การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (LQ)

Control System Design using Optimization Method (LQ)

นายสมชาย เชื้อบุญมี รหัส 44362408

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์
วันที่รับ 2 8 มี.ย. 2548
เลขทะเบียน 4800024
เลขเรียกหนังสือ ปร.
มหาวิทยาลัยนเรศวร ศ249ก 2547
i4995636
ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2547

ใบรับรองโครงงานวิศวกรรม

หัวข้อโครงงาน	การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQ)
ผู้ดำเนินโครงงาน	นายสมชาย เชื้อบุญมี รหัส 44362408
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ธนิต มาลากร
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2547

....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้โครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะกรรมการสอบโครงงานวิศวกรรม

....ประธานกรรมการ

(ดร.ธนิต มาลากร)

....กรรมการ

(ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชา)

....กรรมการ

(ดร.สมยศ เกียรติวนิชวิไล)

หัวข้อโครงงาน	การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (LQ)
ผู้ดำเนินโครงงาน	นายสมชาย เชื้อบุญมี รหัส 44362408
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ธนิต มาลากร
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2547

บทคัดย่อ

ปัญหาระบบควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดได้ถูกศึกษากันอย่างแพร่หลายมานานหลายทศวรรษแล้ว และคำตอบที่ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในสิ่งต่างๆมากมาย ในโครงงานนี้จะนำเสนอวิธีLQ ซึ่งเป็นในวิธีใช้กันอย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวควบคุม ซึ่งเป็นวิธีที่พิจารณาให้ค่าฟังก์ชันสมรรถนะต่ำสุด ด้วยเหตุนี้ จึงทำให้วิธีLQไม่เพียงแต่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพเท่านั้น แต่ยังทำให้ระบบมีสมรรถนะที่ดีอีกด้วยและในขณะเดียวกันเราจะทำการออกแบบตัวควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้วเพื่อนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับวิธีLQ

Project Title	Controller System Design using Optimization Method (LQ)
Name	Mr.Somchai Chuebunmee ID. 44362408
Project Advisor	Dr.Tanit Malakorn
Major	Electrical Engineering
Department	Electrical and Computer Engineering
Academic Year	2004

....

ABSTRACT

Optimal control problems have been much studied over the past several decades, and these solutions have been applied effectively in various areas. This project presents the LQ method, one of the most powerful tools in analysis and controller synthesis, so that the cost function is minimized. Thus the LQ method achieves not only the stability, but also the system performance. We here also provide the pole-placement method in order to compare some result with the LQ method.

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานวิศวกรรมไฟฟ้า เรื่องการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (LQ)นี้ สำเร็จได้ด้วยดี ก็เนื่องด้วยความอนุเคราะห์จากอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานคืออาจารย์ธนิต มาลากร ที่ให้คำปรึกษาและแนะนำสิ่งที่เป็นประโยชน์กับโครงงานนี้เรื่อยมา ตลอดจนอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวรทุกท่านที่ประสิทธิประสาทวิชาความรู้ทางด้านนี้ให้แก่ผู้ทำโครงงาน จึงขอแสดงความขอบคุณเป็นอย่างสูง ณ ที่นี้ด้วย

สุดท้ายนี้ผู้ทำโครงงานขอขอบพระคุณบิดา มารดา และญาติพี่น้องที่เป็นกำลังใจให้ผู้ทำโครงงานนี้อยู่เสมอมา ทำให้โครงงานนี้เสร็จสมบูรณ์ไปได้ด้วยดี

นายสมชาย เชื้อบุญมี

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

มหาวิทยาลัยนเรศวร

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 หลักการและเหตุผล

ในปัจจุบันระบบควบคุม (Control system)ได้ถูกนำไปใช้กันอย่างแพร่หลาย ทั้งในอุปกรณ์ที่ใช้ในชีวิตประจำวัน ยานพาหนะ งานทางด้านอวกาศ หุ่นยนต์ ตลอดจนใช้ควบคุมเครื่องจักรในโรงงานอุตสาหกรรม ซึ่งระบบควบคุมจะมีหลายแบบแตกต่างกันไป ทั้งนี้ เมื่อเราจะนำไปใช้เราต้องคำนึงถึงความเหมาะสมกันระหว่างตัวควบคุม (Controller) และระบบที่ต้องการจะควบคุม (Plant) ซึ่งระบบควบคุมแบบต่างๆ ล้วนมีเป้าหมายที่จะทำให้ระบบมีสมรรถนะ (Performance) และเสถียรภาพ (Stability) มากยิ่งขึ้น

ระบบควบคุมแบบอัตโนมัติ (Automatic control) เป็นระบบที่ใช้กันมานานแล้ว ซึ่งในอดีต จะเป็นการควบคุมในลักษณะง่ายๆ โดยจะอาศัยหลักการทางกายภาพต่างๆ เช่น หลักการลอยตัวบนน้ำของสิ่งของที่มีความหนาแน่นน้อยกว่าน้ำ หลักการเปลี่ยนพลังงานความร้อนมาเป็นพลังงานกล เป็นต้น แต่ในปัจจุบันระบบควบคุมมีความซับซ้อนมากขึ้น โดยจะกล่าวถึงพัฒนาการของระบบควบคุมดังนี้

ในปี ค.ศ.1922 นิโคลัส มินอสกี (Nicolas Minorsky) ได้ประดิษฐ์ระบบควบคุมหางเสือเรืออัตโนมัติ ซึ่งได้เสนอแนวคิดว่า เสถียรภาพของระบบสามารถหาได้จากความแตกต่างระหว่างสมการของระบบ ปี ค.ศ.1932 เฮช ไนควิสท์ (H.Nyquist) ได้เสนอหลักการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบควบคุมแบบวงปิด (Closed-loop system) โดยอาศัยหลักเกณฑ์ของผลตอบสนองของระบบเปิด (Open-loop system)แทน ในปี ค.ศ.1940 เป็นยุคของระบบควบคุมแบบดั้งเดิม(Classical Control) เนื่องจากไม่มีเครื่องช่วยคำนวณที่ทันสมัย ทำให้ในยุคนี้จะวิเคราะห์ระบบในเชิงโดเมนความถี่ (Frequency domain) และใช้วิธีการวิเคราะห์ทางเดินราก(Root-locus method) ซึ่งจะใช้ในระบบสัญญาณขาเข้าและขาออกเดียว (SISO) ต่อมาในยุคระบบควบคุมแนวใหม่(Modern control) เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์แบบเชิงตัวเลข(Digital)ได้มีการพัฒนาขึ้น ประกอบกับระบบที่ต้องการจะควบคุมในยุคนี้เป็นระบบขนาดใหญ่และมีหลายสัญญาณขาเข้าและขาออก(MIMO) ซึ่งไม่สามารถใช้การออกแบบในยุคเก่ามาออกแบบตัวควบคุมได้ จึงทำให้วิศวกรระบบควบคุมหันมาวิเคราะห์ระบบในโดเมนเวลาแทนโดยใช้การสังเคราะห์ตัวแปรสถานะ(State variable) ซึ่งพื้นฐานเหล่านี้ก่อให้เกิดการพัฒนาระบบควบคุมแบบต่างๆ ซึ่งได้แก่ ระบบควบคุมแบบเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic control) ระบบควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด (Optimal control) ระบบควบคุมแบบคงทน (Robust control) ระบบควบคุมแบบปรับตัวได้ (Adaptive control) เป็นต้น

ในส่วนของโครงงานนี้ จะนำเสนอวิธีการออกแบบระบบควบคุมป้อนกลับ โดยใช้วิธีการวางขั้วและวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบกำลังสองเชิงเส้น(Linear Quadratic: LQ) แม้ว่าการออกแบบโดยวิธีวางขั้วจะเป็นวิธีที่ง่ายและไม่ซับซ้อน บางครั้งสัญญาณควบคุมที่คำนวณได้ อาจมีค่าสูงมากเกินไป

ซึ่งไม่สามารถจะสังเคราะห์ได้ในทางปฏิบัติ ในทางกลับกัน การออกแบบโดยวิธีLQ จะพิจารณาขนาดของสัญญาณควบคุมในขั้นตอนของการออกแบบควบคู่ไปด้วย ซึ่งจะส่งผลให้สัญญาณควบคุมที่ได้ มีค่าที่เหมาะสมและหากมองถึงสมรรถนะของระบบโดยรวม จะพบว่าระบบที่ออกแบบโดยวิธีLQจะมีสมรรถนะดีกว่าระบบที่ออกแบบโดยวิธีการวางขั้ว

1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อนำความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ในระบบควบคุม
2. เพื่อหาแนวทางแก้ไขแนวใหม่เพื่อรักษาเสถียรภาพของระบบให้ดำรงอยู่ได้
3. เพื่อเป็นการเปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบควบคุมที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว(Pole Placement)และวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบกำลังสองเชิงเส้น(Linear Quadratic: LQ)

1.3 ขอบข่ายของงาน

1. ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ
2. ศึกษาระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออก(Output feedback)
3. ศึกษาวิธีการวางขั้วและวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบกำลังสองเชิงเส้น(Linear Quadratic: LQ)
4. จำลองการออกระบบควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้วและวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบกำลังสองเชิงเส้น(Linear Quadratic: LQ)

1.4 ตารางกิจกรรมการดำเนินงาน

กิจกรรมการดำเนินงาน	2546		2547									
	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับระบบควบคุมและพื้นฐานทางคณิตศาสตร์	↔	↔	↔									
2. ส่งรายงานความคืบหน้าของโครงงาน			↔	↔								
3. เปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบควบคุมที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วและวิธี LQ				↔	↔	↔	↔					
4. จำลองการออกระบบควบคุมแบบป้อนกลับในกรณีที่มีตัวสังเกตสถานะโดยใช้วิธีLQ เปรียบเทียบกับวิธีวางขั้ว						↔	↔	↔				
5. จัดทำรูปเล่มโครงงาน									↔	↔	↔	
6. เสนอโครงงาน												↔

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้ได้ทราบแนวคิดและหลักการทำงานเบื้องต้นของระบบควบคุมมากขึ้น
2. นำเอาวิธีLQ ไปใช้ออกแบบระบบควบคุมได้จริง

1.6 งบประมาณ

1. ค่าถ่ายเอกสาร 250 บาท
2. ค่าพิมพ์เอกสาร 500 บาท
3. แผ่นดิสเก็ต 50 บาท
4. เอกสารประกอบโครงงาน 200 บาท

รวม 1,000 บาท

บทที่ 2
หลักการและทฤษฎีเบื้องต้น

ในการศึกษาและการออกแบบระบบควบคุม จำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐานหลายส่วนมาประกอบในการใช้สังเคราะห์และวิเคราะห์ระบบ ซึ่งในส่วนของโครงงานนี้ การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(State feedback),แบบป้อนกลับสัญญาณขาออก(Output feedback)โดยอาศัยตัวสังเกตสถานะ(State observer)และแบบกำลังสองเชิงเส้น(LQ) จะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกฎและทฤษฎีต่างๆ ดังนี้

2.1 พื้นฐานการวิเคราะห์ฟังก์ชันและทฤษฎีตัวดำเนินการ (Introductory Functional Analysis and Operator Theory)

เนื่องจากการวิเคราะห์ระบบควบคุมส่วนใหญ่มักเขียนแทนระบบทางกายภาพด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อสะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ดังนี้

2.1.1 นอร์ม (Norm)

ถ้าเราต้องการตรวจสอบผลตอบสนองของระบบควบคุมนั้นอาจสามารถดูได้จากขนาดของสัญญาณ ตัวอย่างเช่น สามารถดูจากค่าความผิดพลาดของสัญญาณ (Error signal)หรือค่าสัญญาณขาออก (Output signal) ซึ่งขนาดของสัญญาณที่กล่าวถึงนี้ก็สามารถพิจารณาจากค่านอร์ม (Norm) ซึ่งนิยามดังนี้

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ใด ๆ นอร์มบน X คือค่าฟังก์ชันจริงบน X ซึ่งใช้สัญลักษณ์ว่า $\|x\|$ โดยที่ x เป็นสมาชิกใด ๆ ในปริภูมิเวกเตอร์ X โดยที่นอร์มจะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) $\|x\| \ge 0$
2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
4) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

โดย x และ y เป็นสมาชิกใด ๆ ใน X และ α เป็นค่าสเกลาร์ใด ๆ

ตัวอย่างของนอร์มบนปริภูมิเวกเตอร์ชนิดต่าง ๆ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> นอร์มของเวกเตอร์ x ในปริภูมิยุคลิก (Euclidean space) $\Re^n$ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ให้ X แทนปริภูมิเวกเตอร์ของฟังก์ชันต่อเนื่องค่าจริงที่นิยามในช่วงปิดจาก a ไป b เราสามารถนิยามนอร์มดังนี้

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

เมื่อพิจารณาระบบที่เป็นเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของระบบสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการดังนี้

$y = G * u$, โดยที่ * คือ การหาปริพันธ์สังวัตนาการ (Convolution integral)

ซึ่งถูกนิยามโดย

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

ดังนั้นขนาดหรือนอร์มของสัญญาณขาออก $y(t)$ สามารถนิยามได้เป็น

$$\|y\|_2 = \sqrt{\int_0^t |y(t)|^2 \, dt}$$

2.1.2 พีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra)

เมทริกซ์ (Matrix)

นิยาม เมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ ใดๆ

$$A = \left[a_{ij} \right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

ที่มี m แถวและ n หลัก คือตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ส่งปริภูมิเวกเตอร์ $\Re^n$ ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ $\Re^m$ ($A : \Re^n \to \Re^m$) ดังสมการ $y = Ax$ โดยที่ $x = [x_1 \ldots x_n]^T \in \Re^n$ และ $y = [y_1 \ldots y_m]^T \in \Re^m$ ในกรณีนี้เราสามารถเขียนเมทริกซ์ A ออกมาเป็น

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} เรียกว่าสมาชิก (*element*) ของ A
ถ้าเมทริกซ์ A มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน (นั่นคือ $m=n$) เราจะเรียก A ว่า เมทริกซ์จัตุรัส

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A เรียกว่าเป็นเมทริกซ์สมมาตร ถ้า $A^T=A$ โดยที่ A^T **คือ เมทริกซ์สลับสับเปลี่ยน**ของเมทริกซ์ $A\,(Transpose\ \ of\ \ A)$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมทริกซ์สมมาตร}$$

เมทริกซ์เฮอมิทเทียน (Hermitian Matrix)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่า เมทริกซ์เฮอมิทเทียน ถ้า $A=A^*$ โดยที่ $A^*=\left(\overline{A}\right)^T$

เมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive-definite Matrix)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัสค่าจริง A ขนาด $n\times n$ เรียกได้เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน(Positive definite matrix) ถ้า $x^TAx>0$ ทุกค่า $x\neq 0$ ใน $\Re^n$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$x^TQx=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$=x_1^2+x_2^2>0 \qquad \text{ทุกค่า}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\neq 0 \text{ ใน } \Re^2$$

$\therefore Q$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

เมทริกซ์กึ่งบวก(Positive-semi definite Matrix)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัสค่าจริง A ขนาด $n\times n$ เรียกได้เป็นเป็นเมทริกซ์กึ่งบวก (Positive-semi definite matrix) ถ้า $x^TAx\geq 0$ ทุกค่า $x\neq 0$ ใน $\Re^n$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$x^T Qx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \quad \text{ทุกค่า} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ ใน } \Re^2$$

$\therefore Q$ เป็นเมทริกซ์กึ่งบวก (Positive-semidefinite matrix)

เมทริกซ์เอกฐานและเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน (Singular and non-Singular Matrices)

นิยาม ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส Aใดๆ ซึ่งค่า detA=0 จะเรียกว่า เมทริกซ์เอกฐาน

ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส Aใดๆ ซึ่งค่า $\det A \neq 0$ จะเรียกว่า เมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน

<u>ตัวอย่าง</u>

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (8 \times (-3)) - ((-6) \times 4) = 0$$

$\therefore A$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน(Singular matrix)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (8 \times 2) - ((-3) \times 9) = 43$$

$\therefore A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน(non-Singular matrix)

การหาค่าเจาะจง (Eigenvalues:λ)

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ค่าเจาะจงของ A ซึ่งใช้สัญลักษณ์ว่า $\lambda(A)$ **คือรากของสมการ** $\det(\lambda I - A) = 0$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -16 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \qquad \text{จะได้ค่า } \lambda = 1,3$$

2.2 ทฤษฎีพื้นฐานของระบบควบคุม (Basic Control System Theory)

2.2.1 ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function)

ฟังก์ชันถ่ายโอน เป็นอัตราส่วนของสมการทางด้านสัญญาณขาออก ต่อสมการทางด้านสัญญาณขาเข้าที่ถูกแปลงลาปลาซแล้ว ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) เป็นศูนย์ เมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาของสัญญาณขาเข้า u และสัญญาณขาออก y ดังนี้

$$\overset{(n)}{y}+a_1\overset{(n-1)}{y}+\ldots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=b_0\overset{(n)}{u}+b_1\overset{(n-1)}{u}+\ldots+b_{n-1}\dot{u}+b_n u$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบสามารถหาได้โดยการแปลงลาปลาสทั้งสองข้างของสมการข้างต้นภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) เป็นศูนย์ จะได้

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+\ldots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

โดยปกติกำลังของเศษ < กำลังของส่วน

2.2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model)

ในการออกแบบระบบควบคุมจำเป็นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model) โดยทั่วไปเรานิยมแทนค่าตัวแปรที่สนใจด้วยตัวแปรสถานะ x แทนสัญญาณควบคุมขาเข้าด้วย u แทนสัญญาณขาออกด้วย y

ถ้าเรามีสัญญาณควบคุมขาเข้า r ตัว $(u\in\Re^r)$ สัญญาณขาออก m ตัว $(y\in\Re^m)$ และตัวแปรสถานะ n ตัว $(x\in\Re^n)$ เราสามารถเขียนสมการสถานะและสมการขาออก ในรูปทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=f_1(x_1,x_2,\ldots x_n;u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\ \dot{x}_2(t)&=f_2(x_1,x_2,\ldots x_n;u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\ &\vdots\\ \dot{x}_n(t)&=f_n(x_1,x_2,\ldots x_n;u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned}y_1(t)&=g_1(x_1,x_2,\ldots x_n;u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\ y_2(t)&=g_2(x_1,x_2,\ldots x_n;u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\ &\vdots\\ y_m(t)&=g_m(x_1,x_2,\ldots x_n;u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

ถ้ากำหนดให้ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$ และ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ สมการ 2.2.1และ2.2.2 สามารถเขียนลดรูปเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x;u;t) \\ y(t) &= g(x;u;t) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

กรณีที่เป็นระบบเชิงเส้นแปรตามเวลา(Linear time-varying system) สมการที่2.2.3จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

ถ้าเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา(Linear time-invariant system) สมการที่2.2.3จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

2.2.3 การเขียนแทนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบในรูปปริภูมิสถานะ

การแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนมาอยู่ในรูปแบบปริภูมิสถานะ สามารถทำได้หลายวิธีขึ้นอยู่กับรูปแบบบัญญัติที่เลือก โดยจะแสดงรูปแบบที่นิยม 3 รูปแบบ ซึ่งการนำไปใช้จะมีความแตกต่างกันโดยจะมีรูปแบบต่างๆ ดังนี้

จากฟังก์ชันถ่ายโอน

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

รูปแบบบัญญัติที่ควบคุมได้(Controllable Canonical form)

รูปแบบบัญญัติที่ควบคุมได้ จะเป็นรูปแบบที่เขียนแทนระบบให้มีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

รูปแบบบัญญัติที่สังเกตได้(Observable Canonical form)

รูปแบบบัญญัติที่สังเกตได้ จะเป็นรูปแบบที่เขียนแทนระบบให้มีคุณสมบัติ**ความสามารถสังเกตได้ ซึ่งมีรูป**แบบดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

รูปแบบบัญญัติแบบเส้นทแยงมุม(Diagonal Canonical form)

ในรูปแบบบัญญัติแบบนี้ จะใช้ในกรณีที่ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)^2 (s+p_3)(s+p_4)\dots(s+p_n)}$$
$$= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^2} + \frac{c_2}{s+p_1} + \frac{c_3}{s+p_3} + \frac{c_4}{s+p_4} + \dots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

