ ถ้าชิ้นส่วนนี้จมอยู่ในดินให้ใช้สติเฟเนสของคานบนฐานรากยืดหยุ่น ถ้าชิ้นส่วนนั้นยกตัวขึ้นให้ใช้สติเฟเนสของคานธรรมดา ซึ่งอาจเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$[K_b] = \begin{cases} [K] & ; y_1 + y_2 \leq 0 \\ [K_b] & ; y_1 + y_2 > 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

เมื่อ $[K_b]$ คือสติเฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานบนฐานรากยืดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง

กล่าวคือ หากระยะแอ่นตัวในตำแหน่งที่ 1 รวมกับตำแหน่งที่ 2 มีค่ามากกว่า 0 จะหมายความว่า ชิ้นส่วนนั้นยังคงสัมผัสอยู่กับฐานรากเสมอ แต่หากผลรวมกันมีค่าน้อยกว่า 0 ชิ้นส่วนนั้นไม่ได้สัมผัสกับฐานรากนั่นเอง โดยคานที่สัมผัสกับฐานรากยืดหยุ่นจะมีแรงปฏิกิริยาจากฐานราก และส่วนที่ไม่สัมผัสจะไม่



มีแรงปฏิกิริยาจากฐานราก จากนั้นจะทำการวิเคราะห์โดยวิธีการทำซ้ำใหม่ทั้งระบบโครงสร้าง จนกระทั่งระยะการแอ่นตัวในแต่ละชั้นส่วนมีค่าคงที่ จึงจะหยุดกระทำการวิเคราะห์

รูปที่ 2.8 ชั้นส่วนที่อยู่ในสภาพทั้ง 2 สภาวะ

Modulus of Subgrade Reaction (K_s)

เป็นค่าตัวเลขมีหน่วยเป็นแรงต่อปริมาตร มีค่าประมาณ $1-22 \text{ kg/cm}^3$ ขึ้นอยู่กับชนิดและคุณสมบัติของดิน แต่ละค่า K_s ของดินได้จากการทดลอง Plate Bearing Test ในสนามหาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกับการทรุดตัวของแผ่นเหล็กที่ใช้ทดลองโดยใช้สมมติฐานว่าดินทำหน้าที่เหมือน Dense Liquid มีแรงต้าน (Reaction) กระทำในแนวตั้งฉากและ Reaction Pressure เป็นสัดส่วนโดยตรงกับการทรุดตัว (Deflection)

ตารางที่ 2.1 ค่า K_s ของวัสดุประเภทต่าง ๆ

ชนิดของวัสดุ	K_s (kg/cm^3)
ดินเหนียว (Plastic Clay)	1 - 3
ดินเหนียว (Silt and Silty Clays)	3 - 6
ทราย,ดินผสมกรวด (Sands, Clayey Gravels)	6 - 8
กรวด (Gravel)	8 +
หินคลุกผสมซีเมนต์หรือผสมแอสฟัลต์ (CTB or ATB)	11 +

ที่มา : วิศวกรรมกรรมทาง. จีรพัฒน์ โชติโกกร, 2551

บทที่ 3

ตัวอย่างการคำนวณ

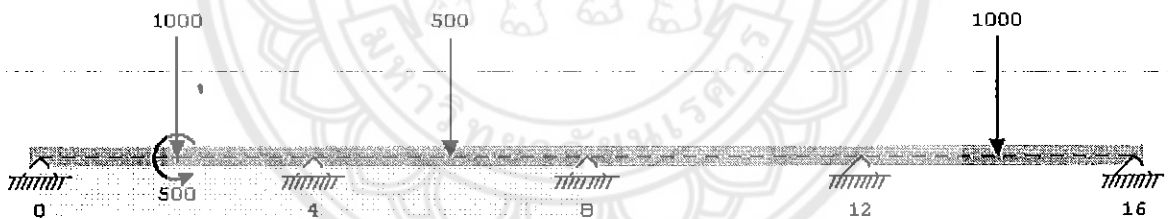
ในส่วนของบทนี้จะเป็นการแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ด้วยวิธี Direct Stiffness บนหลักการของ Beam on Tensionless Elastic Foundation โดยวิเคราะห์หาการโก่งตัวของคาน โมเมนต์ และแรงเฉือนของคาน ภายใต้สภาวะการรับน้ำหนักที่แตกต่างกันจากนั้นศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น

ตัวอย่างที่ 3.1

คานคอนกรีตยาว 16 m ขนาดหน้าตัด (b×h) เท่ากับ 0.20×0.40 m รับน้ำหนักกระทำดังรูป กำหนด EI เท่ากับ $2.5(10^6)$ kg.m² โดยฐานรากเป็นดินเหนียว (Plastic Clay) มีค่า K_s เท่ากับ $1(10^6)$ kg/m³ จงเปรียบเทียบค่าแรงเฉือน โมเมนต์ และการแอ่นตัวของคาน เมื่อเปลี่ยนแปลงความยาวของชิ้นส่วนย่อย

