การออกแบบส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้ในระบบควบคุมแบบเชิงเส้น

GUI Design for linear control system

นางสาวสกาวรรณ โพธิ์ทอง รหัส 48362490

นายสิทธิพรหม พลอยแก้ว รหัส 48362506

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2551

ใบรับรองโครงงาน

หัวข้อโครงงาน การออกแบบส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้ในระบบควบคุมแบบเชิงเส้น

ผู้ดำเนินโครงงาน นางสาวสกาวรรรณ โพธิ์ทอง รหัส 48362490

นายสิทธิพรหม พลอยแก้ว รหัส 48362506

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนิต มาลากร

สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2551

....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้โครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงานวิศวกรรม

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนิต มาลากร)

....กรรมการ

(ดร.ศุภวรรณ พลพิทักษ์ชัย)

....กรรมการ

(ดร.มุฑิตา สงฆ์จันทร์)

หัวข้อโครงงาน	การออกแบบส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้ในระบบควบคุมแบบเชิงเส้น
ผู้ดำเนินโครงงาน	นางสาวสกาวรรณ โพธิ์ทอง รหัส 48362490
	นายสิทธิพรหม พลอยแก้ว รหัส 48362506
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนิต มาลากร
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2551

บทคัดย่อ

ระบบควบคุมหมายถึงกระบวนการที่ทำให้ได้ตัวแปรขาออกจากระบบโดยการควบคุมสัญญาณขาเข้า ในขณะที่บางระบบค่อนข้างเรียบง่าย แต่หลายระบบมีความซับซ้อนอันเนื่องมาจากจำนวนองค์ประกอบในระบบ ขนาดหรือมิติของระบบ รวมถึงการออกแบบตัวควบคุม วัตถุประสงค์หลักของโครงงานนี้ คือการพัฒนาส่วนต่อประสานกราฟฟิกกับผู้ใช้ (GUI) ในโปรแกรมแมทแลปเพื่ออำนวยความสะดวกในด้านการคำนวณทั้งในแง่ของการวิเคราะห์และการออกแบบระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา ในส่วนของการออกแบบนั้น ผู้ใช้งานสามารถกดปุ่มเพื่อสร้างกราฟแสดงผลตอบสนองเชิงเวลาและผลตอบสนองเชิงความถี่เพื่อตรวจสอบพารามิเตอร์ที่สำคัญของผลตอบสนอง อาทิ เช่น เวลาขึ้น เวลาพุ่ง ค่าพุ่งสูงสุด และอัตราขยาย ณ ความถี่ตัดคล่อม เป็นต้น ในขณะที่ส่วนของการออกแบบนั้น ผู้ใช้งานสามารถเลือกออกแบบได้ด้วยวิธี (1) การป้อนกลับแบบหนึ่ง (2) การป้อนกลับสถานะ หรือ (3) การออกแบบด้วยวิธี LQR

Project Title	GUI Design for linear control system
Name	Mrs. Sakawan Phothong ID 48362490
	Mr. Sittiprom Ploykaew ID 48362506
Project Advisor	Asst. Prof. Tanit Malakorn, Ph.D.
Major	Computer Engineering
Department	Electrical and Computer Engineering
Academic year	2008

ABSTRACT

Control systems can be defined as mechanisms that provide outputs variables of a system by manipulating the inputs. While some systems can be very simple, others are complex with respect to number of components, dimensions and controller design issues. The primarily goal of this project is to develop the Graphical User Interface (GUI) MATLAB program for the computational aids in the analysis and design of linear, time-invariant systems. In the analysis part, users can generate time and frequency response plots to inspect key response parameters, such as rise time, peak time, maximum overshoot and gain crossover frequency; while in the design part, users can arbitrarily choose to design using (1) unity feedback (2) state feedback or (3) LQR design.

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่องการออกแบบส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้ในระบบควบคุมแบบเชิงเส้น ได้สำเร็จขึ้นเนื่องจากได้รับความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนิต มาลากร ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาของโครงงานนี้ ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ และแนวทางต่างๆ ตลอดจนได้สละเวลาอันมีค่าเพื่อตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ และคณะกรรมการอีก 2 ท่าน คือ ดร.มุฑิตา สงฆ์จันทร์ และดร. ศุภวรรณ พลพิทักษ์ชัย ที่ได้ให้คำแนะนำและยังคอยช่วยแก้ไขปัญหาในการปฏิบัติงาน นอกจากนี้ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ที่ได้ให้เงินสนับสนุนการทำโครงงานนี้

ในโอกาสนี้ทางคณะผู้จัดทำโครงงานจึงขอขอบพระคุณทุกท่านที่มีส่วนร่วมในการทำโครงงานนี้ซึ่งได้แก่ นางสาวศจี ยูรประพัฒน์, นายคณิต เอี่ยมสนธิ, นายพรพนม นันทเสนที่ได้ให้คำเสนอแนะจึงทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

นางสาวสกาวรรณ โพธิ์ทอง
นายสิทธิพรหม พลอยแก้ว

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า

สารบัญรูป(ต่อ)

บทที่1
บทนำ
(Introduction)

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

เป็นที่ทราบกันอย่างแพร่หลายในแวดวงของระบบควบคุมว่า การเขียนบรรยายแทนระบบทางกายภาพที่มีคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นไม่แปรตามเวลานั้นสามารถเขียนได้สองแบบ กล่าวคือ บรรยายในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอน และบรรยายในรูปแบบของตัวแปรสถานะ สำหรับการเขียนบรรยายระบบในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอนนั้น คือการหาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออกของระบบต่อสัญญาณเข้าของระบบในโดเมนความถี่ (Frequency domain) หรือโดเมนการแปลง (Transform domain) เมื่อกำหนดให้ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนจึงเป็นฟังก์ชันตรรกยะในตัวแปรเชิงความถี่ ซึ่งตัวแปรนั้นอาจจะเป็นตัวแปรลาปลาซ ในกรณีของระบบในเวลาต่อเนื่อง หรือเป็นตัวแปร Z ในกรณีของระบบในเวลาไม่ต่อเนื่อง ส่วนการเขียนบรรยายระบบในรูปแบบของตัวแปรสถานะนั้น เป็นการเขียนระบบทางกายภาพให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในกรณีของระบบในเวลาต่อเนื่อง $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ หรือสมการผลต่างอันดับหนึ่งในกรณีของระบบในเวลาไม่ต่อเนื่อง $\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ โดยมีสมการของสัญญาณขาออกคือ $\mathbf{y}(\bullet)=\mathbf{C}\mathbf{x}(\bullet)+\mathbf{D}\mathbf{u}(\bullet)$

การควบคุมแนวใหม่ส่วนใหญ่นิยมใช้การบรรยายระบบในรูปแบบของตัวแปรสถานะ ซึ่งเรียกวิธีการวิเคราะห์แนวนี้ว่า การวิเคราะห์ปริภูมิสถานะ (State space analysis) การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่บรรยายในรูปแบบของตัวแปรสถานะนี้มีอยู่หลายวิธี โดยแต่ละวิธีมีข้อดี ข้อเสีย รวมทั้งข้อจำกัดที่แตกต่างกันไป แต่อย่างไรก็ตาม การออกแบบตัวควบคุมทุกประเภทต้องบรรลุวัตถุประสงค์หลักของระบบควบคุมเสมอ กล่าวคือ ระบบต้องมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะที่สามารถตอบสนองความต้องการของผู้ออกแบบได้เป็นอย่างดี อาทิ เช่น ตอบสนองต่อสัญญาณเข้าได้อย่างรวดเร็ว ลดทอนสัญญาณรบกวน คงทนต่อสภาวะแวดล้อม สัญญาณขาออกสามารถติดตามสัญญาณอ้างอิงได้เป็นอย่างดี เป็นต้น

การออกแบบตัวควบคุมที่เรียบง่ายที่สุด คือ วิธีการควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ (state feedback) ซึ่งต้องอาศัยสมมติฐานว่าผู้ออกแบบทราบตัวแปรสถานะทุกตัวในระบบ แต่ในทางปฏิบัติผู้ออกแบบมักไม่ทราบตัวแปรสถานะโดยตรง จึงต้องวัดสัญญาณขาออกมาเพื่อสังเคราะห์หาตัวแปรสถานะโดยต้องออกแบบตัวสังเคราะห์ตัวแปรสถานะที่เรียกว่า ตัวสังเกตตัวแปรสถานะ (State observer) ก่อน แล้วจึงนำตัวแปรสถานะที่สังเคราะห์ได้ไปป้อนกลับ วิธีนี้เรียกว่า วิธีการ

ควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณออก (Output feedback) ซึ่งหากระบบมีสัญญาณรบกวนปนเข้ามา จำเป็นต้องออกแบบตัวกรองสัญญาณรบกวน โดยตัวกรองที่ถือว่าให้ค่าที่เหมาะที่สุด และถูกนิยมนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลายคือ ตัวกรองของคาลมาน (Kalman filter)

ในการออกแบบตัวควบคุมในย่อหน้าที่ผ่านมานั้น คำนึงเฉพาะเสถียรภาพของระบบและสมรรถนะหรือผลตอบสนองของระบบเท่านั้น ซึ่งในทางปฏิบัติแล้ว การออกแบบให้ระบบมีผลตอบสนองที่ดีเยี่ยมนั้นอาจต้องอาศัยสัญญาณเข้าหรือสัญญาณควบคุมค่อนข้างสูงมาก ยกตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้จรวดเคลื่อนที่จากจุดหนึ่ง ไปยังอีกจุดหนึ่งเร็วที่สุดนั้น จำเป็นต้องเชื้อเพลิงมหาศาล ซึ่งในทางปฏิบัตินั้น ไม่จำเป็นต้องให้จรวดเคลื่อนที่เร็วขนาดนั้น ด้วยเหตุนี้ จึงนำเรื่องของสัญญาณควบคุมหรือสัญญาณเข้ามาพิจารณา เพื่อหาจุดที่เหมาะที่สุด นั่นจึงเป็นที่มาของการออกแบบระบบแนวใหม่ ที่เรียกว่า การควบคุมแบบเชิงเส้นกำลังสอง (Linear Quadratic control) ซึ่งเป็นการออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดดรรชนีสมรรถนะ (Performance index) อันประกอบไปด้วย สัญญาณผิดพลาดและสัญญาณควบคุม อย่างเหมาะที่สุด จัดว่าเป็นการควบคุมแบบเหมาะที่สุด (Optimal control) ประเภทหนึ่ง

การควบคุมแบบเชิงเส้นกำลังสองนี้ สามารถจำแนกได้เป็นสองประเภทใหญ่ ๆ คือ LQR (Linear Quadratic Regulator) ใช้ในกรณีต้องการให้สัญญาณออกติดตามสัญญาณอ้างอิง ในขณะที่ LQG (Linear Quadratic Gaussian) ใช้ในการควบคุมที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนเข้ามารบกวนระบบ ซึ่งผู้ที่นำเสนอวิธีการออกแบบประเภทนี้คือ R.E.Kalman และ R.S.Busy นอกจากการควบคุมที่กล่าวมาข้างต้นนี้แล้ว ยังมีการออกแบบด้วยวิธีอื่นอีกเช่น การควบคุมแบบคงทน (Robust Control) การควบคุมเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic Control) การควบคุมแบบ H_∞ (H_∞-Control) การสังเคราะห์ μ (μ- synthesis) เป็นต้น ทั้งนี้ การเลือกใช้วิธีออกแบบประเภทใดนั้นขึ้นอยู่กับประเภทของงานที่ต้องการควบคุม

หลังจากที่ผู้ออกแบบได้ศึกษาแนวทางการออกแบบตัวควบคุมเป็นที่เรียบร้อยแล้ว ผู้ออกแบบควรจำลองระบบโดยรวมที่ได้ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อดูผลตอบสนองของระบบก่อนที่จะนำตัวควบคุมที่ได้ไปออกแบบจริง เพื่อให้เกิดความมั่นใจได้ว่าตัวควบคุมที่ออกแบบมานั้น สามารถควบคุมระบบให้มีเสถียรภาพและมีผลตอบสนองตามที่ผู้ออกแบบต้องการจริง การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อวิเคราะห์ระบบและสังเคราะห์ตัวควบคุมนั้น นอกจากผู้ออกแบบต้องจดจำคำสั่งรวมถึงโครงสร้างของโปรแกรมแล้ว ประสบการณ์ของผู้ออกแบบย่อมเป็นส่วนสำคัญอีกด้วย ดังนั้นเพื่อลดความยุ่งยากต่อผู้ใช้งานทั่วไปที่ซึ่งประสงค์จะศึกษาเฉพาะหลักการออกแบบ รวมทั้งผลตอบสนองของระบบโดยรวม ส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้ หรือ Graphic User Interface (GUI) จึงเข้ามามีบทบาทที่สำคัญ เนื่องจาก ส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้นี้อาศัยสัญลักษณ์ หรือ icon แทนการเขียนคำสั่งต่าง ๆ ซึ่งผู้ใช้งานทั่วไปสามารถใช้เมาส์คลิกเลือกสัญลักษณ์ต่าง ๆ หรือพิมพ์ข้อความลงในกล่องข้อความ หรือกดปุ่มเลือก แทนการเขียนคำสั่ง

โดยตรงในโปรแกรม นอกจากนี้ ส่วนประสานกราฟิกกับผู้ใช้ ยังสามารถจำลองระบบออกมาอยู่ในรูปแบบกราฟิกเพื่อให้ผู้ใช้งานเห็นผลตอบสนองของระบบทางกายภายได้อย่างเป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้น

โครงงานนี้มุ่งศึกษาการประยุกต์ใช้ ส่วนประสานกราฟิกต่อผู้ใช้ ในการออกแบบระบบควบคุม ทั้งวิธีการควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและวิธีการควบคุมแบบเชิงเส้นกำลังสองโดยนำเอาระบบควบคุมแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว (Flexible robot arm) และระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรง (DC motor drive) เป็นกรณีศึกษา

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1.2.1 เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่บรรยายในรูปแบบของตัวแปรสถานะ

1.2.2 เพื่อศึกษาและพัฒนาการใช้งานของ ส่วนประสานกราฟิกต่อผู้ใช้ ในโปรแกรม MATLAB

1.2.3 เพื่อได้องค์ความรู้สำหรับการศึกษาทฤษฎีระบบควบคุมขั้นสูงต่อไป

1.2.4 เพื่อให้ได้โปรแกรมที่ง่ายต่อผู้ใช้งานทั่วไป ที่มีความสนใจในการออกแบบระบบควบคุมแนวใหม่

1.3 ขอบข่ายของโครงงาน

1.3.1 ระบบที่ศึกษาต้องเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา และนำระบบควบคุมแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว กับระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรงเป็นกรณีศึกษา

1.3.2 โปรแกรมที่ได้ต้องเป็นส่วนต่อประสานกราฟิกต่อผู้ใช้ในโปรแกรม MATLAB ที่ง่ายต่อการใช้งานสำหรับผู้ใช้งานทั่วไป

1.3.3 โปรแกรมต้องสามารถออกแบบตัวควบคุมได้อย่างถูกต้อง ต้องสามารถแสดงผลตอบสนองออกมาในเชิงกราฟ และต้องมีปุ่มสำหรับอธิบายวิธีการใช้งาน โดยใช้ ระบบควบคุมแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวและระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรง เป็นกรณีศึกษา

1.3.4 วิธีการควบคุมที่ศึกษาได้แก่ วิธีการควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและวิธีการควบคุมแบบเชิงเส้นกำลังสอง

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 แผนการดำเนินงานโครงงาน

ลำดับ	การดำเนินการ	ปี 2551							ปี 2552			
		มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1	รวบรวมข้อมูลที่จำเป็นและเกี่ยวข้อง											
2	ศึกษาทฤษฎีควบคุมที่เกี่ยวข้อง											
3	ศึกษาการทำGUIด้วยโปรแกรม MATLAB											
4	ออกแบบตัวควบคุมจากระบบจริงตามทฤษฎีที่ได้ศึกษาและจำลองระบบด้วย GUI บน MATLAB											
5	จัดพิมพ์โครงงาน											

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 เกิดความเข้าใจในการออกแบบระบบควบคุมโดยวิธีการวิเคราะห์ปริภูมิสถานะ

1.5.2 ได้โปรแกรมส่วนต่อประสานกราฟิกต่อผู้ใช้ ที่ง่ายต่อการออกแบบระบบ

1.5.3 ได้องค์ความรู้สำหรับการศึกษาทฤษฎีระบบควบคุมขั้นสูงต่อไป

1.6 งบประมาณของโครงงาน

1.6.1 ค่าถ่ายเอกสารและค่าเข้าเล่มรายงานฉบับสมบูรณ์ เป็นเงิน 1,000 บาท

1.6.2 ค่าวัสดุสำนักงานและวัสดุคอมพิวเตอร์ เป็นเงิน 1,000 บาท

รวมเป็นเงินทั้งสิ้น 2,000 บาท

(สองพันบาทถ้วน)

<u>หมายเหตุ</u> ถัวเฉลี่ยทุกรายการ

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎีเบื้องต้น

ในการศึกษาและออกแบบระบบควบคุม ต้องอาศัยพื้นฐานทางคณิตศาสตร์หลายๆส่วนประกอบกันทั้งในการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ระบบ เนื่องจากระบบควบคุมต่างๆจะถูกอธิบายด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น เพื่อให้ได้ตัวควบคุมระบบที่ดี ผู้ศึกษาและผู้ออกแบบระบบควบคุมจึงควรรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ดังนี้

2.1 เมทริกซ์ ความเป็นบวกของเมทริกซ์ และค่าเจาะจง

เนื่องจากในการวิเคราะห์ระบบควบคุมแนวใหม่ส่วนใหญ่มักจะเขียนแทนระบบต่างๆอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ ดังนั้นความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับเมทริกซ์เหล่านั้นจะช่วยให้ผู้ศึกษาและผู้ออกแบบระบบควบคุมสามารถเข้าใจทฤษฎีและเนื้อหาในส่วนของระบบควบคุมได้ง่ายขึ้น ในหัวข้อต่อจากนี้ไปจะอธิบายเกี่ยวกับเมทริกซ์รวมทั้งคุณสมบัติที่จำเป็นต่อการศึกษาระบบควบคุม

2.1.1 นิยามและชนิดของเมทริกซ์ที่สำคัญ (Matrix)

เมทริกซ์ (Matrix)

<u>นิยาม</u> เมทริกซ์ A ที่มี m แถวและ n หลัก คือตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ส่งปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n$ (หรือ $\mathbb{C}^n$) ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^m$ (หรือ $\mathbb{C}^m$) นั่นคือ $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (หรือ $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$) ดังสมการ $y = Ax$ โดยที่ $x = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ และ $y = [y_1 \dots y_m]^T \in \mathbb{R}^m$ ซึ่งสามารถเขียนเมทริกซ์ A ออกมาได้เป็น

$$A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} เรียกว่า สมาชิก (element) ของ A

เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix)

<u>นิยาม</u> เมทริกซ์ A ใดๆ ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน นั่นคือ ($m=n$) เรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัส ยกตัวอย่างเช่น

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix)

<u>นิยาม</u> เมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ ถูกกล่าวว่าเป็นเมทริกซ์สมมาตรถ้า $A=A^T$ โดยที่ A^T เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของ A ยกตัวอย่างเช่น

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&5&6&7\\3&6&8&9\\4&7&9&0\end{bmatrix}$$

จะมีเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A คือ

$$A^T=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&5&6&7\\3&6&8&9\\4&7&9&0\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A=A^T$ เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์เฮอมิทเทียน (Hermitian Matrix)

<u>นิยาม</u> เมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ ถูกกล่าวว่าเป็นเมทริกซ์เฮอมิทเทียน ถ้า $A=A^*$ โดยที่ $A^*=\left(\overline{A}\right)^T$ ซึ่ง $\overline{A}$ เป็นเมทริกซ์ค่าสังยุคเชิงซ้อน(Complex Conjugate) ของ A ยกตัวอย่างเช่น

$$A=\begin{bmatrix}1&2+i&3&4-2i\\2-i&5&6-i&-7\\3&6+i&-8&-9+i\\4+2i&-7&-9-i&0\end{bmatrix},$$

เมทริกซ์ค่าสังยุคเชิงซ้อนของ A คือ

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&2-i&3&4+2i\\2+i&5&6+i&-7\\3&6-i&-8&-9-i\\4-2i&-7&-9+i&0\end{bmatrix},$$

เนื่องจาก $A=(\overline{A})^T=A^*$ ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์เฮอมิทเทียน

เมทริกซ์เอกฐานและเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน (Singular Matrix and Non-Singular Matrix)

<u>นิยาม</u> เมทริกซ์จัตุรัส A ที่มีค่า $\det(A)=0$ เมทริกซ์นั้นจะถูกเรียกว่า เมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) และจะไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน(Inverse Matrix)ของ A ได้ แต่ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมี $\det(A)\neq 0$ แล้ว A จะถูกกล่าวว่าเป็น เมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน (Non-Singular Matrix)

ค่าลำดับขั้น (Rank)

<u>นิยาม</u> ลำดับขั้น (Rank) ของ เมทริกซ์ A ขนาด $m\times n$ ใดๆ คือจำนวนแถวหรือหลักของ A ที่มีความอิสระเชิงเส้นต่อกัน

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> พิจารณาเมทริกซ์

$$A=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

พบว่า $v_2=2v_1$ ดังนั้น v_2 ไม่อิสระเชิงเส้นต่อ v_1 ในทำนองเดียวกัน $v_4=v_1+v_3$ ดังนั้น v_4 ไม่อิสระเชิงเส้นต่อ v_1 และ v_3 แต่ v_1 มีความอิสระเชิงเส้นกับ v_3 เนื่องจาก เมื่อกำหนดให้ผลรวมเชิงเส้น (linear combination)

$$\alpha_1 v_1+\alpha_3 v_3=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

แล้วมีกรณีเดียวที่เป็นไปได้ คือ $\alpha_1=0=\alpha_3$ ดังนั้น ค่าลำดับขั้น(rank)ของ A คือ 2 เนื่องจากมีเวกเตอร์เพียงสองหลักที่อิสระเชิงเส้นต่อกัน

<u>**ข้อสังเกต**</u> ค่าลำดับขั้น (rank) ของเมทริกซ์ A ขนาด $m\times n$ ใดๆ จะมีค่าไม่เกินขนาดที่น้อยที่สุดระหว่างจำนวนแถวกับจำนวนหลักเสมอ นั่นคือ

$$rank(A)\le \min\{m,n\}$$

หาก A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสและ $rank(A)=n$ แล้ว A เป็นเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน กล่าวคือ A สามารถหาเมทริกซ์ผกผันของ A ได้

2.1.2 การหาค่าเจาะจง (Eigenvalues : λ)

<u>นิยาม</u> ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ แล้วปริมาณสเกล่าร์ λ ถูกกล่าวว่า เป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A ถ้ามีเวกเตอร์ x ที่ไม่เท่ากับศูนย์ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$Ax=\lambda x \tag{2.1}$$

และเรียกเวกเตอร์ x ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจงเวกเตอร์เจาะจง λ นั้นว่าเวกเตอร์เจาะจง

สำหรับในการคำนวณหาค่าเจาะจง λ ให้พิจารณา ดังนี้ λ เป็นค่าเจาะจงของ A ก็ต่อเมื่อ λ สอดคล้องกับสมการที่ 2.1 นั่นคือ

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{2.2}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\det(\lambda I - A) = 0$ สำหรับทุกค่า $x \neq 0$ และเรียกสมการนี้ว่าสมการคุณลักษณะ **(Characteristic equation)** ของเมทริกซ์ A ซึ่งจะใช้ในการหาค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A ได้ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2.2</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้วค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A หาได้จาก

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

จะได้ว่า

$$(\lambda - 1)^2 - 1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lambda = 0\,,2$ เป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A

2.1.3 ความเป็นบวกแน่นอน, ลบแน่นอน, กึ่งบวก, และกึ่งลบของเมทริกซ์

<u>นิยาม</u> เมทริกซ์จัตุรัส A ถูกเรียกว่าเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive definite) [หรือ กึ่งบวก(Positive-Semi definite)] ถ้า $x^T Ax > 0$ [หรือ $x^T Ax \geq 0$]สำหรับทุกค่า $x \neq 0$ และ A ถูกเรียกว่าเป็นเมทริกซ์ลบแน่นอน (Negative definite) [หรือกึ่งลบ (Negative-Semi definite)] ถ้าเมทริกซ์ $-A$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน [หรือกึ่งบวก] หากเมทริกซ์จัตุรัสใดๆที่ไม่ได้เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน เมทริกซ์กึ่งบวก เมทริกซ์ลบแน่นอน หรือเทริกซ์กึ่งลบ จะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์ที่ไม่นิยามค่า (Indefinite matrix)

<u>ตัวอย่าง 2.3</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ และพิจารณาผลคูณต่อไปนี้

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2)^2 + 3{x_2}^2$$

เนื่องจาก $(x_1 - x_2)^2 + 3{x_2}^2 > 0$ สำหรับทุกค่า $x \neq 0$ เพราะฉะนั้น A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

ในกรณีที่ A มีขนาดใหญ่การพิจารณาความเป็นบวก(หรือความเป็นลบ) ของ A โดยนิยามข้างต้นมีความซับซ้อนเป็นอย่างมาก ดังนั้นทฤษฎีบทต่อไปนี้จึงช่วยในการพิจารณาค่าของเมทริกซ์