หรือจะเขียนได้ว่า

$$Y(s)=b_0U(s)+\frac{c_1}{(s+p_1)^2}U(s)+\frac{c_2}{s+p_1}U(s)+\frac{c_3}{s+p_3}U(s)+\frac{c_4}{s+p_4}U(s)+\ldots+\frac{c_n}{s+p_n}U(s)$$

กำหนดให้

$$X_1(s)=\frac{1}{(s+p_1)^2}U(s)$$
$$X_2(s)=\frac{1}{s+p_1}U(s)$$
$$X_3(s)=\frac{1}{s+p_3}U(s)$$
$$\vdots$$
$$X_n(s)=\frac{1}{s+p_n}U(s)$$

จะสามารถเขียนได้ว่า

$$Y(s)=b_0U(s)+c_1X_1(s)+c_2X_2(s)+c_3X_3(s)+c_4X_4(s)+\ldots+c_nX_n(s)$$

แปลงลาปลาสย้อนกลับ จะเขียนได้เป็น

$$y=b_0u+c_1x_1(s)+c_2x_2(s)+c_3x_3(s)+c_4x_4(s)+\ldots+c_nx_n(s)$$

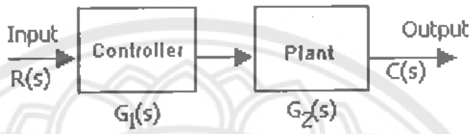
ซึ่งสามารถเขียนแทนระบบในรูปแบบบัญญัติแบบเส้นทแยงมุมจะเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \\ \dot{x}_4\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:cccc}-p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0\\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & 1 & 0\\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -p_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+b_0u$$

2.2.4 ระบบควบคุมแบบวงเปิด (Open-loop Control System)

ระบบควบคุมแบบเปิดหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ระบบควบคุมแบบไม่มีการป้อนกลับ ซึ่งระบบนี้จะเป็นระบบที่ง่ายที่สุด ไม่มีความซับซ้อน โดยระบบนี้ค่าสัญญาณขาออกที่ได้จะไม่มีผลต่อการควบคุมขบวนการ ซึ่งก็คือไม่มีการนำค่าสัญญาณขาออกที่ได้มาเปรียบเทียบกับค่าสัญญาณขาเข้า(อ้างอิง)ที่ป้อนให้กับระบบเลย โดยในระบบควบคุมแบบนี้ จะใช้ในกรณีที่ต้องไม่มีสัญญาณรบกวนและรู้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาเข้าและสัญญาณขาออกอยู่แล้ว ในกรณีนี้ถ้ามีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบ จะทำให้ระบบแบบนี้มีค่าผิดพลาด (Error) และความแม่นยำจะลดลง แผนผังกล่องของระบบควบคุมแบบวงปิด สามารถแสดงได้ ดังนี้



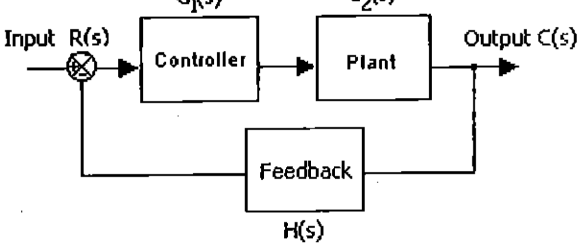
รูปที่ 2.1 ระบบควบคุมแบบวงเปิด(Open-loop Control System)

สมมุติให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมและระบบที่ต้องการควบคุมเป็นเท่ากับ $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ ตามลำดับ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบวงเปิดของระบบจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_2(s).G_1(s)$$

2.2.5 ระบบควบคุมแบบวงปิด (Closed-loop Control System)

เนื่องจากการควบคุมแบบวงเปิด ไม่มีความแม่นยำในการควบคุม ดังนั้นจึงมีการพิจารณานำสัญญาณขาออกมาเปรียบเทียบกับสัญญาณขาเข้า(อ้างอิง) ซึ่งค่าความแตกต่างนั้นจะเป็นค่าความผิดพลาดของระบบ การควบคุมแบบวงปิดจะนำค่าความผิดพลาดที่ได้นั้นมาเป็นสัญญาณเข้าตัวควบคุม (Controller) เพื่อให้ตัวควบคุมไปสร้างสัญญาณควบคุมใหม่เพื่อลดค่าความผิดพลาดนั้น แผนผังกล่องของระบบควบคุมแบบวงปิด สามารถแสดงได้ ดังนี้



รูปที่ 2.2 ระบบควบคุมแบบวงปิด (Closed-loop Control System)

สมมุติให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมและระบบที่ต้องการควบคุมเป็นเท่ากับ $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ ตามลำดับ และฟังก์ชันถ่ายโอนตัวป้อนกลับ (Feedback) เท่ากับ $H(s)$ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบวงปิดจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_2(s).G_1(s)}{1+G_2(s).G_1(s).H(s)}$$

2.2.6 ความสามารถควบคุมได้ (Controllability)

นิยาม ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่แสดงได้ตามสมการ

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+Bu \qquad ;x(0)=x_0 \\ y &= Cx+Du\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

เรียกว่ามีความสามารถควบคุมได้(Controllability) บนช่วงปิด $[t_0,t_f]$ ถ้าสามารถหาสัญญาณควบคุมที่ต่อเนื่องที่ผลเฉลยของสมการ2.2.4, $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $x(t_f)=0$ เมื่อกำหนดสภาวะเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$ ใดๆมาให้

ทฤษฎีบท ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรตามเวลาดังสมการ2.2.4 โดยที่ $x(t)$ คือตัวแปรสถานะมิติ n และ $u(t)$ คือเวกเตอร์สัญญาณควบคุมมิติ m เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ระบบควบคุมได้อย่างสมบูรณ์ คือเมตริกซ์ความสามารถควบคุมได้ (Controllability matrix) U

$$U \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

U ต้องมีค่าลำดับขั้นเต็ม(full rank) เป็น n

2.2.7 ความสามารถสังเกตได้ (observability)

นิยาม ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่แสดงได้ตามสมการ2.2.4 เรียกว่ามีความสามารถสังเกตได้(observabiity) บนช่วงปิด $[t_0,t_f]$ ถ้าทุกๆสถานะเริ่มต้นใดๆ $x(t_0)=x_0$ มีเพียงค่าเดียว ซึ่งจะสอดคล้องกับเวคเตอร์สัญญาณขาออก $y(t)$ บนช่วงปิด $[t_0,t_f]$

ทฤษฎีบท ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรตามเวลาดังสมการ2.2.4 โดยที่ $x(t)$ คือตัวแปรสถานะมิติ n และ $y(t)$ คือเวคเตอร์สัญญาณขาออกมิติ p เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ระบบสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ คือ เมทริกซ์ความสามารถสังเกตได้(Observability matrix) V

$$V \triangleq \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^2)^TC^T & \dots & (A^{n-1})^TC^T \end{bmatrix}$$

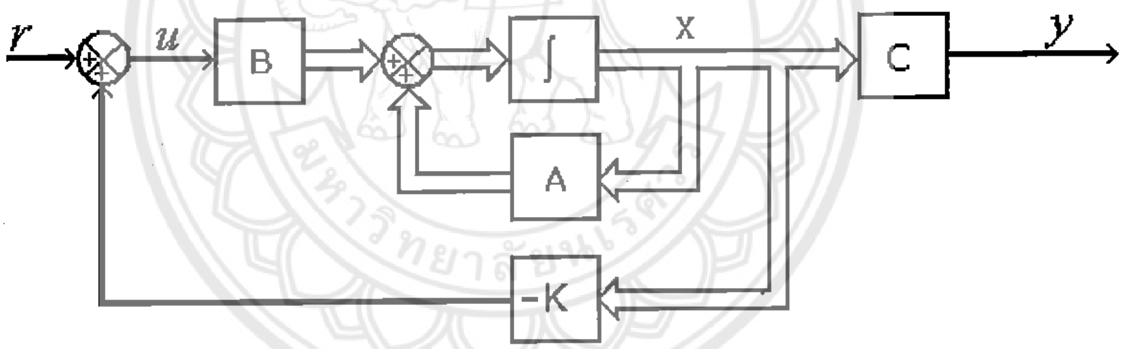
V ต้องมีค่าลำดับขั้นเต็ม(full rank) เป็น n

2.3 การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้ว(Pole Placement)

2.3.1 บทนำ

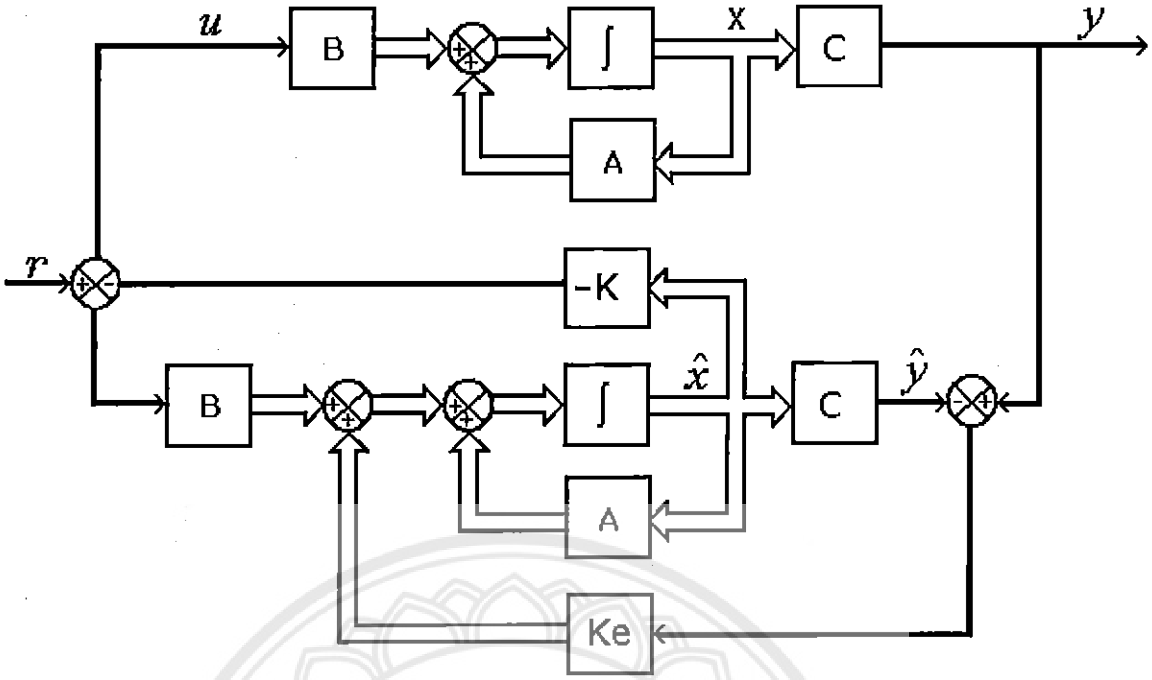
ในอดีตการออกแบบระบบควบคุมอย่างง่ายที่ไม่มีการป้อนกลับ(Feedback) นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งนี้เพราะเป็นระบบควบคุมที่ไม่มีความซับซ้อนและง่ายต่อการออกแบบ แต่ข้อเสียของระบบควบคุมที่ไม่มีการป้อนกลับก็คือ ระบบอาจจะขาดเสถียรภาพได้ เนื่องจากทั้งปัจจัยภายในของระบบเองหรือปัจจัยภายนอก อาทิเช่นมีสัญญาณรบกวนเข้ามา นอกจากนี้ สมรรถนะ(Performance)โดยรวมของระบบอาจจะไม่ดีเท่าที่ผู้ออกแบบต้องการ เพื่อกำจัดปัญหาเหล่านี้ การออกแบบระบบควบคุมมักจะออกแบบระบบที่มีการป้อนกลับมาทดแทน

ในระบบควบคุมที่มีการนำเอาตัวแปรสถานะ(State Variable)มาป้อนกลับ ซึ่งตัวแปรสถานะอาจจะอยู่ในรูปของ กระแสไฟฟ้า, แรงดันไฟฟ้า,ระยะทาง,ความเร็วหรือความเร่ง เป็นต้น เราจะเรียกระบบคุมแบบนี้ว่าระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(State Feedback) โดยในการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ ระบบที่ต้องการควบคุม(Plant)ต้องมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้(Controllability)และจำเป็นต้องทราบตัวแปรสถานะของระบบที่ต้องการควบคุมทุกๆตัวแปร โดยแผนผังกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะจะเป็นตามรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(State Feedback)

โดยปกติระบบที่ต้องการควบคุมจะมีแปรสถานะบางตัวหรือทุกๆตัวที่ไม่ทราบค่าหรือไม่สามารถวัดได้โดยตรง ผู้ออกแบบจึงไม่สามารถนำตัวแปรสถานะมาป้อนกลับได้ ในกรณีนี้เราจำเป็นต้องออกแบบตัวสังเกต(Observer) ซึ่งอาจจะเป็นอุปกรณ์หรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาประมาณค่าหรือสังเกตตัวแปรสถานะเพื่อนำมาป้อนกลับ ซึ่งจะเรียกระบบควบคุมแบบนี้ว่าระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกหรือระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะแบบมีตัวสังเกต โดยในการออกแบบตัวสังเกตสถานะนั้น ระบบที่ต้องการควบคุมจะต้องมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้(Controllability)และความสามารถสังเกตได้(Observability) โดยแผนผังกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกจะเป็นดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออก

ในการออกแบบตัวสังเกตสถานะ(State Observer) ถ้าในระบบที่ต้องการควบคุมมีตัวแปรสถานะทั้งหมด n ตัวแปรและทุกๆตัวแปรไม่ทราบค่าหรือไม่สามารถวัดได้ ผู้ออกแบบจึงต้องมีการออกแบบตัวสังเกตมาสังเกตสถานะทั้ง n สถานะ ตัวสังเกตประเภทนี้จะเรียกว่าตัวสังเกตสถานะแบบเต็มลำดับ(Full-order State Observer) ในกรณีที่ตัวแปรสถานะสามารถวัดค่าได้ทั้งหมด m ตัวแปร โดยที่ $m < n$ ผู้ออกแบบจำเป็นที่จะต้องออกแบบตัวสังเกตมาสังเกตสถานะเพียง $n - m$ สถานะ ตัวสังเกตประเภทนี้จะเรียกว่าตัวสังเกตสถานะแบบลดอันดับน้อยสุด(Minimum-order state observer) โดยในของโครงงานนี้จะศึกษาเพียงในขั้นของการออกแบบตัวสังเกตสถานะเต็มลำดับ(Full-order State Observer)

2.3.2 การออกแบบตัวสังเกตสถานะโดยใช้วิธีการวางขั้ว

จากที่กล่าวมาแล้วว่าในการออกแบบตัวสังเกตสถานะนั้น ระบบที่ต้องการควบคุมจำเป็นต้องมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ (Controllability),และความสามารถสังเกตได้(Observability)โดยทั่วไปแบบจำลองของระบบที่ต้องการควบคุมในรูปแบบของปริภูมิสถานะ(State Space) สามารถอธิบายได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0 \qquad (2.3.1)$$

$$y = Cx + Du \qquad (2.3.2)$$

โดยที่ x = เวคเตอร์สถานะ มีมิติ $n \times 1$

u = เวคเตอร์สัญญาณขาเข้า มีมิติ $r \times 1$

y = เวกเตอร์สัญญาณขาออก มีมิติ $q \times 1$

A = เมทริกซ์สถานะ(State Matrix)ที่มีมิติ $n \times n$

B = เมทริกซ์ขาเข้า(Input Matrix)ที่มีมิติ $n \times r$

C = เมทริกซ์ขาออก(Output Matrix)ที่มีมิติ $q \times n$

D = เมทริกซ์ป้อนเดินหน้า(Feed Forward Matrix)ที่มีมิติ $q \times r$

พิจารณาคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ (Controllability)จาก

$$U \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{2.3.3}$$

U ต้องมีค่าลำดับขั้นเต็ม(Full rank)

พิจารณาคุณสมบัติความสามารถสังเกตได้ (Controllability)จาก

$$V \triangleq \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^2)^TC^T & \dots & (A^{n-1})^TC^T \end{bmatrix} \tag{2.3.4}$$

V ต้องมีค่าลำดับขั้นเต็ม(Full rank)

สมมุติสถานะ $\hat{x}$ เป็นสถานะที่ได้จากการสังเกตสถานะ x จะเขียนให้อยู่ในรูปปริภูมิสถานะได้เป็น

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - \hat{y}) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \tag{2.3.5}$$

พิจารณารูปที่ 2.4 จะเห็นได้ว่าสัญญาณควบคุม $u(t) = -K\hat{x} + r$ ดังนั้นจะเขียนสมการสถานะ x และ $\hat{x}$ ใหม่ได้เป็น

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Br \tag{2.3.6}$$

$$\dot{\hat{x}} = K_eCx + (A - BK - K_eC)\hat{x} + Br \tag{2.3.7}$$

นิยามความผิดพลาด(error)ระหว่างสถานะ x กับสถานะ $\hat{x}$ ได้เป็น

$$e = x - \hat{x} \tag{2.3.8}$$

หาค่าอนุพันธ์ของความผิดพลาดต่อเวลา($\dot{e}$)แล้วแทนค่า $\dot{x}$ และ $\dot{\hat{x}}$ จากสมการ 2.3.6กับ2.3.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\
&= (Ax - BK\hat{x} + Br) - (K_eCx + (A - BK - K_eC)\hat{x} + Br) \\
&= (A - K_eC)(x - \hat{x}) \\
&= (A - K_eC)e
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

จากสมการที่ 2.3.8จะสามารถเขียนสมการสถานะใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax - BK\hat{x} + Br \\
&= Ax - BKx + BKe + Br \\
&= (A - BK)x + BKe + Br
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

จะเห็นได้ว่าเป้าหมายของการออกแบบตัวสังเกตสถานะนั้น คือการได้มาซึ่งค่าอัตราขยาย (Gain) K และ K_e ซึ่งวิธีการหาค่าอัตราขยายทั้งสองค่านั้น เราต้องพิจารณาสมการที่ 2.3.9และ2.3.10 ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_eC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \tag{2.3.11}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \tag{2.3.12}$$

สมการคุณลักษณะ(Characteristic Equation) จะเขียนได้เป็น

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + K_eC \end{vmatrix} = 0$$

$$|sI - A + BK||sI - A + K_eC| = 0 \tag{2.3.12}$$

จากสมการที่ 2.3.12 วิธีการหาค่าอัตราขยาย K และ K_e สามารถออกแบบโดยแยกกันได้ โดยผู้ออกแบบต้องการให้ค่าความผิดพลาดตามสมการที่ 2.3.9นี้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ให้เร็วที่สุด กล่าวคือ ต้องการออกแบบให้ค่าเจาะจงของ $A - K_eC$ มีส่วนจริงเป็นลบมากๆ โดยทั่วไปแล้ว นิยมออกแบบให้ส่วนจริงของค่าเจาะจงของ $A - K_eC$ มีขนาดประมาณ 2-5 เท่าของขนาดของส่วนจริงของขั้ววงปิด $A - BK$ ที่ผู้ออกแบบต้องการ

สมมุติว่าผู้ออกแบบต้องการวางขั้วที่ตำแหน่ง $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ดังนั้นจะได้ว่า $|sI - A + BK| = \prod_{k=1}^{n}(s - p_k)$ ซึ่งสมการนี้ เราสามารถแก้สมการเพื่อหาค่า K โดยเทียบสัมประสิทธิ์ เช่นเดียวกันในการออกแบบตัวสังเกตตัวแปรสถานะ ผู้ออกแบบควรออกแบบตำแหน่งขั้วไว้ที่ $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n$ โดยที่ส่วนจริงของ $\hat{p}_l, l = 1, 2, \ldots, n$ ควรจะมีขนาดมากกว่าขนาดสูงสุดของส่วนจริง p_l ประมาณ 2-5 เท่า ดังนั้นจะได้ว่า $|sI - A + K_eC| = \prod_{l=1}^{n}(s - \hat{p}_l)$ แล้วทำการหาค่า K_e โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