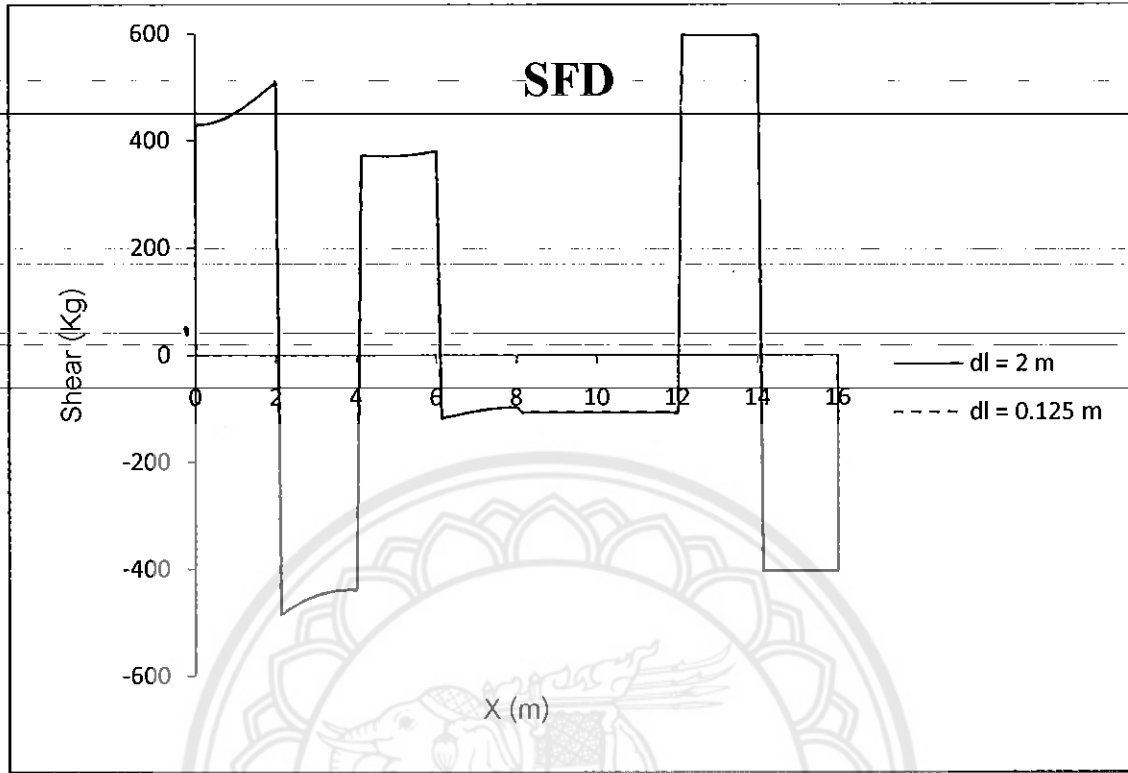
เมื่อ $k_s = bK_s = 0.2 \times 1(10^6) = 200000$ kg/m²

Beam on Tensionless Foundation

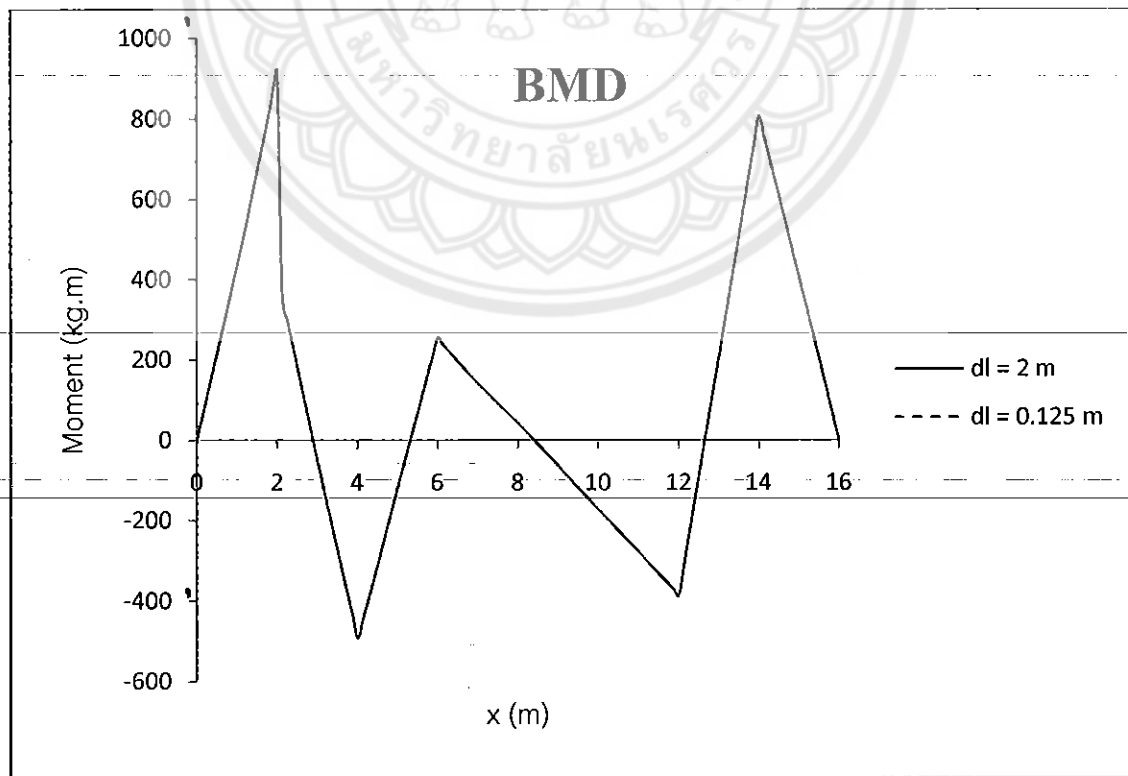


From	0	To	16	m, EI =	2.5×10^6	kg.m ²
From	0	To	8	m, ks =	200000.	kg/m ²
From	8	To	16	m, ks =	0.	kg/m ²