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> เมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด $n\times n$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ถ้าค่าเจาะจงของ A ทุกตัวเป็นบวกหมด นั่นคือ $\lambda_i(A)>0;\forall i=1,\ldots,n$

จากตัวอย่างที่ 2.3 พบว่าค่าเจาะจงของ A คือ 0.6972 และ 4.3028 ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนซึ่งสอดคล้องกับการพิจารณาโดยนิยาม

การตรวจสอบอีกวิธีหนึ่ง คือ การตรวจสอบด้วยวิธี Sylvester's test คือ เมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด $n\times n$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ถ้าทุกๆไมเนอร์ (minor) บนเส้นทแยงมุมหลักของ A มากกว่าศูนย์

จากตัวอย่างที่ 2.3 $$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$|1|=1>0 \quad , \quad \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=3>0$$

เนื่องจาก ไมเนอร์บนเส้นทแยงมุมทั้งสองมากกว่าศูนย์ เพราะฉะนั้น A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน จะเห็นว่าการตรวจสอบทั้งสามวิธีให้คำตอบที่ตรงกัน

<u>ตัวอย่าง 2.4</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

- การตรวจสอบจากนิยาม

$$x^T Ax=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=2x_1^2-5x_1x_2+5x_1x_2+x_2^2=2x_1^2+x_2^2$$

เนื่องจาก $2x_1^2$ และ x_2^2 มากกว่าศูนย์สำหรับทุกค่า $x\neq 0$ ดังนั้น $2x_1^2+x_2^2>0$ เพราะฉะนั้น A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

- การตรวจสอบจากทฤษฎีบท

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 5\\ -5 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+27=0$$

พบว่าค่าเจาะจงของ A คือ 1.5000 ± 4.9749i เพราะฉะนั้น A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

- <u>การตรวจสอบโดยใช้ Sylvester's test</u>

ไมเนอร์บนเส้นทแยงมุมหลักของ A คือ $|2|=2>0$, $\begin{vmatrix}2 & -5\\ 5 & 1\end{vmatrix}=27>0$ เพราะฉะนั้น A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

2.2 ทฤษฎีพื้นฐานของระบบควบคุม (Basic Control System Theory)

ในการออกแบบระบบควบคุมจำเป็นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) เข้ามาเพื่อจำลองระบบต่างๆให้อยู่ภายใต้สมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะสามารถออกแบบและคำนวณหาตัวควบคุมที่เหมาะสมได้ โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในที่นี้จะแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ฟังก์ชันถ่ายโอน(transfer function) ซึ่งศึกษาในโดเมนของลาปลาซ และสมการสถานะ (State equation) ซึ่งศึกษาในโดเมนของเวลา

2.2.1 ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function)

ระบบ คือ ตัวดำเนินการ (Operator) หรือ การส่ง (Mapping) จากปริภูมิของสัญญาณขาเข้า (Input Space) ไปยังปริภูมิของสัญญาณขาออก(Output Space) หากกำหนดให้ Σ แทนระบบ , U แทนปริภูมิของสัญญาณขาเข้า และ Y แทนปริภูมิของสัญญาณขาออกแล้ว จะเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$\Sigma : U \to Y$$

โดยที่

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

เมื่อ $y(t) \in Y, \quad u(t) \in U, \quad g(t) \in \Sigma$

และ * คือ ปริพันธ์สังวัฒนาการ (convolution integral)

ดังนั้นเมื่อป้อนสัญญาณขาเข้า $u(t)$ เข้าสู่ระบบ $g(t)$ แล้วสัญญาณขาออกสามารถคำนวณได้จากสมการที่ 2.3 แต่การคำนวณในสมการดังกล่าวมีความยุ่งยากซับซ้อน ดังนั้น หากระบบที่พิจารณาเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาแล้ว จะสามารถประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$$L[y(t)] = Y(s)$$

และ
$$L[g(t) * u(t)] = G(s)U(s) \tag{2.4}$$

นั่นคือการแปลงการทำปริพันธ์สังวัฒนาการภายในโดเมนของเวลาเปลี่ยนเป็นการคูณในโดเมนลาปลาซ ดังนั้น หากทราบตัวระบบและสัญญาณขาเข้าแล้ว สัญญาณขาออกคำนวณได้จาก

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)U(s)] \tag{2.5}$$

โดยที่ $G(s)$ ถูกเรียกว่า**ฟังก์ชันถ่ายโอน(Transfer function)** ซึ่งมีนิยามว่าเป็นอัตราส่วนระหว่างสัญญาณขาออกต่อสัญญาณขาเข้าในโดเมนของลาปลาซเมื่อให้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์

การตรวจสอบเสถียรภาพของระบบจากฟังก์ชันถ่ายโอน (System Stability)

ฟังก์ชันถ่ายโอนประกอบด้วยสองส่วน นั่นคือตัวเศษและตัวส่วน ซึ่งตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนบ่งบอกถึงเสถียรภาพของระบบ ซึ่งสมการส่วนนี้จะถูกเรียกว่า **สมการคุณลักษณะของระบบ (Characteristic Equation)**

วิธีตรวจสอบตรวจสอบเสถียรภาพให้คำนวณหารากของสมการคุณลักษณะของระบบ ซึ่งค่าของรากแต่ละตัวจะหมายถึงตำแหน่งขั้ว **(pole)**ของระบบนั่นเอง ถ้าส่วนจริงของขั้วแต่ละตัวมีค่าน้อยกว่าศูนย์แล้วสรุปว่า ระบบเสถียร (Stable) แต่ถ้ามีขั้วบางตัวที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์หรือมากกว่าศูนย์จะกล่าวว่าระบบไม่เสถียร (Unstable)

<u>หมายเหตุ</u> ในกรณีของระบบไม่เสถียรนี้หมายรวมถึงระบบที่แสดงพฤติกรรมการแกว่งกวัด (oscillation) ด้วย

<u>**ตัวอย่าง 2.5**</u> ให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$\frac{2s+1}{s^2+2s+5}$$

ซึ่งมีสมการคุณลักษณะของระบบคือ $s^2+2s+5=0$ จะได้ว่าขั้วของระบบ คือ $s=-1\pm 2i$ เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า เสถียรภาพของระบบตัวอย่างนี้เสถียร

<u>**ตัวอย่าง 2.6**</u> ให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$\frac{100}{s^3+10.1s^2+101s}$$

ซึ่งมีสมการคุณลักษณะของระบบคือ $s^3+10.1s^2+101s=0$ จะได้ว่าขั้วของระบบ คือ $s=0,-5.05\pm 8.6889i$ เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า ระบบไม่เสถียรเพราะมีขั้วที่ 0

2.2.2 ปริภูมิสถานะ (State Space)

โดยทั่วไปนิยมแทนค่าตัวแปรที่สนใจด้วยตัวแปรสถานะ $x\in\mathbb{R}^n$, แทนสัญญาณควบคุมขาเข้าด้วย $u\in\mathbb{R}^m$ และแทนสัญญาณขาออกด้วย $y\in\mathbb{R}^p$ แล้วระบบสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการสถานะและสมการขาออกได้เป็น

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x;u;t) \\ y(t) = g(x;u;t) \end{cases} \tag{2.6}$$

ในกรณีที่ระบบที่พิจารณาเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (linear time-invariant system) แล้วสมการ 2.6 สามารถเขียนได้เป็น

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.7}$$

โดยที่ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ระบบ(System Matrix)

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ เป็นเมทริกซ์สัญญาณขาเข้า(Input Matrix)

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ เป็นเมทริกซ์สัญญาณขาออก(Output Matrix)

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ เป็นเมทริกซ์เคลื่อนไปข้างหน้า (Feed forward Matrix)

การตรวจสอบเสถียรภาพของระบบในปริภูมิสถานะ (System Stability)

เสถียรภาพของระบบเป็นหัวใจหลักของการออกแบบระบบควบคุม การตรวจสอบเสถียรภาพของระบบในปริภูมิสถานะสามารถทำได้โดยการหาค่าเจาะจง (eigen value) ของ A

ถ้าส่วนจริงของ λ ทุกตัวมีค่าน้อยกว่าศูนย์แล้วจะกล่าวว่า ระบบมีเสถียรภาพ แต่ถ้ามีค่าเจาะจงบางตัวที่ส่วนจริงเป็นศูนย์หรือมากกว่าศูนย์จะกล่าวว่าระบบไม่เสถียร

ความสามารถควบคุมได้ (Controllability)

นิยาม สมการสถานะ $\dot{x} = Ax + Bu$ กล่าวได้ว่ามีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ถ้าทุกๆ สถานะเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$ และสถานะสุดท้าย $x(t_f) = x_f$ แล้วสัญญาณขาเข้าสามารถทำให้ x_0 เคลื่อนที่ไปยัง x_f ได้ในช่วงเวลาจำกัด มิฉะนั้นจะกล่าวว่าระบบไม่สามารถควบคุมได้

ทฤษฎีบทที่ 2 ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาดังสมการ 2.7 โดยที่ $x(t)$ คือตัวแปรสถานะมิติ n และ $u(t)$ คือเวกเตอร์สัญญาณควบคุมมิติ m เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ระบบควบคุมได้อย่างสมบูรณ์ คือเมตริกซ์ความสามารถควบคุมได้ (Controllability matrix) $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\mathbf{C}$ ต้องมีค่าลำดับขั้นเต็ม (full rank) เป็น n

ความสามารถสังเกตได้ (Observability)

นิยาม จากสมการสถานะ $\dot{x} = Ax + Bu$ และสมการสัญญาณขาออก $y = Cx + Du$ จะกล่าวได้ว่าระบบมีคุณสมบัติความสามารถสังเกตได้ ถ้าทุกๆ สถานะเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$ ที่ไม่ทราบค่า แต่จะมีช่วงเวลา $t_1 > 0$ ช่วงเวลาหนึ่ง ที่ซึ่งสัญญาณขาออก y สามารถทำให้ทราบสถานะเริ่มต้น (x_0) ของระบบได้ มิฉะนั้นจะกล่าวว่าสมการนั้นไม่มีคุณสมบัติความสามารถสังเกตได้

<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u> ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรตามเวลาที่แสดงได้ตามสมการ 2.7 โดยที่ $x(t)$ คือตัวแปรสถานะมิติ n และ $y(t)$ คือเวกเตอร์สัญญาณขาออกมิติ p เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ระบบสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ คือเมตริกซ์ความสามารถสังเกตได้ (Observability matrix) **O**

$$\mathbf{O} = \left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad \left(CA^{n-1}\right)^T \right]^T$$

โดยที่ **O** ต้องมีค่าลำดับขั้นเต็ม (full rank) เป็น n

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> ให้เมทริกซ์ในปริภูมิสถานะของระบบเป็น

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

ซึ่งค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = -1 \pm 2i$ เพราะฉะนั้นสรุปว่า ระบบเสถียร

พิจาณา $\mathbf{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & -2 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$

พบว่า $rank(\mathbf{C}) = 2$ เพราะฉะนั้น ระบบมีความสามารถควบคุมได้

พิจารณา $\mathbf{O} = [C^T \quad (CA)^T]^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$

พบว่า $rank(\mathbf{O}) = 2$ เพราะฉะนั้น ระบบมีความสามารถสังเกตได้

<u>ตัวอย่าง 2.8</u> ให้เมทริกซ์ในปริภูมิสถานะของระบบเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 100 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

ซึ่งค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = 0, -5.05 \pm 8.6889i$ เพราะฉะนั้นสรุปว่า ระบบไม่เสถียร

พิจาณา $\mathbf{C} = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -100 \\ 0 & 100 & -1010 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}$

พบว่า $rank(\mathbf{C}) = 3$ เพราะฉะนั้น ระบบมีความสามารถควบคุมได้

พิจารณา $\mathbf{O} = [C^T \quad (CA)^T \quad \left(CA^2\right)^T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 100 \end{bmatrix}$

พบว่า $rank(\mathbf{O}) = 3$ เพราะฉะนั้น ระบบมีความสามารถสังเกตได้

2.2.3 การแปลงรูปแบบของระบบระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนกับปริภูมิสถานะ

การแปลงระบบจากปริภูมิสถานะให้อยู่ในรูปฟังก์ชันถ่ายโอน

การแปลงจากปริภูมิสถานะไปเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนกระทำได้ด้วยสมการ

$$G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D \tag{2.8}$$

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> จากตัวอย่างที่ 2.7

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น
$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2s+1}{s^2+2s+5}$$

<u>ตัวอย่าง 2.10</u> จากตัวอย่างที่ 2.8

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 100 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น
$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 100 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{100}{s^3 + 10.1s^2 + 101s}$$

การเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบในรูปของปริภูมิสถานะ

การแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนให้มาอยู่ในปริภูมิสถานะ สามารถทำได้หลายรูปแบบตามแบบบัญญัติที่เลือก ซึ่งมีรูปแบบที่นิยมใช้อยู่ 3 รูปแบบ กล่าวคือ รูปบัญญัติความสามารถควบคุมได้, รูปบัญญัติความสามารถสังเกตได้และรูปบัญญัติแบบเส้นทะแยงมุม หากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots a_{n-1}s + a_n} \tag{2.9}$$

แล้วรูปแบบบัญญัติซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

รูปบัญญัติความสามารถควบคุมได้ (Controllable Canonical form)

เป็นรูปแบบที่เขียนแทนระบบให้มีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ จะมีรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [b_0] u$$

รูปบัญญัติความสามารถสังเกตได้ (Observable Canonical form)

เป็นรูปแบบที่เขียนแทนระบบให้มีคุณสมบัติความสามารถสังเกตได้ จะมีรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [b_0] u$$

รูปบัญญัติแบบเส้นทแยงมุม (Diagonal Canonical form)

เป็นรูปแบบที่จะใช้ในกรณีที่เขียนฟังก์ชันถ่ายโอนในรูปแบบของเศษส่วนย่อย(Partial fraction) ยกตัวอย่างเช่น

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \dots + \frac{c_n}{s+p_n} \qquad (2.10)$$

รูปแบบบัญญัติแบบเส้นทแยงมุมมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \hline \dot{x}_4\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -p_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \hline x_4\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ \hline 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+b_0u$$

2.3 การออกแบบระบบควบคุม (Control System Design)

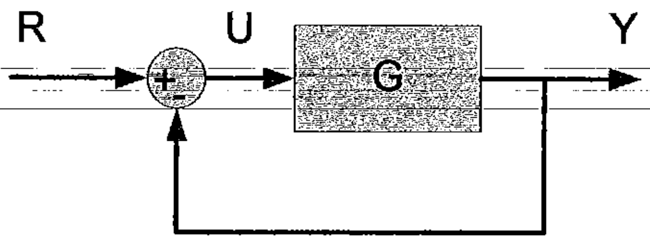
ในการออกแบบตัวควบคุมให้กับระบบต่างๆนั้น ผู้ออกแบบควรมีความรู้เกี่ยวกับการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีต่างๆ เพื่อจะช่วยให้ระบบมีผลตอบสนองที่ดีขึ้น และมีเสถียรภาพมากขึ้นนั่นเอง

2.3.1 การออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีควบคุมแบบวงปิด (Closed-Loop Design)

การออกแบบด้วยวิธีแบบวงปิดนั้นเป็นการออกแบบที่ง่ายที่สุด โดยการนำสัญญาณขาออกมาป้อนกลับ ซึ่งสามารถพิจารณาได้ทั้งในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอน และปริภูมิสถานะ

พิจารณาจากฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function)

หากพิจารณาจากฟังก์ชันถ่ายโอนจะได้แผนผังกล่อง (Block diagram) ดังนี้



รูปที่ 2.1 แผนภาพกล่องของการควบคุมแบบวงปิดในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอน

ให้ G คือฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบแล้ว สัญญาณขาออก Y คือ

$$Y = G \times U \tag{2.11}$$

แต่

$$U = R - Y \tag{2.12}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$Y = \left(\frac{G}{1+G}\right)R \tag{2.13}$$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิด คือ

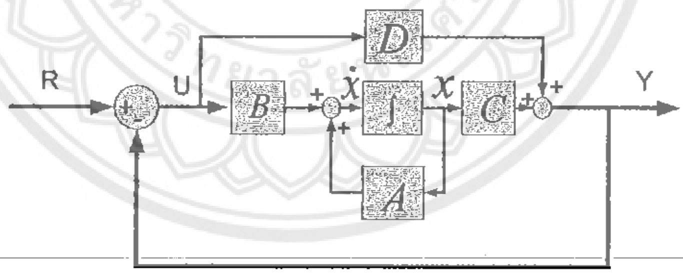
$$\frac{G}{1+G}$$

ตัวอย่าง 2.11 ให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ คือ $\frac{2s+1}{s^2+2s+5}$ แล้วฟังก์ชันถ่ายโอน**วงปิดสามารถ**คำนวณได้ดังนี้

$$\frac{G}{1+G} = \frac{\frac{2s+1}{s^2+2s+5}}{1+\frac{2s+1}{s^2+2s+5}} = \frac{2s+1}{s^2+4s+6}$$

พิจารณาจากปริภูมิสถานะ (State Space)

หากพิจารณาจากปริภูมิสถานะจะได้แผนผังกล่อง (Block diagram) ดังนี้



รูปที่ 2.2 แผนภาพกล่องของการควบคุมแบบวงปิดในรูปแบบของปริภูมิสภานะ

ให้ $\sum$ เป็นระบบที่เขียนในรูปแบบของปริภูมิสถานะจะได้ว่า

$$\sum := \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

กำหนดให้สัญญาณควบคุม u คือ $u = r - y$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(r-y) = Ax + B\left(r - (I+D)^{-1}(Cx+Dr)\right)\\ &= Ax + Br - B(I+D)^{-1}Cx - B(I+D)^{-1}Dr\\ &= (A - B(I+D)^{-1}C)x + (B - B(I+D)^{-1}D)r\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$y = Cx + Du = Cx + D(r-y) = (I+D)^{-1}(Cx+Dr)$$

<u>ตัวอย่าง 2.12</u> พิจารณาระบบ $\Sigma := \begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx + Du\end{cases}$

โดยที่
$$A = \begin{bmatrix}-2 & -5\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}, D = 0$$

แล้วระบบป้อนกลับในปริภูมิสถานะ คือ

$$\Sigma_{cl}\begin{cases}\dot{x} = (A-BC)x + Br\\ y = Cx + Du\\ u = r - y\end{cases} \tag{2.15}$$

$$\dot{x} = (A-BC)x + Br = \left\{\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\right\}x + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r = \begin{bmatrix}-4 & -6\\ 1 & 0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r$$

และ $y = Cx = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x$

ซึ่งพบว่าระบบดังกล่าวมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$G(s) = C(sI - A + BC)^{-1}B + D = \frac{2s+1}{s^2+4s+6}$$

ผู้อ่านสามารถสังเกตได้ว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้ในตัวอย่างนี้และในตัวอย่างที่ 2.11 มีค่าเท่ากัน

ถึงแม้การออกแบบด้วยวิธีนี้จะง่ายไม่ยุ่งยาก แต่ในบางครั้งระบบที่เสถียรอยู่แล้ว แต่ผลตอบสนองยังไม่เป็นไปตามที่ผู้ออกแบบต้องการ การออกแบบด้วยวิธีควบคุมแบบวงปิดอาจทำให้ระบบนั้นสูญเสียเสถียรภาพไปได้ เช่น ระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$G(s) = \frac{-2s-4}{s^2+3s+2}$$

เมื่อตรวจสอบขั้วของระบบพบว่า ขั้วอยู่ที่ $s = -1, -2$ ดังนั้น $G(s)$ มีเสถียรภาพ แต่เมื่อนำมาออกแบบด้วยวิธีควบคุมแบบวงปิดจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $G_{cl}(s) = \dfrac{-2s-4}{s^2+s-2}$ ซึ่งตำแหน่งขั้วของระบบวงปิดที่ได้อยู่ที่ตำแหน่ง $s = 1, -2$ นั่นหมายความว่าระบบขาดเสถียรภาพนั่นเอง

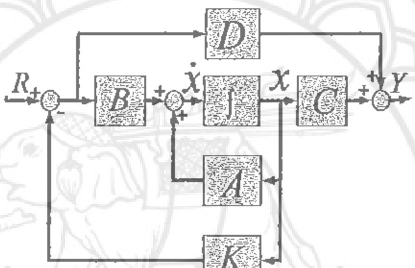
แต่มีวิธีการออกแบบด้วยวิธีการอื่นๆ ซึ่งผู้ออกแบบสามารถควบคุมทั้งเสถียรภาพ รวมไปถึงผลตอบสนองของระบบได้ด้วย โดยจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

2.3.2 การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้ว (Pole Placement Design)

การออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วเป็นการออกแบบที่ทำการย้ายตำแหน่งของขั้ว เพื่อให้เกิดเสถียรภาพและมีผลตอบสนองเป็นไปตามที่ผู้ออกแบบต้องการ โดยทั่วไปการออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วนั้นมีอยู่ 2 ลักษณะกล่าวคือ การออกแบบป้อนกลับสถานะ(State feedback) และการออกแบบป้อนกลับสัญญาณขาออก(Output feedback) ในส่วนของโครงงานนี้มุ่งศึกษาเฉพาะการออกแบบป้อนกลับสถานะเท่านั้น ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

การออกแบบแบบป้อนกลับสถานะ (State feedback)

การออกแบบระบบควบคุมที่มีการนำเอาตัวแปรสถานะ(State Variable) มาป้อนกลับเรียกว่า ระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ (State Feedback) โดยที่ในการออกแบบระบบประเภทนี้ ระบบต้องมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ (controllability) และจำเป็นต้องทราบตัวแปรสถานะของระบบที่ทำการควบคุมทุกตัวแปร สำหรับแผนผังกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 2.3 แผนภาพกล่องของระบบแบบป้อนกลับสถานะ

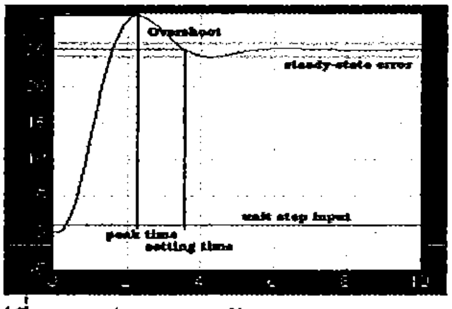
จะหาสมการคุณลักษณะได้จาก

$$|sI - A + BK| = s^n + a_{n-1}(k_i)s^{n-1} + \ldots + a_1(k_i)s + a_0(k_i) = 0 \qquad (2.16)$$

โดยที่ $a_j(k_i)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงในตัวแปร $k_i : \exists i = 1,\ldots,n$

การวางขั้วโดยการกำหนดผลตอบสนองเป้าหมาย

สิ่งแรกที่ผู้ออกแบบต้องคำนึงคือการกำหนดคุณสมบัติของผลตอบสนองที่ต้องการ อาทิเช่น ค่าพุ่งสูงสุด(Overshoot : M_p) , เวลาสูงสุด(Peak time : t_p) , เวลาขึ้น(Rising time : t_r)และเวลาเข้าสู่สภาวะคงที่(Setting time : t_s)



รูปที่ 2.4 รูปแบบของสัญญาณผลตอบสนอง

สำหรับสูตรการคำนวณหาค่าต่างๆข้างต้นสำหรับผลตอบสนองของระบบอันดับสองที่มีต่อสัญญาณขาเข้าแบบขั้นบันไดหนึ่งหน่วย(Step response) มีดังนี้

- ค่าพุ่งสูงสุด (M_p) $$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (2.17)$$

- เวลาสูงสุด (t_p) $$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (2.18)$$

- เวลาขึ้น (t_r) $$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d}, \theta = \cos^{-1}\zeta \quad (2.19)$$

- เวลาเข้าสู่สภาวะคงที่ (t_s) $$t_s \begin{cases} 1\% = 4.6/\zeta\omega_n \\ 2\% = 4/\zeta\omega_n \\ 5\% = 3/\zeta\omega_n \end{cases} \quad (2.20)$$

โดยที่

ζ = อัตราหน่วงของระบบ (Damping Ratio)

ω_n = ความเร็วเชิงมุมในการแกว่งธรรมชาติ (Undamped natural frequency)

ω_d = ความเร็วเชิงมุมในการแกว่งขณะระบบมีความหน่วง (Damped natural frequency)

$= \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

จากคุณสมบัติเชิงเวลาที่ต้องการ นำมาคำนวณหาค่า ζ และ ω_n ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญของระบบอันดับสอง โดยระบบดังกล่าวมีรูปทั่วไปคือ

$$\frac{Y}{R} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad (2.21)$$

หากระบบที่พิจารณาเป็นระบบอันดับที่ $n > 2$ แล้วจำเป็นต้องเลือกขั้วที่เหลืออีก $n-2$ ขั้ว โดยให้มีส่วนจริงน้อยกว่าขั้วหลักที่คำนวณได้ไม่น้อยกว่า 5 เท่า นั่นคือจากฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้ใน(2.21) พบว่ามีขั้วอยู่ที่ $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$ ดังนั้นขั้วที่เหลือ s_j เมื่อ $j = 1,2,...,n-2$ ต้องมีส่วนจริง $R_e(s_j) < -5\zeta\omega_n$ เพื่อให้ขั้วที่เพิ่มขึ้นมานั้นไม่ส่งผลกระทบต่อผลตอบสนองที่ต้องการมากจนเกินไป ดังนั้นสมการคุณลักษณะที่ต้องการคือ

$$(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)\times(s+5\zeta\omega_n)^{n-2} = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + ... + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \quad (2.22)$$