2.3.3 ผลกระทบที่เกิดจากการใช้ตัวสังเกตสถานะในระบบ

ในการออกแบบตัวสังเกตสถานะเข้าไปในระบบ เป้าหมายเพื่อสังเกตตัวแปรสถานะแล้วนำไปป้อนกลับ โดยการออกแบบที่ถูกต้องนั้นผลตอบสนองที่ได้จากการออกแบบทั้งตอนที่ใช้และไม่ใช้ตัวสังเกตสถานะต้องมีค่าเหมือนกัน ทั้งนี้ก็เนื่องมาจากการออกแบบตัวสังเกตสถานะเพื่อสังเกตตัวแปรสถานะเพียงอย่างเดียว ซึ่งจะเห็นได้ว่าผู้ออกแบบจะออกแบบให้ตำแหน่งขั้วของตัวสังเกตมีผลตอบสนองให้เร็วกว่าตำแหน่งขั้วของตัวแปรสถานะจริง ประมาณ 5 เท่า

แบบจำลองของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกในรูปปริภูมิสถานะ คือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_eC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \tag{2.3.13}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \tag{2.3.14}$$

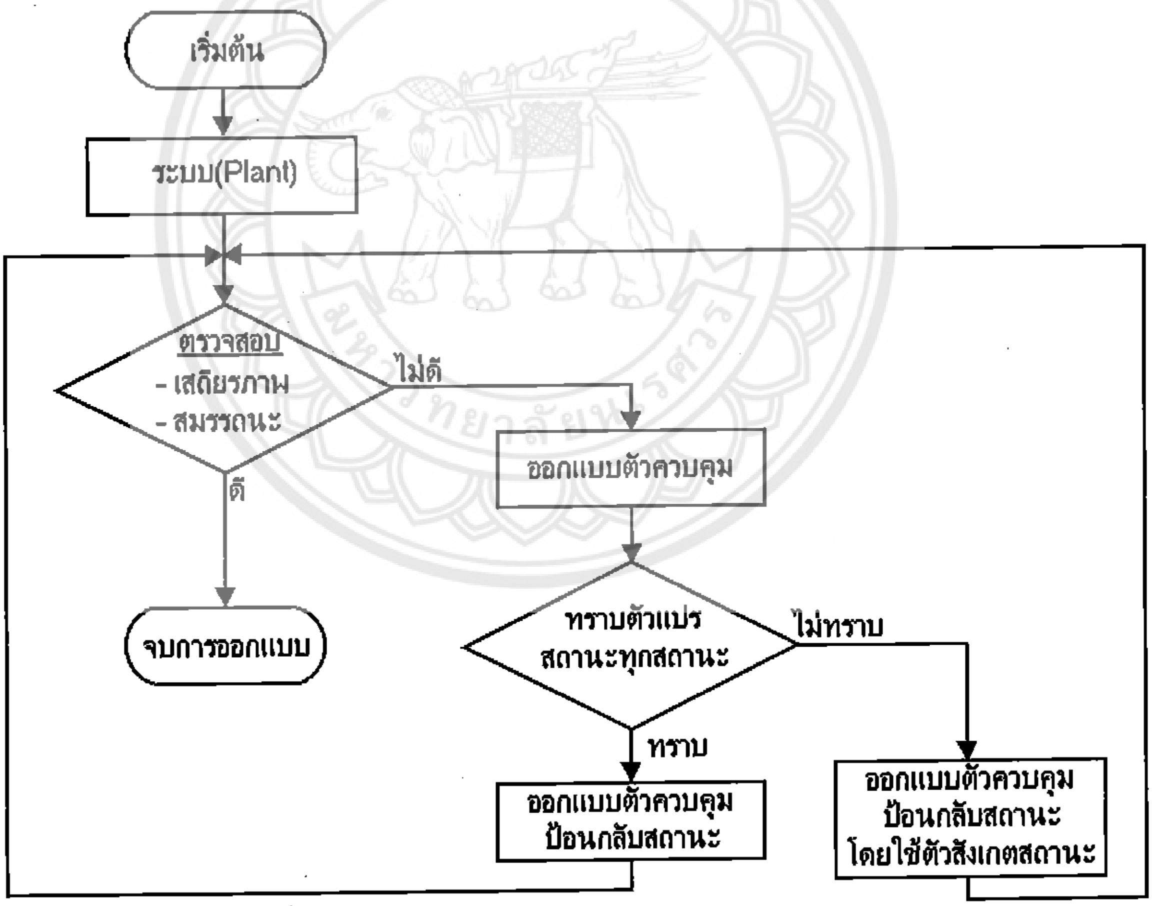
จากสมการที่ 2.3.13และ2.3.14 ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะกรณีใช้ตัวสังเกตสถานะจะเขียนได้เป็น

$$\frac{Y}{R}=[C \quad 0]\begin{bmatrix} sI-A+BK & -BK \\ 0 & sI-A+K_eC \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.15}$$

$$\frac{Y}{R}=C(sI-A+BK)^{-1}B \tag{2.3.16}$$

จากสมการที่ 2.3.16 จะเห็นได้ว่าสุดท้ายฟังชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกจะเหลืออยู่เพียงเทอมของการป้อนกลับสถานะเท่านั้น ซึ่งสิ่งนี้จะสอดคล้องกับที่กล่าวมาในเบื้องต้นว่า ผลตอบสนองทั้งก่อนและหลังการใส่ตัวสังเกตสถานะต้องมีค่าเหมือนกัน

ในโครงงานนี้ จะมีขั้นตอนในการออกแบบระบบควบคุมในระบบตัวอย่าง ดังแสดงในรูปที่ 2.5 สำหรับหลักการและวิธีการออกแบบ โดยละเอียดจะได้แสดงในการออกแบบระบบควบคุมในตัวอย่างระบบที่ศึกษาต่อไป



รูปที่ 2.5 ขั้นตอนการออกแบบระบบควบคุม

2.4 การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(Optimization: LQ)

2.4.1 บทนำ

วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด ที่เรียกว่า วิธีกำลังสองเชิงเส้น(Linear Quadratic:LQ) จะเป็นวิธีที่ใช้วิเคราะห์ระบบที่เป็นเชิงเส้น โดยจะต้องคำนึงถึงค่า ตัวบ่งชี้สมรรถนะ (Performance index: V) ให้เหมาะสม เพื่อที่จะสนองเป้าหมายของการควบคุมที่ประกอบด้วยสิ่งต่างๆ ดังนี้

1. มีเสถียรภาพ(Stability)
2. มีความคงทน(Robust)ต่อความไม่แน่นอน(Uncertainty)ระดับหนึ่ง
3. มีสมรรถภาพ(Performance)ในเรื่องความเร็วผลตอบสนองที่เร็ว,ความแม่นยำ และมีปริมาณการใช้พลังงานที่น้อย

โดยก่อนที่จะแสดงเนื้อหาในส่วนของวิธีการและตัวอย่างการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้น เราจำเป็นต้องทราบทฤษฎีพื้นฐานต่างๆก่อน เพื่อที่จะทำให้เข้าใจหลักการของวิธีการนี้มากยิ่งขึ้น

2.4.2 เสถียรภาพในแนวคิดของลีอาปูนอฟ

การวิเคราะห์เสถียรภาพจากแนวคิดของลีอาปูนอฟ(Lyapunov)จะใช้วิเคราะห์เสียรภาพของระบบพลวัตร โดยไม่จำเป็นต้องแก้สมการสถานะ(State Equation)

นิยาม ระบบพลวัตรใดๆคือระบบที่สามารถเขียนบรรยายอยู่ในรูปปริภูมิสถานะ

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{2.4.1}$$

เมื่อ x เป็นเวคเตอร์สถานะ และ $f(x,t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ x และตัวแปรเวลา t

ถ้าสมมุติให้สมการที่ 2.4.1 มีเพียงผลเฉลยเดียว เมื่อกำหนดให้ค่าสภาวะเริ่มต้น(Initial Condition)มาค่าหนึ่งแล้ว โดยทั่วไปผลเฉลยของสมการ 2.4.1 เขียนอยู่ในรูปของ $\phi(t;x_0,t_0)$ ที่ซึ่ง

$$\phi(t_0;x_0,t_0) = x_0 \tag{2.4.2}$$

ตัวแปรสถานะ $x = x_0$ เรียกว่าสถานะสมดุล(Equilibriam State: x_e)ของสมการ 2.4.1 เมื่อ

$$f(x_e,t) = 0 \quad \text{ทุกเวลา } t \tag{2.4.3}$$

สำหรับหลักการวิเคราะห์เสถียรภาพของลีอาปูนอฟ โดยที่ลีอาปูนอฟจะพิจารณาเสถียรภาพโดยใช้รูปภาพซึ่งลีอาปูนอฟจะกำหนดวงกลมมีรัศมี k รอบจุดสถานะสมดุล x_e เป็น

$$\|x - x_e\| \le k \tag{2.4.4}$$

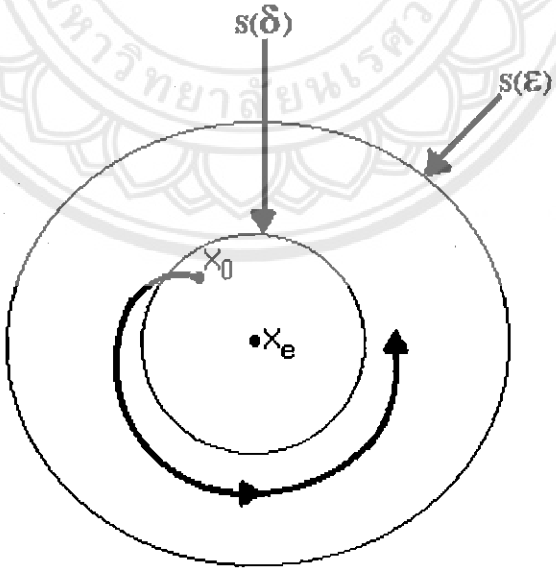
สมมุติ $S(\delta)$ ประกอบด้วยทุกๆจุด(สถานะ) ทีมีเงื่อนไขเป็น

$$\|x_0 - x_e\| \le \delta \tag{2.4.5}$$

สมมุติ $S(\varepsilon)$ ประกอบด้วยทุกๆจุด(สถานะ) ที่ถูกกำหนดเป็น

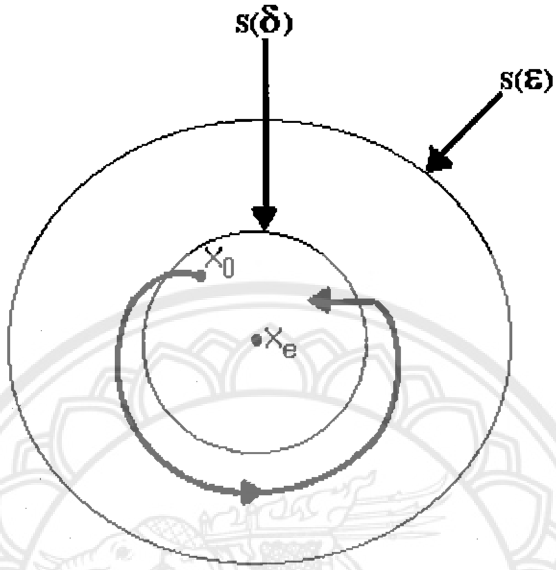
$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \le \varepsilon \tag{2.4.6}$$

เสถียรภาพในแนวคิดของลีอาปูนอฟ (Stability in Sense of Lyapunov) กล่าวว่า "ระบบจะมีเสถียรภาพที่สถานะสมดุล(x_e)ก็ต่อเมื่อทุกๆสถานะเริ่มต้น(x_0)ใน $S(\delta)$ จะเคลื่อนที่อยู่ภายใน $S(\varepsilon)$ เมื่อเวลา t เพิ่มขึ้นจนถึงอนันต์(Infinity)" โดยลักษณะของการจำลองเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะจะแสดงได้ตามรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 รูปจำลองเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะที่มีเสถียรภาพในแนวคิดของลีอาปูนอฟ

นิยาม "สถานะสมดุล x_e ของระบบจะเรียกว่ามีเสถียรภาพแบบเส้นกำกับ(Asymptotic Stability)ก็ต่อเมื่อระบบมีเสถียรภาพตามแนวคิดของลีอาปูนอฟและสถานะเริ่มต้นมีวงโคจร(เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ)มาสิ้นสุดภายใน $S(\delta)$ โดยมีวงโคจรไม่ออกจาก $S(\varepsilon)$ เมื่อเวลา t เพิ่มขึ้นจนถึงอนันต์ (Infinity)" โดยลักษณะของการจำลองเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะจะแสดงได้ตามรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 รูปจำลองเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะที่มีเสถียรภาพแบบเส้นกำกับ(Asymptotic Stability)

2.4.3 วิธีที่2ของลีอาปูนอฟ

ในทฤษฎีระบบควบคุมแบบเก่า(Classical control) ได้อธิบายระบบพลวัตรไว้ว่า "ในระบบที่มีการสั่นจะมีเสถียรภาพ ถ้าพลังงานรวม(Total Energy)ซึ่งเป็นบวกเสมอมีค่าลดลงอย่างต่อเนื่อง (ซึ่งก็คือเมื่อเราหาอนุพันธ์ของพลังงานรวมจะมีค่าเป็นลบเสมอ)จนกระทั่งไปถึง สถานะสมดุล"

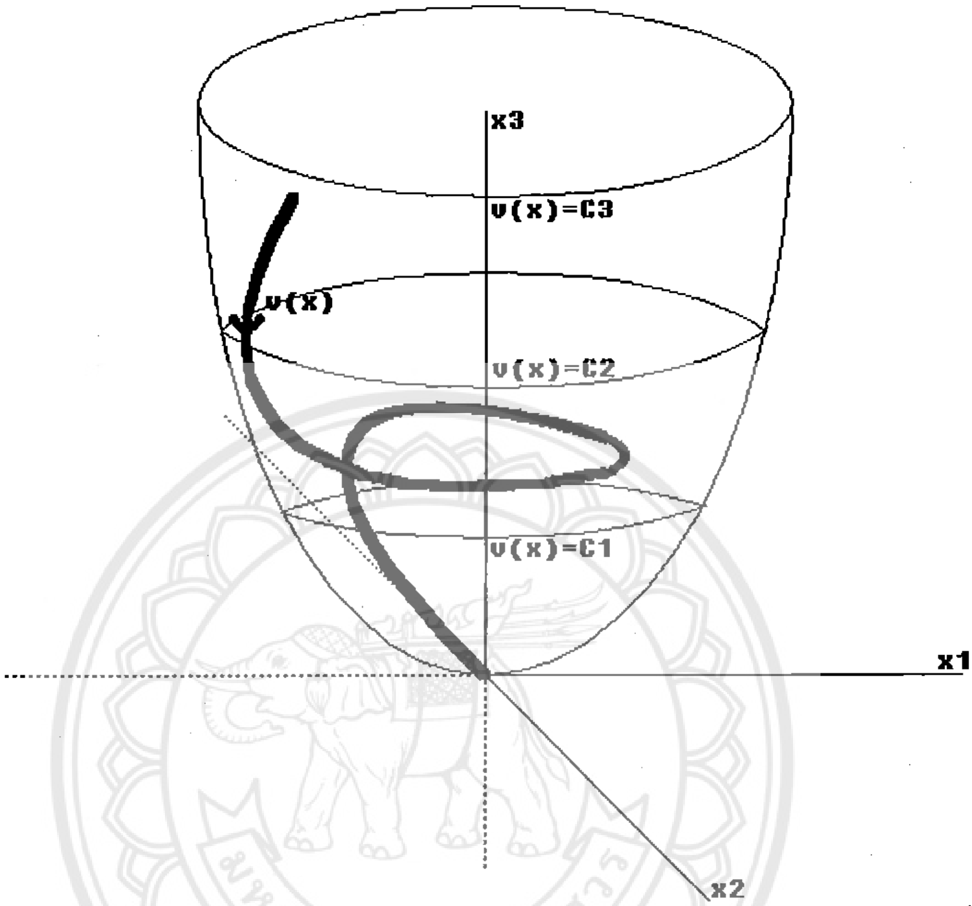
ในวิธีที่2ของลีอาปูนอฟจะมีหลักตามความเป็นจริงโดยทั่วไปว่า "ถ้าระบบมีเสถียรภาพแบบเส้นกำกับที่สถานะสมดุลแล้ว พลังงานที่ให้กับระบบจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปจนถึงจุดสุดท้าย ซึ่งเราจะสมมุติให้จุดสุดท้ายของเวลานี้ พลังงานที่ให้กับระบบจะมีค่าน้อยที่สุด"

อย่างไรก็ตาม ในการหาฟังก์ชันของพลังงาน(Energy function)ค่อนข้างจะยาก ทำให้ลีอาปูนอฟได้นิยามฟังก์ชันที่ใช้แทนฟังก์ชันของพลังงานเรียกว่าฟังก์ชันลีอาปูนอฟ(Lyapunov function) โดยที่ฟังก์ชันลีอาปูนอฟจะเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรสถานะ $x_1, x_2, ..., x_n$ ต่างๆของระบบและเวลา t โดยจะเขียนได้เป็น $V(x,t)$ หรือถ้าไม่พิจารณาเวลาจะเขียนสั้นๆได้เป็น $V(x)$

ฟังก์ชันลีอาปูนอฟ $V(x)$ จะเป็น ฟังก์ชันเชิงสเกล่าร์ และมีค่าความเป็นบวกเสมอ ซึ่งจะแสดงเป็น

$$V(x) = C \qquad \exists x \tag{2.4.7}$$

โดยที่ C เป็นค่าจำนวนจริงบวกใดๆ



รูปที่ 2.8 เส้นทางเดิน(Contour)ของสถานะที่ $V(x)$ คงที่และวงโคจร $V(x)$ **เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น**

กล่าวโดยสรุป วิธีที่2ของลีอาปูนอฟก็คือ ถ้าระบบใดๆสามารถนิยามได้เป็น

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{2.4.8}$$

เมื่อ $f(0,t) = 0$ ทุกเวลา t

ซึ่งก็คือระบบใดๆที่มีเสถียรภาพแบบขอบเขตโดยระบบดังกล่าวต้องมี $V(x,t)$ ที่มีความต่อเนื่องและต้องเป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. $V(x,t) > 0$
   เมื่อ $V(x,t)$ เป็นฟังก์ชันลีอาปูนอฟมีคุณสมบัติเป็นบวกเสมอหรือถ้าจะเขียนให้อยู่ในรูปเฮอมิทเทียน(Hermitian form) ได้เป็น
   $V(x,t) = x^* Px$ **อยู่ในรูปเฮอมิทเทียน(Hermitian form)**
   โดยที่ P เป็นบวกเสมอ(Positive definite)

2. $\dot{V}(x,t) \le 0$

เมื่อ $\dot{V}(x,t)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชันลีอาปูนอฟที่มีคุณสมบัติเป็นลบเสมอ หรือถ้าจะเขียนให้อยู่ในรูปเฮอมิทเทียน(Hermitian form) ได้เป็น

$\dot{V}(x,t) = -x^{*}Qx$ อยู่ในรูปเฮอมิทเทียน (Hermitian form)

โดยที่ Q เป็นกึ่งบวก (Positive-semi definite)

2.4.4 การวิเคราะห์ระบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด

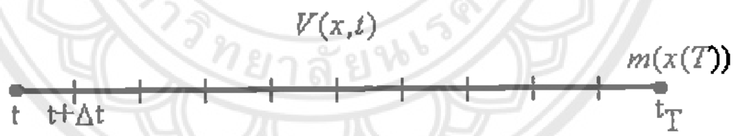
ในการวิเคราะห์ระบบ โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด โดยจะพิจารณาค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ ซึ่งวิธีในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ จะแสดงได้ดังนี้

ระบบพลวัตร โดยทั่วไปเขียนได้เป็น

$$\dot{x} = f(x,u;t) \tag{2.4.9}$$

เมื่อกำหนดให้ตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเขียนอยู่ในรูป

$$V(x_0,t_0,u) = \int_{t_0}^{T} l(x,u,t)dt + m(x(T)) \tag{2.4.10}$$



รูปที่ 2.9 เส้นทางโคจรของตัวบ่งชี้สมรรถนะ $V(x)$ ตั้งแต่เวลา $t \to T$

ดังนั้นตัวบ่งชี้สมรรถนะที่มีค่าเหมาะสมที่สุด สามารถเขียนได้เป็น

$$V_{opt}(x,t) = \min_{u[t,T]} \left\{ \int_{t}^{T} l(x,u,\tau)d\tau + m(x(T)) \right\}$$

$$V_{opt}(x,t) = \min_{u[t,t+\Delta t]} \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} l(x,u,\tau)d\tau + V_{opt}(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\} \tag{2.4.11}$$

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์ ใ4995636.