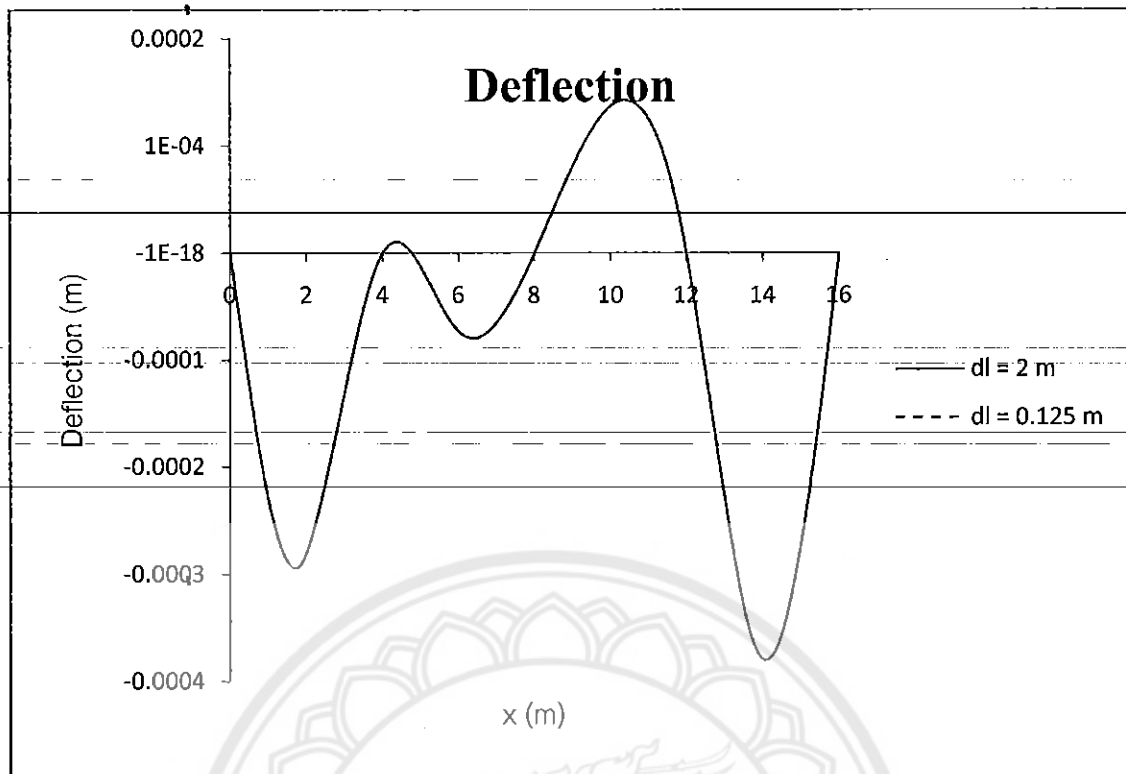
วิธีทำ จะได้กราฟแรงเฉือน โมเมนต์ และการแอ่นตัว ดังนี้



(ก) กราฟแรงเฉือน



(ข) กราฟโมเมนต์



(ค) กราฟการแอ่นตัว

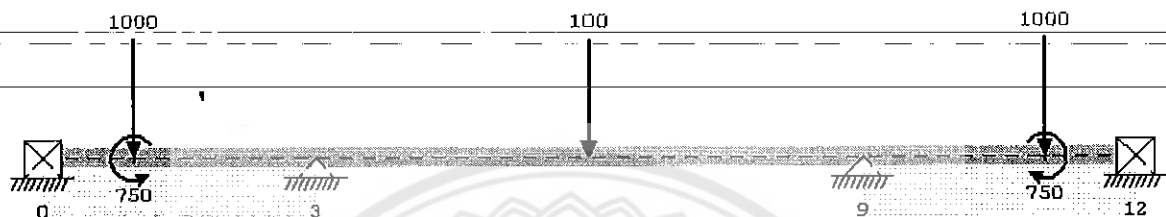
รูปที่ 3.1 กราฟแสดงการวิเคราะห์ตัวอย่างที่ 3.1

จากผลการคำนวณ ความแตกต่างระหว่างความยาวของชิ้นส่วนย่อยมีผลทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้อง โทลี่เคียงความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น แต่หากแบ่งชิ้นส่วนย่อยมากเกินไปอาจต้องใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น เนื่องจากมีตัวแปรมากขึ้นตามจำนวนของชิ้นส่วนย่อย เมตริกซ์ของโครงสร้างทั้งระบบจะมีขนาดใหญ่มากขึ้นตามไปด้วย