หลังจากนั้นจึงนำสมการคุณลักษณะที่ได้นี้ไปเทียบกับสมการคุณลักษณะที่ได้จากการออกแบบด้วยการป้อนกลับสถานะใน(2.16) จะได้ค่าอัตราขยายป้อนกลับ(K)ของระบบควบคุมที่ผู้ออกแบบต้องการ ดังนั้น ระบบควบคุมหลังการออกแบบด้วยวิธีป้อนกลับสถานะ คือ

$$\Sigma_{pp} : \begin{cases} \dot{x} = (A-BK)x + Br \\ y = Cx + Du \\ u = -Kx + r \end{cases} \quad (2.23)$$

2.3.3 การออกแบบระบบควบคุมโดยการหาค่าเหมาะสมที่สุดด้วยวิธีเชิงเส้นกำลังสอง (Optimization : LQ)

เนื่องจากการออกแบบระบบควบคุมทำเพื่อควบคุมให้ระบบเกิดเสถียรภาพและได้ผลตอบสนองตามต้องการ ซึ่งการออกแบบตัวควบคุมโดยวิธีการวางขั้วนั้น ในบางระบบอาจต้องใช้ทรัพยากรในการป้อนเข้าที่สูงมาก แต่ในทางปฏิบัติอาจเป็นไปไม่ได้ จึงมีการนำวิธีควบคุมแบบเชิงเส้นกำลังสองซึ่งเป็นวิธีการออกแบบ โดยพิจารณาหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimal control) ในการออกแบบระบบ เพื่อให้ระบบคงเสถียรภาพและผลตอบสนองที่ถือว่าอยู่ในเกณฑ์ที่พึงพอใจ แต่ลดปริมาณทรัพยากรที่ต้องสูญเสียไปโดยเกินความจำเป็น

การออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธี LQR

การออกแบบด้วยวิธี LQR ใช้การป้อนกลับสถานะเช่นเดียวกับการออกแบบในหัวข้อระบบควบคุมแบบวางขั้วแต่จะแตกต่างกันที่การหาอัตราขยายป้อนกลับ ซึ่งวิธี LQR จะใช้ฟังก์ชันน้ำหนัก Q และ R เพื่อใช้ในการคำนวณหาอัตราขยายป้อนกลับที่เหมาะสม (K) ให้กับระบบควบคุม เมื่อสมการสถานะของระบบคือ

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.24}$$

สำหรับค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ (cost function) จะแบ่งเป็นสองกรณี คือ Finite-horizon, Infinite-horizon

$$\begin{aligned} &Finite\text{-}horizon \quad J = \frac{1}{2}x^T(T)F(T)x(T) + \int_0^T (x^T Q x + u^T R u)dt \\ &Infinite\text{-}horizon \quad J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt \end{aligned} \tag{2.25}$$

ซึ่งในโครงงานนี้เป็นการศึกษาสมการตัวบ่งชี้สมรรถนะ จึงเลือกใช้สมการที่สองในการคำนวณโดยสมการของสัญญาณควบคุม (control input) ที่ได้จากการทำให้ค่าบ่งชี้ (cost) ต่ำที่สุด คือ

$$u = -Kx + r \tag{2.26}$$

ซึ่งในการควบคุมด้วยวิธี LQR K ได้มาจากสมการ

$$K = R^{-1}B^T P \tag{2.27}$$

โดยที่ P สามารถหามาได้จากสมการของริคคาติเชิงพีชคณิต (Algebraic Riccati Equation : ARE)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{2.28}$$

เนื่องจากสมการของริคคาติเชิงพีชคณิตเป็นสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งโดยทั่วไปไม่สามารถคำนวณได้โดยง่าย จึงจำเป็นต้องใช้การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ในโปรแกรมแมทแลบมีคำสั่งที่ใช้ในการคำนวณหาค่า P และอัตราขยาย K โดยใช้คำสั่ง

$$[K, P, E] = lqr(A, B, Q, R) \tag{2.29}$$

โดยที่ K คือ อัตราขยายป้อนกลับของระบบ

P คือ เมทริกซ์ที่ได้จากสมการริคคาติ

E คือ ค่าเจาะจงของระบบป้อนกลับสถานะ

ดังนั้น ระบบป้อนกลับที่ออกแบบด้วยวิธี LQR คือ

$$\Sigma_{lqr}:\begin{cases}\dot{x}=(A-BK)x+Br\\ y=Cx+Du\\ u=-Kx+r\end{cases} \tag{2.30}$$

การเลือก Q, R

การเลือก Q, R นั้นโดยทั่วไปไม่มีหลักการในเลือกที่แน่นอนนักแต่เมทริกซ์ Q จะต้องเป็นเมทริกซ์กึ่งบวกและเมทริกซ์ R จะต้องเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน โดยส่วนใหญ่แล้วการเลือกค่า Q และ R นั้นจะพิจารณาที่ความต้องการว่าต้องการให้สัญญาณออกมีลักษณะใด นั่นขึ้นอยู่กับวิธีการและประสบการณ์ของผู้ออกแบบเอง ส่วนใหญ่นิยมเลือก Q และ R อยู่ในรูปเมทริกซ์เส้นทแยงมุมเนื่องจากง่ายต่อการตรวจสอบคุณสมบัติทางพีชคณิต เหตุผลอีกประการหนึ่งคือเพื่อให้ Q สามารถกำหนดค่าน้ำหนักให้ตัวแปรสถานะอย่างชัดเจนว่าต้องการให้ตัวแปรสถานะตัวใดมากขึ้นหรือน้อยลง และในทำนองเดียวกันการกำหนดให้ R เป็นเมทริกซ์เส้นทแยงมุม เพื่อทำให้ผู้ออกแบบสามารถกำหนดได้ว่าต้องการให้น้ำหนักของสัญญาณควบคุมตัวใดมากขึ้นหรือลดลงได้

__ตัวอย่าง 2.13__ พิจารณาระบบ $\Sigma:=\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$

โดยที่

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, D=0$$

- เมื่อออกแบบด้วยวิธีวงปิด จะได้

$$\dot{x}=(A-BC)x+Br=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right\}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r \tag{2.31}$$

และ $y=Cx=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$

ซึ่งพบว่าระบบดังกล่าวมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$G_{cl}(s)=C\left(sI-A+BC\right)^{-1}B+D=\frac{s-4}{s^2-4s-6} \tag{2.32}$$

- เมื่อออกแบบด้วยวิธีวางขั้ว จะได้

$$\dot{x}=Ax+Bu=(A-BK)x+Br$$
$$y=Cx$$

สัญญาณควบคุม

$$u = -Kx + r = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$$

– หากผู้ออกแบบต้องการค่าสูงสุดของสัญญาณ(Mp) 5% ซึ่งค่าดังกล่าวสอดคล้องกับค่าอัตราส่วนความหน่วงของระบบ(damping ratio) $\zeta = 0.6901$ และเวลาสูงสุด(t_p) 1 วินาที จะได้ว่า $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ เมื่อแทนค่า $t_p = 1$ และ $\zeta = 0.6901$ จะได้ $\omega_n = 4.3410$ rad/sec

ดังนั้น สมการคุณลักษณะที่ผู้ออกแบบต้องการคือ

$$(s+\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(s+\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) = s^2 + 5.9914s + 18.8443 = 0$$

จากสมการคุณลักษณะของระบบจากการป้อนกลับสถานะ คือ

$$\det(sI - A + BK) = \begin{vmatrix} s-1+K_1 & -2+K_2 \\ -3 & s-4 \end{vmatrix} = 0$$

นั่นคือ

$$s^2 + (K_1 - 5)s + (K_2 - 4K_1 - 2) = 0$$

จะได้

$$K_1 - 5 = 5.9914$$
$$K_2 - 4K_1 - 2 = 18.8443$$

เพราะฉะนั้น $K = [10.9914 \quad 64.8099]$

ดังนั้นระบบควบคุมแบบวางขั้วคือ

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[10.9914 \quad 64.8099]\right\}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}r$$

$$= \begin{bmatrix} -9.9914 & -62.8099 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}r \qquad (2.33)$$

และ $y = Cx = [1 \quad 0]x$

- เมื่อออกแบบด้วยวิธีเชิงเส้นกำลังสอง จะได้

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Br$$
$$y = Cx$$

สัญญาณควบคุม

$$u = -Kx + r = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$$

สมมุติให้ Q และ R คือ

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ R=1$$

นำเมทริกซ์ Q และ R แทนลงในสมการริคคาติเชิงพีชคณิต

$$A^T P+PA-PBR^{-1}B^T P+Q=0$$

จะได้

$$P=\begin{bmatrix}11.3852 & 17.6419\\ 17.6419 & 29.9588\end{bmatrix}$$

นำเมทริกซ์ P ที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่2.27 เพื่อหาค่าในเมทริกซ์ที่นำมาป้อนกลับให้ระบบจะได้

$$K=R^{-1}B^T P=\begin{bmatrix}11.3852 & 17.6419\end{bmatrix}$$

ดังนั้นระบบควบคุมแบบเชิงเส้นกำลังสอง คือ

$$\begin{aligned}\dot{x}=(A-BK)x+Br&=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11.3852 & 17.6419\end{bmatrix}\right\}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r\\ &=\begin{bmatrix}-10.3852 & -15.6419\\ 3 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r\end{aligned} \tag{2.34}$$

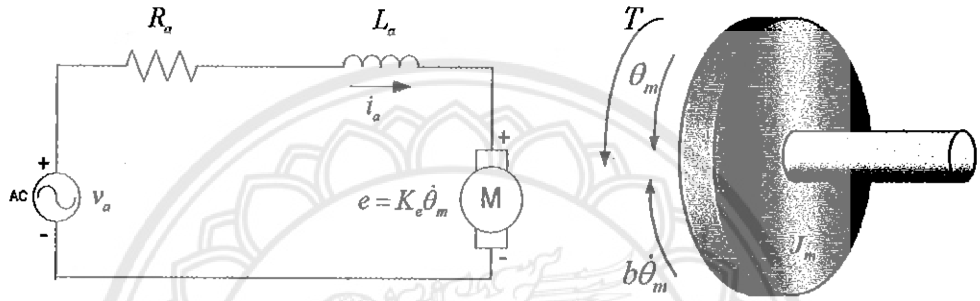
และ $\quad y=Cx=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$

บทที่ 3
วิธีการออกแบบและตัวอย่างการออกแบบ

3.1 การออกแบบตัวควบคุมระบบจากระบบตัวอย่าง

3.1.1 ระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรง

หากพิจารณาระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรง แสดงดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรง

จากรูปที่ 3.1 จะสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของนิวตัน และสมการแรงดันไฟฟ้า ได้ดังนี้

$$J_m\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = K_t i_a \tag{3.1}$$

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_e\dot{\theta}_m \tag{3.2}$$

กำหนดให้สถานะของระบบคือ $x = \begin{bmatrix} \theta_m & \dot{\theta}_m & i_a \end{bmatrix}^T$ และให้ u แทน v_a เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u \tag{3.3}$$

และให้สัญญาณขาออก (y) คือ มุม θ_m ดังนั้น จะได้สมการขาออกของระบบเป็น

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{3.4}$$

ซึ่งสมมุติให้พารามิเตอร์ต่างๆในระบบ คือ

$J_m = 0.01 kg\cdot m^2$, $b = 0.001 N\cdot m\cdot\sec$, $K_t = 1$

$K_e = 1$, $R_a = 10\Omega$, $L_a = 1H$

ดังนั้น สมการที่บรรยายระบบดังกล่าวนี้ คือ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 100 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3.5}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

หรือเขียนในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอนได้เป็น

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{s^3 + 10.1s^2 + 101s} \tag{3.6}$$

ก่อนการออกแบบให้ตรวจสอบเสถียรภาพของระบบเป็นอันดับแรก โดยพิจารณาที่ค่าเจาะจงของ A ซึ่งคำนวณจาก

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

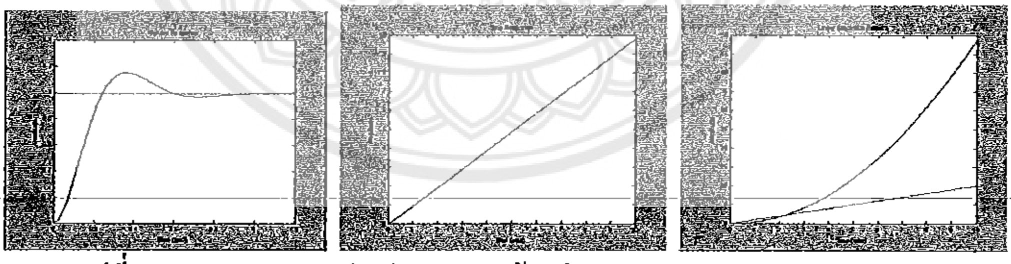
นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 0.1 & -100 \\ 0 & 1 & \lambda + 10 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 10.1\lambda^2 + 101\lambda = 0$$

จะได้ว่า

$$\lambda = 0, -5.05 \pm 8.6889i \tag{3.7}$$

ดังนั้น ระบบจึงขาดเสถียรภาพ เนื่องจากมีค่าเจาะจงหนึ่งตัวของ A ที่มีค่าเป็นศูนย์ และผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าแบบฟังก์ชันกระแทก ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยและฟังก์ชันทะยานหนึ่งหน่วย แสดงดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ ก่อนออกแบบตัวควบคุม

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบหนึ่งหน่วยมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆตามเวลา นั่นแสดงให้เห็นว่าระบบนี้ขาดเสถียรภาพ จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องออกแบบตัวควบคุมเพื่อให้ระบบเกิดความเสถียรและมีผลตอบสนองที่ดี

ก่อนการออกแบบตัวควบคุมระบบ ต้องตรวจสอบก่อนว่าระบบที่ต้องการออกแบบนั้นมีความสามารถควบคุมได้หรือไม่ โดยพิจารณาจากระดับขั้นของเมทริกซ์ความสามารถควบคุมได้

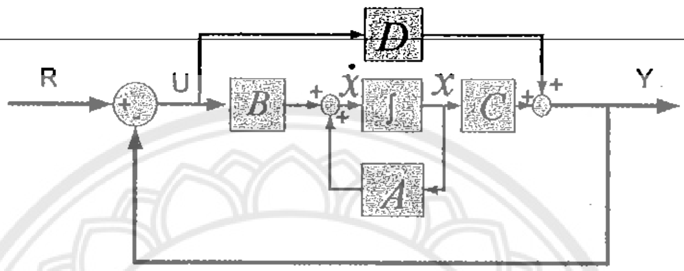
ให้ C เป็นเมทริกซ์ความสามารถควบคุมได้ของระบบ นั่นคือ

$$C=[B \quad AB \quad A^2B]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 100\\ 0 & 100 & -1010\\ 1 & -10 & 0\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

เนื่องจากลำดับขั้นของ C มีค่าเป็น 3 ดังนั้น ระบบนี้สามารถควบคุมได้

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีวงปิด

พิจารณาแผนภาพกล่องของการออกแบบตัวควบคุมแบบวงปิด ดังรูปที่ 3.3



รูปที่3.3 แผนภาพกล่องของการควบคุมแบบวงปิด

จากรูป พบว่าสัญญาณควบคุม u ที่เข้าสู่ระบบ เกิดจากผลต่างระหว่างสัญญาณอ้างอิง r กับสัญญาณขาออก y นั่นคือ $u=r-y$ แต่เนื่องจาก $y=Cx$ ดังนั้น

$$u=r-Cx \tag{3.9}$$

เมื่อแทนลงในสมการสถานะจะได้

$$\dot{x}=Ax+Bu=Ax+B(r-Cx)=(A-BC)x+Br$$

$$y=Cx$$

ดังนั้น สมการของระบบแบบวงปิดที่ได้ คือ

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -0.1 & 100\\ -1 & -1 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r \tag{3.10}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

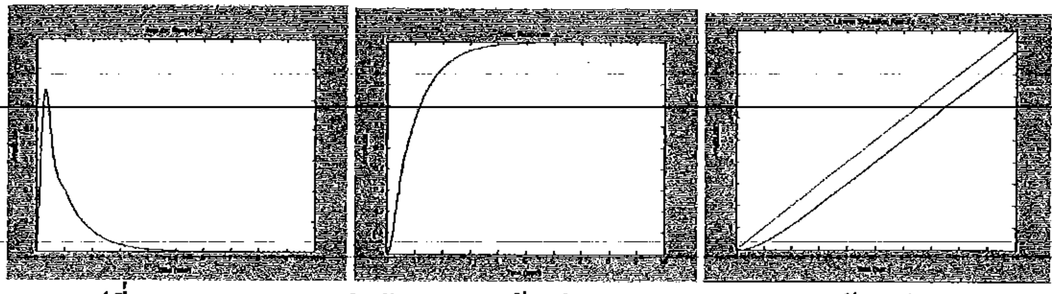
ซึ่งเมื่อตรวจสอบเสถียรภาพอีกครั้งหนึ่งหลังจากการออกแบบระบบแบบวงปิด จะได้ว่า

$$\det(\lambda I-A+BC)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda+0.1 & -100\\ 1 & 1 & \lambda+10\end{vmatrix}=\lambda^3+10.1\lambda^2+101\lambda+100=0$$

ดังนั้น ค่าเจาะจงของระบบวงปิด คือ

$$\lambda=-1.0975,-4.5013\pm 8.4178i \tag{3.11}$$

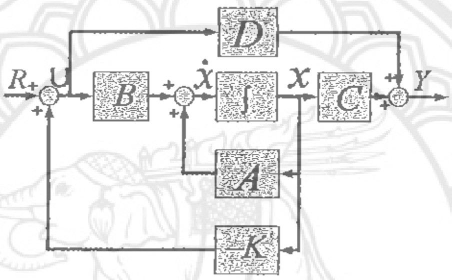
เนื่องจากค่าเจาะจงทั้ง 3 ค่า มีส่วนจริงที่น้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น ระบบวงปิดที่ได้จึงมีเสถียรภาพ โดยที่ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงไว้ในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ หลังการควบคุมด้วยวิธีวงปิด

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีวางขั้ว

พิจารณาแผนภาพกล่องแสดงการออกแบบอัตราขยาย K ของการวางขั้ว ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 แผนภาพกล่องของระบบแบบป้อนกลับสถานะ

จากรูปพบว่าสัญญาณควบคุม u ที่ป้อนเข้าสู่ระบบเกิดจากผลต่างระหว่างสัญญาณอ้างอิง r กับสัญญาณที่เกิดจากตัวแปรสถานะ Kx นั่นคือ

$$u = -Kx + r$$

$$= -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + r \quad (3.12)$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า u ลงในสมการสถานะ จะได้ว่า

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Br$$

$$y = Cx$$

เมื่อแทนค่า A, B, C ลงในสมการสถานะข้างต้น จะได้ระบบป้อนกลับ คือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 100 \\ -K_1 & -1-K_2 & -10-K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

และจะได้สมการคุณลักษณะของระบบจากการป้อนกลับสถานะ คือ

$$\det(sI - A + BK) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+0.1 & -100 \\ K_1 & 1+K_2 & s+10+K_3 \end{vmatrix} = 0$$

นั่นคือ

$$s^3 + (10.1+K_3)s^2 + (101+0.1K_3+100K_2)s + 100K_1 = 0 \qquad (3.14)$$

การออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วนั้นเป้าหมายหลักคือการหาเมทริกซ์ K ถ้าหากผู้ออกแบบทราบถึงตำแหน่งของขั้วที่ให้ผลตอบสนองเป็นไปตามที่ต้องการแล้วนั้น ผู้ออกแบบสามารถวางขั้วไว้ที่ตำแหน่งนั้นได้โดยการหาค่า K ที่เหมาะสม หากผู้ออกแบบไม่ทราบตำแหน่งของขั้วแต่ทราบคุณลักษณะของผลตอบสนองที่ต้องการ เช่น ต้องการค่าสูงสุดของสัญญาณ(Mp) 5% , เวลาสูงสุด (t_p) 1 วินาที ซึ่งเป็นการระบุขั้วมาโดยอ้อม ผู้ออกแบบต้องทำการคำนวณหาขั้วที่ต้องการจากคุณลักษณะต่างๆนั้น

จากตัวอย่างข้างต้นหากผู้ออกแบบต้องการค่าสูงสุดของสัญญาณ(Mp) 5% ซึ่งค่าดังกล่าวสอดคล้องกับค่าอัตราส่วนความหน่วงของระบบ $\zeta = 0.6901$ (จากสมการที่ 2.17) นอกจากนี้ยังระบุอีกว่าเวลาสูงสุด(t_p) 1 วินาที จากสูตรการคำนวณ t_p (สมการที่ 2.18) จะได้ว่า $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ เมื่อแทนค่า $t_p = 1$ และ $\zeta = 0.6901$ จะได้ $\omega_n = 4.3410$ rad/sec

ดังนั้น สมการคุณลักษณะที่ผู้ออกแบบต้องการคือ

$$(s+\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(s+\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) = 0 \qquad (3.15)$$

นั่นคือ

$$s^2 + 5.9914s + 18.8443 = (s+2.9957+j3.14)(s+2.9957-j3.14) = 0 \qquad (3.16)$$

ต้องวางขั้วอยู่ที่

$$s = -2.9957 + j3.14, -2.9957 - j3.14 \qquad (3.17)$$

อย่างไรก็ตามจากระบบที่พิจารณาเป็นระบบอันดับ3 ซึ่งต้องการขั้ว 3 ขั้ว ดังนั้น จึงเลือกขั้วที่เหลือให้อยู่ห่างจากขั้วที่ต้องการไป 5 เท่า ทำให้ขั้วที่สามจะอยู่ที่ $s = -14.9785$ ซึ่งได้สมการคุณลักษณะคือ

$$\begin{aligned} (s^2 + 5.9914s + 18.8443)(s+14.9785) &= 0 \\ s^3 + 20.9699s^2 + 108.5865s + 282.2593 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.18)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของสมการที่ 3.14 กับ 3.18 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 10.1 + K_3 &= 20.9699 \\ 101 + 0.1K_3 + 100K_2 &= 108.5865 \\ 100K_1 &= 282.2593 \end{aligned}$$

ซึ่งอัตราขยายที่ได้ คือ

$$K = \begin{bmatrix} 2.8210 & 0.0649 & 10.8699 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

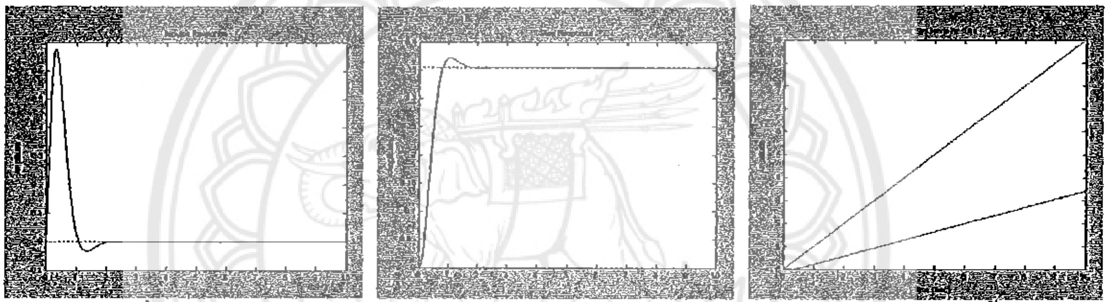
ดังนั้น ระบบควบคุมแบบวางขั้วคือ

$\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, $u = -Kx + r$ โดยที่ $K = \begin{bmatrix} 2.8210 & 0.0649 & 10.8699 \end{bmatrix}$

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกควบคุมคำนวณจากสูตร

$$\begin{aligned} \frac{Y}{R} &= C\left(sI - A + BK\right)^{-1} B \\ \frac{Y}{R} &= \frac{100}{s^3 + 20.9699s^2 + 108.5760s + 282.1024} \end{aligned} \tag{3.20}$$

ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงในรูปที่3.6

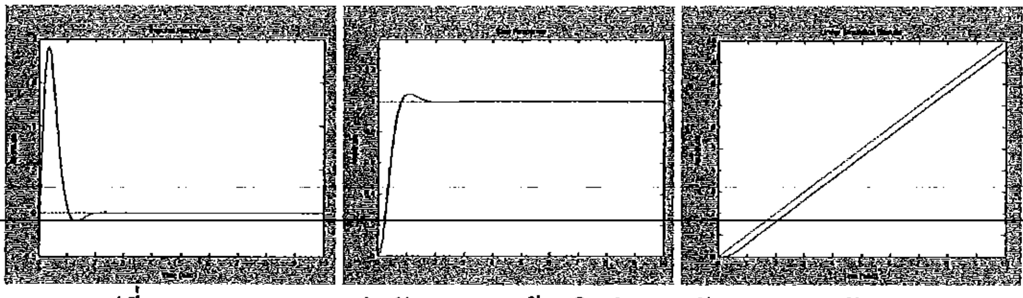


รูปที่ 3.6 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ หลังการควบคุมด้วยวิธีวางขั้ว

สังเกตว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย มีค่าที่สภาวะคงตัวอยู่ที่ 0.35 ซึ่งสอดคล้องกับค่าที่ได้จากการคำนวณได้จากสูตร