4800024

สมมุติให้ $\Delta t \rightarrow 0$ และการกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุด Δt จะเขียนได้ว่า

ฟร. 8 ธ.ค. 2547

$$\int_{t}^{t+\Delta t} l(x,u,\tau)d\tau = l(x,u,t)\Delta t + h.o.t \tag{2.4.12}$$

$$V_{opt}(x(t+\Delta t),t+\Delta t) = V_{opt}(x(t),t) + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} \dot{x}\Delta t + \frac{\partial V_{opt}}{\partial t}\Delta t + h.o.t.$$

$$V_{opt}(x(t+\Delta t),t+\Delta t) = V_{opt}(x(t),t) + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} f(x,u,t)\Delta t + \frac{\partial V_{opt}}{\partial t}\Delta t + h.o.t. \tag{2.4.13}$$

แทนสมการ 2.4.12และ2.4.13 ลงในสมการที่ 2.4.11 จะเขียนได้เป็น

$$V_{opt}(x,t) = \min_{u[t,t+\Delta t]}\left[l(x,u,t)\Delta t + V_{opt}(x(t),t) + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} f(x,u,t)\Delta t + \frac{\partial V_{opt}}{\partial t}\Delta t + h.o.t \right] \tag{2.4.14}$$

หารด้วย Δt และหาลิมิตที่ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้ว่า

$$0 = \min_{u(t)}\left[l(x,u,t) + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} f(x,u,t) + \frac{\partial V_{opt}}{\partial t} \right]$$

$$-\frac{\partial V_{opt}}{\partial t} = \min_{u(t)}\left[l(x,u,t) + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} f(x,u,t) \right] \tag{2.4.15}$$

โดยที่ขอบเขตของสภาวะ $V_{opt}(x,T) = m(x(T))$ และสมการที่ 2.4.15จะอยู่ในรูปสมการฮามิลตัล-จาโคบิ-เบลล์แมน(Hamilton-Jacobi-Bellman equation:HJB) ซึ่งหลักการวิเคราะห์ระบบแบบนี้จะนำไปใช้อธิบายและแก้ปัญหาLQRในหัวข้อถัดไป

2.4.5 การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ (State feedback)โดยใช้วิธีLinear Quadratic Regulator (LQR)

หลักการของวิธีLQR จะใช้วิเคราะห์ระบบที่เป็นเชิงเส้นและจะต้องคำนึงถึงค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ (Performance index: V)ให้เหมาะสม ซึ่งตัวบ่งชี้สมรรถนะจะอยู่ในรูปสถานะ(State)และสัญญาณควบคุม(Control Signal) โดยจะเขียนได้ ดังนี้

$$V(x,t) = \int_0^T (x^*Qx + u^*Ru)dt + x^*(T)Mx(T) \qquad (2.4.16)$$

เมื่อ Q เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(Weighting Function)ของตัวแปรสถานะและเป็นเมทริกซ์กึ่งบวก

R เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(Weighting Function)ของสัญญาณควบคุมที่ใช้และเป็นเมทริกซ์บวกเสมอ

M เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(Weighting Function)ของตัวแปรสถานะ ณ เวลาสุดท้าย

x เป็นตัวแปรสถานะ

u เป็นสัญญาณควบคุม

เป้าหมายของวิธี LQR ก็คือการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะในสมการ 2.4.16 ให้มีค่าน้อยที่สุด และเมื่อพิจารณาสมการตัวบ่งชี้สมรรถนะ จะเห็นได้ว่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะอยู่ในรูปของตัวแปรสถานะยกกำลังสองและสัญญาณควบคุมยกกำลังสอง ซึ่งทำให้สิ่งที่ได้จากการลดตัวบ่งชี้สมรรถนะ ก็คือ จะทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะมีค่าเข้าสู่0ได้เร็วที่สุดและจะส่งผลให้มีการใช้ปริมาณของสัญญาณควบคุมน้อยที่สุดเช่นกัน ด้วยเหตุนี้เราสามารถเรียกได้ว่าเมื่อออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธี LQRแล้ว จะทำให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะที่ดียิ่งขึ้น

โดยต่อไปจะแสดงหลักการใช้วิธีLQR ออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ โดยเริ่มจากการเขียนแทนระบบที่เป็นเชิงเส้นและค่าพารามิเตอร์ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาใดๆ เขียนอยู่ในรูปปริภูมิสถานะได้เป็น

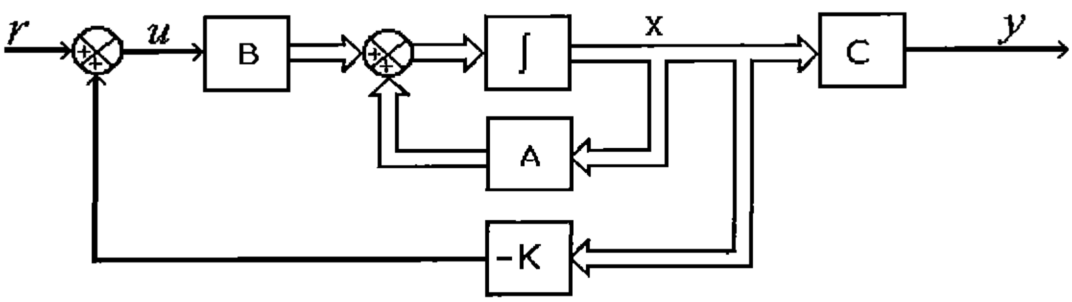
$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (2.4.17)$$

โดยที่ x = เวคเตอร์สถานะ มีมิติ $n\times1$

u = เวคเตอร์สัญญาณขาเข้า มีมิติ $r\times1$

A = เมทริกซ์สถานะ(State Matrix)ที่มีมิติ $n\times n$

B = เมทริกซ์ขาเข้า(Input Matrix)ที่มีมิติ $n\times r$



รูปที่ 2.10 แผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(State Feedback)

ในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะหามาได้โดยแทนค่าสมการ 2.4.16และ2.4.17ลงในสมการHJB จะเขียนได้เป็น

$$-\frac{\partial V_{opt}}{\partial t} = \min_{u(t)}\left[l(x,u,t) + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} f(x,u,t) \right]$$

$$-\frac{\partial V_{opt}}{\partial t} = \min_{u(t)}\left[x^{*}Qx + u^{*}Ru + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} (Ax+Bu) \right] \qquad (2.4.18)$$

จากสมการ 2.4.18 เราต้องการหาค่าต่ำสุด ดังนั้นจะได้ว่า $\min\limits_{u(t)}[.]$ หา $u(t)$ ที่เป็นไปได้ที่ซึ่งตัวบ่งชี้สมรรถนะมีค่าต่ำที่สุด นั้นคือ

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left[x^{*}Qx + u^{*}Ru + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} (Ax+Bu) \right]$$

$$0 = 2Ru + B^{*}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]$$

และจะได้ค่า $u(t)$ ที่เหมาะสมที่สุดเป็น

$$u_{opt}(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^{T}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right] \qquad (2.4.19)$$

แทนสมการ 2.4.19ลงสมการ 2.4.18จะเขียนได้เป็น

$$-\frac{\partial V_{opt}}{\partial t} = x^{*}Qx + \left(-\frac{1}{2}R^{-1}B^{T}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]\right)^{*} R\left(-\frac{1}{2}R^{-1}B^{T}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]\right) + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} \left(Ax + B\left(-\frac{1}{2}R^{-1}B^{T}\left[\frac{\partial V_{op}}{\partial x}\right.\right.\right.$$

$$-\frac{\partial V_{opt}}{\partial t} = x^{*}Qx + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} BR^{-1}B^{*}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]\left(Ax + \frac{1}{2}BR^{-1}B^{T}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]\right)$$

$$-\frac{\partial V_{opt}}{\partial t} = x^{*}Qx - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} BR^{-1}B^{*}\left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial V_{opt}}{\partial x}\right]^{*} Ax \qquad (2.4.20)$$

แม้ว่าเราจะทำการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะแล้ว แต่สมการที่ได้ก็ยังมีความซับซ้อนอยู่ ทำให้จำเป็นต้องใช้เทคนิคในการแก้สมการหลายๆอย่าง โดยสมมุติให้ตัวบ่งชี้สมรรถนะเขียนได้เป็น

$$V_{opt}(x,t) = x^{*}P(t)x \qquad (2.4.21)$$

เมื่อ $P(t)$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกเสมอ ซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ2.4.21 เทียบกับ t และ x จะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial V_{opt}}{\partial t} = x^* \dot{P}(t)x \qquad (2.4.22)$$

$$\frac{\partial V_{opt}}{\partial x} = 2P(t)x \qquad (2.4.23)$$

แทนสมการ2.4.22และ2.4.23 ลงในสมการ2.4.20 จะเขียนได้เป็น

$$-x^* \dot{P}(t)x = x^* Qx - \frac{1}{4}\left(2P(t)x\right)^* BR^{-1}B^*\left(2P(t)x\right) + \left(2P(t)x\right)^* Ax$$

$$-x^* \dot{P}(t)x = x^* Qx - x^* P(t)BR^{-1}B^* P(t)x + 2x^* P(t)Ax \qquad (2.4.24)$$

จะเห็นได้ว่าพจน์ $2x^* P(t)Ax = x^* P(t)Ax + x^* A^* P(t)x$ และแทนในสมการ2.4.24จะได้ว่า

$$-x^* \dot{P}(t)x = x^* Qx - x^* P(t)BR^{-1}B^* P(t)x + x^* P(t)Ax + x^* A^* P(t)x$$

$$-x^* \dot{P}(t)x = x^*\left[Q - P(t)BR^{-1}B^* P(t) + P(t)A + A^* P(t)\right]x \qquad (2.4.25)$$

และเนื่องจากสมการจะอยู่ในรูปของเมทริกซ์ทำให้จะต้องแก้สมการตามหลักการต่อไปนี้ ถ้าสมการเขียนได้เป็น

$$x^* Ax = x^* Bx$$

$$\therefore \quad x^*(A - B)x = 0 \qquad (2.4.26)$$

เนื่องจาก x เป็นค่าใดๆก็ได้(arbitrary) ทำให้สมการ 2.4.26 จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $A - B = 0$ หรือ $A = B$ จากหลักการที่กล่าวมาจะทำให้สามารถเขียนสมการ 2.4.25ได้เป็น

$$\dot{P}(t) = P(t)A + A^* P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^* P(t) \qquad (2.4.27)$$

ที่ซึ่ง $P(T) = M$

เมื่อให้ $\overline{P}$ เป็นคำตอบที่สภาวะคงที่ กล่าวคือ $\dot{P}(t) = 0$ ดังนั้นสมการ 2.4.27 เขียนได้เป็น

$$0 = P(t)A + A^* P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^* P(t) \tag{2.4.28}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ 2.4.28 จะอยู่รูปสมการริคคาติเชิงพีชคณิต(Algebraic Riccati Equation:ARE)และเมื่อแทนสมการ2.4.23 ลงในสมการ 2.4.19 จะเขียนได้เป็น

$$u_{opt}(t) = -R^{-1}B^* \overline{P}x \tag{2.4.29}$$

ทำให้จะได้ค่า K ที่ได้จากการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะเป็น

$$K = R^{-1}B^* \overline{P} \tag{2.4.30}$$

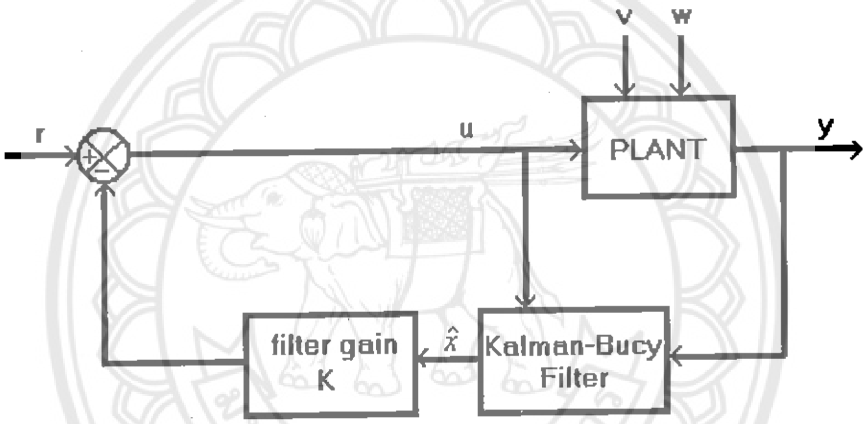
โดยสรุปแล้ว ค่า K สามารถคำนวณหาได้ ดังนี้

1. หาค่าเมทริกซ์ $\overline{P}$ ให้ได้จากสมการ (2.4.28)โดยค่าเมทริกซ์ $\overline{P}$ ที่ได้จะต้องมีคุณสมบัติเป็นบวกเสมอ(Positive-definite)
2. แทนค่าเมทริกซ์ $\overline{P}$ ลงในสมการ(2.4.30)ก็จะได้ค่า K ที่ได้จากการ $\min V$

2.4.6 การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออก (Output feedback) โดยใช้วิธีLinear Quadratic Gaussian (LQG)

ในการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกกรณีที่มีสัญญาณรบกวนที่มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน(Gaussian distribution)มาเกี่ยวข้อง จำเป็นต้องสร้างตัวกรอง(Filter)ขึ้นมากำจัดสัญญาณรบกวนดังกล่าวออกไป แล้วจึงทำการสังเคราะห์ตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ ที่มีคุณลักษณะใกล้เคียงกับตัวแปรสถานะจริง x ของระบบ เพื่อที่จะนำตัวแปรสถานะที่สังเคราะห์ขึ้นมานั้นมาป้อนกลับ

นอกเหนือไปจากนั้น หากเรากำหนดดัชนีสมรรถนะ V_s ขึ้นมา ซึ่งเป็นฟังก์ชันของสัญญาณขาเข้าและความผิดพลาด $e = x - \hat{x}$ แล้วต้องการหาสัญญาณควบคุมที่ทำให้ V_s ต่ำสุด กล่าวคือ $\min_u V_s$ ซึ่งปัญหาดังกล่าวข้างต้นจะเรียกว่า ปัญหากำลังสองเชิงเส้นแบบเกาส์เซียน(Linear Quadratic Gaussian) ซึ่งผู้ที่นำเสนอก็คือ R.E.Kalman and R.S.Bucy โดยที่แผนผังกล่องจะเป็นไปดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 แผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะโดยใช้ Kalman-Bucy filter สังเกตสถานะ

ระบบที่ต้องการควบคุม(Plant) ในรูปปริภูมิสถานะได้เป็น

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \quad (2.4.31)$$

$$y = Cx + Hv \quad (2.4.32)$$

โดยที่ x = เวกเตอร์สถานะ มีมิติ $n \times 1$

u = เวกเตอร์สัญญาณขาเข้า มีมิติ $r \times 1$

y = เวกเตอร์สัญญาณขาออก มีมิติ $q \times 1$

w = เวกเตอร์สัญญาณรบกวนกระบวนการ (Process Noise) ที่มีมิติ $n \times 1$

v = เวกเตอร์สัญญาณรบกวนการวัด(Measurement Noise) ที่มีมิติ 1×1

A = เมทริกซ์สถานะ(State Matrix)ที่มีมิติ $n \times n$

B = เมทริกซ์ขาเข้า(Input Matrix)ที่มีมิติ $n \times r$

C = เมทริกซ์ขาออก(Output Matrix)ที่มีมิติ $q \times n$

G = เมทริกซ์ของสัญญาณรบกวนกระบวนการ ที่มีมิติ $n \times n$

H = เมทริกซ์ของสัญญาณรบกวนการวัด ที่มีมิติ $q \times 1$

กำหนดให้ทั้ง w และ v โดยจะเป็นสัญญาณรบกวนแบบขาว(White-noise) กล่าวคือ w และ v อิสระต่อกัน ทั้งคู่มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน(Gaussian distribution)และมีค่าเฉลี่ย(mean)เป็นศูนย์ นั้นคือ

$$\begin{aligned} &E\left[w(t)\right]=0=E\left[v(t)\right] \\ &E\left[w(t)v(\tau)\right]=E\left[w(t)\right]E\left[v(\tau)\right]=0 \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

$$\begin{aligned} &E\left[w(t)w(\tau)^*\right]=\begin{cases} W & t=\tau \\ 0 & o.w. \end{cases} \\ &E\left[v(t)v(\tau)^*\right]=\begin{cases} V & t=\tau \\ 0 & o.w. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

ตัวแปรสถานะที่ได้จากการสังเกตจะเขียนได้เป็น

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) \tag{2.4.35}$$

แทนสมการ 2.4.32 ลงในสมการ 2.4.35 จะเขียนได้ว่า

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) \tag{2.4.36}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K_e(Cx + Hv - C\hat{x}) \\ &= \left(A - K_eC\right)\hat{x} + Bu + K_eCx + K_eHv \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

ความผิดพลาด(error)จากการประมาณสถานะ คือ $e = x - \hat{x}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= \left(Ax + Bu + Gw\right) - \left(A\hat{x} + Bu + K_e(Cx + Hv - C\hat{x})\right) \\ &= (A - K_eC)e + (Gw - K_eHv) \\ &= (A - K_eC)e + \psi \end{aligned} \tag{2.4.38}$$

เมื่อ $\psi = Gw - K_e Hv$ โดยจะเรียกได้ว่าเป็นสัญญาณรบกวนแบบขาวด้วยเนื่องจาก

$$\begin{aligned} E[\psi] &= E[Gw(t) - K_e Hv(t)] \\ &= GE[w(t)] - K_e HE[v(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} E[\psi(t)\psi(\tau)^*] &= E[(Gw(t) - K_e Hv(t))(w(\tau)^* G^* - v(\tau)^* H^* K_e^*)] \\ &= E[Gw(t)w(\tau)^* G^* - Gw(t)v(\tau)^* H^* K_e^* - K_e Hv(t)w(\tau)^* G^* + K_e Hv(t)v(\tau)^* H^* \\ &= GE[w(t)w(\tau)^*]G^* - GE[w(t)v(\tau)^*]H^* K_e^* - K_e HE[v(t)w(\tau)^*]G^* \\ &\quad + K_e HE[v(t)v(\tau)^*]H^* K_e^* \\ &= \begin{cases} GWG^* + K_e HVH^* K_e^* & t = \tau \\ 0 & o.w. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

เช่นเดียวกันเทอม $(y - C\hat{x})$ จะเรียกได้ว่าเป็นกระบวนการเปลี่ยนแปลงใหม่ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} E[(K_e(y - C\hat{x}))(K_e(y - C\hat{x}))^*] &= E[(K_e(Cx + Hv - C\hat{x}))(K_e(Cx + Hv - C\hat{x}))^*] \\ &= K_e HE[vv^*]H^* K_e^* \\ &= K_e HVH^* K_e^* \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

ในปัญหาLQG จะต้องคำนึงถึงตัวบ่งชี้สมรรถนะ(Performance Index) จะเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$V_s = E\left[\int_0^\infty (x^* Qx + u^* Ru)\,dt\right] \tag{2.4.41}$$

เมื่อ Q เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(Weighting Function)ของตัวแปรสถานะและเป็นเมทริกซ์กึ่งบวก

R เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(Weighting Function)ของสัญญาณควบคุมที่ใช้และเป็นเมทริกซ์บวกเสมอ

x เป็นตัวแปรสถานะ

u เป็นสัญญาณควบคุม

จะเห็นได้ว่าตัวบ่งชี้มรรถนะจะมีค่าขยายออกในทุกๆระบบควบคุม ด้วยเหตุนี้ทำให้พิจารณาตัวบ่งชี้สมรรถนะใหม่ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$V_s = \lim_{t\to\infty} E\left[\frac{1}{T}\int_0^T \left(x^* Qx + u^* Ru\right) dt\right] \tag{2.4.42}$$