ตัวอย่างที่ 3.2

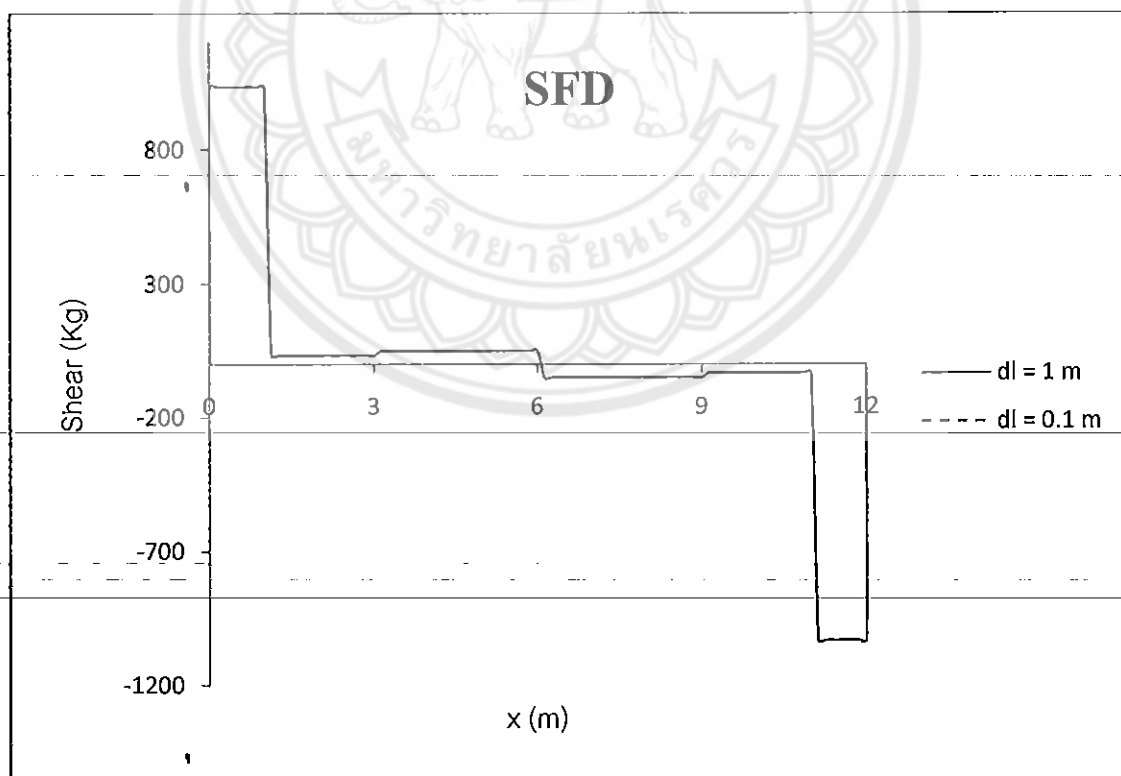
คานคอนกรีตยาว 12 m ขนาดหน้าตัด (b×h) เท่ากับ 0.20×0.40 m รับน้ำหนักกระทำดังรูป กำหนด EI เท่ากับ $2.5(10^6)$ kg.m² โดยฐานรากเป็นดินเหนียว (Plastic Clay) มีค่า k_s เท่ากับ 200000 kg/m² จงเปรียบเทียบค่าแรงเฉือน โมเมนต์ และการแอ่นตัวของคาน เมื่อเปลี่ยนแปลงความยาวของชั้นส่วนย่อย