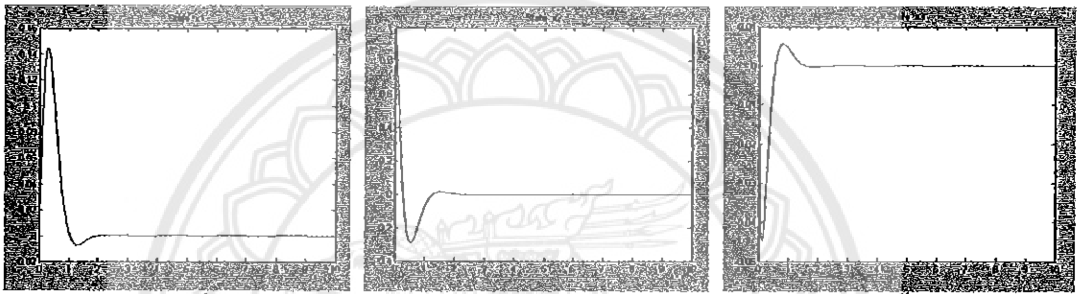
$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{100}{s^3 + 20.9699s^2 + 108.5760s + 282.1024}\right)\frac{1}{s} \\ &= \frac{100}{282.1024} \approx 0.3545 \end{aligned} \tag{3.21}$$

เพื่อให้ผลตอบสนองที่ได้มีค่าเท่ากับ 1 จึงต้องชดเชยด้วยอัตราขยาย 2.8210 ซึ่งผลตอบสนองของระบบที่มีต่อสัญญาณอ้างอิงทั้งสามหลังชดเชยด้วยอัตราขยายดังกล่าว แสดงในรูปที่ 3.7



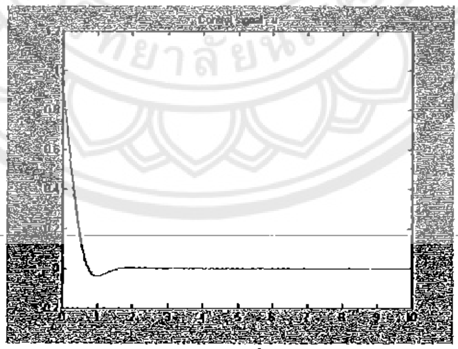
รูปที่ 3.7 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ หลังการชดเชยสัญญาณ

เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้นให้ $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$ เนื่องจากสัญญาณขาออกคือ ตัวแปรสถานะ x_1 ซึ่งจะมีเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะทั้งสามตัวของระบบ ดังรูป 3.8



รูปที่ 3.8 แสดงเส้นทางเคลื่อนที่ของสถานะที่ออกแบบด้วยวิธีวางขั้ว

และระบบจะมีการใช้ปริมาณสัญญาณควบคุมเป็นดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.9 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อสัญญาณขาเข้าเป็นแบบหนึ่งหน่วย

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี LQR

จากการออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วที่ผ่านมานั้นได้ให้ผลตอบสนองเป็นไปตามที่ผู้ออกแบบต้องการไปแล้ว แต่จะเห็นได้ในบางครั้งหรือบางระบบซึ่งปริมาณของสัญญาณควบคุมนั้นมากเกินความจำเป็น ดังนั้น ผู้ออกแบบระบบควบคุมอาจเลือกใช้วิธีการออกแบบควบคุมด้วยวิธี LQR จากระบบของตัวอย่างนี้ มีการใช้ปริมาณสัญญาณควบคุมค่อนข้างเหมาะสม ทำให้การออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วอาจเพียงพอแล้ว แต่ทดลองออกแบบด้วยวิธี LQR เพื่อเปรียบเทียบดูข้อแตกต่างของผลตอบสนองของระบบ โดยเงื่อนไขจำเป็นของการออกแบบวิธีLQRนี้ คือการที่ผู้ออกแบบต้องเลือกเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก Q และ R ที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ผลตอบสนองตามต้องการ

สมมุติให้ Q และ R เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ นั่นคือ

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ R=1$$

นำเมทริกซ์ Q และ R แทนลงในสมการริคคาติเชิงพีชคณิต

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0$$

โดยใช้คำสั่ง $[K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)$ ในโปรแกรมแมทแลบ จึงได้เมทริกซ์ P ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น คือ

$$P=\begin{bmatrix}1.5186&0.1421&1\\0.1421&0.1043&0.5044\\1&0.5044&4.2087\end{bmatrix}$$

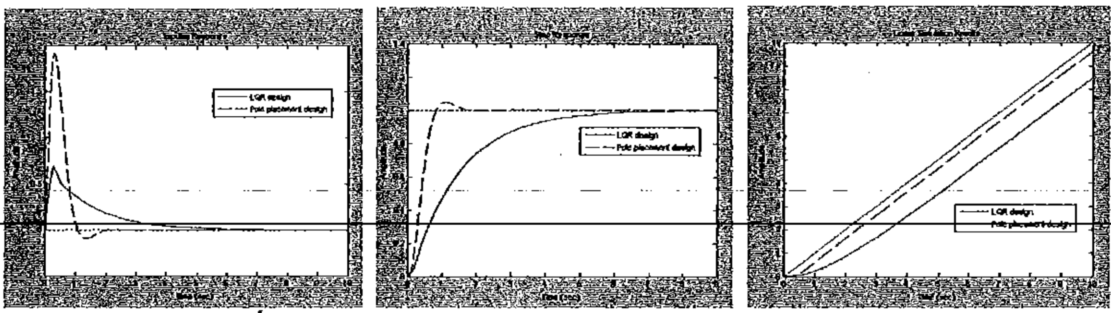
นำเมทริกซ์ P ที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่2.27 เพื่อหาค่าในเมทริกซ์ที่นำมาป้อนกลับให้ระบบจะได้

$$K=R^{-1}B^TP=\begin{bmatrix}1&0.5044&4.2087\end{bmatrix}$$

และสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ออกแบบด้วยวิธี LQRได้จาก

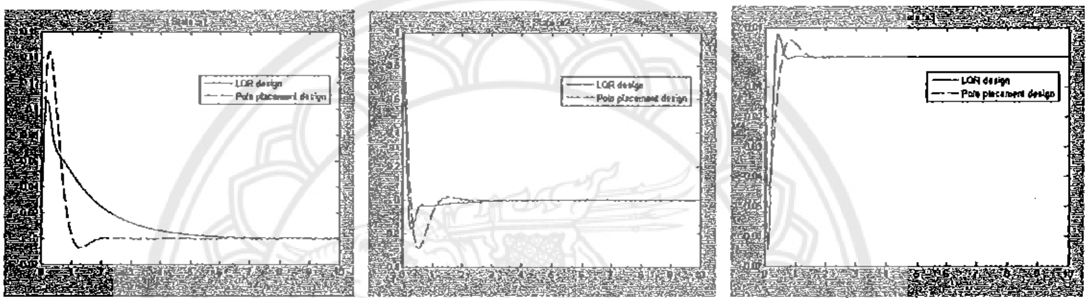
$$\frac{Y}{R}=C\left(sI-A+BK\right)^{-1}B$$
$$\frac{Y}{R}=\frac{100}{s^3+14.3087s^2+151.8642s+100} \tag{3.22}$$

ผลตอบสนองของระบบที่ออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วและวิธี LQR ต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงในรูปที่3.10



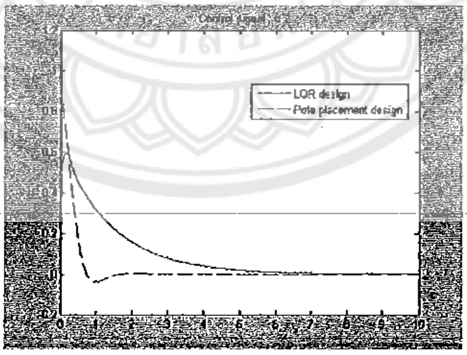
รูปที่ 3.10 แสดงผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าลักษณะต่างๆ
เมื่อออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วและวิธี LQR

เมื่อตรวจสอบเส้นทางเดินของสถานะด้วยการออกแบบทั้ง2วิธี แสดงไว้ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 แสดงเส้นทางเคลื่อนที่ของสถานะที่ออกแบบด้วยวิธีวางขั้วและวิธี LQR

และระบบจะมีการใช้ปริมาณสัญญาณควบคุมเป็นดังต่อไปนี้

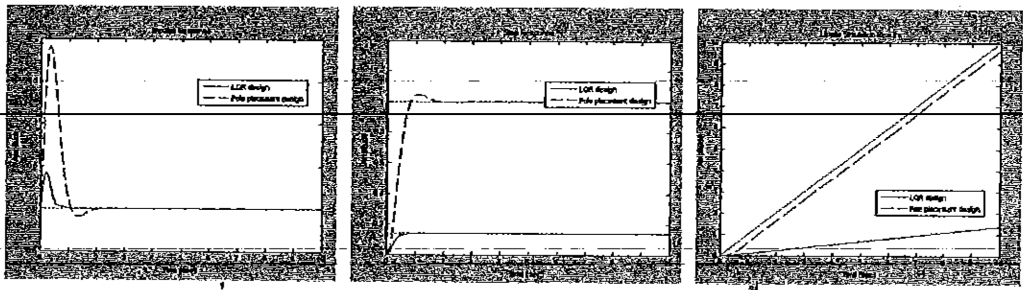


รูปที่ 3.12 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมหลังจากออกแบบด้วยวิธี LQR

จากรูปที่ 3.10 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของการออกแบบด้วยวิธีวางขั้วจะเข้าสู่สภาวะคงที่ได้เร็วกว่า ดังนั้น ผู้ออกแบบจึงควรเพิ่มน้ำหนักให้กับตัวแปรสถานะที่หนึ่ง ดังนั้น จึงเลือกใช้

$$Q=\begin{bmatrix}50 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, R=1$$

ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงในรูปที่3.13



รูปที่ 3.13 แสดงผลตอบสนองของระบบหลังปรับน้ำหนัก Q

สังเกตว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย มีค่าที่สภาวะคงตัวคลาดเคลื่อนไป ซึ่งสอดคล้องกับค่าที่ได้จากการคำนวณได้จากสูตร

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

ซึ่งฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้ คือ

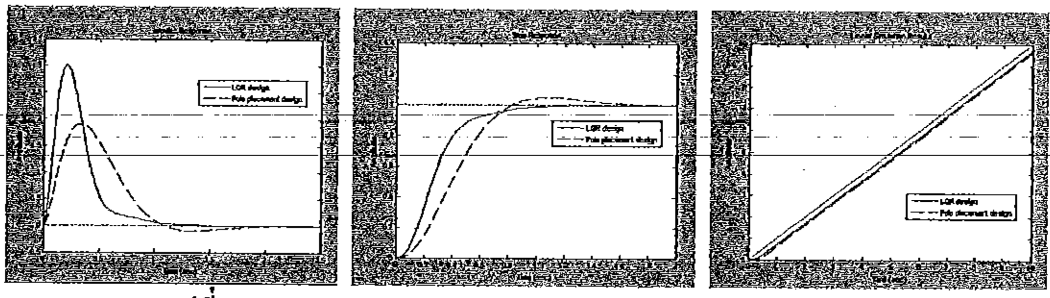
$$\frac{100}{s^3+18.1476s^2+214.1625s+707.1068}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{100}{s^3+18.1476s^2+214.1625s+707.1068}\right)\frac{1}{s}$$

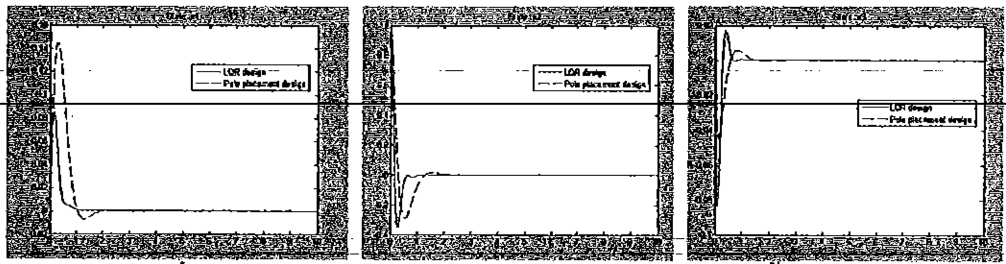
$$= \frac{100}{707.1068} \approx 0.1414$$

เพื่อให้ผลตอบสนองที่ได้มีค่าเท่ากับ 1 จึงต้องชดเชยด้วยอัตราขยาย 7.0711ซึ่งผลตอบสนองของระบบที่มีต่อสัญญาณอ้างอิงทั้งสามหลังชดเชยด้วยอัตราขยายดังกล่าว แสดงในรูปที่ 3.14

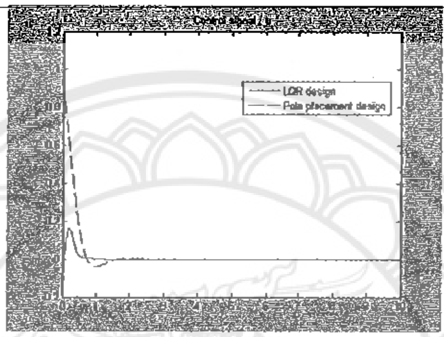


รูปที่ 3.14 แสดงผลตอบสนองของระบบหลังการชดเชยสัญญาณ

จะได้สัญญาณของเส้นทางเดินสถานะเป็น



รูปที่ 3.15 แสดงเส้นทางเดินสถานะของระบบหลังปรับน้ำหนัก Q

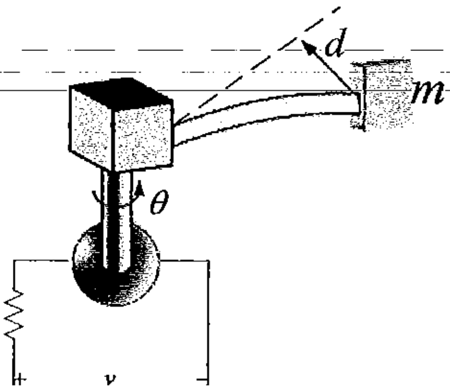


รูปที่ 3.16 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมหลังปรับน้ำหนัก Q

จะเห็นว่าเมื่อปรับค่าน้ำหนักของเมทริกซ์ Q ใหม่แล้ว จะทำให้สัญญาณขาออก และทางเดินสถานะเข้าใกล้กับการออกแบบด้วยวิธีวางขั้วมากขึ้น เมื่อเทียบดูที่ปริมาณสัญญาณควบคุมแล้ว การออกแบบด้วยวิธี LQR ก็จะน้อยกว่าการออกแบบด้วยวิธีวางขั้ว แต่เนื่องจากระบบตัวอย่างดังกล่าวนี้อาจจะยังแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างการออกแบบด้วยวิธี LQR กับวิธีการวางขั้ว ได้ไม่ชัดเจน ดังนั้น ให้ดูจากตัวอย่างถัดไปในตัวอย่างที่ 3.1.2

3.1.2 ระบบควบคุมแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

เมื่อพิจารณาระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ดังแสดงในรูปที่3.17



รูปที่ 3.17 ระบบทางกายภาพของแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

เมื่อพารามิเตอร์ต่างๆในระบบคือ

$x_1 = \theta$: มุมที่หมุน (rad)

$x_2 = \dot{\theta}$: อัตราเร็วเชิงมุมที่หมุน (rad/sec)

$x_3 = d$: ระยะทางที่แขนกลแกว่ง (m)

$x_4 = \dot{d}$: อัตราเร็วที่แขนกลแกว่ง (m/sec)

u : แรงดันที่จ่ายให้มอเตอร์ (volt)

y : ตำแหน่งเชิงมุมใดๆของโหลด (m)

กำหนดให้สมการที่บรรยายระบบดังกล่าวคือ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} u \tag{3.23}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} x$$

เมื่อเขียนในรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ จะเขียนได้เป็น

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-1.9198s^2 - 0.1899s + 4394.273}{s^4 + 49.43s^3 + 559.8501s^2 + 2362.2716s} \tag{3.24}$$

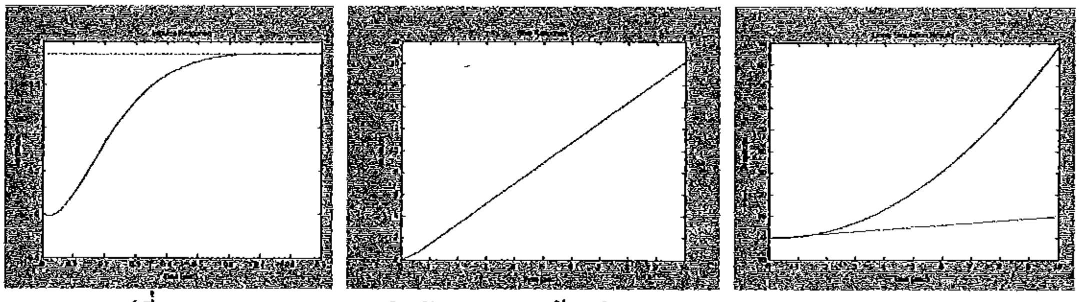
ก่อนการออกแบบให้ตรวจสอบเสถียรภาพของระบบ โดยพิจารณาค่าเจาะจงของ A

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 4.22 & 0 & 13.81 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 13.81 & 559.78 & \lambda + 45.21 \end{vmatrix} = 0$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\lambda = 0, -35.5514, -6.9393 \pm 4.2770i \tag{3.25}$$

ดังนั้น ระบบจึงขาดเสถียรภาพเนื่องจากมีค่าเจาะจงหนึ่งตัวของ A ที่มีค่าเป็นศูนย์ และผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าแบบฟังก์ชันกระแทก ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยและฟังก์ชันทะยานหนึ่งหน่วยแสดงดังรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ ก่อนออกแบบตัวควบคุม

จากรูปที่ 3.18 จะเห็นว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบหนึ่งหน่วยมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆตามเวลา นั่นแสดงให้เห็นว่าระบบนี้ขาดเสถียรภาพ จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องออกแบบตัวควบคุมเพื่อให้ระบบเกิดความเสถียรและมีผลตอบสนองที่ดี

ก่อนการออกแบบตัวควบคุมระบบ ต้องตรวจสอบก่อนว่าระบบที่ต้องการออกแบบนั้นมีความสามารถควบคุมได้หรือไม่ โดยพิจารณาจากระดับขั้นของเมทริกซ์ความสามารถควบคุมได้ ให้ C เป็นเมทริกซ์ความสามารถควบคุมได้ของระบบ นั่นคือ

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 7.85 & -388.1821 & 19187 \\ 7.85 & -388.1821 & 19187 & -749650 \\ 0 & 25.71 & -1270.8 & 48420 \\ 25.71 & -1270.8 & 48420 & -1742700 \end{bmatrix} \qquad (3.26)$$

เนื่องจากลำดับขั้นของ C มีค่าเป็น 4 ดังนั้น ระบบนี้สามารถควบคุมได้

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีวงปิด

พิจารณาแผนภาพกล่องของการออกแบบตัวควบคุมแบบวงปิด ดังรูปที่ 3.3 ซึ่งพบว่าสัญญาณควบคุม u ที่เข้าสู่ระบบ เกิดจากผลต่างระหว่างสัญญาณอ้างอิง r กับสัญญาณขาออก y นั่นคือ $u = r - y$ แต่เนื่องจาก $y = Cx$ ดังนั้น

$$u = r - Cx$$

เมื่อแทนลงในสมการสถานะจะได้

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(r - Cx) = (A - BC)x + Br$$

$$y = Cx$$

ดังนั้น สมการของระบบแบบวงปิดที่ได้ คือ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7.85 & -4.22 & 2.983 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -25.71 & -13.81 & -550.0102 & -45.21 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} r \qquad (3.27)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} x$$

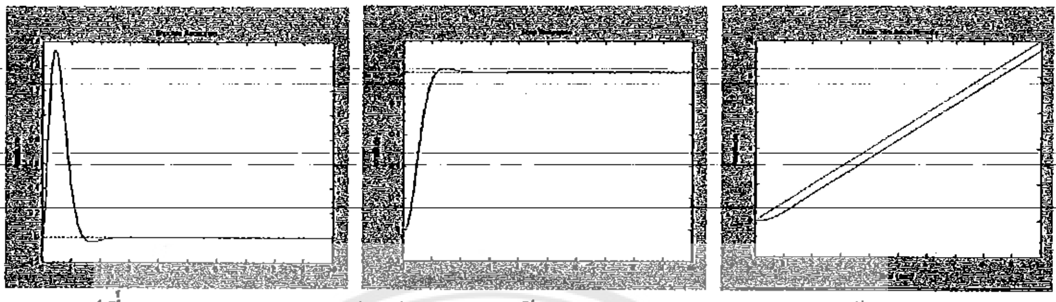
ซึ่งเมื่อตรวจสอบเสถียรภาพอีกครั้งหนึ่งหลังจากการออกแบบระบบแบบวงปิด จะได้ว่า

$$\det(\lambda I - A + BC) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 7.85 & \lambda + 4.22 & -2.983 & 13.81 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 25.71 & 13.81 & 550.0102 & \lambda + 45.21 \end{vmatrix} = 0$$

ดังนั้น ค่าเจาะจงของระบบวงปิด คือ

$$\lambda = -35.4843, -7.9920, -2.9768 \pm 2.5756i \tag{3.28}$$

เนื่องจากค่าเจาะจงทั้ง 4 ค่า มีส่วนจริงที่น้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น ระบบวงปิดที่ได้จึงมีเสถียรภาพ โดยที่ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงไว้ในรูปที่ 3.19



รูปที่ 3.19 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ หลังการควบคุมด้วยวิธีวงปิด

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีวางขั้ว

พิจารณาแผนภาพกล่องแสดงการออกแบบอัตราขยาย K ของการวางขั้ว ดังรูปที่ 3.5 ซึ่งพบว่า สัญญาณควบคุม u ที่ป้อนเข้าสู่ระบบเกิดจากผลต่างระหว่างสัญญาณอ้างอิง r กับสัญญาณที่เกิดจากตัวแปรสถานะ Kx นั่นคือ

$$u = -Kx + r = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + r$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า u ลงในสมการสถานะ จะได้ว่า

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Br$$
$$y = Cx$$

เมื่อแทนค่า A, B, C ลงในสมการสถานะข้างต้น จะได้ระบบป้อนกลับ คือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7.85K_1 & -4.22 - 7.85K_2 & -7.85K_3 & -13.81 - 7.85K_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -25.71K_1 & -13.81 - 25.71K_2 & -559.78 - 25.71K_3 & -45.21 - 25.71K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

และจะได้สมการคุณลักษณะของระบบจากการป้อนกลับสถานะ คือ

$$\det(sI - A + BK) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 7.85K_1 & s+4.22+7.85K_2 & 7.85K_3 & 13.81+7.85K_4 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 25.71K_1 & 13.81+25.71K_2 & 559.78+25.71K_3 & s+45.21+25.71K_4 \end{vmatrix} = 0$$

นั่นคือ

$$s^4 + (25.71K_4 + 7.85K_2 + 49.43)s^3 + (0.0877K_4 + 25.71K_3 - 0.1566K_2 + 7.85K_1 + 559.85)s^2 + (0.0877K_3 + 4394.27K_2 - 0.1566K_1 + 2362.27)s + 4394.27K_1 = 0 \quad (3.30)$$

หากผู้ออกแบบต้องการค่าสูงสุดของสัญญาณ(Mp) 0.75% ซึ่งค่าดังกล่าวสอดคล้องกับค่าอัตราส่วนความหน่วงของระบบ $\zeta = 0.84$ (จากสมการที่ 2.17) นอกจากนี้ยังระบุอีกว่าเวลาสูงสุด (t_p) 1 วินาที จากสูตรการคำนวณ t_p (สมการที่ 2.18) จะได้ว่า $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ เมื่อแทนค่า $t_p = 1$ และ $\zeta = 0.84$ จะได้ $\omega_n = 5.8146$ rad/sec
ดังนั้น สมการคุณลักษณะที่ผู้ออกแบบต้องการคือ

$$(s + 4.8843 + j3.14)(s + 4.8843 - j3.14) = 0$$

นั่นคือ

$$s^2 + 9.7686s + 33.8096 = 0 \quad (3.31)$$

ต้องวางขั้วอยู่ที่

$$s = -4.8843 + 3.14j\ , -4.8843\ -3.14j \quad (3.32)$$

อย่างไรก็ตามจากระบบที่พิจารณาเป็นระบบอันดับ4 ซึ่งต้องการขั้ว 4 ขั้ว ดังนั้น จึงเลือกขั้วที่เหลือให้อยู่ห่างจากขั้วที่ต้องการไป 5 เท่า ทำให้ขั้วที่สามและสี่จะอยู่ที่ $s = -24.4215$ ซึ่งได้สมการคุณลักษณะ คือ

$$\begin{aligned}(s^2 + 9.7686s + 33.8096)(s + 24.4215)(s + 24.4215) = 0 \\ s^4 + 58.6116s^3 + 1107.3s^2 + 7477.4s + 20164 = 0\end{aligned} \quad (3.33)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของสมการที่ 3.30 กับ 3.33 จะได้อัตราขยาย คือ

$$K = \begin{bmatrix} 4.5761 & 1.1628 & 19.9013 & 0.0021 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

ดังนั้น ระบบควบคุมแบบวางขั้วคือ

$$\dot{x} = Ax + Bu \ , \ y = Cx \ , \ u = -Kx + r$$

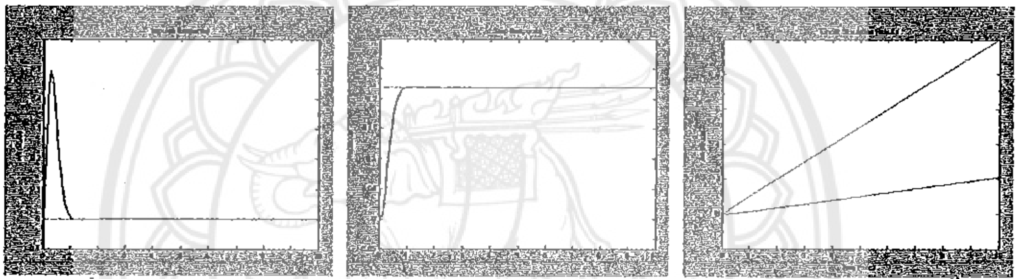
โดยที่ $K = [4.5761 \quad 1.1628 \quad 19.9013 \quad 0.0021]$