ถ้า u เป็นการป้อนกลับที่มีเสถียรภาพแล้ว ดังนั้นการหาปริพันธ์จะอยู่ในขอบเขตคงที่ ซึ่งตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเขียนได้เป็น

$$V_s = E\left[x^* Qx + u^* Ru\right] \tag{2.4.43}$$

ในการลดค่าตัวบ่งชี้มรรถนะคือการหา $u(t)$ ที่เป็นไปได้ที่ซึ่งตัวบ่งชี้สมรรถนะมีค่าต่ำที่สุดโดยจากความผิดพลาด(error) คือ $e = x - \hat{x}$ แทนลงในสมการ 2.4.43 จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} V_s &= E\left[(e-\hat{x})^* Q(e-\hat{x}) + u^* Ru\right] \\ V_s &= E\left[(e^* Qe + e^* Q\hat{x} + \hat{x}^* Qe + \hat{x}^* Q\hat{x} + u^* Ru\right] \end{aligned} \tag{2.4.44}$$

ตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ และ e เป็นอิสระต่อกันทำให้สามารถเขียนได้เป็น

$$V_s = E\left[(e^* Qe + \hat{x}^* Q\hat{x} + u^* Ru\right] \tag{2.4.45}$$

จากสมการ 2.4.45 จะเห็นได้ว่าเทอม $e^* Qe$ จะไม่ขึ้นอยู่กับตัวสังเกต $\hat{x}$ และสัญญาณควบคุม u ด้วยเหตุนี้ในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะสามารถหาแยกกันได้โดยจะเขียนได้เป็น

$$V_s = V_c + V_f \tag{2.4.46}$$

เมื่อ

$$V_c = E\left[(\hat{x}^* Q\hat{x} + u^* Ru)\right] \tag{2.4.47}$$

$$V_f = E\left[e^* Qe\right] \tag{2.4.48}$$

โดยในขั้นแรกจะแสดงการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ V_c ก่อน โดยแทน $u = -K\hat{x}$ จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} V_c &= E\left[(\hat{x}^* Q\hat{x} + \hat{x}^* K^* RK\hat{x})\right] \\ V_c &= E\left[\hat{x}^*(Q + K^* RK)\hat{x}\right] \end{aligned}$$

การหา V_c ต่ำสุดเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} V_{c\_opt} &= E\left[Tr\left\{\hat{x}^*(Q+K^*RK)\hat{x}\right\}\right] \\ &= E\left[Tr\left\{(Q+K^*RK)\hat{x}\hat{x}^*\right\}\right] \\ &= Tr\left\{(Q+K^*RK)E\left[\hat{x}\hat{x}^*\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.4.49}$$

นิยามความแปรปรวนร่วมเกี่ยวของตัวสังเกตสถานะเป็น

$$P_c = E\left\{\hat{x}\hat{x}^*\right\} \tag{2.4.50}$$

ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการ 2.4.49 ได้เป็น

$$V_{c\_opt} = Tr\left\{(Q+K^*RK)P_c\right\} \tag{2.4.51}$$

จากสมการ 2.4.35

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) \qquad \text{โดยที่ } \hat{x}(0) = 0$$

ดังนั้น ผลเฉลยโดยทั่วไปของ e คือ

$$\hat{x} = \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}\left\{K_e(y(\tau) - C\hat{x}(\tau))\right\}d\tau \tag{2.4.52}$$

นำสมการ 2.4.52 แทนลงในสมการที่ 2.4.50 จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} P_c &= E\left\{\left[\int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}\left\{K_e(y(\tau)-C\hat{x}(\tau))\right\}d\tau\right]\left[\int_0^t \left\{K_e(y(\tau)-C\hat{x}(\tau))\right\}^* e^{(A-BK)^*(t-\tau)}d\tau\right]\right\} \\ &= E\left[\int_0^t \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau_1)}\left\{K_e(y(\tau_1)-C\hat{x}(\tau_1))\right\}\left\{K_e(y(\tau)-C\hat{x}(\tau)\right\}^* e^{(A-BK)^*(t-\tau)}d\tau_1 d\right]\tau \\ &= \int_0^t \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau_1)}E\left[\left\{K_e(y(\tau_1)-C\hat{x}(\tau_1))\right\}\left\{K_e(y(\tau)-C\hat{x}(\tau)\right\}^*\right] e^{(A-BK)^*(t-\tau)}d\tau_1 d\tau \\ &= \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau_1)}K_e HVH^* K_e^* e^{(A-BK)^*(t-\tau)}d\tau \end{aligned} \tag{2.4.53}$$

แทนสมการ 2.4.41ลงในสมการ 2.4.49

$$
\begin{aligned}
V_{c\_opt} &= Tr\left\{(Q+K^*RK)\left(\int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau_1)}K_eHVH^*K_e^*e^{(A-BK)^*(t-\tau)}d\tau\right)\right\} \\
&= Tr\left\{\int_0^t e^{(A-BK)^*(t-\tau_1)}(Q+K^*RK)e^{(A-BK)(t-\tau)}d\tau . K_eHVH^*K_e^*\right\} \qquad (2.4.53)
\end{aligned}
$$

ลักษณะเดียวกันกับค่า P_c และจากสมการที่ 2.4.53 จะกำหนดให้

$$\overline{P} = \int_0^t e^{(A-BK)^*(t-\tau_1)}(Q+K^*RK)e^{(A-BK)(t-\tau)}d\tau \qquad (2.4.54)$$

หาอนุพันธ์สมการ 2.4.54 เทียบกับเวลา จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\dot{\overline{P}} = (A-BK)^*&\left[\int_0^t e^{(A-BK)^*(t-\tau_1)}(Q+K^*RK)e^{(A-BK)(t-\tau)}d\tau\right]+ \\
&\left[\int_0^t e^{(A-BK)^*(t-\tau_1)}(Q+K^*RK)e^{(A-BK)(t-\tau)}d\tau\right](A-BK)+Q+K^*RK \qquad (2.4.55)
\end{aligned}
$$

แทน $\overline{P}$ ในสมการ 2.4.55 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\dot{\overline{P}} &= (A-BK)^*\overline{P}+\overline{P}(A-BK)+Q+K^*RK \\
0 &= A^*\overline{P}+\overline{P}A+Q-K^*B^*\overline{P}-\overline{P}BK+K^*RK \\
0 &= A^*\overline{P}+\overline{P}A+Q-\overline{P}BR^{-1}B^*\overline{P} \qquad (2.4.56)
\end{aligned}
$$

พิจารณาสมการ 2.4.56 จะอยู่รูปสมการริคคาติเชิงพีชคณิต(Algebraic Riccati Equation:ARE) เหมือนกับวิธีLQR ดังนั้นทำให้ได้ค่า K ที่ได้จากการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ V_c เป็น

$$K = R^{-1}B^*\overline{P} \qquad (2.4.57)$$

และในการหาค่าต่ำสุดของ V_c จะเขียนได้เป็น

$$V_{c\_opt} = Tr\left\{\overline{P}K_cHVH^*K_e^*\right\} \qquad (2.4.58)$$

โดยสรุปแล้ว ค่า K ที่ทำให้สามารถคำนวณหาได้ ดังนี้

1. หาค่าเมทริกซ์ $\bar{P}$ จากสมการริคคาติเชิงพีชคณิต(Algebraic Riccati Equation :ARE) โดยค่าเมทริกซ์ $\bar{P}$ ที่ได้จะต้องมีคุณสมบัติเป็นบวกเสมอ(Positive-definite)
2. แทนค่าเมทริกซ์ $\bar{P}$ ลงในสมการ(2.4.7)ก็จะได้ค่า K ที่ได้จากการ $\min V_c$

และต่อไปจะแสดงหลักการการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ V_f ดังนี้

$$\begin{aligned} V_{f\_opt} &= E\left[Tr\left[e^*Qe\right]\right] \\ &= E\left[Tr\left[Qee^*\right]\right] \\ &= Tr\left[QE\left[ee^*\right]\right] \\ &= Tr\left[QP_f\right] \end{aligned} \tag{2.4.59}$$

นิยามเมทริกซ์ P_f จะเขียนได้เป็น

$$P_f = E\{e(t)e(t)^*\} \tag{2.4.60}$$

จากสมการ 2.4.38

$$\dot{e} = (A - K_eC)e + \psi \quad \text{โดยที่ } e(0) = e_0$$

ดังนั้น ผลเฉลยโดยทั่วไปของ e คือ

$$e(t) = e^{(A-K_eC)t}e_0 + \int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}\{Gw(\tau) - K_eHv(\tau)\}\,d\tau \tag{2.4.61}$$

นำสมการ 2.4.61 แทนลงในสมการที่ 2.4.50 จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} P_f = E\Bigg\{&\left[e^{(A-K_eC)t}e_0 + \int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}\{Gw(\tau) - K_eHv(\tau)\}\,d\tau\right] \\ &\left[e_0{}^* e^{(A-K_eC)^*t} + \int_0^t \{Gw(\tau) - K_eHv(\tau)\}^* e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau\right]\Bigg\} \\ = E[&e^{(A-K_eC)t}e_0e_0{}^* e^{(A-K_eC)^*t}] + E\left[e^{(A-K_eC)t}e_0\int_0^t \{Gw(\tau) - K_eHv(\tau)\}^* e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau\right] \end{aligned}$$

$$+E\left[\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}\left\{Gw(\tau)-K_eHv(\tau)\right\}d\tau.e_0*e^{(A-K_eC)^*t}\right]+$$

$$E[\int_0^t\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau_1)}\left\{Gw(\tau_1)-K_eHv(\tau_1)\right\}\left\{Gw(\tau)-K_eHv(\tau)\right\}*e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau_1 d\tau]$$

$$=e^{(A-K_eC)t}E[e_0e_0*]e^{(A-K_eC)^*t}+\int_0^t\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau_1)}E\left[\left\{Gw(\tau_1)-K_eHv(\tau_1)\right\}\left\{Gw(\tau)-K_eHv(\tau)\right\}*\right]$$

$$e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau_1 d\tau$$

$$=e^{(A-K_eC)t}P_0e^{(A-K_eC)^*t}+\int_0^t\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau_1)}E\left[\left\{Gw(\tau_1)-K_eHv(\tau_1)\right\}\left\{Gw(\tau)-K_eHv(\tau)\right\}*\right]$$

$$e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau_1 d\tau$$

$$=e^{(A-K_eC)t}P_0e^{(A-K_eC)^*t}+\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}\left(GWG*+K_eHVH*K_e*\right)e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau \qquad (2.4.62)$$

หาอนุพันธ์สมการ 2.4.62 เทียบกับเวลา จะเขียนได้ว่า

$$\dot{P}_f=\left(A-K_eC\right)\left(e^{(A-K_eC)t}P_0e^{(A-K_eC)^*t}\right)+\left(e^{(A-K_eC)t}P_0e^{(A-K_eC)^*t}\right)\left(A-K_eC\right)*+$$

$$\left(A-K_eC\right)\left(\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}GWG*+K_eHVH*K_e*e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau\right)+$$

$$\left(\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}GWG*+K_eHVH*K_e*e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau\right)\left(A-K_eC\right)*+$$

$$GWG*+K_eHVH*K_e*$$

$$=\left(A-K_eC\right)\left(e^{(A-K_eC)t}P_0e^{(A-K_eC)^*t}+\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}GWG*+K_eHVH*K_e*e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau\right)+$$

$$\left(e^{(A-K_eC)t}P_0e^{(A-K_eC)^*t}+\int_0^t e^{(A-K_eC)(t-\tau)}GWG*+K_eHVH*K_e*e^{(A-K_eC)^*(t-\tau)}d\tau\right)\left(A-K_eC\right)*$$

$$+GWG*+K_eHVH*K_e* \qquad (2.4.63)$$

โดยที่ $P(0)=P_0$

แทนค่า P_f ลงไปในสมการ 2.4.63

$$\dot{P}_f=\left(A-K_eC\right)P_f+P_f\left(A-K_eC\right)*+GWG*+K_eHVH*K_e* \qquad (2.4.64)$$

ค่าอัตราขยาย K_e ที่ทำให้ตัวบ่งชี้สมรรถนะ V_f ต่ำสุดจะหาจากการหาอนุพันธ์สมการ 2.4.64เทียบ K_e

$$\frac{d}{dK_e}((A-K_eC)P_f+P_f(A-K_eC)^*+GWG^*+K_eHVH^*K_e^*)=0$$

$$-CP_f+P_fC^*+2HVH^*K_e=0$$

$$2HVH^*K_e=2P_fC^*$$

$$K_e=P_fC^*H^{-1}V^{-1}(H^*)^{-1} \quad (2.4.65)$$

จะเห็นได้ว่าค่า K_e จะอยู่ในเทอมของเมทริกซ์ P_f ทำให้ต้องหาเมทริกซ์ P_f มาก่อน โดยที่ค่า P_f จะหามาโดยแทน K_e ลงในสมการ2.4.64 จะได้ว่า

$$0=\left(A-PC^*H^{-1}V^{-1}(H^*)^{-1}C\right)P_f+P_f\left(A-PC^*H^{-1}V^{-1}(H^*)^{-1}C\right)^*+ GWG^*+PC^*H^{-1}V^{-1}(H^*)^{-1}HVH^*(H)^{-1}V^{-1}\left(H^*\right)^{-1}CP\Big]$$

$$0=\Big[AP_f-P_fC^*H^{-1}V^{-1}(H^*)^{-1}CP_f+P_fA^*-P_fC^*H^{-1}V^{-1}(H^*)^{-1}CP_f+ GWG^*+P_fC^*H^{-1}V^{-1}\left(H^*\right)^{-1}CP_f\Big]$$

$$0=AP_f+P_fA^*+GWG^*-P_fC^*H^{-1}V^{-1}\left(H^*\right)^{-1}CP_f \quad (2.4.66)$$

ซึ่งสมการ(2.4.66)จะอยู่ในรูปสมการตัวกรองของริคคาติเชิงพีชคณิต(Filter Algebraic Riccati Equation: FARE)

โดยสรุปแล้ว ค่า K_e สามารถคำนวณหาได้ ดังนี้

1. หาค่าเมทริกซ์ P_f ได้จากสมการตัวกรองของริคคาติเชิงพีชคณิต(Filter Algebraic Riccati Equation:FARE) โดยค่าเมทริกซ์ P_f ที่ได้จะต้องมีคุณสมบัติเป็นบวกเสมอ
2. แทนค่าเมทริกซ์ P_f ลงในสมการ(2.4.65)ก็จะได้ค่า K_e ที่ได้จากการ $\min V_f$

โดยสรุปแล้วการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีLQGจะเป็นการหาค่าอัตราขยาย K, K_e ที่ทำให้ตัวบ่งชี้สมรรถนะต่ำสุด โดยที่ตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเขียนได้เป็น

$$V_{s\_opt}=Tr\left\{\bar{P}K_eHVH^*K_e^*\right\}+Tr\left\{P_fQ\right\} \quad (2.4.67)$$

2.4.7 หลักการเลือก Q, R, และการกำหนดค่า G, W,H,V

หลักการของการเลือก Q, R นั้นจะไม่ค่อยมีหลักการที่แน่นอน โดยส่วนใหญ่จะพิจารณาว่าต้องการให้สัญญาณออกมีลักษณะใด ซึ่งขึ้นอยู่กับวิธีและประสบการณ์ของผู้ออกแบบด้วย โดยส่วนใหญ่ Q, R จะอยู่ในรูปเมทริกซ์เส้นทแยงมุมซึ่งเหตุผลก็คือ

1) เพื่อง่ายต่อการตรวจสอบคุณสมบัติ "Definiteness"
2) เพื่อเป็นการแยกค่าอย่างชัดเจนว่า Q แต่ละตัวต้องการเลือกไปที่ตัวแปรสถานะตัวใด โดย

จะเขียนเป็น $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{mm} \end{bmatrix}$

3) เพื่อเป็นการแยกค่าอย่างชัดเจนว่า R แต่ละตัวต้องการเลือกไปที่สัญญาณควบคุมตัวใด ซึ่งในโครงงานนี้ศึกษาระบบระบบสัญญาณขาเข้าและขาออกเดียว (SISO) โดยจะเขียนเป็น $R = r$

สำหรับค่า G ซึ่งเป็นเมทริกซ์ของของสัญญาณรบกวนกระบวนการ w และ H เป็นเมทริกซ์ของสัญญาณรบกวนการวัด v ซึ่งจะหามาจากสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดของระบบโดยตรง จึงสมมุติให้มีค่าดังกล่าวออกมาแทน ดังนี้

$$W = E\left[ww^T\right] = E\left[w^2\right] = \sigma_w^2$$

$$V = E\left[vv^*\right] = E\left[v^2\right] = \sigma_v^2$$

โดยในโครงงานนี้จะกำหนดค่า w, v แตกต่างกันหลายๆกรณีและสำหรับค่า G, H จะกำหนดให้เป็นดังนี้

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [1]$$

2.4.8 MATLAB Command

จะเห็นได้ว่าในการคิดหาค่าอัตราขยาย(Gain) K, K_e ค่อนข้างจะมีวิธีคิดที่ยุ่งยาก โดยเฉพาะเมื่อมีการเลือก Q, R ใหม่ ก็ต้องเริ่มวิธีคิดใหม่ และเพื่อสะดวกในการคิด ผู้ออกแบบจะใช้โปรแกรม MATLAB ที่มีชุดคำสั่งในการออกแบบระบบโดยใช้วิธีLQRและLQGหรือแม้กระทั่งการแสดงผลตอบสนองในลักษณะต่างๆจากการออกแบบเป็นเครื่องมือในการออกแบบ โดยในหัวข้อนี้จะแสดงชุดคำสั่งสำคัญที่เกี่ยวกับการออกแบบ ดังนี้

[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

คำสั่งนี้จะเป็นคำสั่งที่ใช้หาค่า K ของระบบป้อนกลับสถานะ โดยใช้วิธีLQR ซึ่งค่า K ที่ได้จะเป็นค่า K ที่สัมพันธ์กับการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ(Minimize Performance Index) โดยหลักของคำสั่งนี้จะมาจากจะใช้การแก้สมการริกคาติเชิงพีชคณิตเพื่อหาค่าเมทริกซ์ $\overline{P}$ และนำไปแทนค่าหาค่า K ต่อไป ซึ่งรายละเอียดจะอยู่ในหัวข้อ 2.4.5

โดยเมื่อใช้คำสั่งนี้ พารามิเตอร์ที่เราจะต้องป้อนเข้าไปในคำสั่งก็คือ

1. เมทริกซ์สถานะ(State Matrix) A
2. เมทริกซ์ขาเข้า(Input Matrix) B
3. ฟังก์ชันน้ำหนัก Q ต้องมีคุณสมบัติกึ่งบวก
4. ฟังก์ชันน้ำหนัก R ต้องมีคุณสมบัติบวกเสมอ

พารามิเตอร์ที่ได้ออกมาก็คือ

1. เมทริกซ์อัตราขยาย(Gain Matrix) K
2. เมทริกซ์ $\overline{P}$
3. ค่าเจาะจง(eigenvalue) E ของเมทริกซ์ $\overline{P}$

[Ke,P,E] = lqe(A,G,C,W,V)

คำสั่งนี้จะเป็นคำสั่งที่ใช้หาค่า K_e ที่ได้จากหลักการของตัวกรองคาล์มานน์-บูซี โดยการแก้สมการตัวกรองริกคาติเชิงพีชคณิตเพื่อหาค่าเมทริกซ์ P_f และนำไปแทนค่าหาค่า K_e ต่อไป ซึ่งรายละเอียดจะอยู่ในหัวข้อ 2.4.6

โดยเมื่อใช้คำสั่งนี้พารามิเตอร์ที่เราจะต้องป้อนเข้าไปในคำสั่งก็คือ

1. เมทริกซ์สถานะ(State Matrix) A
2. เมทริกซ์ขาออก(Output Matrix) C
3. เมทริกซ์ G เป็นเมทริกซ์ของสัญญาณรบกวนกระบวนการ
4. W เป็นความแปรปรวนร่วมเกี่ยวของสัญญาณรบกวนกระบวนการ มีคุณสมบัติกึ่งบวก)
5. V เป็นความแปรปรวนร่วมเกี่ยวของสัญญาณรบกวนการวัดมีคุณสมบัติบวกเสมอ