Beam on Tensionless Foundation

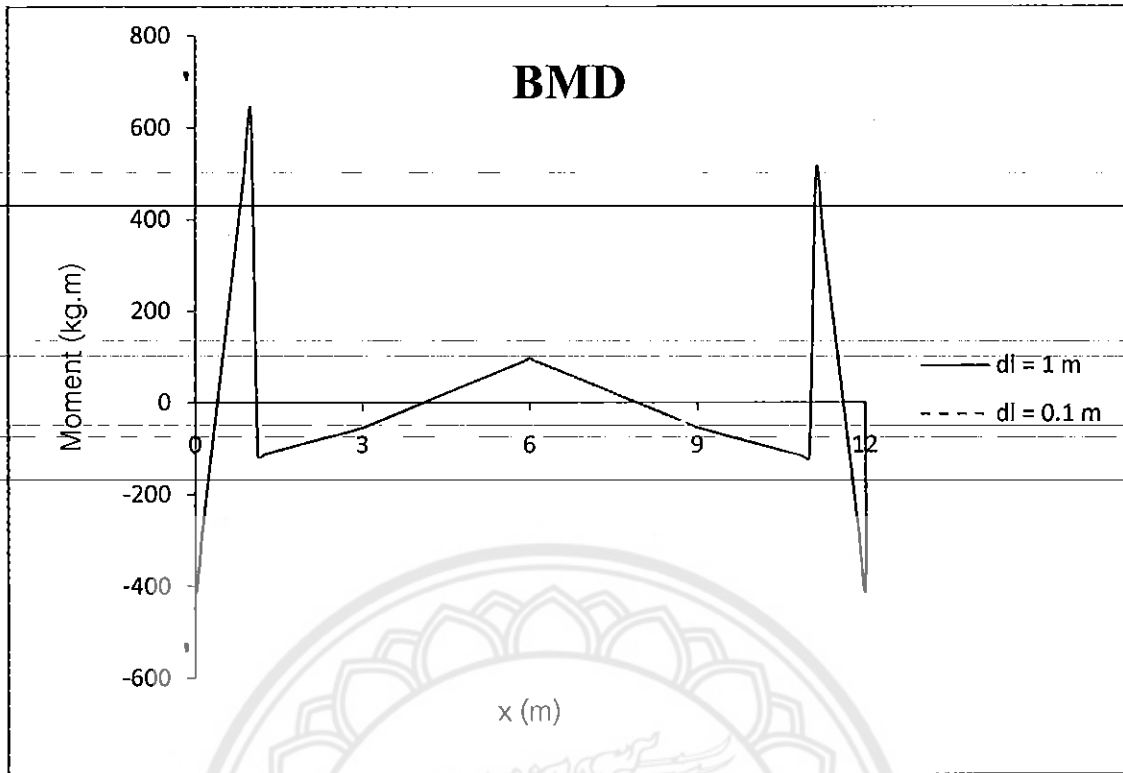


From	0	To	12	m, EI =	2.5×10^6	kg . m ²
From	0	To	3	m, k_s =	200000.	kg / m ²
From	3	To	9	m, k_s =	0.	kg / m ²
From	9	To	12	m, k_s =	200000.	kg / m ²

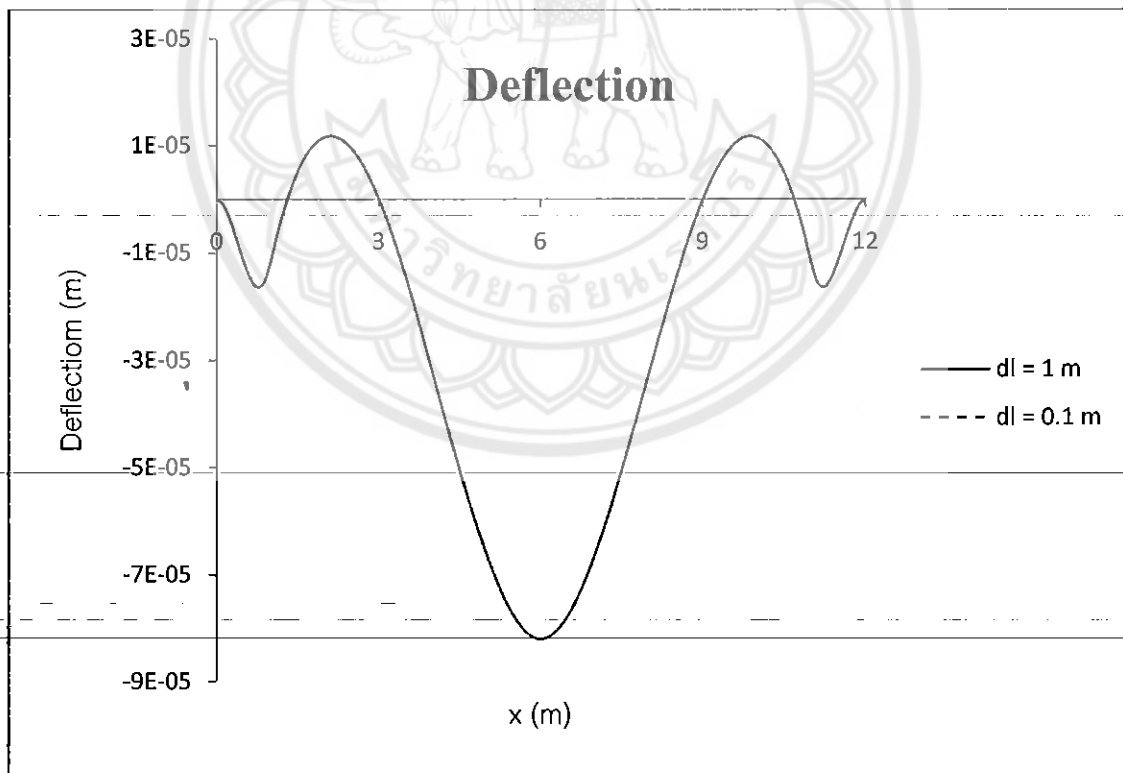
วิธีทำ จะได้กราฟแรงเฉือน โมเมนต์ และการแอ่นตัว ดังนี้



(ก) กราฟแรงเฉือน



(ข) กราฟโมเมนต์



(ค) กราฟการแอ่นตัว

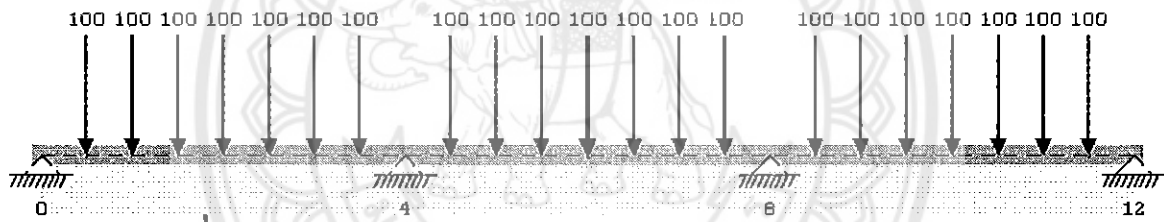
รูปที่ 3.2 กราฟแสดงการวิเคราะห์ตัวอย่างที่ 3.2

ในตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าการแบ่งชั้นส่วนย่อยโดยละเอียดจะทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น เมื่อพิจารณาจากกราฟการแอ่นตัวจะเห็นได้ว่ามีชั้นส่วนอยู่หลายตำแหน่งที่อยู่ในสภาวะแบบคานธรรมชาติและคานบนฐานรากยืดหยุ่น ส่วนชั้นส่วนอื่น ๆ จะยังคงใช้สถิติพหุเมตริกซ์ของคานธรรมชาติหรือคานบนฐานรากยืดหยุ่นตามเดิม

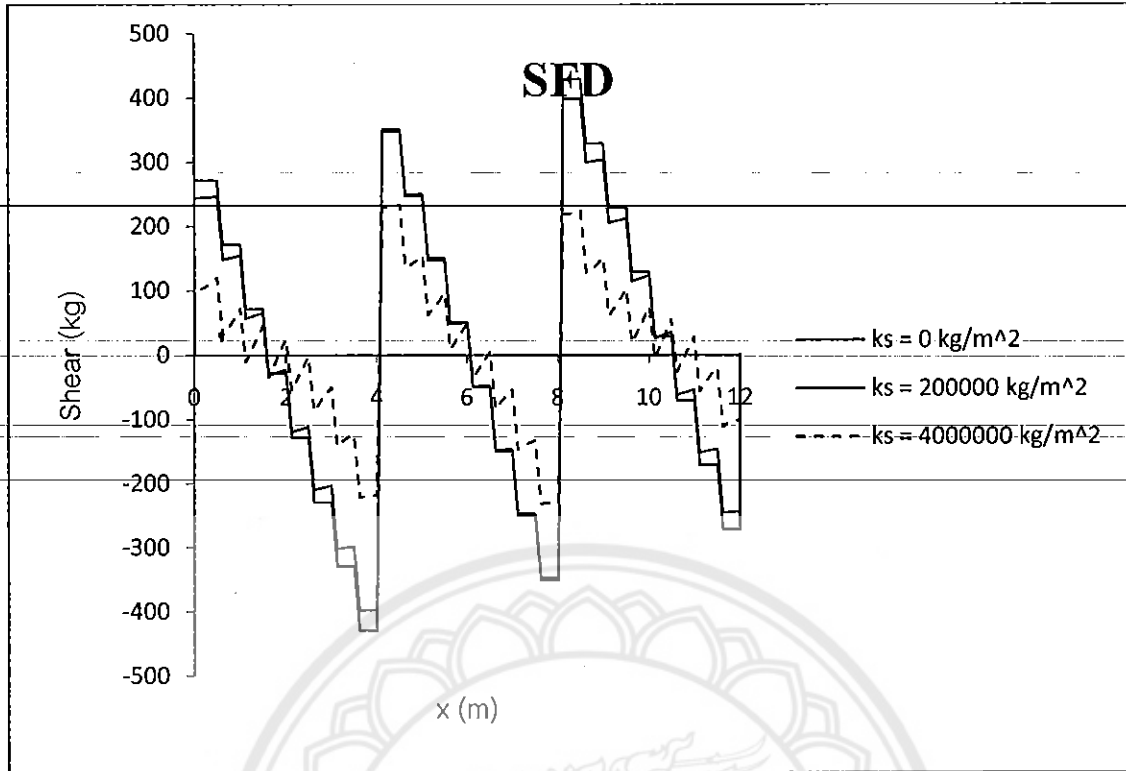
ตัวอย่างที่ 3.3

คานคอนกรีตยาว 12 m ขนาดหน้าตัด (b×h) เท่ากับ 0.20×0.40 m รั้งน้ำหนักกระทำดังรูป กำหนด EI เท่ากับ $2.5(10^6)$ kg.m² โดยฐานรากเป็นดินเหนียว (Plastic Clay) จงเปรียบเทียบค่าแรงเฉือน โมเมนต์ และการแอ่นตัวของคาน เมื่อค่า k_s เปลี่ยนแปลงไปโดยกรณีที่ 1 ค่า k_s เท่ากับ 0 kg/m² กรณีที่ 2 ค่า k_s เท่ากับ 200000 kg/m² และ กรณีที่ 3 ค่า k_s เท่ากับ $4(10^6)$ kg/m²