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกควบคุมคำนวณจากสูตร

$$\frac{Y}{R} = C(sI - A + BK)^{-1} B$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{-1.9198s^2 - 0.1899s + 4394.3}{s^4 + 58.6116s^3 + 1107.3s^2 + 7472.9s + 20109} \tag{3.35}$$

ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงในรูปที่3.20



รูปที่ 3.20 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ หลังการควบคุมด้วยวิธีวางขั้ว

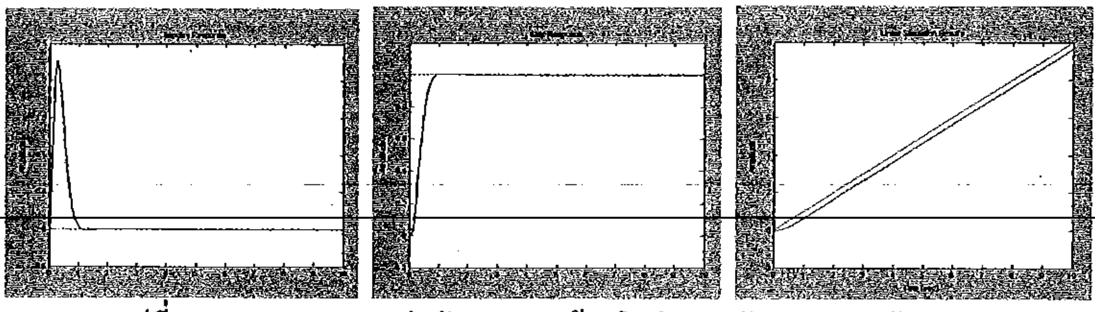
สังเกตว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย มีค่าที่สภาวะคงตัวอยู่ที่ประมาณ 0.22 ซึ่งสอดคล้องกับค่าที่ได้จากการคำนวณได้จากสูตร

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{-1.9198s^2 - 0.1899s + 4394.3}{s^4 + 58.6116s^3 + 1107.3s^2 + 7472.9s + 20109}\right)\frac{1}{s} \tag{3.36}$$

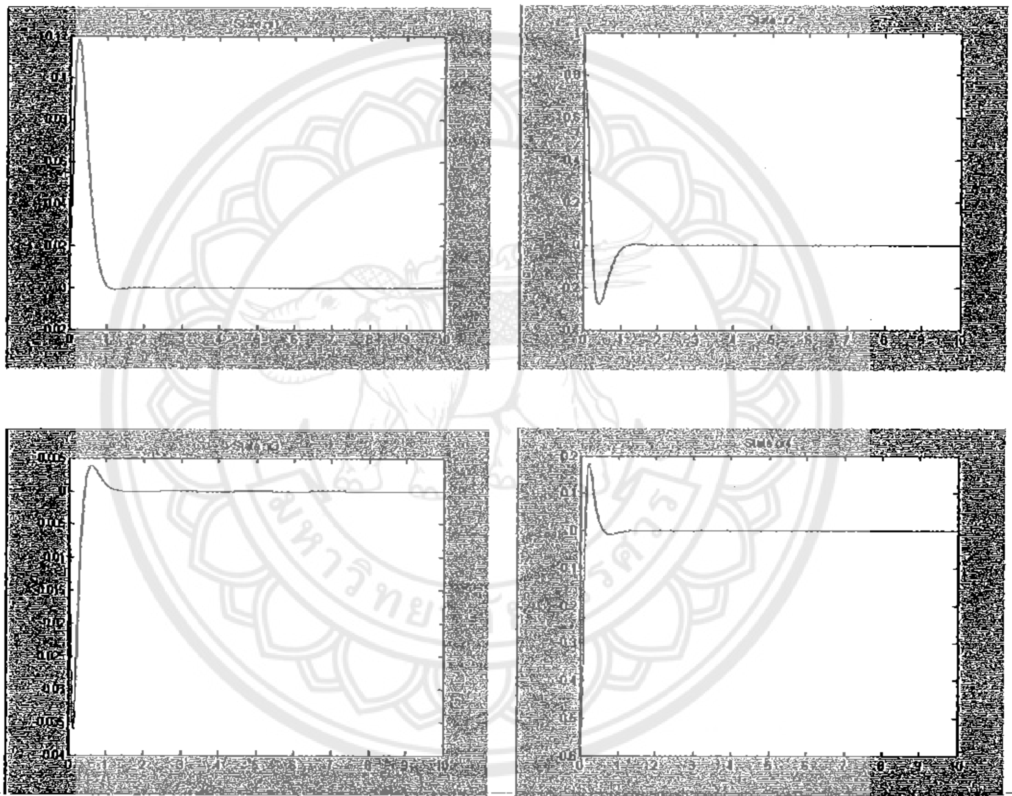
$$= \frac{4394.3}{20109} = 0.2185$$

เพื่อให้ผลตอบสนองที่ได้มีค่าเท่ากับ 1 จึงต้องชดเชยด้วยอัตราขยาย 4.5762 ซึ่งผลตอบสนองของระบบที่มีต่อสัญญาณอ้างอิงทั้งสามหลังชดเชยด้วยอัตราขยายดังกล่าว แสดงในรูปที่ 3.21



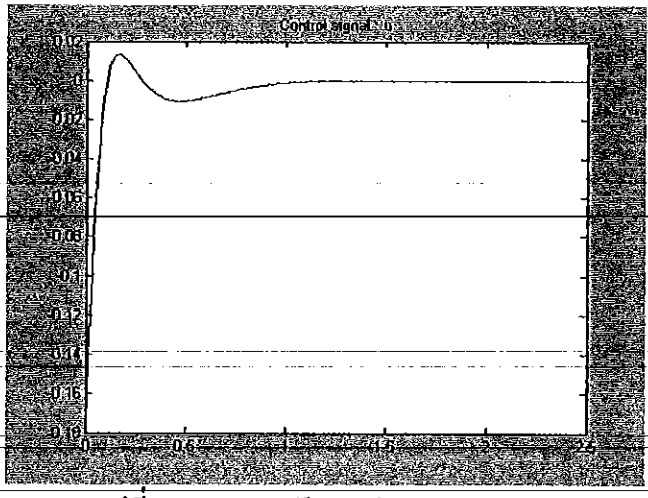
รูปที่ 3.21 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้าชนิดต่างๆ หลังการชดเชยสัญญาณ

จะมีเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะทั้งสี่ตัวของระบบ ดังรูป 3.22



รูปที่ 3.22 แสดงเส้นทางเคลื่อนที่ของสถานะที่ออกแบบด้วยวิธีวางขั้ว

และระบบจะมีการใช้ปริมาณสัญญาณควบคุมเป็นดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.23 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุม

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี LQR

สมมุติให้ Q และ R เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ นั่นคือ

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ R=1$$

นำเมทริกซ์ Q และ R แทนลงในสมการริคคาติเชิงพีชคณิต

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0$$

ดังนั้น P ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น คือ

$$P=\begin{bmatrix}1.2902&0.1878&1.9770&-0.0184\\0.1878&0.1622&1.6228&-0.0202\\1.9770&1.6228&28.5894&-0.0942\\-0.0184&-0.0202&-0.0942&0.0146\end{bmatrix} \tag{3.37}$$

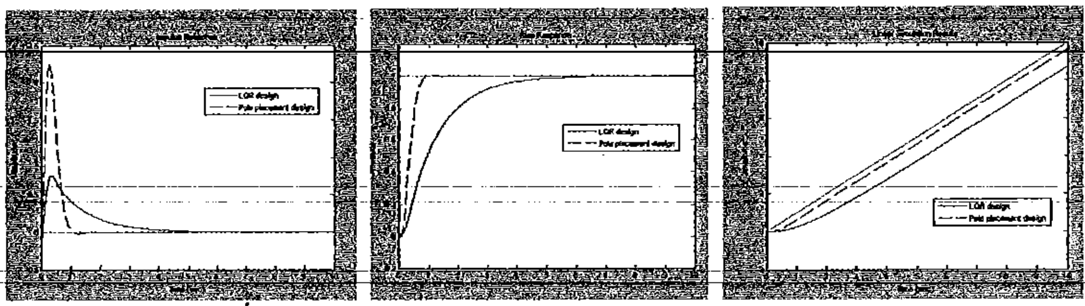
นำเมทริกซ์ P ที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่2.27 เพื่อหาค่าในเมทริกซ์ที่นำมาป้อนกลับให้ระบบจะได้

$$K=R^{-1}B^TP=\begin{bmatrix}1&0.7524&10.3173&0.2174\end{bmatrix} \tag{3.38}$$

และสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ออกแบบด้วยวิธี LQR ได้จาก

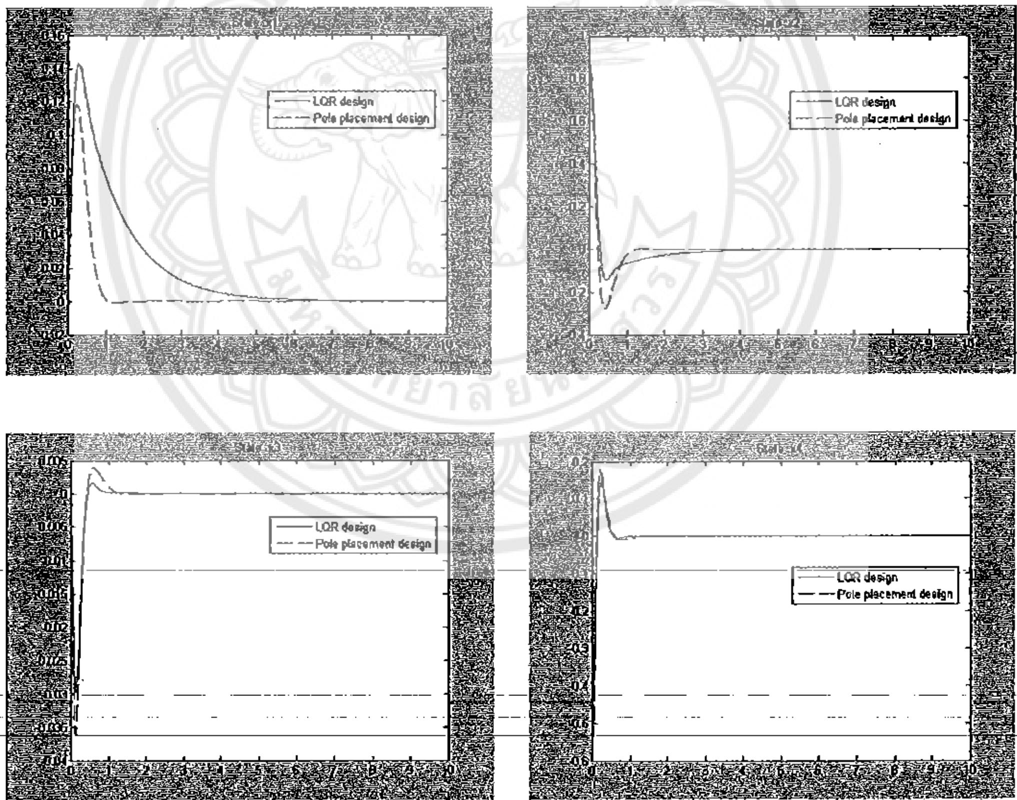
$$\begin{aligned}\frac{Y}{R}&=C\left(sI-A+BK\right)^{-1}B\\ \frac{Y}{R}&\approx\frac{-1.9198s^2-0.1899s+4394.3}{s^4+60.9259s^3+832.8580s^2+5669.3s+4394.3}\end{aligned} \tag{3.39}$$

ผลตอบสนองของระบบที่ออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วและวิธี LQR ต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงในรูปที่3.24



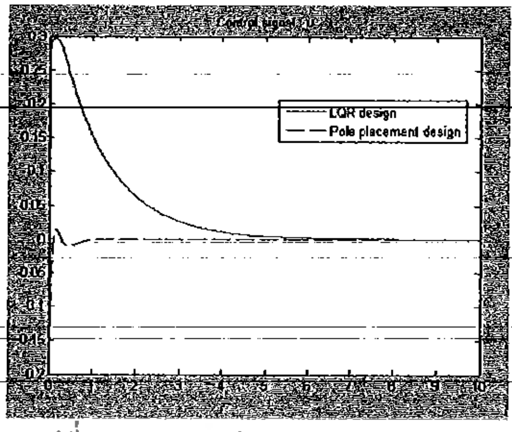
รูปที่ 3.24 แสดงผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้ารูปแบบต่างๆ
ที่ออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วและวิธี LQR

เมื่อพิจารณาเส้นทางของสถานะจะพบว่า เส้นทางการเดินของ x_1, x_2, x_3, x_4 ตามลำดับ เป็นดังนี้



รูปที่ 3.25 แสดงเส้นทางเคลื่อนที่ของสถานะที่ออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วและวิธี LQR

ปริมาณสัญญาณควบคุมของระบบ คือ



รูปที่ 3.26 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุม

จะเห็นว่าสถานะที่ 1 เข้าสู่สภาวะคงที่ช้ากว่า ดังนั้นผู้ออกแบบจึงควรเพิ่มน้ำหนักที่สถานะที่1 (x_1)

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

นำเมทริกซ์ Q และ R แทนลงในสมการริคคาติเชิงพีชคณิต

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

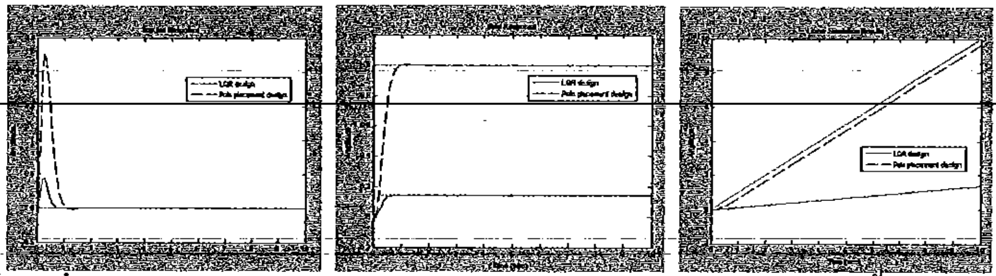
ดังนั้น P ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น คือ

$$P = \begin{bmatrix} 15.1694 & 1.6563 & 13.2363 & -0.2307 \\ 1.6563 & 0.3565 & 3.2994 & -0.0463 \\ 13.2363 & 3.2994 & 44.5402 & -0.2970 \\ -0.2307 & -0.0463 & -0.2970 & 0.0185 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

นำเมทริกซ์ P ที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่2.27 เพื่อหาค่าในเมทริกซ์ที่นำมาป้อนกลับให้ระบบ จะได้

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} 7.0711 & 1.6073 & 18.2633 & 0.1120 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอ้างอิงทั้ง 3 แบบ แสดงในรูปที่3.27



รูปที่ 3.27 แสดงผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้ารูปแบบต่างๆ หลังจากปรับน้ำหนัก Q

จากรูปที่ 3.27 จะเห็นว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย มีค่าที่สภาวะคงตัวอยู่ที่ประมาณ 0.15 ซึ่งสอดคล้องกับค่าที่ได้จากการคำนวณได้จากสูตร

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

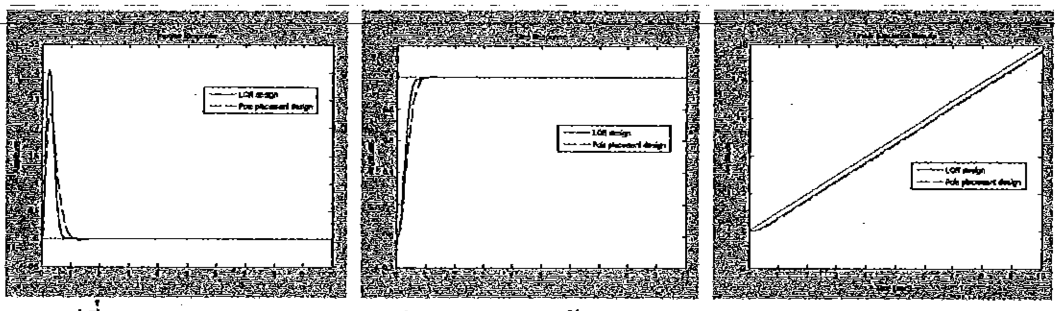
ซึ่งฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้คือ

$$\frac{-1.9198s^2 - 0.1899s + 4394.3}{s^4 + 64.9275s^3 + 1084.7s^2 + 9425.8s + 31072}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

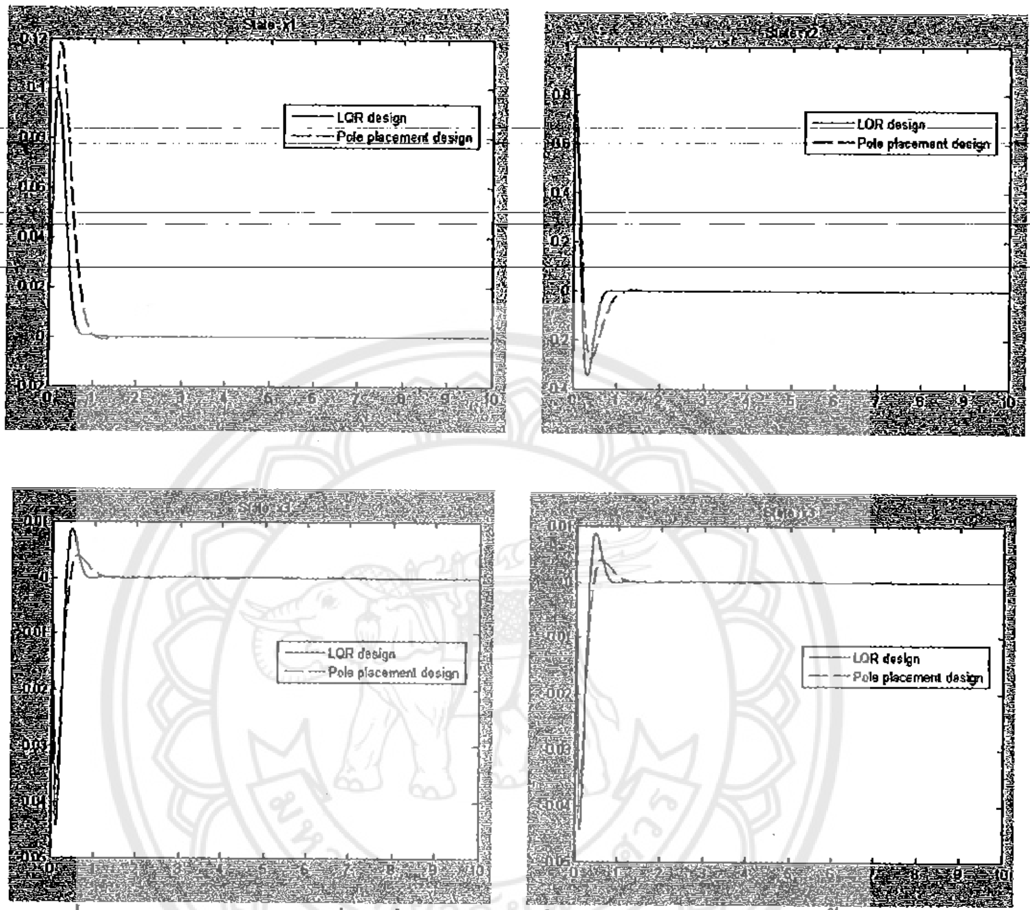
$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{-1.9198s^2 - 0.1899s + 4394.3}{s^4 + 64.9275s^3 + 1084.7s^2 + 9425.8s + 31072}\right)\frac{1}{s} \\ &= \frac{4394.3}{31072} = 0.1414 \end{aligned}$$

เพื่อให้ผลตอบสนองที่ได้มีค่าเท่ากับ 1 จึงต้องชดเชยด้วยอัตราขยาย 7.0710 ซึ่งผลตอบสนองของระบบที่มีต่อสัญญาณอ้างอิงทั้งสามหลังชดเชยด้วยอัตราขยายดังกล่าว แสดงในรูปที่ 3.28



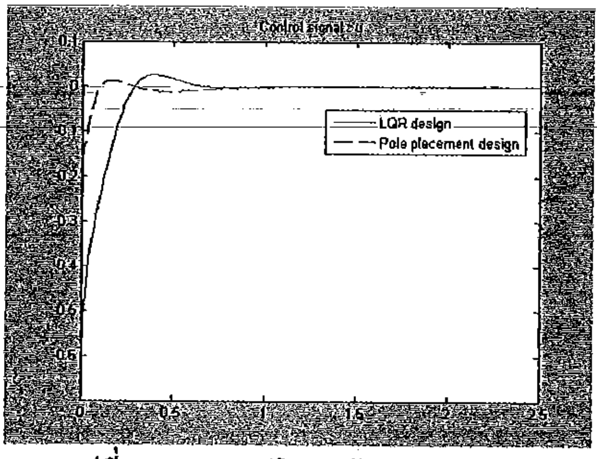
รูปที่ 3.28 แสดงผลตอบสนองต่อสัญญาณขาเข้ารูปแบบต่างๆ หลังจากชดเชยสัญญาณ

หากพิจาณาที่เส้นทางของตัวแปรสถานะพบว่า เส้นทางการเดินของ x_1, x_2, x_3, x_4 ตามลำดับ เป็นดังนี้



รูปที่ 3.29 แสดงเส้นทางเคลื่อนที่ของสถานะที่ออกแบบด้วยวิธีการวางขั้วและวิธี LQR

ปริมาณสัญญาณควบคุมคือ



รูปที่ 3.30 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุม

3.2 การออกแบบโปรแกรม

การออกแบบ GUI เพื่อช่วยในการศึกษาระบบควบคุม(control system) จะต้องคำนึงถึงหลายปัจจัยได้แก่

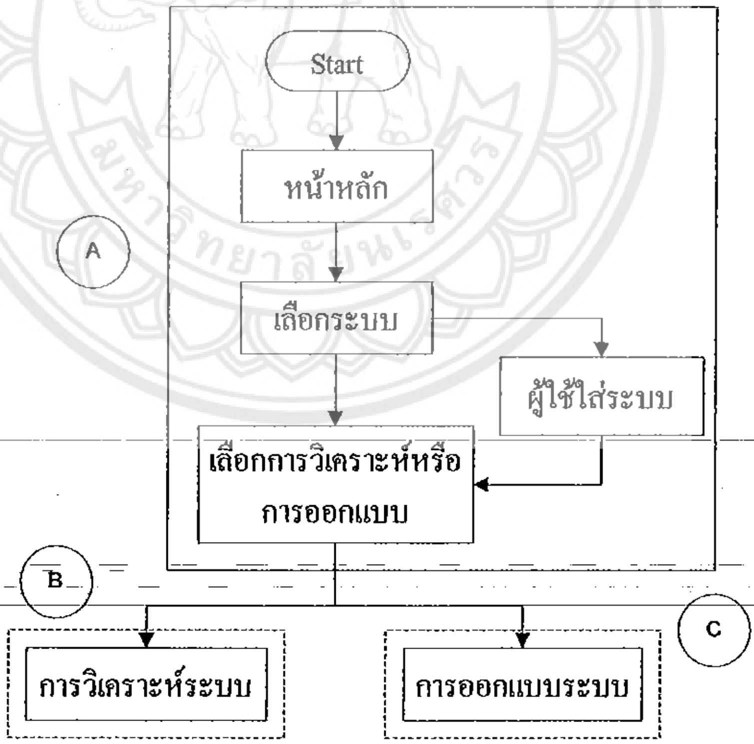
1. ความสะดวกต่อการใช้งาน คือ ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องทราบคำสั่งหรือการใช้งานของ MATLAB แต่สามารถใช้งานโปรแกรมได้ หรือผู้ที่ทราบคำสั่งของ MATLAB แล้วจะทำให้สามารถทำงานได้สะดวกรวดเร็วขึ้น

2. มีรูปแบบที่ผู้ใช้คุ้นเคย เช่น ปุ่ม push button, radio button, Edit text และ static text เป็นต้น ที่ผู้ใช้สามารถใช้ในการติดต่อกับโปรแกรมเพื่อแสดงผลที่ได้จากการคำนวณของระบบควบคุมตามที่ต้องการ

3. โปรแกรมสามารถใช้งานได้ตรงตามที่ต้องการ ผู้ใช้สามารถใช้งานโปรแกรมได้อย่างเต็มที่ตรงตามความต้องการ