พารามิเตอร์ที่ได้ออกมาก็คือ

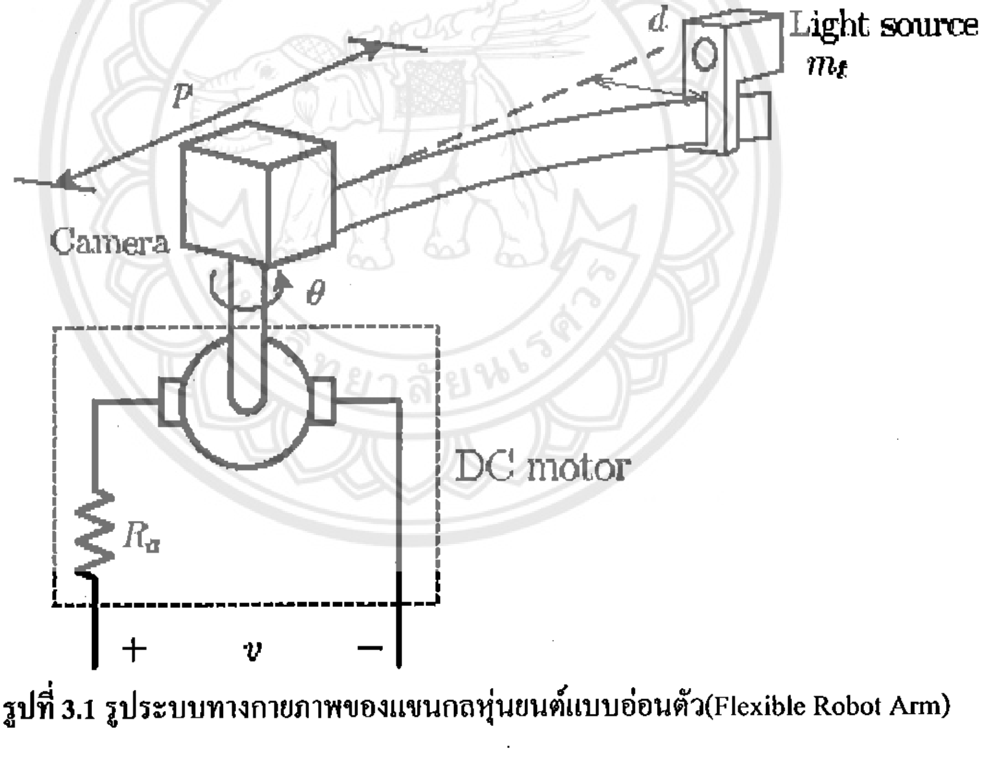
1. เมทริกซ์อัตราขยาย(Gain Matrix) K_e
2. เมทริกซ์ P_f
3. ค่าเจาะจง(eigenvalue) E ของเมทริกซ์ P_f

บทที่ 3
ตัวอย่างระบบที่ศึกษา

จากที่กล่าวมาแล้วในบทที่ผ่านมาเกี่ยวกับหลักการและทฤษฎีของการออกแบบระบบควบคุม โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด ซึ่งในบทนี้จะแสดงตัวอย่างการออกแบบให้เห็นเป็นรูปธรรมมากขึ้น และจะแสดงวิธีการต่างๆในการออกแบบรวมไปถึงผลตอบสนองในลักษณะต่างๆหลังจากการออกแบบอีกด้วย

3.1 ระบบที่ศึกษา

ตัวอย่างระบบที่จะเป็นระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ดูรายละเอียดจาก[5] ซึ่งระบบจะมีลักษณะทางกายภาพดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 รูประบบทางกายภาพของแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว(Flexible Robot Arm)

โดยจากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าแขนกลจะทำงานโดยเมื่อเราป้อนแรงดัน v เข้าไปจะทำให้มอเตอร์กระแสตรงมีการหมุนจากมุม $\theta = \theta_0$ ไปยัง $\theta = \theta_f$ (ตำแหน่งเส้นปะ) โดยใช้อัตราเร็วเชิงมุม $\dot{\theta}$ และจะเห็นว่ามอเตอร์จะต่อกับแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ทำให้แขนกลหมุนจากตำแหน่ง $d = d_0$ ไปยังตำแหน่ง $d = d_f$ (ตำแหน่งเส้นปะ) โดยใช้อัตราเร็ว $\dot{d}$ และสำหรับแบบจำลองของแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวออกแบบตัวควบคุมได้มาจากการประยุกต์วิธีชิ้นประกอบอันตะ(Finite Element Method)และ

เทคนิคลากังค์กับสมการออยเลอร์-เบอร์นูลี โดยคิดคานอ่อนตัวเป็น 1 ท่อน ได้แบบจำลองในรูปปริภูมิสถานะ(State Space) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

เมื่อ $x_1 = \theta$: มุมที่หมุน (rad)

$x_2 = \dot{\theta}$: อัตราเร็วเชิงมุมที่หมุน (rad/s)

$x_3 = d$: ตำแหน่งที่แขนกลแกว่ง (m)

$x_4 = \dot{d}$: อัตราเร็วที่แขนกลแกว่ง (m/s)

$u =$ แรงดันเข้ามอเตอร์ $(volt)$

$y =$ ตำแหน่งเชิงมุมใดๆของโหลด (m)

และระบบจะมีฟังก์ชันถ่ายโอน(Transfer Function)แบบวงปิดเป็นดังนี้

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-1.92\,s^2 - 0.1899\,s + 4394}{s^4 + 49.43\,s^3 + 559.9\,s^2 + 2362\,s} \qquad (3.1.1)$$

ตรวจสอบคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้(Controllability)ของระบบโดย

$$U \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$

$$U \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 7.85 & -388.18 & 19187.29 \\ 7.85 & -388.18 & 19187.29 & -749647.83 \\ 0 & 25.71 & -1270.75 & 48419.80 \\ 28.71 & -1270.75 & 48419.80 & -1742691.05 \end{bmatrix}$$

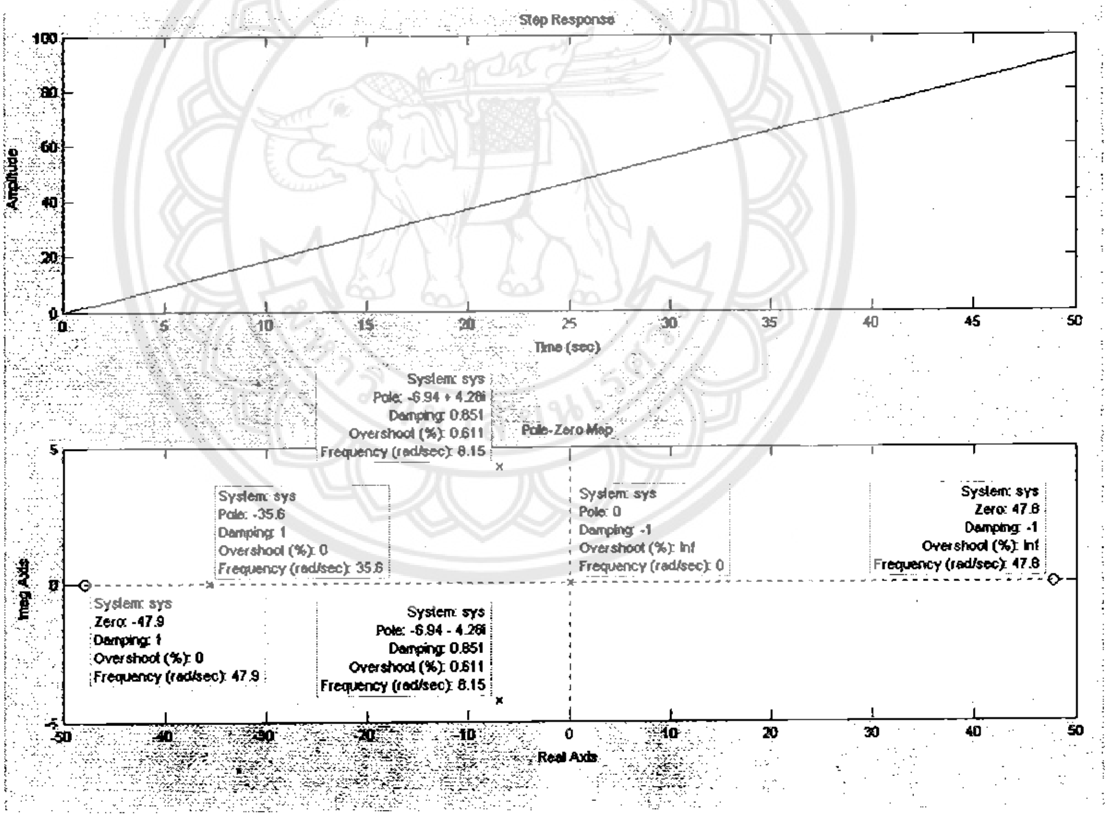
U มีค่าลำดับขั้น (rank) เป็น 4 ดังนั้นระบบมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้(Controllability)

ตรวจสอบคุณสมบัติความสามารถสังเกตได้ (Observability) โดย

$$V \triangleq \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^2)^T C^T & (A^3)^T C^T \end{bmatrix}$$

$$V \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1.03 & -50.87 \\ -0.38 & 0 & 212.71 & -1886.34 \\ 0 & -0.38 & 3.37 & 46.71 \end{bmatrix}$$

V มีค่าลำดับขั้น (rank) เป็น 4 ดังนั้นระบบมีคุณสมบัติความสามารถสังเกตได้ (Observability) เมื่อทำการตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ โดยตรวจสอบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและตำแหน่งขั้วและศูนย์ ดังรูป



รูปที่ 3.2 ผลตอบสนองของระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆและตำแหน่งขั้วของระบบจะอยู่ที่ $0, -6.94 \pm j4.28, -35.6$ ซึ่งมีตำแหน่งขั้วที่ 0 จะทำให้ระบบระบบขาดเสถียรภาพ โดยจะส่งผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบมีค่าขยายออกเรื่อยๆ เมื่อเวลาเข้าใกล้

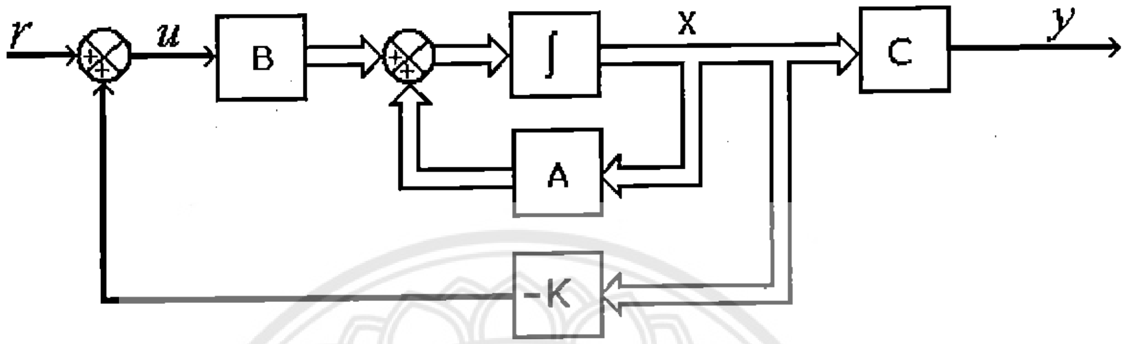
อนันต์ ขั้นตอนต่อไปต้องออกแบบตัวควบคุมเข้าไปในระบบ เพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะที่ดีขึ้น

ในการทดลองออกแบบระบบควบคุมในระบบตัวอย่างนั้น ผู้ออกแบบจะออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด และเปรียบเทียบกับการวางขั้ว ซึ่งในการออกแบบและการตรวจสอบผลตอบสนองในรูปแบบต่างๆนั้น ผู้ออกแบบจะใช้โปรแกรม MATLAB เป็นเครื่องมือช่วยในการออกแบบ

3.2 การออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะในระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

3.2.1 การออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะโดยใช้วิธีการวางขั้ว

ในกรณีแรก สมมุติว่าผู้ออกแบบทราบตัวแปรสถานะทุกตัวและทราบมาแล้วว่าตัวอย่างระบบมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ ทำให้สามารถออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะได้ ซึ่งต่อไปจะแสดงหลักการและวิธีการออกแบบ โดยแผนผังกล่องจะเป็นดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แผนภาพกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ

เขียนจำลองระบบในรูปปริภูมิสถานะได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} u \tag{3.2.1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0]u \tag{3.2.2}$$

โดยที่สัญญาณควบคุมสามารถเขียนได้เป็น

$$u = -Kx + r$$

$$u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + r \tag{3.2.3}$$

แทน u ลงในสมการ 3.2.1เขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -7.85K_1 & -4.22-7.85K_2 & -7.85K_3 & -13.81-7.85K_4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -25.71K_1 & -13.81-25.71K_2 & -559.78-25.71K_3 & -45.21-25.71K_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 7.85\\ 0\\ 25.71\end{bmatrix}r$$

สมการคุณลักษณะของระบบป้อนกลับสถานะ เขียนได้เป็น

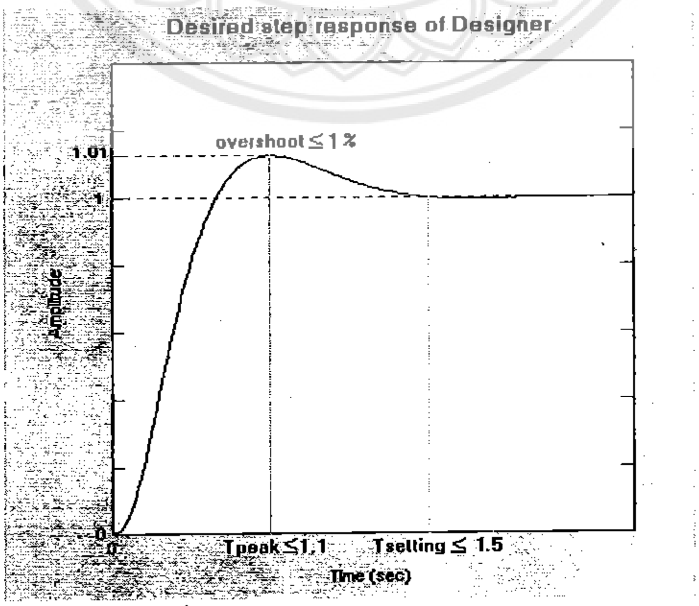
$$|sI-A+BK|=0$$

$$\begin{vmatrix}s & -1 & 0 & 0\\ 7.85K_1 & s+4.22+7.85K_2 & 7.85K_3 & 13.81+7.85K_4\\ 0 & 0 & s & -1\\ 25.71K_1 & 13.81+25.71K_2 & 559.78+25.71K_3 & s+45.21+25.71K_4\end{vmatrix}=0$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$s^4+(25.71K_4+7.85K_2+49.43)s^3+(0.0877K_4+25.71K_3-0.1566K_2+7.85K_1+559.85)s^2+$$
$$(0.0877K_3+4394.27K_2-0.1566K_1+2362.27)s+4394.27K_1=0 \qquad (3.2.4)$$

การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะโดยใช้วิธีการวางขั้วนั้น ผู้ออกแบบจะต้องกำหนดคุณสมบัติของผลตอบสนองของระบบตามความต้องการของผู้ออกแบบก่อน อาทิ เช่น ผลตอบสนองสูงสุด(Overshoot)และเวลาสูงสุด(Peak Time) สมมุติว่าผู้ออกแบบต้องการให้ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยออกมามี ค่าสูงสุดของสัญญาณ(Maximum Overshoot: M_p) ไม่เกิน 1 %,เวลาสูงสุด(Peak time) ประมาณ 1.1 วินาทีและเวลาสู่สภาวะคงที่ (Setting time) ประมาณ 1.5 วินาที ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวที่ผู้ออกแบบต้องการ

ฟังก์ชันถ่ายโอนแบบปิด กรณีเป็นระบบที่มีความหน่วงน้อย(Under Damped) เขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\frac{Y}{R} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)} \tag{3.2.5}$$

เมื่อ ζ = อัตราหน่วงของระบบ(Damping Ratio)

ω_n = ความเร็วเชิงมุมในการแกว่งตามธรรมชาติ(Undamped natural frequency)

ω_d = ความเร็วเชิงมุมในการแกว่งขณะระบบมีความหน่วง(Damped natural frequency)

โดยที่สมการคุณลักษณะของระบบสามารถเขียนได้เป็น

$$(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d) = 0 \tag{3.2.6}$$

จากสมการ 3.2.4 เนื่องจากตัวอย่างระบบมีขั้วทั้งหมด 4 ตัว แต่ตำแหน่งการวางขั้วที่มีผลกระทบต่อผลตอบสนองโดยตรงจะมีเพียง 2 ตัว ซึ่งจะเรียกขั้ว 2 ตัวนี้ว่าขั้วเด่น(Dominant Pole) และเพื่อเป็นการชดเชยผลกระทบที่เกิดจากขั้วอีก 2 ตัวที่เหลือ ผู้ออกแบบจะออกแบบ โดยใช้ค่าสูงสุดของสัญญาณเป็น 0.75% ,เวลาสูงสุด(Peak time) ประมาณ 1.0 วินาที

เมื่อกำหนดค่าสูงสุดของสัญญาณ(Maximum Overshoot: M_p) ประมาณ 0.75% อัตราหน่วงของระบบ (Damping Ratio: ζ) สามารถหาได้จากสูตร

$$M_P = e^{-(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})\pi}$$

$$0.0075 = e^{-(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})\pi}$$

$$\zeta = 0.84$$

เวลาสูงสุด(Peak time) ประมาณ 1.0 วินาที จะสามารถหาความเร็วเชิงมุมในการแกว่งขณะระบบมีความหน่วง(damped natural frequency: ω_d) ได้เป็น

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad \text{โดยที่ } \pi = 3.14$$

$$1.0 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\omega_d = 3.14 \ \ rad/s$$

จะสามารถหาความเร็วเชิงมุมในการแกว่งตามธรรมชาติ(Undamped natural frequency: ω_n)สามารถหาได้จากสูตร

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$
$$3.14 = \omega_n \sqrt{1-0.84^2}$$
$$\omega_n = 5.78 \quad rad/s$$

นำ ζ , ω_d ที่ได้ไปแทนในสมการ 3.2.6 จะได้เป็น

$$(s+4.86+j3.14)(s+4.86-j3.14)=0$$
$$s^2+9.72s+33.4792=0$$

จะได้ตำแหน่งขั้วเป็น $-4.86 \pm j3.14$

จากที่กล่าวมาแล้วว่า ตัวอย่างระบบที่ศึกษานี้ต้องทำการวางตำแหน่งขั้วถึง 4 ตัว โดยจากตำแหน่งขั้วที่ออกแบบ 2 ตัวคือ $-4.86 \pm j3.14$ จะเป็นตำแหน่งขั้วเด่นที่ให้ผลตอบสนองของระบบออกมาเป็นไปตามความต้องการของผู้ออกแบบและตำแหน่งขั้วอีก 2 ตัวจะออกแบบโดยจะวางให้ไกลจากตำแหน่งของขั้วเด่น ซึ่งจะทำให้ขั้ว 2 ตัวนี้มีผลต่อผลตอบสนองของระบบน้อย โดยจะวางไว้ที่ $-10 \pm j10$ และจะสามารถเขียนสมการคุณลักษณะของระบบที่ต้องการเป็น

$$\left(s+4.86+j3.14\right)\left(s+4.86-j3.14\right)\left(s+10+j10\right)\left(s+10-j10\right)=0 \qquad (3.2.7)$$

การหาค่าอัตราขยาย(Gain) K โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการ 3.2.4 กับสมการ 3.2.7 จะได้ค่า K เป็น

$$K = \left[1.5238 \quad 0.0574 \quad -5.5953 \quad -0.7841\right] \qquad (3.2.8)$$