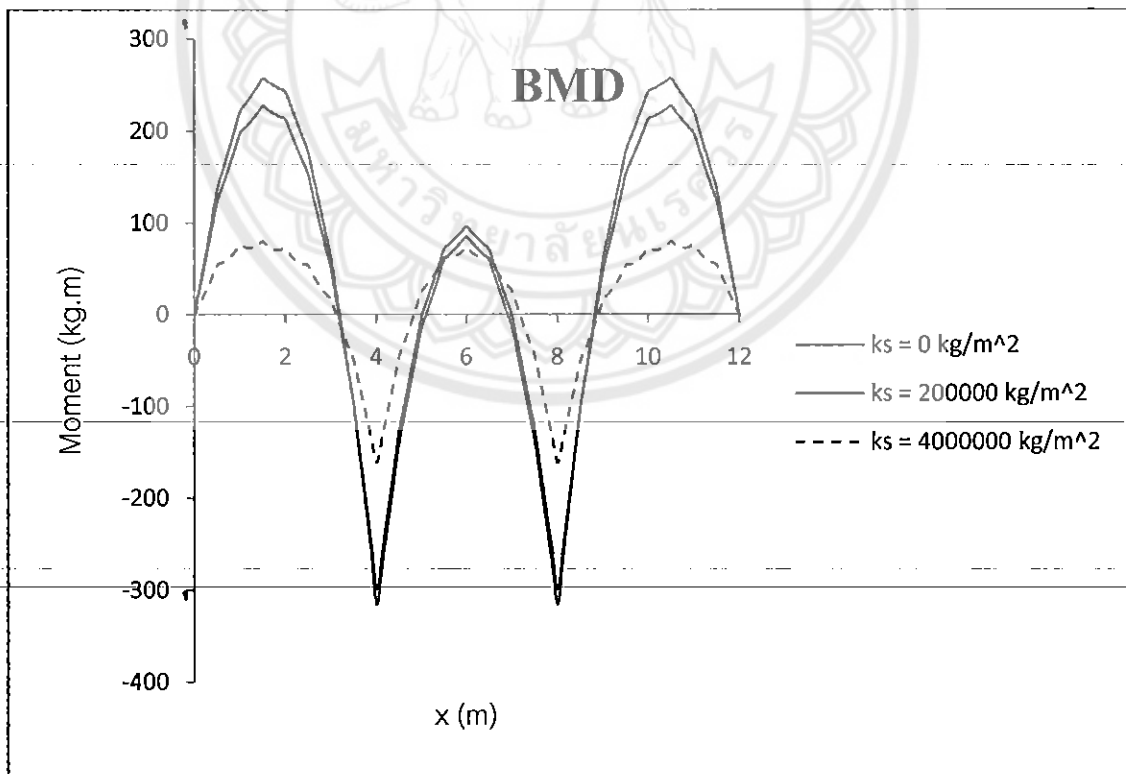
Beam on Tensionless Foundation



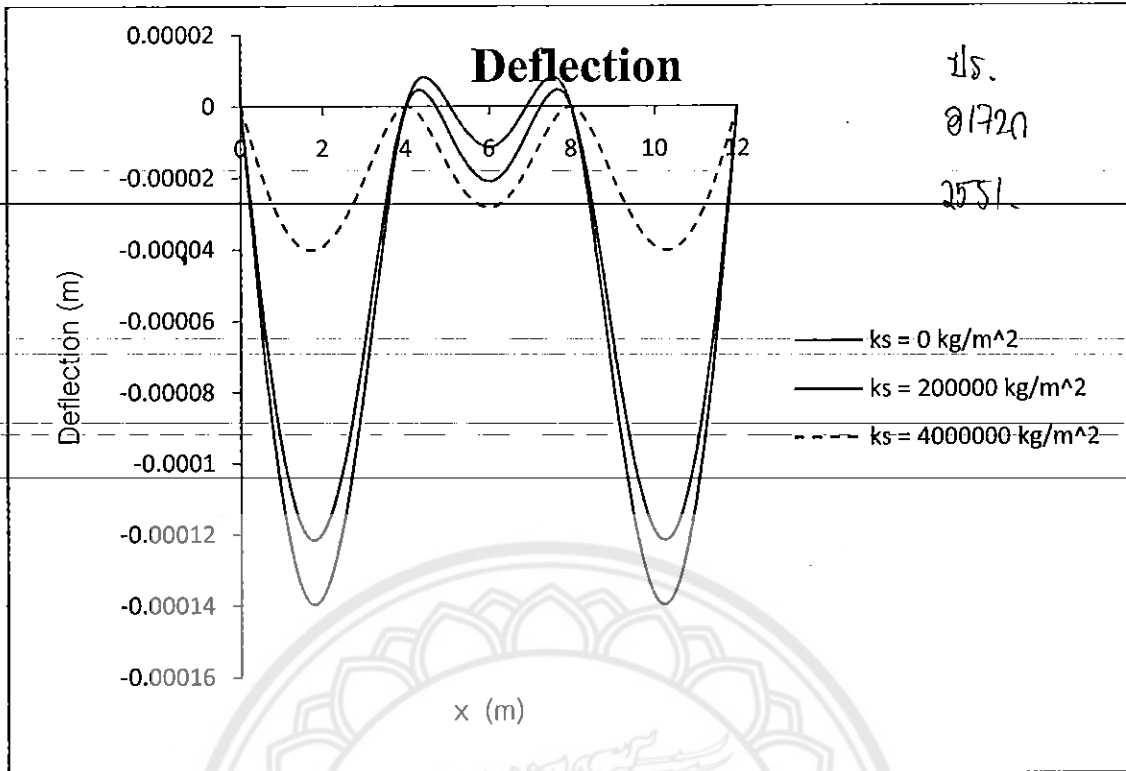
วิธีทำ จะได้กราฟแรงเฉือน โมเมนต์ และการแอ่นตัว ดังนี้



(ก) กราฟแรงเฉือน



(ข) กราฟโมเมนต์



(ค) กราฟการแอ่นตัว

5200008

รูปที่ 3.3 กราฟแสดงการวิเคราะห์ตัวอย่างที่ 3.3

ในตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า ค่า K_s (Modulus of Subgrade Reaction) เป็นส่วนสำคัญในการช่วยรับน้ำหนัก ยิ่งค่าโมดูลัสต้านทานการทรุดตัว K_s มากขึ้น ค่าการแอ่นตัวและค่าโมเมนต์สูงสุดจะมีค่าลดลง เนื่องจากฐานรากยึดหยุ่น (ดิน) สามารถช่วยรับน้ำหนักได้มากขึ้น