3.2.1 ส่วนประกอบของโปรแกรม

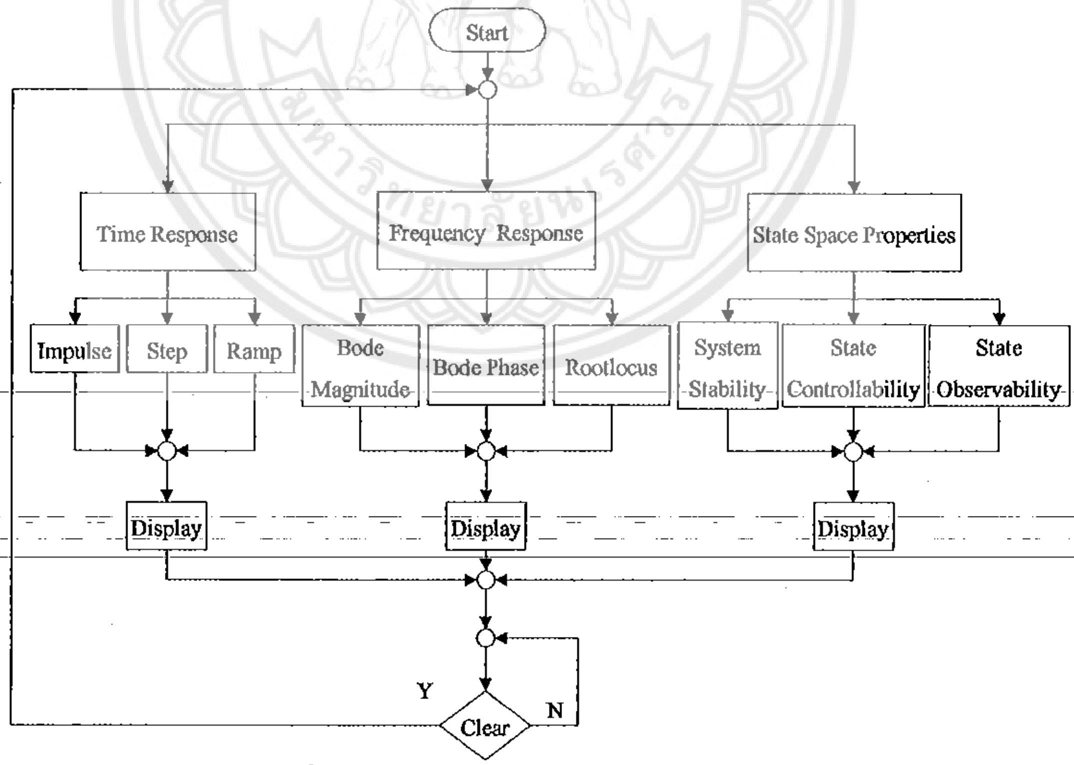
ส่วนประกอบของโปรแกรมนั้นแยกออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้



รูปที่ 3.31 แผนผังของโปรแกรมรวม

- ส่วน A คือ ส่วนการเริ่มต้นโปรแกรมซึ่งประกอบไปด้วย
  - หน้าหลักของโปรแกรม
  - หน้าการเลือกระบบ แบ่งออกเป็น 3 ส่วนได้แก่
    1. ระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรงซึ่งค่าของฟังก์ชันถ่ายโอนและพารามิเตอร์ A, B, C, D ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปริภูมิสถานะได้ถูกกำหนดไว้
    2. ระบบควบคุมแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวซึ่งค่าของค่าของฟังก์ชันถ่ายโอนและพารามิเตอร์ A, B, C, D ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปริภูมิสถานะ ได้ถูกกำหนดไว้
    3. ระบบที่ผู้ใช้สามารถเลือกใส่เองได้ กล่าวคือผู้ใช้สามารถเลือกใส่ค่าของฟังก์ชันถ่ายโอนหรือพารามิเตอร์ A, B, C, D ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปริภูมิสถานะได้ตามต้องการ ซึ่งการใส่ระบบของผู้ใช้นั้นสามารถใส่อันดับขั้นของระบบได้ไม่เกิน 10
  - หน้าการเลือกระหว่างการวิเคราะห์ (System Analysis) และการออกแบบ (System Design)

- ส่วน B คือ ส่วนของการวิเคราะห์ระบบซึ่งมีส่วนประกอบดังนี้

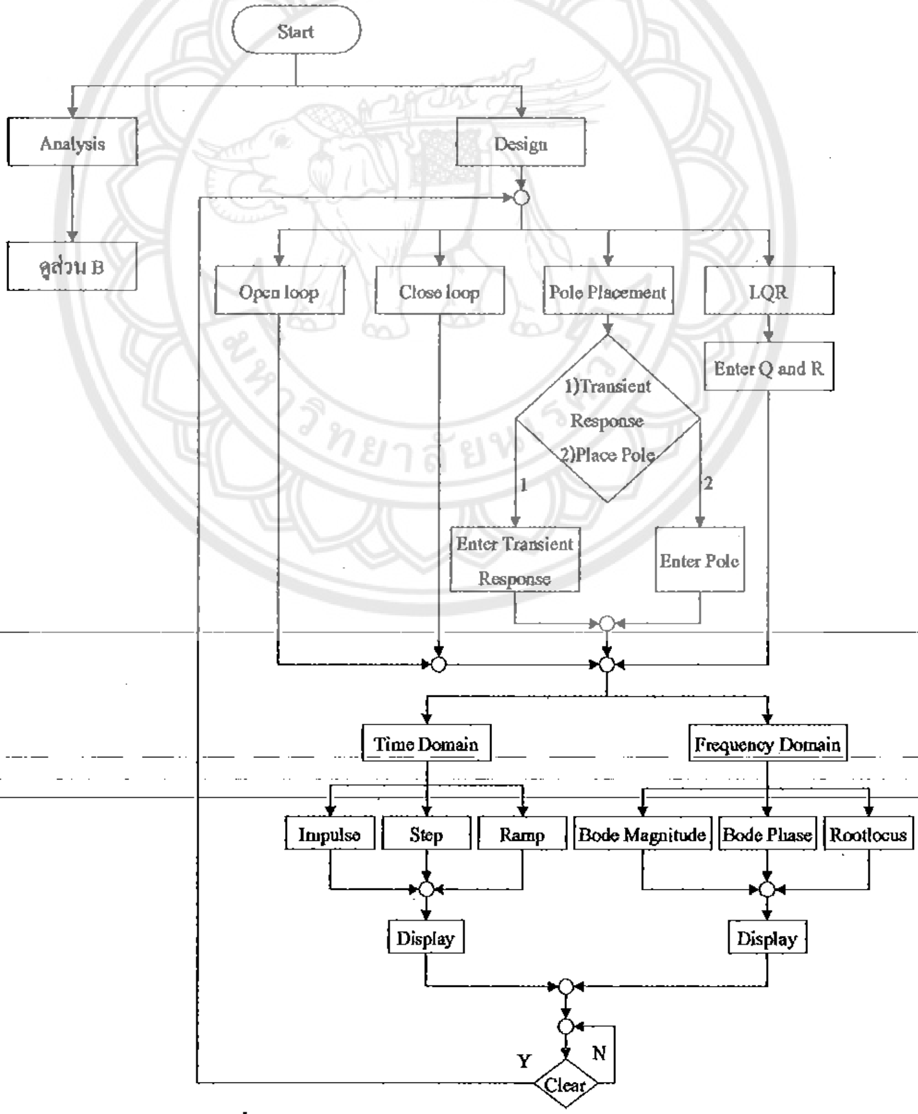


รูปที่ 3.32 แผนผังของส่วนการวิเคราะห์ระบบ

ส่วนของการวิเคราะห์ระบบนั้นแบ่งออกเป็น 3 ส่วน ได้แก่

1. ส่วนของ Time Response ประกอบไปด้วย Impulse, Step และ Ramp เพื่อดูกราฟผลตอบสนองของระบบ
2. ส่วนของ Frequency Response ประกอบไปด้วย Bode Magnitude, Bode Phase เพื่อดูผลตอบสนองของระบบ และ Rootlocus เพื่อแสดงเส้นทางการเดินราก
3. ส่วนของ State Space Properties ประกอบไปด้วย ความเสถียรภาพ, ความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ เพื่อดู ความเสถียรภาพ, ความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ของระบบซึ่งแสดงออกมาเป็นข้อความ

- ส่วน C คือ ส่วนของการออกแบบระบบ ซึ่งมีส่วนประกอบดังนี้



รูปที่ 3.33 แผนผังของส่วนการออกแบบระบบ

ส่วนของการออกแบบระบบนั้นแบ่งออกเป็น 4 ส่วน ได้แก่

1. ส่วนของ Open loop คือ ไม่มีการนำค่าสัญญาณขาออกที่ได้กลับมาเปรียบเทียบกับค่าสัญญาณขาเข้าที่ป้อนให้กับระบบ
2. ส่วนของ Closed loop คือ ระบบที่นำสัญญาณขาออกของระบบป้อนกลับมาเปรียบเทียบกับสัญญาณขาเข้าที่ป้อนให้กับระบบ
3. ส่วนของ Pole Placement คือ การกำหนดตำแหน่งขั้วหรือผลตอบสนองของระบบและออกแบบตัวควบคุมที่จะได้ตำแหน่งขั้วหรือผลตอบสนองตามต้องการ
4. ส่วนของ LQR คือ การออกแบบเพื่อหาค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ(cost)ที่เหมาะสมที่สุด โดยการปรับค่าเมทริกซ์น้ำหนัก Q เพื่อควบคุมสถานะของระบบ และปรับค่าเมทริกซ์ R เพื่อควบคุมสัญญาณควบคุม ซึ่งจะทำให้ผลตอบสนองตามที่ต้องการ โดยมีปริมาณสัญญาณควบคุมที่น้อย

จากที่ได้กล่าวมาเป็นการแสดงการทำงานของโปรแกรมทั้งหมด สำหรับการใช้งาน GUI นั้นสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากภาคผนวก

บทที่ 4

การทำงานของโปรแกรม

4.1 การใช้งานของโปรแกรม

4.1.1 เริ่มโปรแกรม

เมื่อเปิดโปรแกรมขึ้นมาผู้ใช้จะพบกับโปรแกรมส่วนที่ 1 (Main page) ดังรูปที่ 4.1 ซึ่งในตอนแรกทั้งปุ่ม Start และปุ่ม Exit program จะยังไม่ปรากฏ แต่จะเป็นการแสดงภาพเคลื่อนไหวเพื่อนำเข้าสู่โปรแกรม เมื่อภาพเคลื่อนไหวนั้นจบลงจะปรากฏปุ่มทั้งสองขึ้นมา ในกรณีที่ผู้ใช้ไม่ต้องการรอดูภาพเคลื่อนไหวจนจบสามารถข้ามขั้นตอนนี้ได้โดยการกดปุ่มใดปุ่มหนึ่งบนคีย์บอร์ดหนึ่งครั้ง โปรแกรมจะปรากฏปุ่มทั้งสองขึ้นมาให้เช่นกัน

หลังจากปุ่มทั้งสองปรากฏออกมาแล้ว หากผู้ใช้เลือกกดที่ปุ่ม Exit program จะเป็นการออกจากโปรแกรมและเป็นการปิดโปรแกรม แต่หากผู้ใช้เลือกกดปุ่ม Start จะเป็นการเข้าสู่หน้าถัดไปของโปรแกรม นั่นคือ ส่วนที่ 2 (System select page) ซึ่งจะกล่าวต่อไปในหัวข้อ 4.1.2

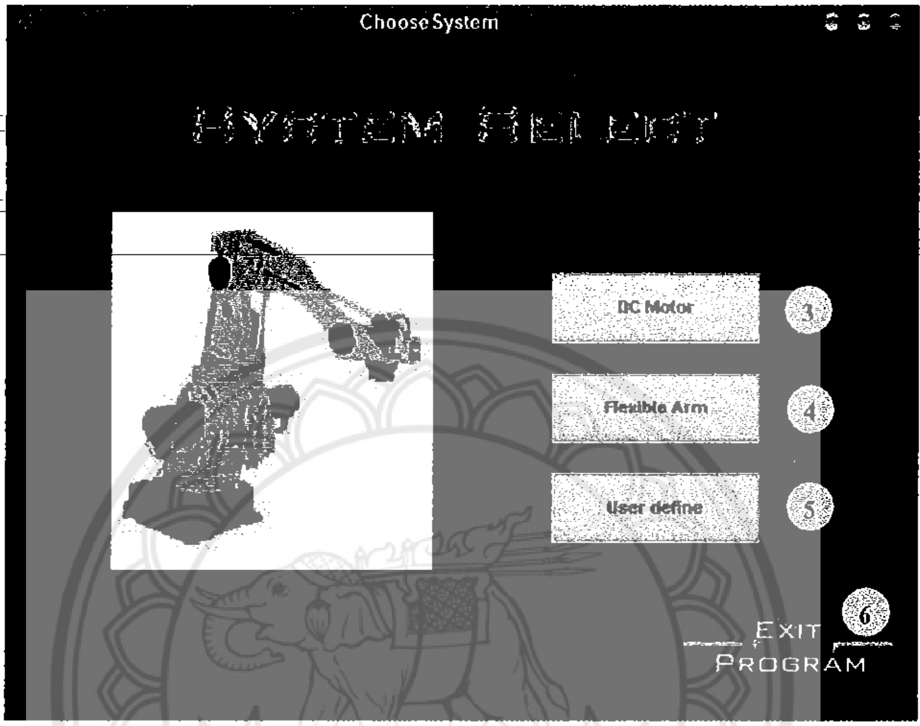
รูปที่ 4.1 ส่วนประกอบของส่วนที่1 " main page "

หมายเลข 1 ปุ่ม start สำหรับใช้ในการเข้าสู่ตัวโปรแกรมต่อไป

หมายเลข 2 ปุ่ม exit program สำหรับใช้ในการออกจากโปรแกรม

4.1.2 เลือกระบบ

ส่วนนี้เป็นส่วนที่ผู้ใช้ต้องเลือกระบบเพื่อนำไปวิเคราะห์หรือออกแบบตัวควบคุมในขั้นถัดไป โดยเลือกจากปุ่มดังแสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ส่วนประกอบของส่วนที่ 2 " system select "

หมายเลข 3 ปุ่มที่ใช้เลือกระบบของ DC Motor

หมายเลข 4 ปุ่มที่ใช้เลือกระบบของ Flexible arm

หมายเลข 5 ปุ่มที่จะเลือกรับระบบที่ผู้ใช้งานต้องการ

หมายเลข 6 ปุ่มที่ใช้ออกจากโปรแกรม

หากผู้ใช้เลือกปุ่ม DC Motor โปรแกรมจะนำสมการระบบของ DC Motor ที่กำหนดไว้ไปคำนวณ คือ

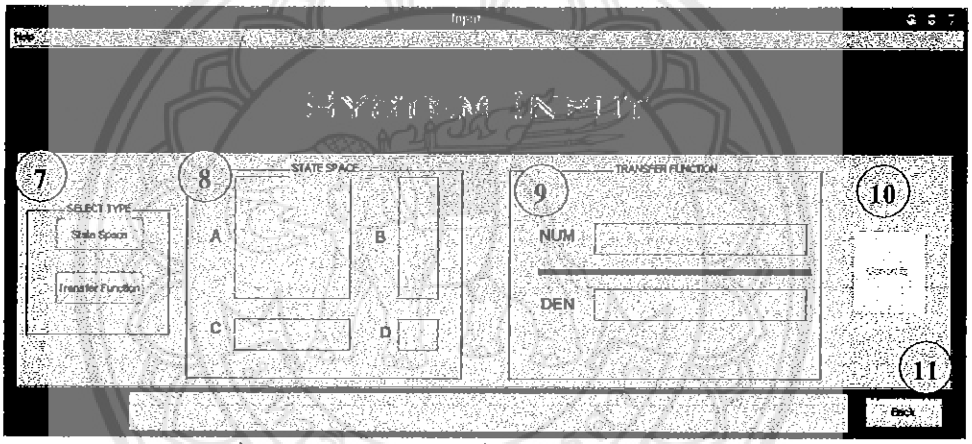
$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -0.1 & 100\\ 0 & -1 & -10\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ D=0$$

หากผู้ใช้เลือกปุ่ม Flexible arm โปรแกรมจะนำสมการระบบของ Flexible arm ที่กำหนดไว้ไปคำนวณ คือ

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -13.18 & -559.78 & -45.21\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 7.85\\ 0\\ 25.71\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.38 & 0\end{bmatrix},\ D=0$$

ส่วนในกรณีที่ผู้ใช้เลือกกดที่ปุ่ม User Define นั่นคือผู้ใช้ต้องเป็นผู้ป้อนระบบด้วยตนเอง สำหรับปุ่มสุดท้าย คือ ปุ่ม Exit program นั้น จะทำการปิดโปรแกรมลง เมื่อถูกผู้ใช้กดที่ปุ่มนี้

4.1.3 การป้อนระบบที่ผู้ใช้งานต้องการ



รูปที่ 4.3 ส่วนประกอบของส่วนที่3 " system input "

หมายเลข7 ปุ่มเลือกลักษณะการป้อนระบบระหว่าง State space กับ Transfer function

หมายเลข8 ส่วนการป้อนข้อมูลแบบ State space ประกอบด้วยเมทริกซ์ A, B, C, D

หมายเลข9 ส่วนการป้อนข้อมูลแบบ Transfer function ประกอบด้วยเศษและส่วน

หมายเลข10 ปุ่มที่ใช้ประมวลผลระบบที่รับมาจากหมายเลข 8 หรือ 9 เพื่อนำระบบไปคำนวณ

หมายเลข11 ปุ่มที่ใช้ในการย้อนกลับไปที่หน้าต่างก่อนหน้านี้

หากผู้ใช้งานเลือกกดปุ่ม User define (ปุ่มหมายเลข 5 ในรูปที่ 4.2) โปรแกรมจะนำเข้าสู่ส่วนถัดไปนั่นคือ ส่วนของการป้อนระบบที่ผู้ใช้งานต้องการโดยส่วนประกอบของส่วนนี้แสดงไว้ในรูปที่ 4.3 เมื่อผู้ใช้เข้ามาถึงหน้านี้แล้วจะพบว่า ปุ่มต่างๆถูกล็อคไว้มีเพียงปุ่มที่อยู่ในส่วนของหมายเลข 7 เท่านั้นที่สามารถเลือกได้ ผู้ใช้งานสามารถเลือกกดปุ่ม Help ในแถบเมนูเพื่อศึกษารายละเอียดถึงวิธีในการป้อนค่าต่างๆ

ขั้นแรกผู้ใช้ต้องเลือกว่าต้องการป้อนค่าในรูปแบบปริภูมิสถานะหรือฟังก์ชันถ่ายโอน เมื่อเลือกรูปแบบแล้วจึงจะสามารถป้อนค่าลงไปในช่องสำหรับใส่ค่าได้

- การป้อนค่าแบบปริภูมิสถานะ

เมทริกซ์ A จะต้องป้อน A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

ตัวอย่างที่ 4.1 : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 6\\ 7 & 8 & -9\end{bmatrix}$

การใส่ค่า : 1 2 3 ; 4 -5 6 ; 7 8 -9 หรือ [1 2 3 ; 4 -5 6 ; 7 8 -9]

เมทริกซ์ B จะต้องเป็นเมทริกซ์ที่จำนวนแถวเท่ากับ A และมีหลักเดียว

ตัวอย่างที่ 4.2 : $B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

การใส่ค่า : 0;0;1 หรือ [0;0;1]

เมทริกซ์ C จะต้องเป็นเมทริกซ์ที่จำนวนหลักเท่ากับ A และมีแถวเดียว

ตัวอย่างที่ 4.3 : $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

การใส่ค่า : 1 0 0 หรือ [1 0 0]

เมทริกซ์ D เป็นเมทริกซ์ขนาด 1x1

ตัวอย่างที่ 4.4 : $D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$

การใส่ค่า : 0 หรือ [0]

- การป้อนค่าแบบฟังก์ชันถ่ายโอน

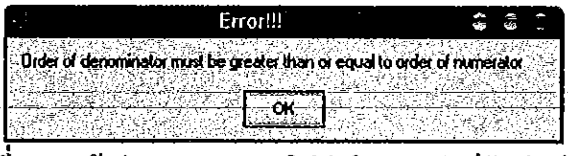
ค่าที่ป้อนจะอยู่ในโดเมนของลาปลาส ดังนั้นการป้อนค่าจะต้องป้อนเป็นเมทริกซ์แถวซึ่งค่าภายในเมทริกซ์ จะเป็นการใส่ค่าสัมประสิทธิ์เรียงลำดับจากกำลังสูงสุดไปหาต่ำสุดและกำลังสูงสุดของตัวส่วนจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับตัวเศษเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4.5 : $NUM=s^2+2s+3$

การใส่ค่า : 1 2 3 หรือ [1 2 3]

หากป้อนข้อมูลได้ถูกต้องแล้วให้ผู้ใช้กดที่ปุ่ม Generate โปรแกรมจะประมวลผลเพื่อส่งค่าของระบบไปคำนวณในส่วนถัดไป แต่ถ้าหากผู้ใช้ป้อนค่าผิดโปรแกรมจะแสดงหน้าต่างเพื่อเตือนว่าผู้ใช้กรอกข้อมูลผิดซึ่งจะแสดงตามรูปที่4.4 และ 4.5 และในกรณีที่ผู้ใช้กดปุ่ม Back (หมายเลข 11 ในรูปที่ 4.3) โปรแกรมจะย้อนกลับไปที่หน้าก่อนหน้านี้

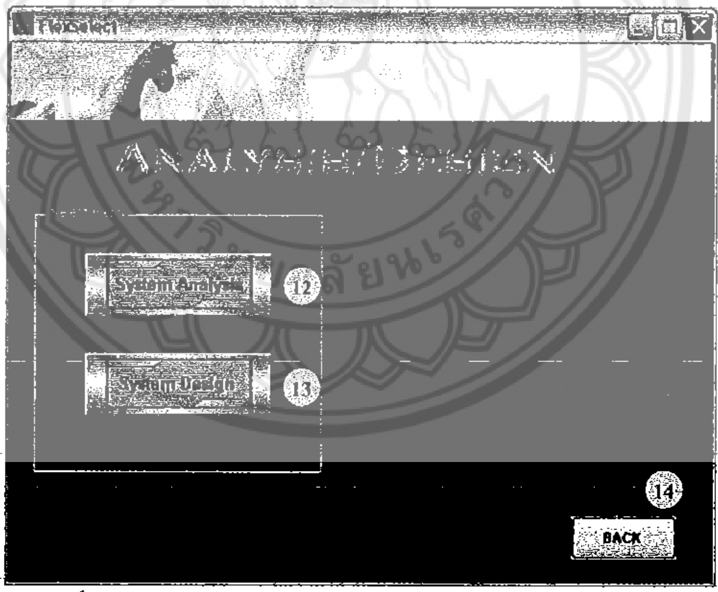
รูปที่4.4 หน้าต่างรายงานการใส่ค่าผิดของค่าปริภูมิสถานะ



รูปที่ 4.5 หน้าต่างรายงานการใส่ค่าผิดของฟังก์ชันถ่ายโอน

4.1.4 การเลือกส่วนวิเคราะห์ระบบหรือส่วนออกแบบระบบ

หลังจากผู้ใช้ได้เลือกระบบที่ต้องการแล้ว โปรแกรมจะมาถึงส่วนนี้ซึ่งจะมีให้ผู้ใช้เลือกว่าจะทำการวิเคราะห์ระบบหรือออกแบบตัวควบคุม ดังรูปที่ 4.6 ซึ่งหากผู้ใช้เลือก System Analysis โปรแกรมจะนำเข้าสู่ส่วนการวิเคราะห์ระบบหากผู้ใช้เลือกส่วน System Design โปรแกรมจะนำเข้าสู่ส่วนการออกแบบตัวควบคุมระบบ



รูปที่ 4.6 ส่วนประกอบของส่วนที่4 "analysis or design"

หมายเลข12 ปุ่มที่จะเข้าสู่การวิเคราะห์ระบบ

หมายเลข13 ปุ่มที่จะเข้าสู่การออกแบบระบบ

หมายเลข14 ปุ่มที่ใช้ในการย้อนกลับไปที่หน้าก่อนหน้านี้

4.1.5 การวิเคราะห์ระบบ

หลังจากที่ผู้ใช้เลือกที่จะวิเคราะห์ระบบโปรแกรมจะเข้าสู่หน้าการวิเคราะห์ ซึ่งโปรแกรมสามารถวิเคราะห์ได้ทั้งโดเมนเวลา โดเมนความถี่ คุณสมบัติเชิงปริภูมิสถานะของระบบ รวมทั้งระบุตำแหน่งของขั้วและศูนย์ของระบบได้

- การวิเคราะห์ในโดเมนเวลา

ผู้ใช้สามารถดูผลตอบสนองของระบบได้ โดยการเลือกสัญญาณขาเข้าจากส่วนของหมายเลข 19 ในรูปที่ 4.7 ได้แก่ Impulse response , Step response และ Ramp response หลังจากนั้นผลตอบสนองเชิงกราฟจะถูกแสดงที่ตำแหน่งหมายเลข 16 และค่าพารามิเตอร์ของระบบที่มีต่อสัญญาณขาเข้าแบบ step จะแสดงในตำแหน่งหมายเลข 23

- การวิเคราะห์ในโดเมนความถี่

ผู้ใช้สามารถดูผลตอบสนองเชิงความถี่ได้จากการกดปุ่มในส่วนของหมายเลข 20 ในรูปที่ 4.7 ได้แก่ Bode Magnitude , Bode Phase และ Root locus จากนั้นผลตอบสนองเชิงกราฟจะถูกแสดงที่ตำแหน่งหมายเลข 17 และค่าพารามิเตอร์ของการวิเคราะห์แบบโบเด้ (Bode)ในตำแหน่งหมายเลข 23