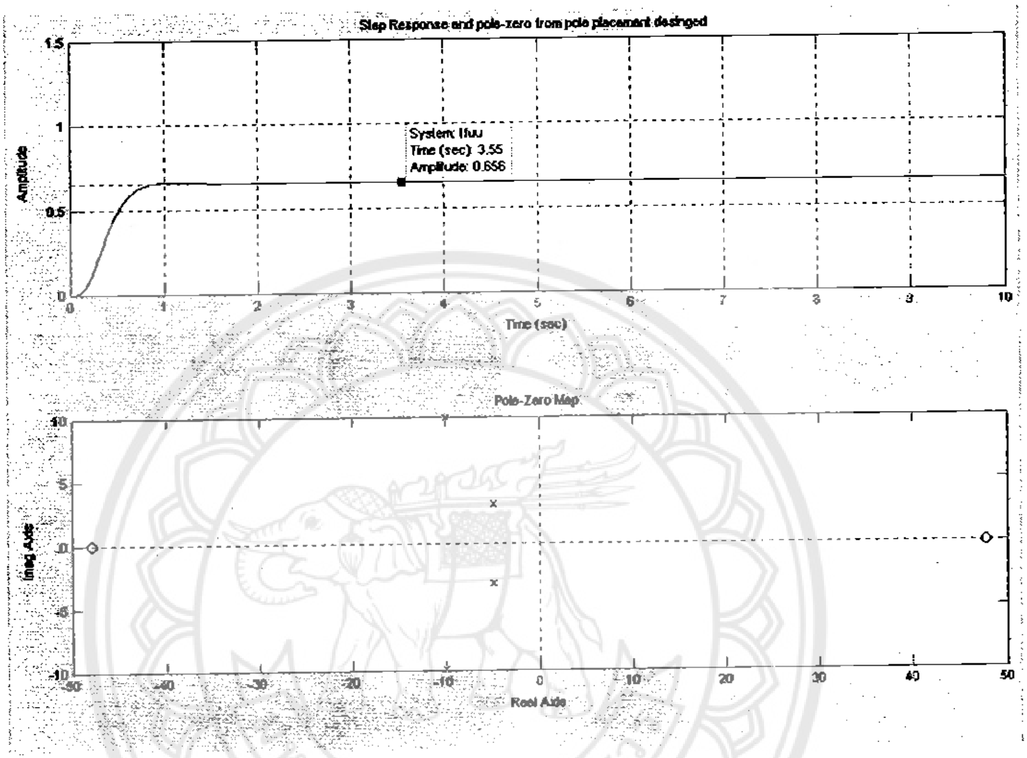
จะสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะได้จาก

$$\frac{Y}{R} = C(sI-A+BK)^{-1}B$$

$$\frac{Y}{R} = [1 \quad 0 \quad -0.38 \quad 0]\begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 11.96 & s+4.67 & -43.92 & 7.65 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 39.17 & 15.28 & 415.92 & 25.04 \end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix}$$

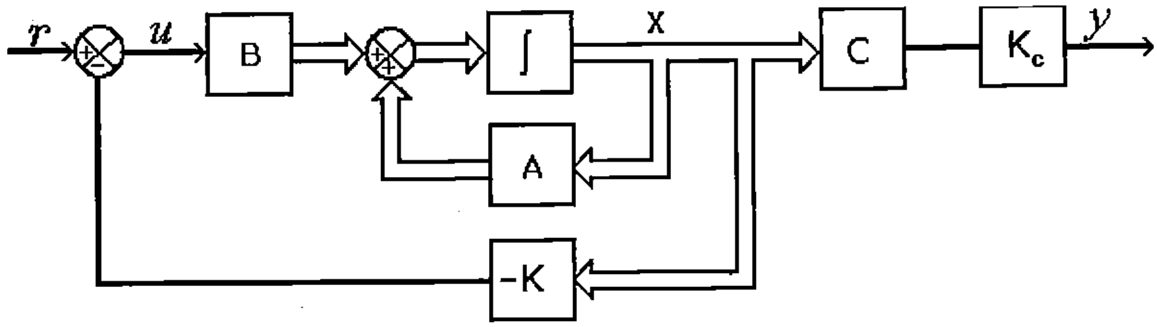
$$\frac{Y}{R}=\frac{-1.92\,s^2-0.1899\,s+4394}{s^4+29.72s^3+427.9s^2+2614s+6696}$$

และจะตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมโดยจะได้ผลตอบสนอง เป็นดังรูป



รูปที่ 3.5ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ

จากรูปที่ 3.5 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเข้าไปในระบบจะมีเสถียรภาพที่ดีและตำแหน่งขั้วอยู่ฝั่งซ้ายของระนาบS ตามที่ผู้ออกแบบต้องการ แต่มีข้อเสียในเรื่องสมรรถนะของระบบจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีความผิดพลาดในสภาวะคงที่(error steady state) โดยมีขนาดประมาณ 0.656 หน่วย ทำให้ผู้ออกแบบจึงต้องออกแบบอัตราขยายเข้าไป และเพื่อเป็นการชดเชยให้ผลตอบสนองมีสมรรถนะเพิ่มมากขึ้น โดยมีแผนผังกล่องแสดงตำแหน่งของอัตราขยายดังรูปที่ 3.6 และมีวิธีออกแบบ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.6 แผนภาพกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเมื่อออกแบบอัตราขยาย K_c เข้าไป

หลักการออกแบบค่าอัตราขยาย K_c เข้าไปเพื่อชดเชยความผิดพลาดที่สภาวะสมดุลให้ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยมีค่าเป็นหนึ่ง ซึ่งมีวิธีหาดังนี้

ค่าคงที่ของตำแหน่งในสภาวะคงที่(Static Position error: K_p)จะหามาได้จาก

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \qquad (3.2.9)$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{-1.92\ s^2\text{-}0.1899\ s\text{+}4394}{s^4\text{+}29.72s^3\text{+}427.9s^2\text{+}2614s\text{+}6696}$$

$$K_p = \frac{4394}{6696}$$

ทำให้ต้องออกแบบอัตราขยาย(Gain) K_c เพื่อทำให้ความผิดพลาดในสภาวะคงที่เป็น 0 ได้จาก

$$K_c = \frac{1}{K_p} \qquad (3.2.10)$$

$$K_c = \frac{6696}{4394}$$

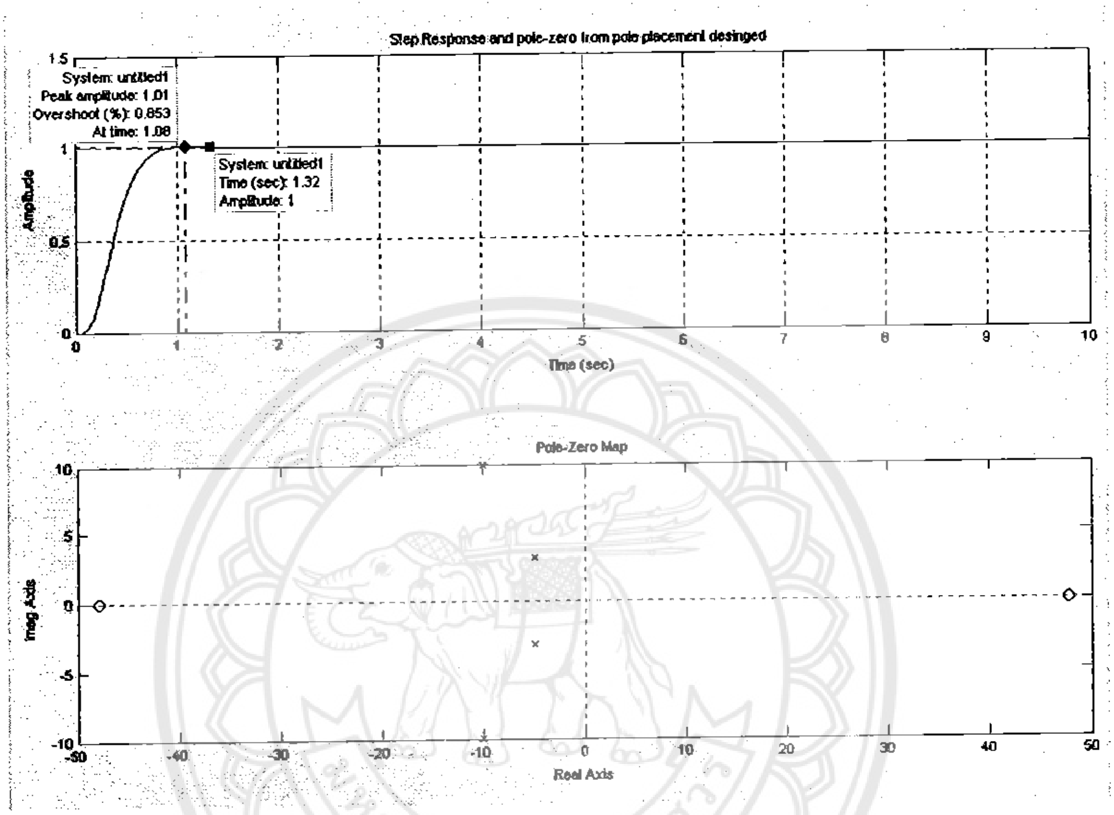
$$K_c = 1.52$$

จะสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

$$\frac{Y}{R} = K_c \times \frac{-1.92\ s^2\text{-}0.1899\ s\text{+}4394}{s^4\text{+}29.72s^3\text{+}427.9s^2\text{+}2614s\text{+}6696}$$

$$\frac{Y}{R} = 1.52 \times \frac{-1.92\ s^2\text{-}0.1899\ s\text{+}4394}{s^4\text{+}29.72s^3\text{+}427.9s^2\text{+}2614s\text{+}6696}$$

หลังจากได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหลังจากออกแบบอัตราขยาย K_c เพื่อชดเชยความผิดพลาดในสภาวะคงที่แล้ว ต่อไปจะทำการตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ โดยผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและตำแหน่งขั้ว-ศูนย์จะเป็นดังรูป 3.7



รูปที่ 3.7 ผลตอบสนองของระบบหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและออกแบบ K_c

พิจารณารูปที่ 3.7 จะเห็นว่าสมรรถนะของระบบหลังจากการออกแบบค่า K_c เข้าไปในระบบจะทำให้ลดความผิดพลาดในสภาวะคงที่(error steady state)ในขณะที่คุณสมบัติอื่นๆ ที่ผู้ออกแบบต้องการ อาทิ ค่าสูงสุดของสัญญาณ(Overshoot)และเวลาสูงสุด(peak Time) ก็ยังค่าเท่าเดิม

3.2.2 การออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะโดยใช้วิธีLQR

ในการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธี LQR จะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

แบบจำลองในรูปปริภูมิสถานะ(State Space) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} u$$

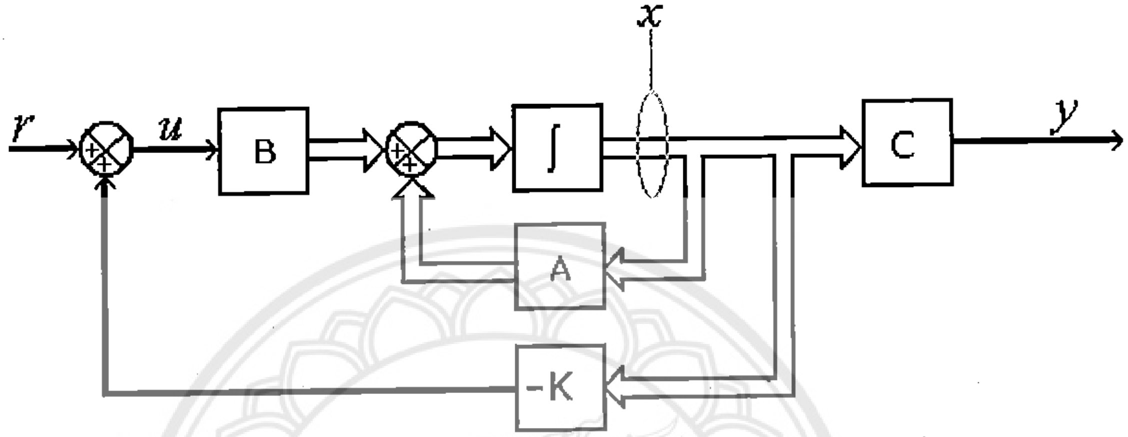
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

สำหรับการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะนั้น ระบบต้องมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้ ซึ่งวิธีการหาค่าอัตราขยายป้อนกลับ K นั้น โดยขั้นแรกต้องทำการเลือก Q, R แล้วจึงแก้สมการริกคาติเชิงพีชคณิตเพื่อหาค่า P และค่า K ออกมา ซึ่งรายละเอียดจะอยู่ในหัวข้อ 2.4.5 ซึ่งในขั้นตอนการหาค่า K ผู้ออกแบบสามารถจะคำนวณโดยใช้โปรแกรมMATLAB ซึ่งในการเลือก Q, R จะพิจารณาจากผลตอบสนองของระบบ จึงทำให้ผู้ออกแบบทำการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะควบคู่ไปด้วยกันและจะเปรียบเทียบผลตอบสนองที่ได้กับการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วอีกด้วย

ในการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะหลังจากการออกแบบนั้น สามารถแสดงได้หลายวิธี โดยในส่วนของโครงงานนี้ จะนำเสนอการวิเคราะห์ผลในรูปแบบต่างๆ ได้แก่ การตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ(State Trajectory), ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม(Control Signal afford: u), ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย(Step Response) และตำแหน่งขั้วและศูนย์(Pole and zero) ซึ่งรายละเอียดต่างๆ จะแสดงได้ดังนี้

3.2.2.1 การตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ (State Trajectory)

ในการตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ โดยการออกแบบที่ดีจะต้องออกแบบให้ตัวแปรสถานะต้องมีเสถียรภาพและสมรรถนะที่ดี ซึ่งก็คือในสภาวะที่ไม่มีการป้อนสัญญาณขาเข้าและเมื่อกำหนดค่าสภาวะเริ่มต้นของตัวแปรสถานะแล้ว ณ เวลาที่สถานะคงที่(Steady state)เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะจะต้องเข้าสู่ 0 ให้เร็วที่สุดนั่นเอง

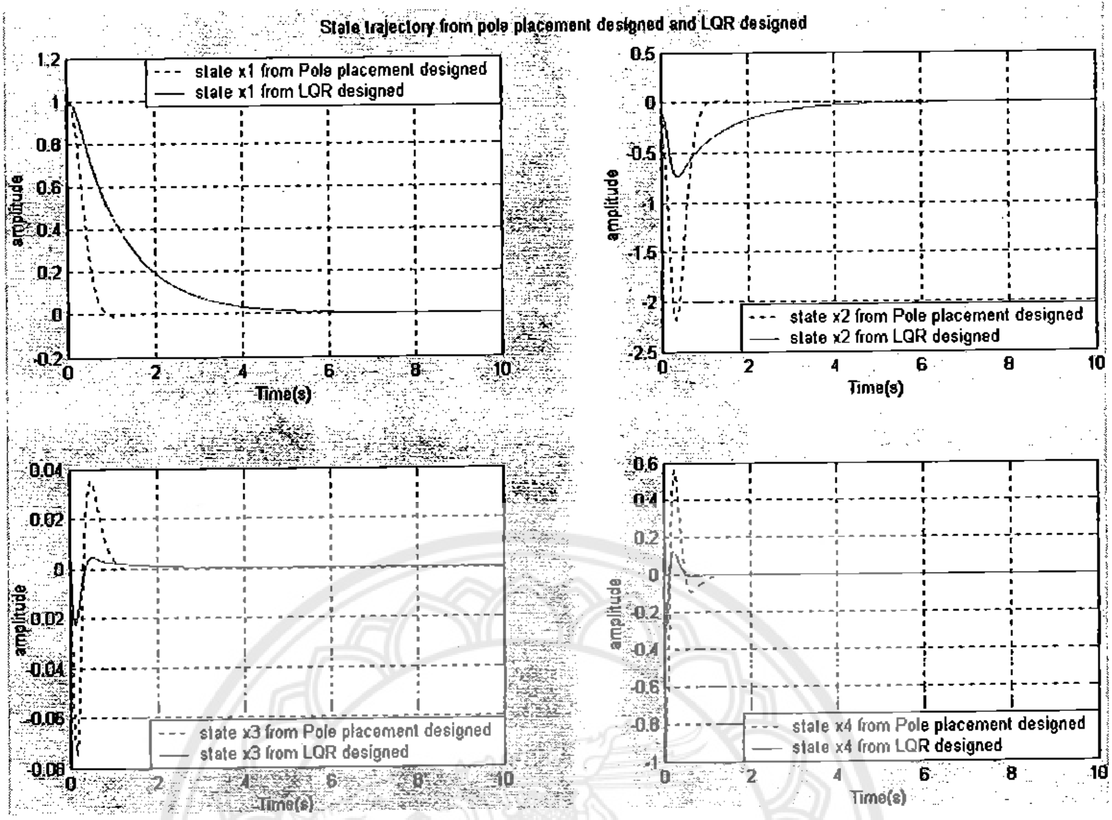


รูปที่ 3.8 แผนผังกล่องแสดงตำแหน่งในการการตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อน**ที่ของสถานะ**

ในการออกแบบโดยใช้วิธีLQR จะต้องทำการป้อนเมทริกซ์ A ,เมทริกซ์ B ,ฟังก์ชันน้ำหนัก Q และฟังก์ชันน้ำหนัก R เพื่อที่จะได้ค่า K ที่เหมาะสม ซึ่งในการออกแบบเพื่อตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะขั้นแรกผู้ออกแบบจะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

1. ไม่มีการป้อนสัญญาณขาเข้า $r = 0$
2. กำหนดสภาวะเริ่มต้น(Initial state)ของตัวแปรสถานะแต่ละตัวเท่ากับ $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0$
3. การออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว ซึ่งได้ออกแบบมาแล้วโดยวางตำแหน่งขั้วไว้ที่ $-4.86 \pm j3.14, 10 \pm j10$

การออกแบบโดยใช้วิธีLQR จะกำหนดให้ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = [1]$ จะทำให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะออกมา ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ x กรณี $Q=\left[q_{11}=1, q_{22}=1, q_{33}=1, q_{44}=1\right]$ $R=[1]$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABจะได้ เมทริกซ์ P และ K เป็น

$$P=\begin{bmatrix} 1.2902 & 0.1878 & 1.9770 & -0.0184 \\ 0.1878 & 0.1622 & 1.6228 & -0.0202 \\ 1.9770 & 1.6228 & 28.5894 & -0.0942 \\ -0.0184 & -0.0202 & -0.0942 & 0.0146 \end{bmatrix}$$