บทที่ 4

สรุปผล

4.1 สรุปผล

จากผลการวิเคราะห์คานทั้ง 2 สภาวะทั้งในคานแบบปกติ และคานบนฐานรากยึดหยุนที่ไม่รับแรงดึง การวิเคราะห์คานบนฐานรากยึดหยุนที่ไม่รับแรงดึงนั้น แรงปฏิกิริยาภายในคานที่วิเคราะห์ได้จะลดลงจากการวิเคราะห์แบบธรรมดาตามค่า K_s (Modulus of Subgrade Reaction) จึงเป็นส่วนสำคัญในการช่วยรับน้ำหนัก ยิ่งเพิ่มค่าโมดูลัสต้านทานการทรุดตัว K_s ค่าการเค้นตัวและค่าโมเมนต์สูงสุดจะมีค่าลดลง เนื่องจากฐานรากยึดหยุน ดินสามารถช่วยรับน้ำหนักได้มากขึ้น แต่ในส่วนคานที่ยกตัวขึ้นนั้น ชิ้นส่วนนั้นจะอยู่ภายใต้สภาวะการรับน้ำหนักแบบคานปกติทั่วไป

4.2 ปัญหาที่พบ

- ก. โปรแกรมสามารถวิเคราะห์แรงที่มากกระทำได้เฉพาะจุดเท่านั้นไม่สามารถวิเคราะห์แรงแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอได้
- ข. ในบางปัญหาอาจใช้เวลานานในการคำนวณของของคอมพิวเตอร์เนื่องจากใช้วิธีการทำซ้ำเพื่อหาจุดยกตัวให้ใกล้เคียงความจริงมากที่สุด

4.3 ผลที่ได้รับจากการวิจัย

- ก. เรียนรู้ถึงหลักการวิเคราะห์ของคานบนฐานรากยึดหยุนที่ไม่รับแรงดึงซึ่งจะนำไปใช้ในการออกแบบได้
- ข. เรียนรู้ถึงหลักการทำงานวิจัยและการนำเสนอที่ถูกต้อง

บรรณานุกรม

1. ปณิธาน ลักคุณะประสิทธิ์. (2537). การวิเคราะห์โครงสร้าง. (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร:
สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
2. จิรพัฒน์ โชติภัก. วิศวกรรมการทาง. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2551
3. ไกรฤทธิ์ ด้านพิทักษ์. การประยุกต์ใช้ปัญหาการเติมเต็มเชิงเส้นตรงในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของคาน
บนฐานรากยึดหยุนที่ ไม่รับแรงดึง. วิทยานิพนธ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2551
4. ทรงเดช ไชยภรณ์, ธรรมสถิตย์ แย้มกสิกร และ มนต์รี คงมา. สถิติเนสเมตริกซ์ของคานบนฐานราก
ยึดหยุนอีลาสติก. วิทยานิพนธ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2541



ภาคผนวก

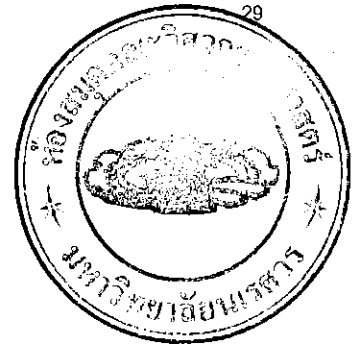
ค่า K_s ของฐานรากยึดหยุ่น

Typical values of modulus of subgrade reaction								
Types of Materials	Modulus of Subgrade Reaction, k , lb/in^3							
	for Moisture contents of							
	1 to 4%	5 to 8%	9 to 12%	13 to 16%	17 to 20%	21 to 24%	25 to 28%	Over 29%
Silts and clays Liquid limit > 50 (OH, CH, MH)		175	150	125	100	75	50	25
Silts and clays Liquid limit < 50 (OL, CL, ML)		200	175	150	125	100	75	50
Silty and clayey sands (SM & SC)	300	250	200	150				
Gravelly sands (SW & SP)	300+	300	250					
Silty and clayey gravels (GM & GC)	300+	300+	300	250				
Gravel and sandy gravels (GW & GP)	300+	300+						

NOTE : k values shown are typical for materials having dry densities equal to 90 to 95 percent of the maximum CE 55 density. For materials having dry densities less than 90 percent of maximum CE 55 density, values should be reduced by 50 lb/in^3 , except that a k of 25 lb/in^3 will be the minimum used for design.

ที่มา : การประยุกต์ใช้ปัญหาการเติมเต็มเชิงเส้นตรงในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของคานบนฐานรากยึดหยุ่นที่ไม่รับแรงดึง. ไกรฤทธิ ด้านพิทักษ์, 2551

ประวัติผู้เขียน



ชื่อ นายอนันต์ศักดิ์ ประภัสสร
เกิดวันที่ 1 กันยายน 2527
ที่อยู่ปัจจุบัน 24/19 ถนนสระหลวง อำเภอเมือง จังหวัด พิจิตร

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2546 ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ช่างก่อสร้าง) วิทยาลัยเทคนิคพิษณุโลก
พ.ศ. 2548 ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ช่างโยธา) วิทยาลัยเทคนิคพิษณุโลก
พ.ศ. 2552 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมโยธา) มหาวิทยาลัยนครสวรรค์