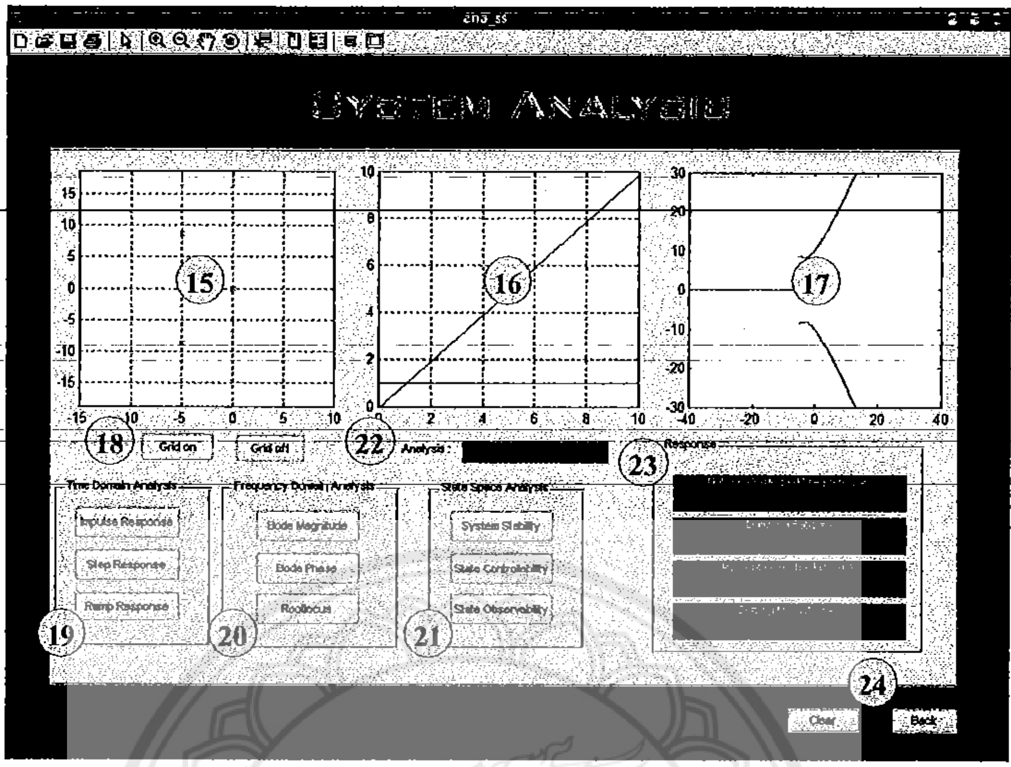
- คุณสมบัติเชิงปริภูมิสถานะของระบบ

ผู้ใช้สามารถดูคุณสมบัติเชิงปริภูมิสถานะของระบบได้แก่ เสถียรภาพ, ความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ของระบบ โดยการเลือกกดที่ปุ่มในตำแหน่งที่ 21 แล้วโปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์ออกมาที่ช่องว่างหมายเลข 22 ในรูปที่ 4.7

- ตำแหน่งศูนย์และขั้ว

โปรแกรมจะทำการคำนวณหาตำแหน่งของขั้วและศูนย์จากระบบที่ผู้ใช้เลือก แล้วแสดงบนกราฟในส่วนของหมายเลข 15 ดังรูปที่ 4.7

ผู้ใช้สามารถกลับไปยังหน้าก่อนหน้านี้ได้โดยกดปุ่ม Back และสามารถล้างหน้าจอได้โดยกดที่ปุ่ม Clear



รูปที่ 4.7 ส่วนประกอบของส่วนที่5 " system analysis "

หมายเลข15 ส่วนที่แสดงตำแหน่งของขั้วและศูนย์ของระบบ

หมายเลข16 ส่วนแสดงสัญญาณขาเข้าเทียบกับสัญญาณขาออก

หมายเลข17 ส่วนแสดงผลตอบสนองในโดเมนความถี่

หมายเลข18 ปุ่มเปิด/ปิด การแสดงเส้นกริดในกราฟ

หมายเลข19 ส่วนสัญญาณขาเข้าของการวิเคราะห์ระบบในโดเมนของเวลา

หมายเลข20 ส่วนในการวิเคราะห์ระบบในโดเมนของความถี่

หมายเลข21 ส่วนในการตรวจสอบเสถียรภาพ ความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ของระบบ

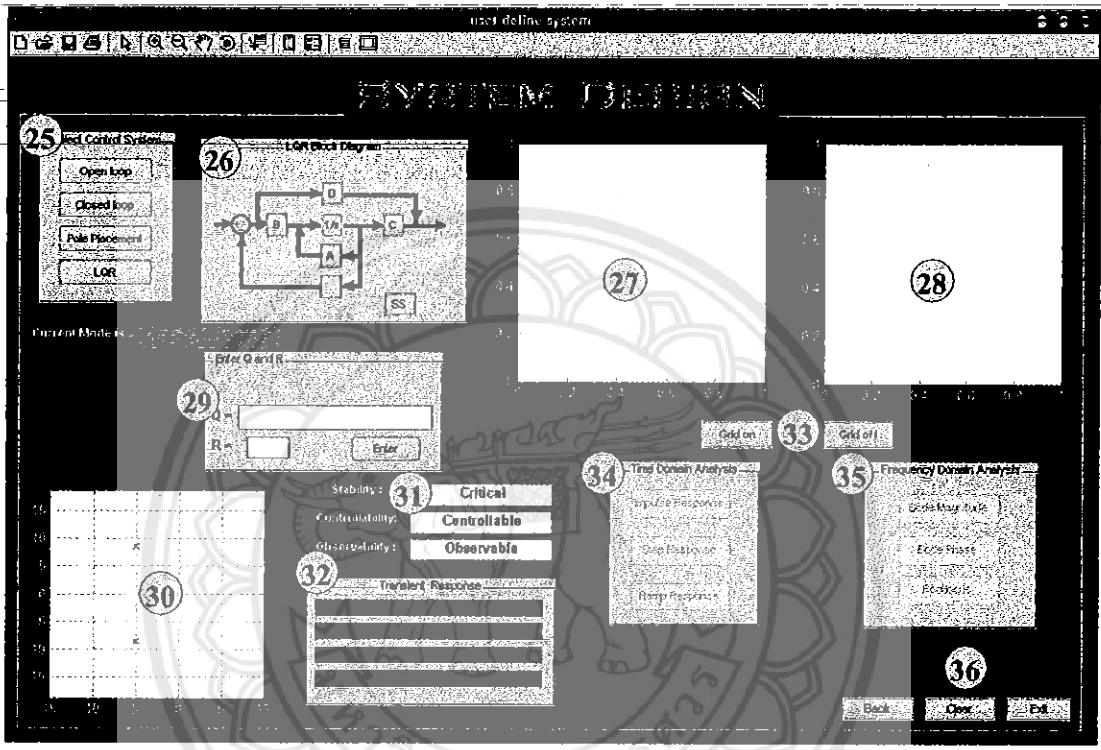
หมายเลข22 ส่วนที่แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพ ความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ของระบบ

หมายเลข23 ส่วนแสดงค่าพารามิเตอร์ของระบบที่มีต่อสัญญาณขาเข้าแบบ step และค่าพารามิเตอร์ของการวิเคราะห์แบบโบเด้

หมายเลข24 ปุ่มที่ใช้ล้างหน้านี้ให้กลับสู่สถานะเริ่มต้นและปุ่มที่ใช้ในการย้อนกลับไปที่หน้าก่อนหน้านี้

4.1.6 การออกแบบตัวควบคุมระบบ

เมื่อผู้ใช้เลือกที่จะนำระบบมาออกแบบตัวควบคุมโปรแกรมจะเข้าสู่หน้าการออกแบบระบบ ดังแสดงในรูปที่ 4.8 ผู้ใช้จะสามารถเลือกใช้วิธีการควบคุมได้ดังนี้ Open Loop, Closed Loop, Pole Placement และ LQR หลังจากออกแบบตัวควบคุมระบบแล้วผู้ใช้สามารถตรวจสอบผลตอบสนองในโดเมนเวลา โดเมนความถี่ ทั้งในเชิงตัวเลขและเชิงกราฟได้ด้วย



รูปที่ 4.8 ส่วนประกอบของส่วนที่6 " system design "

หมายเลข25 ปุ่มให้เลือกวิธีการออกแบบระบบ

หมายเลข26 แผนภาพกล่อง

หมายเลข27 ส่วนแสดงสัญญาณขาเข้าเทียบกับสัญญาณขาออก

หมายเลข28 ส่วนแสดงผลตอบสนองในโดเมนความถี่

หมายเลข29 ส่วนการรับค่าเมทริกซ์ Q และ R ในการออกแบบ LQR หรือ
ส่วนการรับค่าผลตอบสนองที่ต้องการในการออกแบบ Pole Placement

หมายเลข30 ส่วนที่แสดงตำแหน่งของขั้วและศูนย์ของระบบ

หมายเลข31 ส่วนที่แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพ ความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ของระบบ

หมายเลข32 ส่วนแสดงค่าพารามิเตอร์ของระบบที่มีต่อสัญญาณขาเข้าแบบ step และค่าพารามิเตอร์ของการวิเคราะห์แบบโบเด้

หมายเลข33 ปุ่มเปิด/ปิด การแสดงเส้นกริดในกราฟ

หมายเลข34 ส่วนสัญญาณขาเข้าของการวิเคราะห์ระบบในโดเมนของเวลา

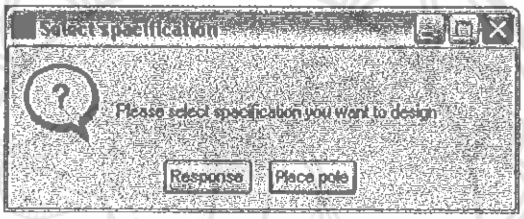
หมายเลข35 ส่วนในการวิเคราะห์ระบบในโดเมนของความถี่

หมายเลข36 ปุ่มที่ใช้ในการย้อนกลับไปที่หน้าก่อนหน้านี้, ปุ่มที่ใช้ล้างหน้านี้ให้กลับสู่สถานะเริ่มต้นและปุ่มที่ใช้ออกจากโปรแกรม

- การเลือกวิธีควบคุม

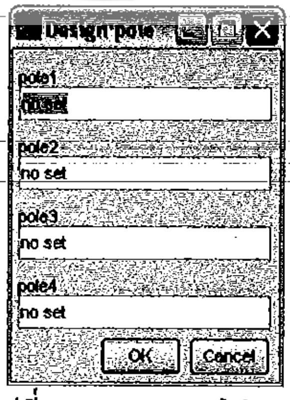
เมื่อเข้าถึงหน้านี้สิ่งแรกที่ผู้ใช้ต้องทำคือเลือกตัวควบคุมที่ต้องการออกแบบ โดยการเลือกปุ่มกดที่อยู่ในตำแหน่งหมายเลข 25 โดยโปรแกรมจะเลือกตัวควบคุมแบบ Open Loop ไว้เป็นค่าเริ่มต้นอยู่แล้ว และตำแหน่งขั้วและศูนย์ของระบบที่กำลังพิจารณาจะถูกแสดงในตำแหน่ง 30

หากผู้ใช้เลือกการควบคุมแบบ Pole Placement จะปรากฏหน้าต่างเพิ่มขึ้นมาให้เลือกว่าจะวางตำแหน่งขั้วหรือกำหนดผลตอบสนองเป้าหมายดังรูปที่ 4.9



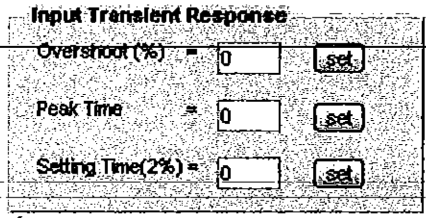
รูปที่ 4.9 หน้าต่างของการเลือกระหว่าง Response หรือ Place pole

หากผู้ใช้เลือกที่จะกำหนดตำแหน่งขั้วเองก็จะปรากฏหน้าต่างให้ใส่ค่าตำแหน่งขั้วที่ต้องการดังรูปที่ 4.10 โดยจำนวนของตำแหน่งขั้วที่ปรากฏจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนขั้วของระบบ นอกจากนี้หากผู้ใช้เลือกใส่ขั้วที่เป็นค่าเชิงซ้อน $s = \sigma + j\omega$ แล้วผู้ใช้ต้องใส่ขั้วที่เป็นค่าสังยุคเชิงซ้อน $\bar{s} = \sigma - j\omega$ ด้วยเสมอมิฉะนั้นการคำนวณอาจเกิดการผิดพลาดได้



รูปที่ 4.10 แสดงการใส่ pole

หากผู้ใช้เลือกกำหนดผลตอบสนองเป้าหมายก็จะปรากฏช่องให้ใส่ค่าที่ตำแหน่ง 29 ดังรูปที่ 4.11



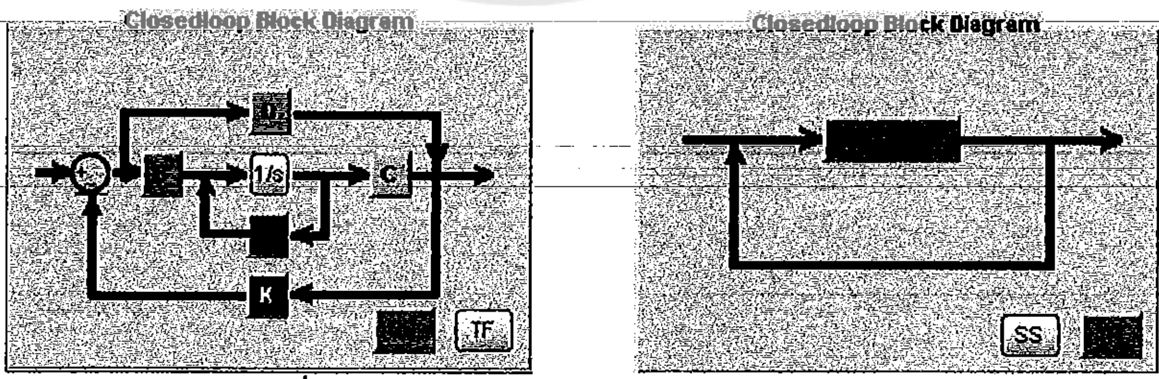
รูปที่ 4.11 แสดงการใส่ Transient Response

การกำหนดค่าผลตอบสนองเป้าหมายให้ผู้ใช้เลือกกรอกเพียงสองช่องจากทั้งหมด 3 ช่องเท่านั้นโดยหลังจากกรอกค่าของผลตอบสนองแล้วให้ผู้ใช้กดปุ่ม set เพื่อให้โปรแกรมเก็บค่านั้นไว้ เมื่อกำหนดค่าเสร็จโปรแกรมจะทำการประมวลผลได้ระบบใหม่ที่ถูกควบคุมแล้ว

หากผู้ใช้เลือกการควบคุมแบบ LQR จะปรากฏช่องให้ใส่เมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ R ในตำแหน่ง 29 ดังแสดงในรูปที่ 4.8 การใส่ค่าเมทริกซ์ Q และเมทริกซ์ R จะเหมือนกับการใส่เมทริกซ์ A,B,C,D แต่มีเงื่อนไขว่าเมทริกซ์ Q ต้องเป็นเมทริกซ์กึ่งบวกที่มีขนาดเท่ากับขนาดของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ R ต้องเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนขนาด 1x1

- การดูแผนภาพกล่อง

จากรูปที่ 4.8 ในตำแหน่งที่ 26 แสดงแผนภาพกล่องของระบบควบคุมซึ่งจะเปลี่ยนไปตามการเลือกชนิดตัวควบคุมของผู้ใช้ โดยสามารถเลือกแสดงแผนภาพกล่องของระบบที่บรรยายด้วยปริภูมิสถานะหรือบรรยายด้วยฟังก์ชันถ่ายโอนโดยการเลือกกดปุ่ม SS หรือ TF ตามลำดับดังรูปที่ 4.12 หากผู้ใช้นำเม้าส์ไปกดที่กล่องในแผนภาพจะปรากฏค่าพารามิเตอร์ในกล่องนั้นออกมา



รูปที่ 4.12 แสดงกล่องระบบควบคุม (Block Diagram)

สำหรับการตรวจสอบผลตอบสนองที่ได้หลังการออกแบบทั้งในโดเมนเวลา โดเมนความถี่ และคุณสมบัติเชิงปริภูมิสถานะของระบบมีลักษณะการทำงานเหมือนกับในส่วนของการวิเคราะห์ระบบ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

- การตรวจสอบในโดเมนเวลา

ผู้ใช้จะสามารถดูผลตอบสนองของระบบได้ โดยการเลือกสัญญาณขาเข้าจากส่วนของหมายเลข 34 ในรูป 4.8 ได้แก่ Impulse response , Step response และ Ramp response แล้วหลังจากนั้นผลตอบสนองเชิงกราฟจะถูกแสดงที่ตำแหน่งหมายเลข 27 และค่าพารามิเตอร์ของระบบที่มีต่อสัญญาณขาเข้าแบบ step จะแสดงในตำแหน่งหมายเลข 32

- การตรวจสอบในโดเมนความถี่

ผู้ใช้สามารถดูผลตอบสนองเชิงความถี่ได้จากการกดปุ่มในส่วนของหมายเลข 35 ในรูปที่ 4.8 ได้แก่ Bode Magnitude , Bode Phase และ Root locus จากนั้นผลตอบสนองเชิงกราฟจะถูกแสดงที่ตำแหน่งหมายเลข 28 และค่าพารามิเตอร์ของการวิเคราะห์แบบโบเด้ในตำแหน่งหมายเลข 32

- คุณสมบัติเชิงปริภูมิสถานะของระบบ

ในส่วนนี้แสดงถึงคุณสมบัติเชิงปริภูมิสถานะของระบบก่อนการออกแบบได้แก่ เสถียรภาพ ความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ของระบบซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ออกมาในตำแหน่งที่ 31

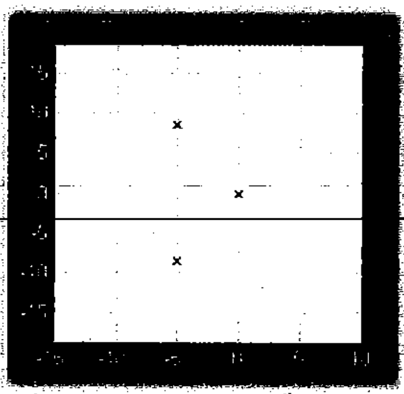
ผู้ใช้สามารถกลับไปยังหน้าก่อนหน้านี้ได้ เมื่อกดที่ปุ่ม Back ที่ตำแหน่ง 36 หรือกดปุ่ม Clear เพื่อล้างหน้านี้ให้กลับไปเหมือนตอนแรก แต่ถ้าหากต้องการที่เลิกใช้โปรแกรมสามารถกดที่ปุ่ม Exit ได้ทันที

4.2 ผลการทำงานของโปรแกรม

จากเนื้อหาในบทที่3 ผู้ศึกษาได้พบกับการออกแบบตัวควบคุมจากระบบตัวอย่างแล้ว ซึ่งเป็นการคำนวณจากทฤษฎีระบบควบคุม ดังนั้น ในส่วนโปรแกรมของโครงงานนี้จึงจำเป็นจะต้องได้ผลการทำงานเป็นไปตามผลการคำนวณในบทที่3 ด้วยเช่นกัน เพราะฉะนั้นในหัวข้อนี้จึงเสนอผลการทำงานของโปรแกรม เทียบกับการคำนวณจากทฤษฎีเพื่อการันตีความถูกต้องโปรแกรมดังกล่าว

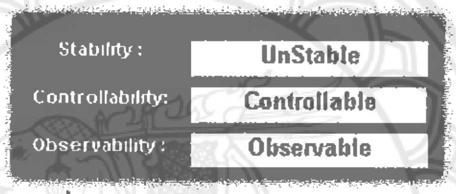
4.2.1 ผลของระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรง

จากสมการที่ 3.7 พบว่าค่าเจาะจงของเมทริกซ์ระบบอยู่ที่ $\lambda = 0, -5.05 \pm 8.6889i$ และเมื่อคำนวณโดยใช้โปรแกรมจะได้ตำแหน่งของขั้วดังรูปที่ 4.13 เพราะฉะนั้นแสดงว่าโปรแกรมดังกล่าวสามารถคำนวณหาตำแหน่งขั้วได้ถูกต้อง



รูปที่ 4.13 แสดงตำแหน่งขั้วของระบบ

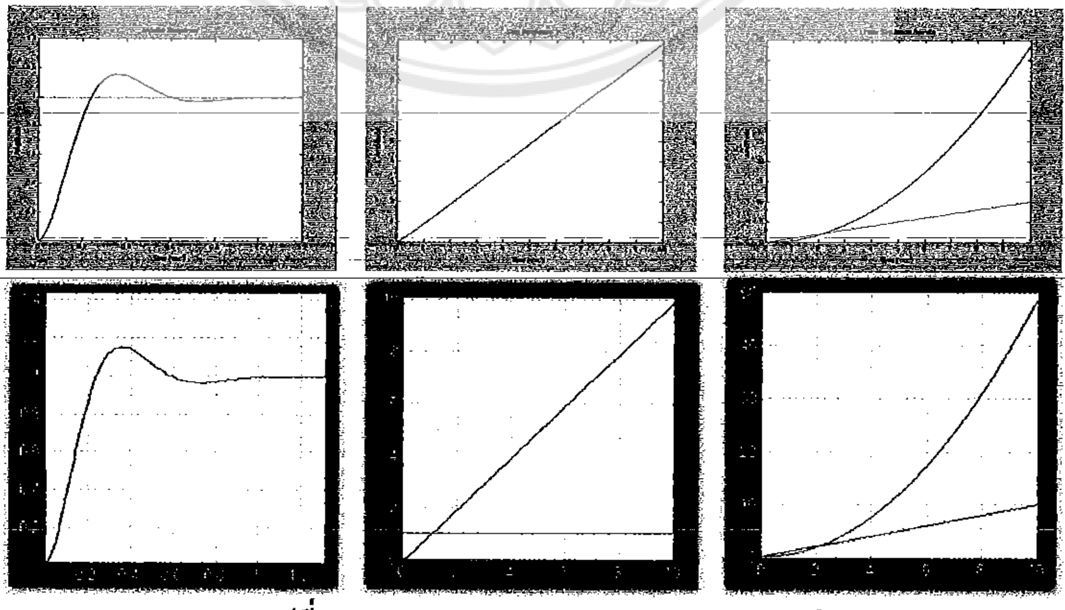
เมื่อคำนวณคุณสมบัติของระบบพบว่าไม่เสถียร เนื่องจากมีตำแหน่งขั้วหนึ่งตัวอยู่ที่ 0 แต่ระบบมีความสามารถควบคุมได้ รวมทั้งมีความสามารถสังเกตได้ ดังรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 แสดงคุณสมบัติของระบบ

- ระบบแบบวงเปิด (Open loop)

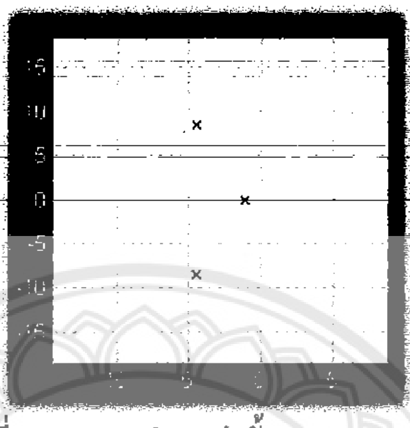
ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณขาเข้าแบบฟังก์ชันกระแทก ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยและฟังก์ชันทะยานหนึ่งหน่วย จากการคำนวณด้วยทฤษฎีเทียบกับผลที่ได้จากโปรแกรม ดังรูปที่ 4.15 ซึ่งจะเห็นว่าผลตอบสนองทั้งสองแบบตรงกัน



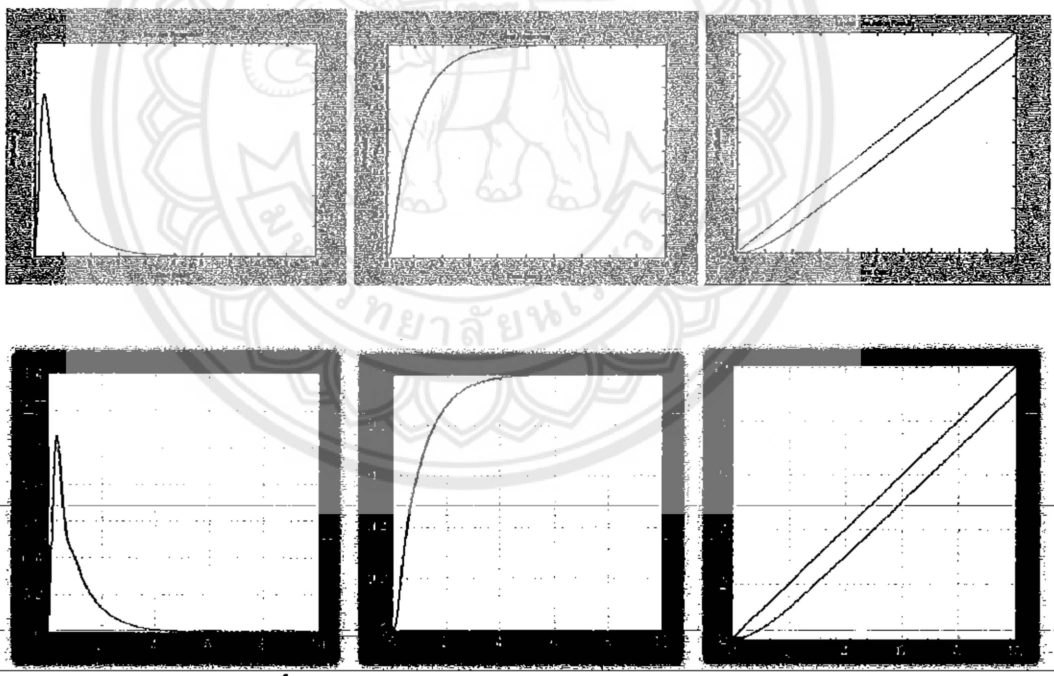
รูปที่ 4.15 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบวงเปิด

- ระบบแบบวงปิด (Closed loop)

หลังจากออกแบบด้วยวิธีวงปิดแล้วจะพบว่า ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ระบบอยู่ที่ $\lambda = -1.0975, -4.5013 \pm 8.4178i$ และเมื่อคำนวณโดยใช้โปรแกรมจะได้ตำแหน่งของขั้ว ดังรูปที่ 4.16



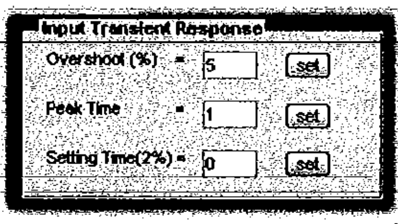
รูปที่ 4.16 แสดงตำแหน่งขั้วของระบบวงปิด



รูปที่ 4.17 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบวงปิด

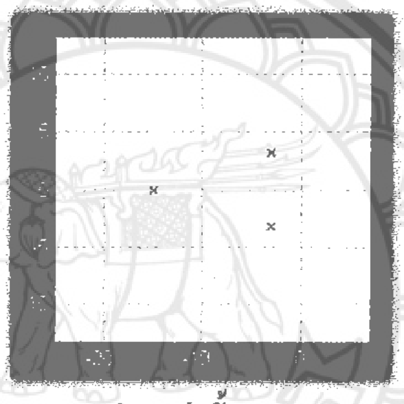
- ระบบแบบวางขั้ว (Pole placement)

ในการออกแบบระบบแบบวางขั้วในบทที่3 ต้องการค่าสูงสุดของสัญญาณ (Mp) 5% , เวลาสูงสุด (tp) 1 วินาที ดังนั้น จึงป้อนค่าลงในโปรแกรมตามรูปที่ 4.18

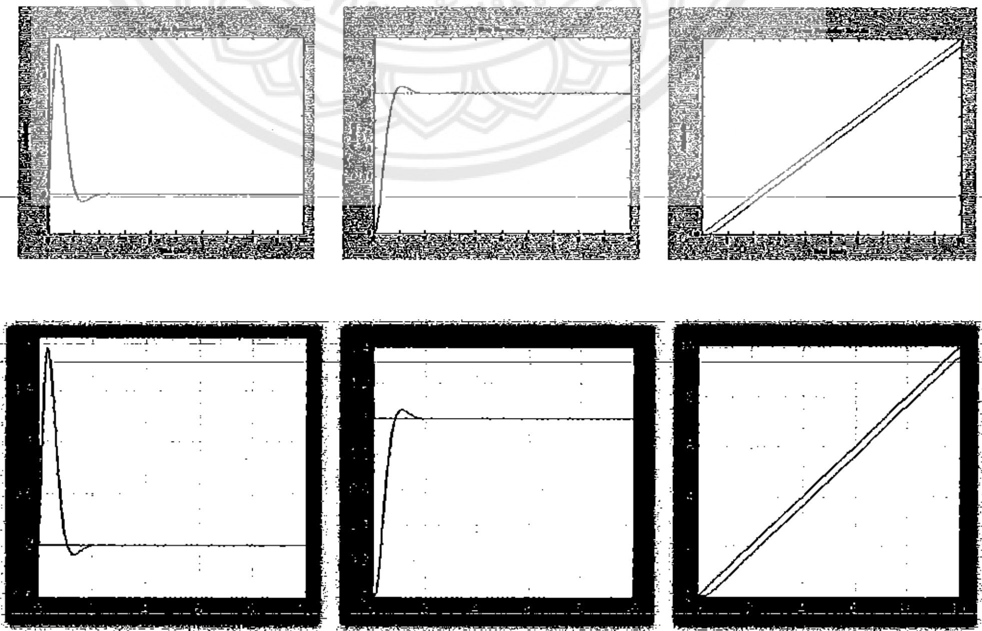


รูปที่ 4.18 แสดงการป้อนค่าผลตอบสนองที่ต้องการ

จะได้ว่าขั้วของระบบจะอยู่ที่ $s = -2.9957 + j3.14, -2.9957 - j3.14$ ดังสมการที่3.17 และมีขั้วอีกหนึ่งตัวอยู่ที่ $s = -14.9785$ ซึ่งเมื่อคำนวณด้วยโปรแกรมจะได้ดังรูปที่4.19



รูปที่ 4.19 แสดงตำแหน่งขั้วของระบบแบบวางขั้ว



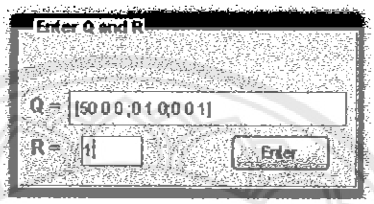
รูปที่ 4.20 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบวางขั้ว

- ระบบแบบเชิงเส้นกำลังสอง (LQR)

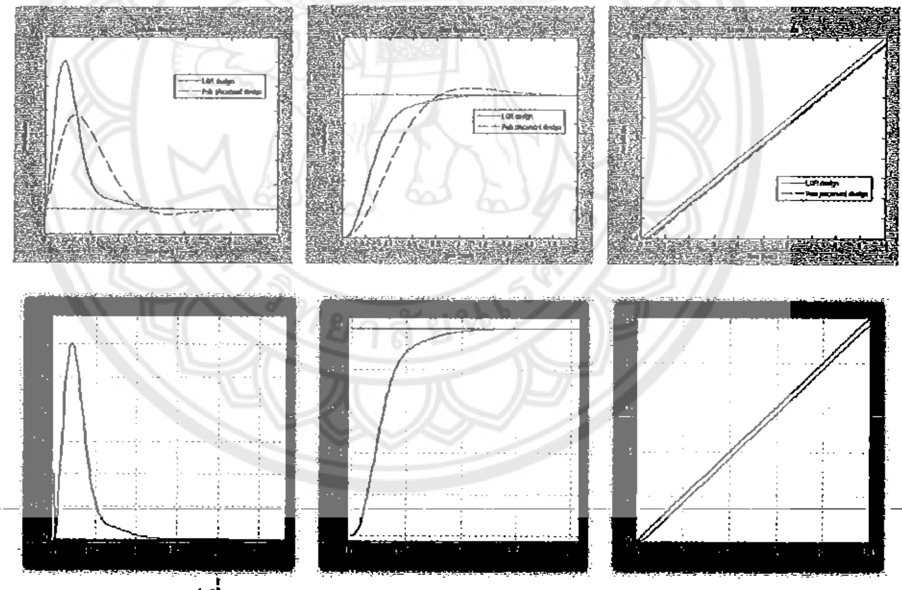
เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์ Q และ R คือ

$$Q=\begin{bmatrix}50 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, R=1$$

ดังนั้น จะต้องกำหนดค่าในโปรแกรมเป็น



รูปที่ 4.21 แสดงการป้อนค่าเมทริกซ์ Q และ R



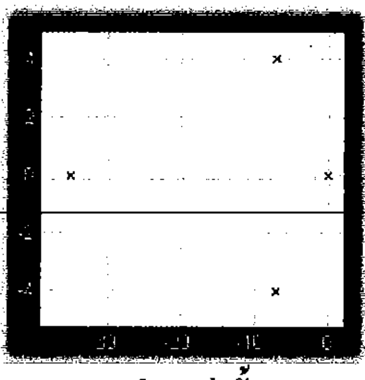
รูปที่ 4.22 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบLQR

4.2.2 ผลของระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

จากสมการที่ 3.25 พบว่าค่าเจาะจงของเมทริกซ์ระบบอยู่ที่

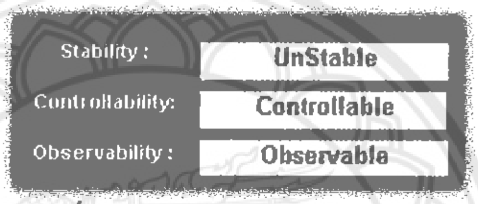
$$\lambda = 0, -35.5514, -6.9393 \pm 4.2770i$$

และเมื่อคำนวณโดยใช้โปรแกรมจะได้ตำแหน่งของขั้วดังรูปที่ 4.23



รูปที่ 4.23 แสดงตำแหน่งขั้วของระบบ

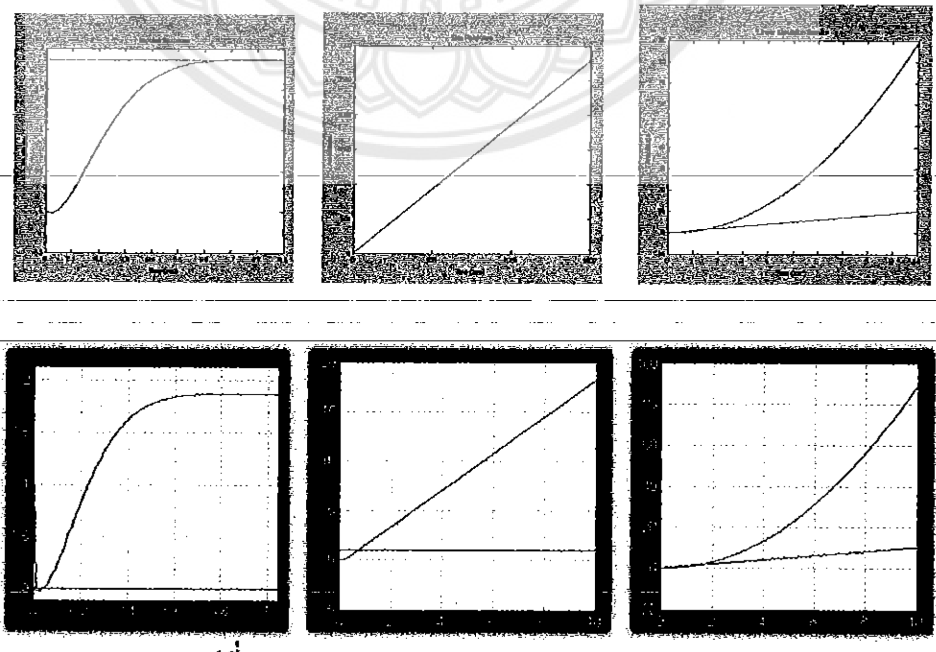
เมื่อคำนวณคุณสมบัติของระบบพบว่าระบบขาดเสถียรภาพ เนื่องจากมีตำแหน่งขั้วหนึ่งตัวอยู่ที่0 แต่ระบบมีความสามารถควบคุมได้ รวมทั้งมีความสามารถสังเกตได้ ดังรูปที่ 4.24



รูปที่ 4.24 แสดงคุณสมบัติของระบบ

- ระบบแบบวงเปิด

ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณขาเข้าแบบฟังก์ชันกระแทก ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยและฟังก์ชันทะยานหนึ่งหน่วย จากการคำนวณด้วยทฤษฎีเทียบกับผลที่ได้จากโปรแกรม ดังรูปที่ 4.25



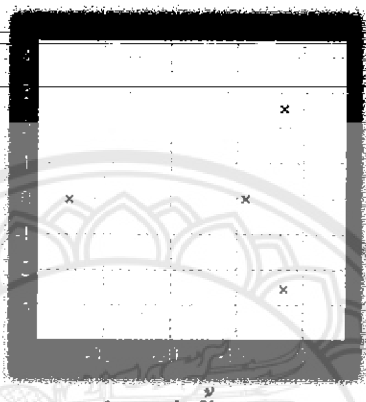
รูปที่ 4.25 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบวงเปิด

- **ระบบแบบวงปิด**

หลังจากออกแบบด้วยวิธีวงปิดแล้วจะพบว่า ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ระบบอยู่ที่

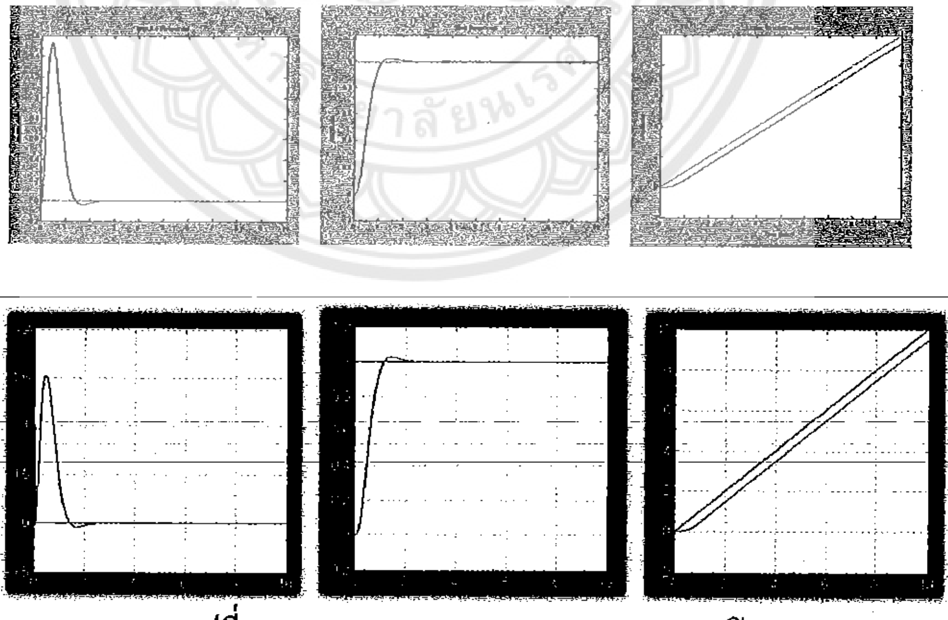
$$\lambda = -35.4843, -7.9920, -2.9768 \pm 2.5756i$$

และเมื่อคำนวณโดยใช้โปรแกรมจะได้ตำแหน่งของขั้ว ดังรูปที่ 4.26



รูปที่ 4.26 แสดงตำแหน่งขั้วของระบบแบบวงปิด

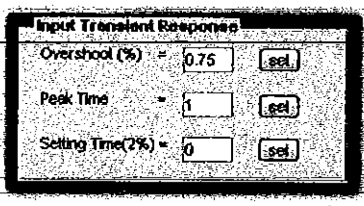
ซึ่งผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงคือ



รูปที่ 4.27 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบวงปิด

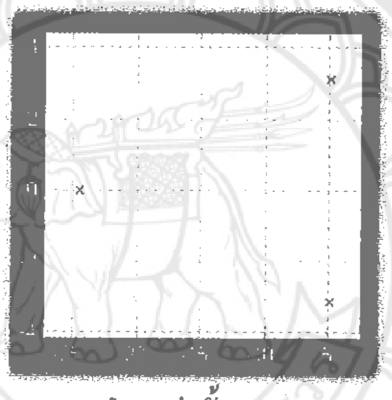
- **ระบบแบบวางขั้ว**

ในการออกแบบระบบแบบวางขั้วในบทที่ 3 ต้องการค่าสูงสุดของสัญญาณ(Mp) 0.75% , เวลาสูงสุด (tp) 1 วินาที ดังนั้นจึงป้อนค่าลงในโปรแกรมดังรูปที่ 4.28

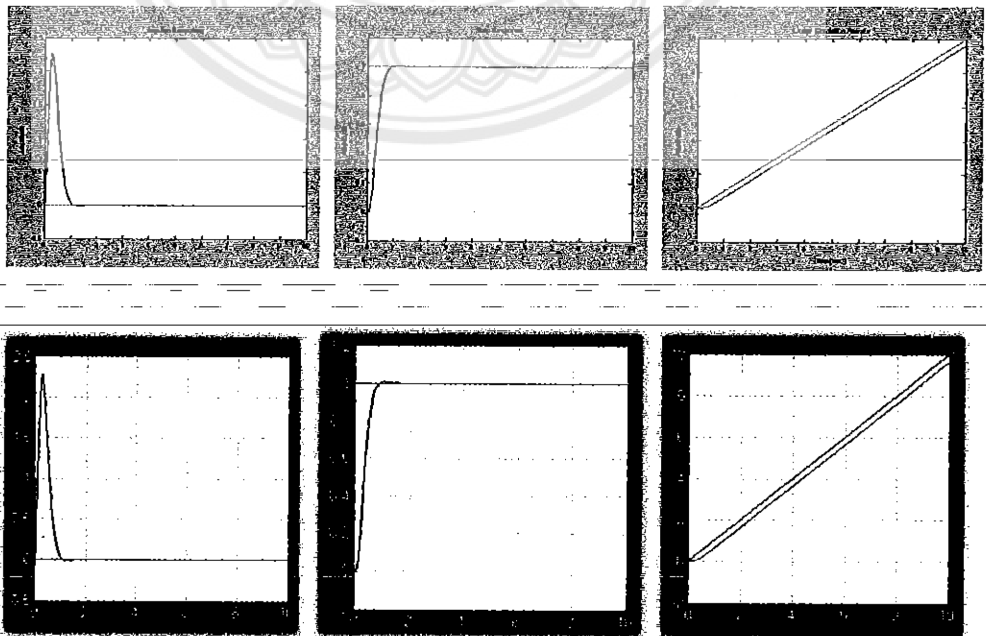


รูปที่ 4.28 แสดงค่าผลตอบสนองที่ต้องการ

จะได้ว่าขั้วของระบบอยู่ที่ $s = -4.8843 + 3.14j$, $-4.8843 - 3.14j$ และมีอีกสองตัวซึ่งอยู่ตำแหน่งเดียวกันคือ $s = -24.4215$ ซึ่งเมื่อคำนวณด้วยโปรแกรมจะได้ดังรูปที่ 4.29



รูปที่ 4.29 แสดงตำแหน่งขั้วของระบบแบบวางขั้ว



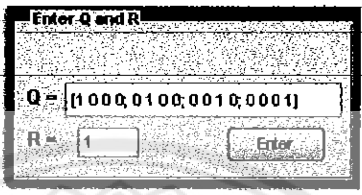
รูปที่ 4.30 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบวางขั้ว

- ระบบแบบเชิงเส้นกำลังสอง

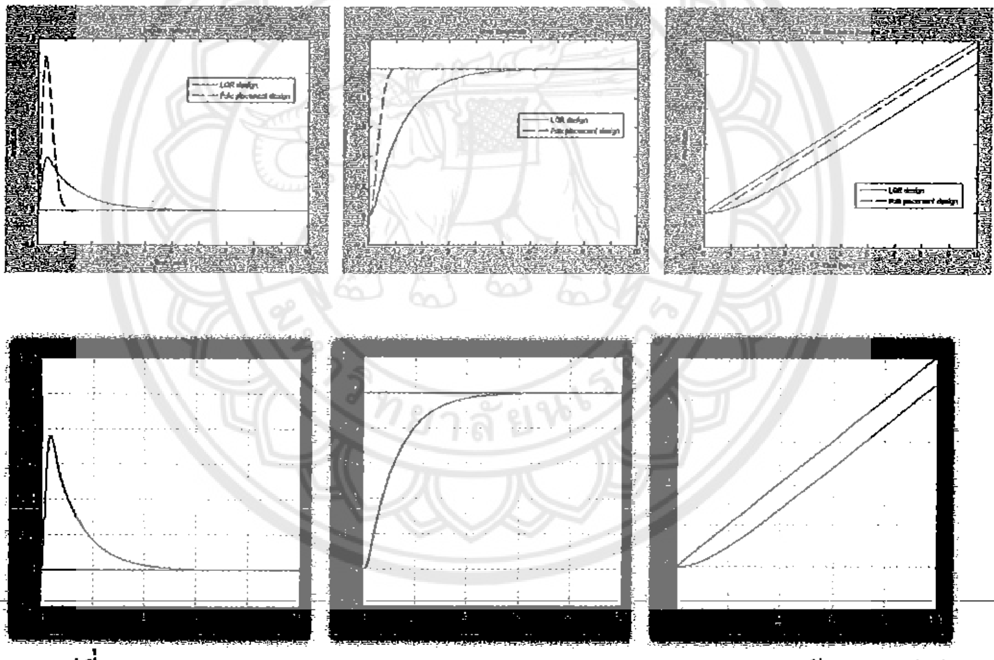
เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์ Q และ R คือ

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, R=1$$

ดังนั้น จะต้องกำหนดค่าในโปรแกรมเป็น



รูปที่ 4.31 แสดงการป้อนค่าเมทริกซ์ Q และ R



รูปที่ 4.32 แสดงผลตอบสนองของระบบแบบ LQR จากการคำนวณด้วยทฤษฎีเทียบกับโปรแกรม

จากการเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณด้วยทฤษฎีและจากการคำนวณด้วยโปรแกรมดังกล่าว ทำให้ทราบว่าผลตอบสนองของระบบนั้นถูกต้อง

บทที่ 5

สรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

ในโครงงานนี้ GUI ที่สร้างขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB สามารถจำลองระบบควบคุมเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (LTI) เพื่อตรวจสอบผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิง ได้แก่ สัญญาณแบบแบบฟังก์ชันกระแทก ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย และฟังก์ชันทะยานหนึ่งหน่วย ได้อย่างถูกต้อง โดย GUI จะแสดงผลดังกล่าวออกมาในเชิงกราฟสองมิติ รวมทั้งสามารถตรวจสอบเสถียรภาพของระบบควบคุมนั้นๆได้ ซึ่งภายใน GUI นี้ก็มีระบบตัวอย่าง2 ระบบ คือระบบขับเคลื่อนมอเตอร์กระแสตรง และระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว นอกจากนี้ยังสามารถให้ผู้ใช้กรอกระบบที่ต้องการเข้าไปได้อีกเช่นกัน

นอกจากการตรวจสอบผลตอบสนองและการตรวจสอบเสถียรภาพแล้วผู้ใช้สามารถนำ GUI จากโครงงานดังกล่าวนี้ไปออกแบบตัวควบคุมระบบด้วย วิธีการออกแบบแบบวงปิด วิธีการออกแบบแบบวางขั้วหรือวิธีการออกแบบแบบ LQR ได้เช่นกัน

5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการพัฒนาต่อ

5.2.1 ควรแยกหน้าต่างระหว่างส่วนการวิเคราะห์และส่วนการออกแบบออกจากกันอย่างสิ้นเชิง

5.2.2 ควรใช้เครื่องมือหรือโปรแกรมอื่นๆเข้ามาช่วยในการตกแต่งหากต้องการให้ GUI มีความสวยงามยิ่งขึ้น

5.2.3 โปรแกรมนี้สามารถนำไปพัฒนาต่อ สำหรับวิธีการออกแบบด้วยวิธีอื่นๆ เช่น LQG , H_∞ และ robust control เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] Chi-Tsong Chen. **Linear System Theory and Design.** 3rd Ed., New York : Oxford University Press, Inc.1998

[2] Gene F. Franklin.**Feedback Control of Dynamic System.** 4th Ed., New Jersey : Prentice-Hall, Inc. 2002

[3] Joao P. Hespanha. "LQG/LQR controller design".[Online].Available : http://www.ece.ucsb.edu/~hespanha/ece147c/web/lqrlqgnotes.pdf

[4] Stopford Building University of Manchester United Kingdom. "MATLAB GUI Tips". [Online]. Avialable : http://schestowitz.com/Projects/MATLAB/gui_tips.pdf.2004

[5] WP:C. "Linear-quadratic regulator".[online].Available : http://en.wikipedia.org/wiki/Linear-quadratic_regulator

[6] กนต์ธร ชำนิประศาสน และ โสรฎา แช่งการ. " การใช้ MATLAB สำหรับงานทางวิศกรรม". [online].Avialable : http://www.kmutt.ac.th/science/book/intromatlab_th.pdf

[7] รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์ และวรรัตน์ ภัทรอมรกุล. คู่มือโปรแกรม MATLAB ฉบับสมบูรณ์. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ อินโฟเพรส. 2543

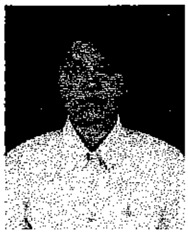
[8] ดร.ยศนันต์ มีมาก. "ค่าเจาะจงและเวกเตอร์".[online]. Available : http://pioneer.netserv. chula.ac.th/~myotsana/234Home.htm

[9] สมชาย เชื้อบุญมี,"การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQ)". ปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์.มหาวิทยาลัยนเรศวร.2551

[10] ผศ.อนุชา หิรัญวัฒน์.ระบบนิวแมติกกับการควบคุมอัตโนมัติในอุตสาหกรรม.กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น.2548

[11] ผศ.ดร. อิทธิโชติ จักรไพวงศ์. "Engineering Mathematics". [Online].Available : http://gear.chuckpaiwong.com/files/egid200/Pretest_solution.pdf. 2007

ประวัติผู้เขียนโครงงาน



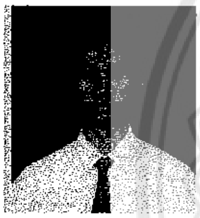
ชื่อ นางสาวสกาววรรณ โพธิ์ทอง

ภูมิลำเนา 55/16 ถนน ชมฐีระเวช อ.ตะพานหิน จ.พิจิตร 6611

ประวัติการศึกษา

- จบระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย พิษณุโลก
- ปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail : artlfc@hotmail.com



ชื่อ นายสิทธิพรหม พลอยแก้ว

ภูมิลำเนา 28/2 ตำบล บึงพระ อ.เมือง จ.พิษณุโลก 65000

ประวัติการศึกษา

- จบระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนพิษณุโลกพิทยาคม
- ปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail : iceberg_spltk@hotmail.com