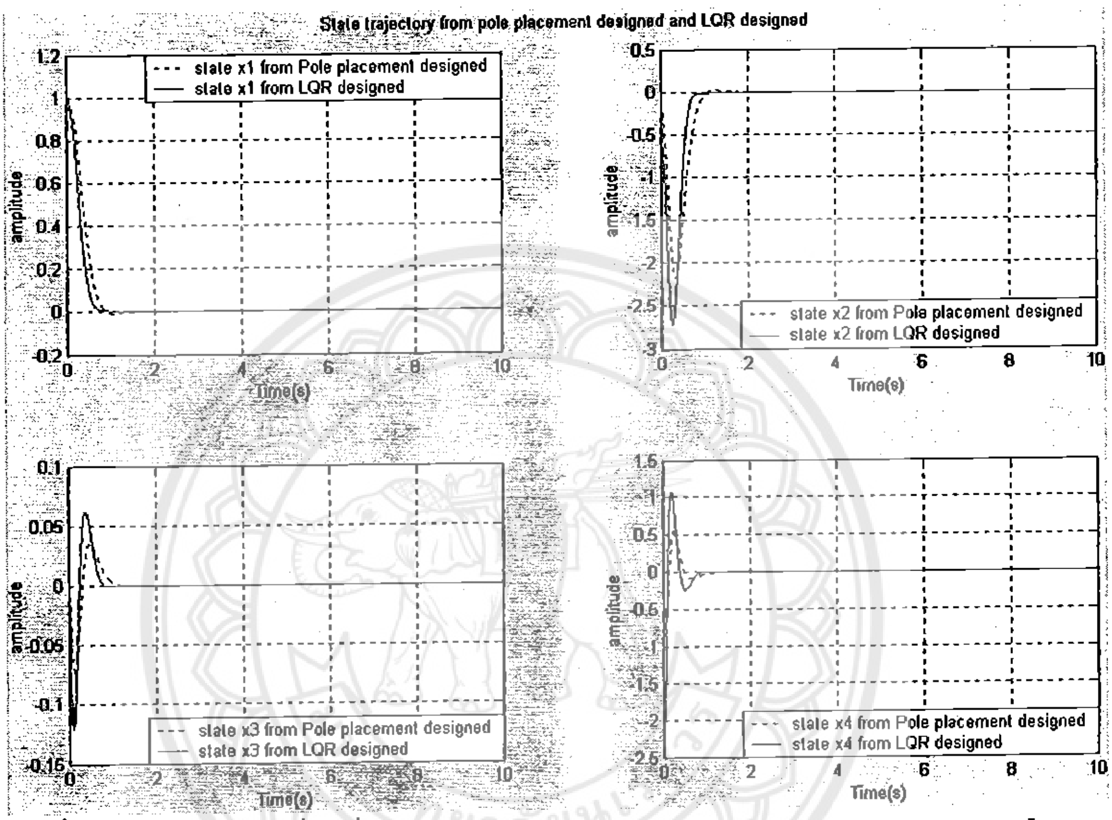
$$K=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7524 & 10.3173 & 0.2174 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด สำหรับทุกค่า u ที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากับ

$$V_{opt}=x(0)^{*}Px(0)$$
$$V_{opt}=1.2901$$

รูปที่ 3.9 จะเป็นรูปเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ x ที่มาจากวิธีการออกแบบทั้ง 2 แบบมีจะเห็นได้ว่าระบบที่ได้จากการออกแบบมีเสถียรภาพที่ดีทั้งคู่ แต่จะเห็นได้ว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ตัวแปรสถานะ x_1 ที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีLQRค่อนข้างจะมีเวลาเข้าสู่ 0 ช้ากว่าการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วอย่างชัดเจน ส่วนเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะอื่นๆจะมีเวลาเข้าสู่สภาวะคงที่ใกล้

เคียงกัน ดังนั้นจะทำให้ผู้ออกแบบเลือก q_{11} ที่มีผลต่อตัวแปรสถานะ x_1 ให้มากกว่าเดิม โดยต่อไปทำการเลือก $Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = [1]$ ซึ่งทำให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะออกมา ดังรูป



รูปที่ 3.10 เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ x กรณี $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$ $R = [1]$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABจะได้ เมทริกซ์ P เป็น

$$P = \begin{bmatrix} 15.1694 & 1.6563 & 13.2363 & -0.2307 \\ 1.6563 & 0.3565 & 3.2994 & -0.0463 \\ 13.2363 & 3.2994 & 44.5402 & -0.2970 \\ -0.2307 & -0.0463 & -0.2970 & 0.0185 \end{bmatrix}$$

$$K = [7.0711 \quad 1.6073 \quad 18.2633 \quad 0.1120]$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด สำหรับทุกค่า u ที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากับ

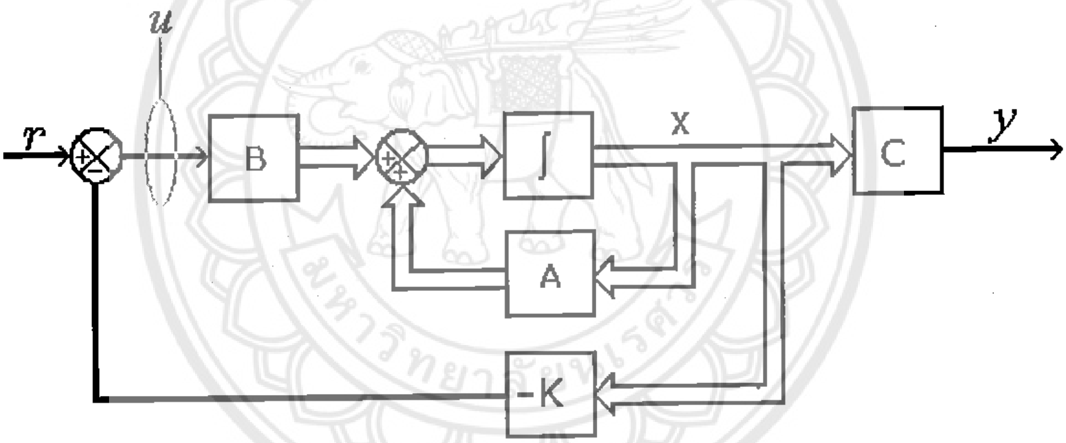
$$V_{opt} = x(0)^* Px(0)$$

$$V_{opt} = 15.1694$$

จากรูปที่ 3.10 จะเห็นได้ว่าเมื่อเราเลือก q_{11} มากกว่าเดิมจะมีผลโดยตรงกับตัวแปรสถานะ x_1 โดยจะทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะ x_1 มีเวลาเข้าสู่ 0 ที่เร็วกว่าเดิมและเมื่อพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะอื่นๆก็จะมีเวลาเข้าสู่ 0 ที่เร็วกว่าเดิมเช่นเดียวกัน และในขณะเดียวกันเมื่อพิจารณาค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเห็นได้ว่ามีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อย แต่เนื่องจากการเลือก Q ในครั้งนี้ทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะมีเวลาเข้าสู่ศูนย์เร็วขึ้น ดังนั้นถึงแม้ว่าในการเลือก Q ในครั้งนี้จะทำให้ค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเพิ่มขึ้นก็ตาม แต่ก็เป็นค่าที่สามารถยอมรับได้

3.2.2.2 ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม (Control signal afford: U)

ในการตรวจสอบสมรรถนะของระบบอีกแบบหนึ่งนอกเหนือจากการสังเกตเวลาที่เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะแล้ว ก็คือการตรวจสอบปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม(U) ซึ่งสิ่งนี้หมายถึงปริมาณการใช้พลังงานที่ต้องป้อนให้กับระบบ ซึ่งการออกแบบระบบควบคุมที่ดีควรจะมีการใช้สัญญาณควบคุมให้มีความเหมาะสมที่สุดด้วย



รูปที่ 3.11 แผนผังกล่องแสดงตำแหน่งในการวัดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม

จากรูปที่ 3.11 สมมุติให้สัญญาณขาเข้าเป็นศูนย์ จะสามารถเขียนสัญญาณควบคุมได้เป็น

$$u = r - kx$$
$$u = -(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4)$$

สิ่งที่มีผลโดยตรงกับปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมของวิธีการออกแบบโดยใช้วิธีLQRนั้น จะขึ้นอยู่กับการเลือก R โดยตรง ซึ่งแน่นอนว่าจะขึ้นอยู่กับการเลือก Q ด้วยเช่นเดียวกัน

โดยในการวัดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมเราจะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

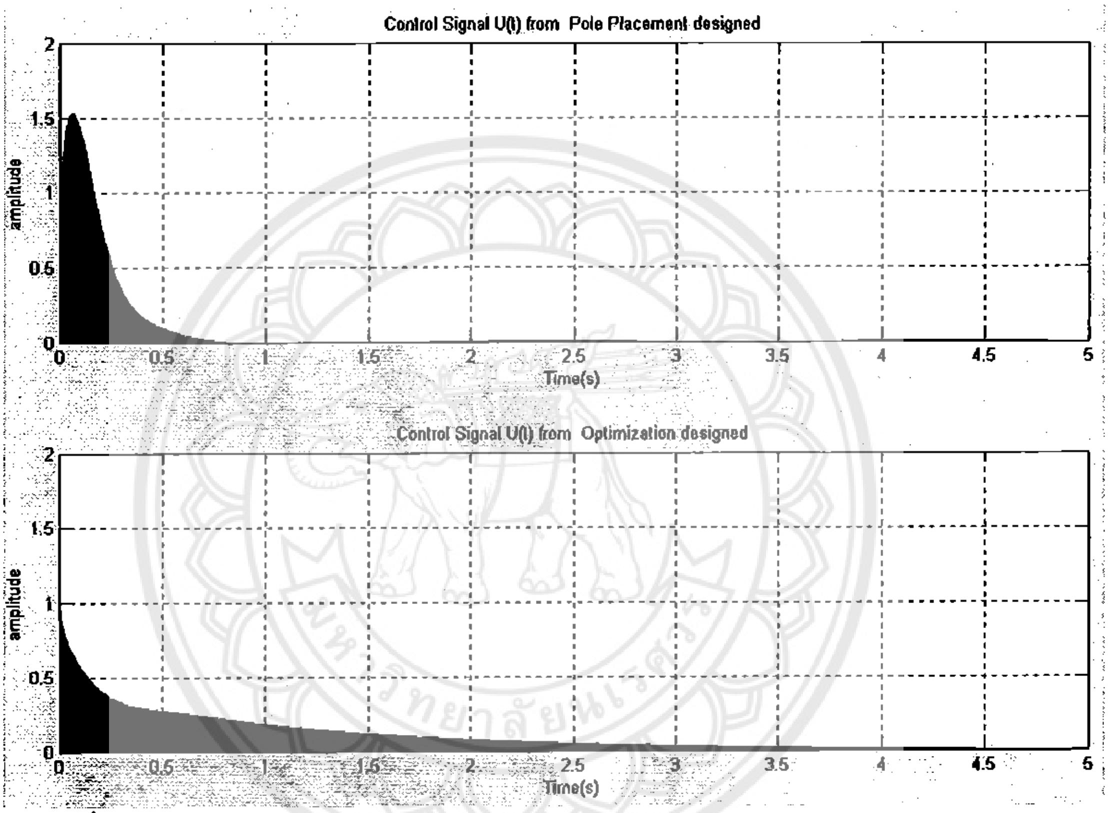
1. ไม่มีการป้อนสัญญาณขาเข้า $r = 0$
2. กำหนดสภาวะเริ่มต้น(Initial state)ของตัวแปรสถานะแต่ละตัวเท่ากับ $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0$

3. การออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว ซึ่งได้ออกแบบมาแล้วโดยวางตำแหน่งขั้วไว้ที่

$-4.86 \pm j3.14, 10 \pm j10$

ลำดับแรกจะเลือก $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, และจะเลือก $R = [1]$ ก่อน จะทำให้ได้ปริมาณ

สัญญาณควบคุมออกมาดังรูป



รูปที่ 3.12 รูปปริมาณสัญญาณควบคุมกรณี $R = [1]$ และ $Q = [q_{11} = 1, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABจะได้ เมทริกซ์ P และ K เป็น

$$P = \begin{bmatrix} 1.2902 & 0.1878 & 1.9770 & -0.0184 \\ 0.1878 & 0.1622 & 1.6228 & -0.0202 \\ 1.9770 & 1.6228 & 28.5894 & -0.0942 \\ -0.0184 & -0.0202 & -0.0942 & 0.0146 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7524 & 10.3173 & 0.2174 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด สำหรับทุกค่า u ที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากับ

$$V_{opt} = x(0)^* Px(0)$$

$$V_{opt} = 1.2901$$

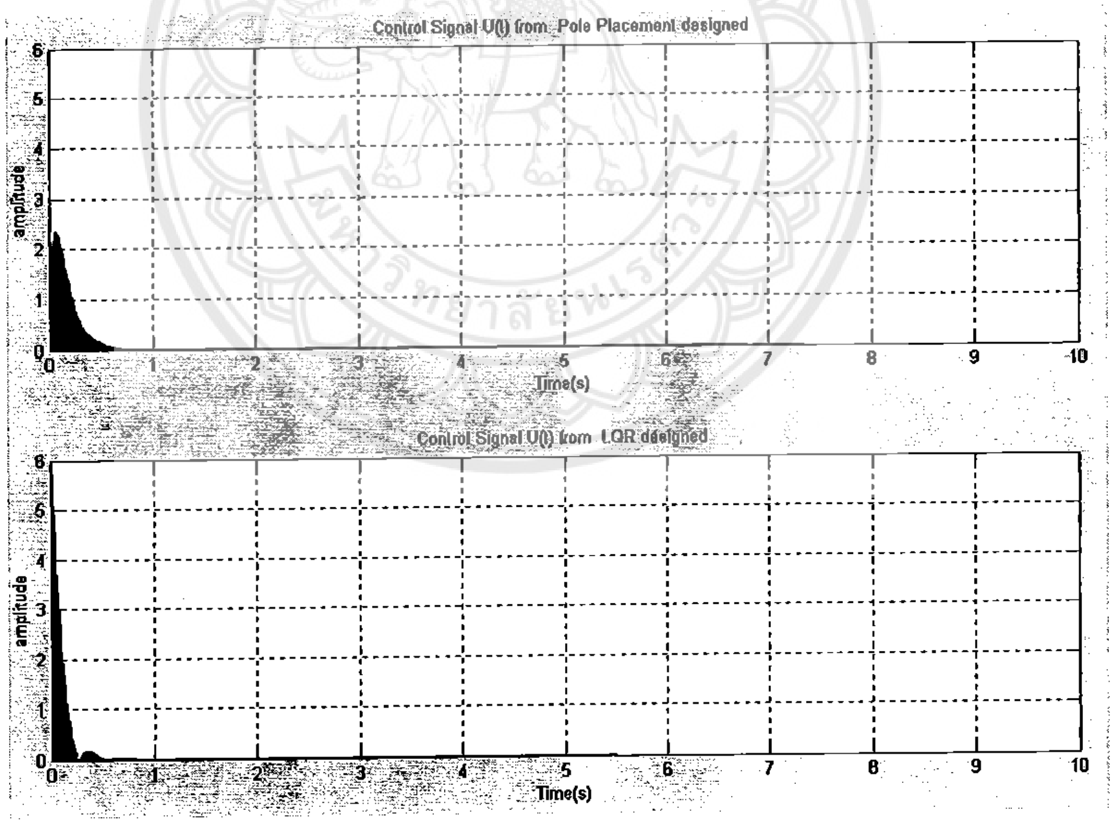
และปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ได้จากรูปจะเป็นดังนี้

$$U_{pole} = 0.5536$$
$$U_{LQR} = 0.5426$$

พิจารณารูปที่ 3.12 รูปบนจะเป็นสัญญาณควบคุมของระบบที่ได้มาจากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว ส่วนรูปล่างจะเป็นสัญญาณควบคุมของระบบที่ได้มาจากการออกแบบโดยใช้วิธีLQRซึ่งปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมก็คือพื้นที่ใต้กราฟจะเห็นได้ว่าปริมาณสัญญาณควบคุมที่ได้ออกมามีปริมาณที่ใกล้เคียงกัน

ในขั้นต่อไปจะเลือก Q ที่ได้มาจากการพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะก็คือ

$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, และ $R = [1]$ ก่อน จะทำให้ได้ปริมาณสัญญาณควบคุมออกมาดังรูป3.13



รูปที่ 3.13 รูปปริมาณสัญญาณควบคุมกรณี $R = [1]$ และ $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABจะได้ เมทริกซ์ P เป็น

$$P = \begin{bmatrix} 15.1694 & 1.6563 & 13.2363 & -0.2307 \\ 1.6563 & 0.3565 & 3.2994 & -0.0463 \\ 13.2363 & 3.2994 & 44.5402 & -0.2970 \\ -0.2307 & -0.0463 & -0.2970 & 0.0185 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 7.0711 & 1.6073 & 18.2633 & 0.1120 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด สำหรับทุกค่า u ที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากับ

$$V_{opt} = x(0)^* Px(0)$$

$$V_{opt} = 15.1694$$

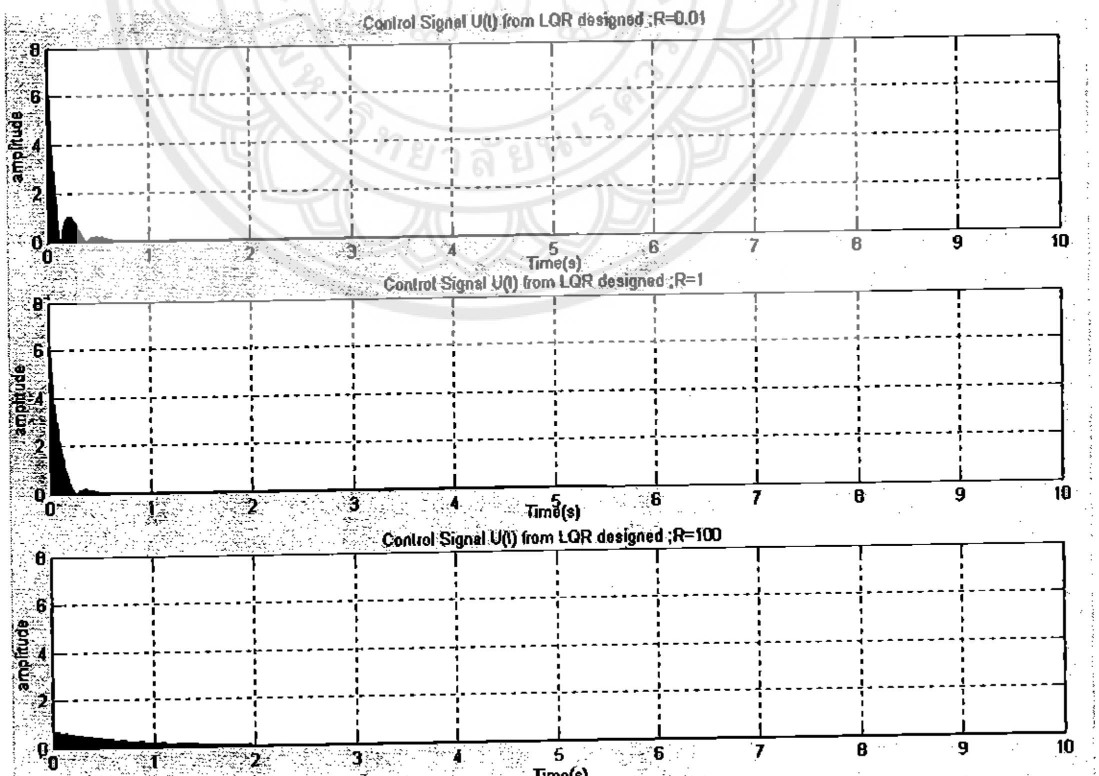
และปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ได้จากรูปจะเป็นดังนี้

$$U_{pole} = 0.5536$$

$$U_{LQR} = 0.6287$$

เมื่อพิจารณารูป3.13 จะเห็นได้ว่าปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ได้มาจากการออกแบบโดยวิธี LQRจะเพิ่มขึ้น ทั้งนี้เพราะว่าถ้าเราเลือก Q มากขึ้น ทำให้ในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเน้นไปที่ตัวแปรสถานะมากกว่าสัญญาณควบคุม ทำให้ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมมีค่าเพิ่มขึ้น

โดยในขั้นตอนต่อไปจะแสดงปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมในกรณีที่เลือก $R = 0.01,1,100$ และเลือก Q เท่าเดิม ดังนี้



รูปที่ 3.14 รูปปริมาณสัญญาณควบคุมกรณี $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$, $R = 0.01,1,100$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABกรณีเลือก $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$, $R = 0.01$ จะได้ เมทริกซ์ P เป็น

$$P = \begin{bmatrix} 11.7092 & 0.8695 & 4.4730 & -0.2380 \\ 0.8695 & 0.1767 & 1.2754 & -0.0477 \\ 4.4730 & 1.2754 & 21.0630 & -0.3162 \\ -0.2380 & -0.0477 & -0.3162 & 0.0163 \end{bmatrix}$$

$$K = [70.7107 \quad 16.0180 \quad 188.4011 \quad 4.5598]$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด สำหรับทุกค่า u ที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากับ

$$V_{opt} = x(0)^* Px(0)$$

$$V_{opt} = 11.7091$$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABกรณีเลือก $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$, $R = 100$ จะได้ เมทริกซ์ P เป็น

$$P = \begin{bmatrix} 49.8813 & 9.9293 & 124.4257 & -0.2814 \\ 9.9293 & 2.3290 & 29.8262 & -0.0584 \\ 124.4257 & 29.8262 & 402.6812 & -0.4423 \\ -0.2814 & -0.0584 & -0.4423 & 0.0191 \end{bmatrix}$$

$$K = [0.7071 \quad 0.1678 \quad 2.2276 \quad 0.0003]$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด สำหรับทุกค่า u ที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากับ

$$V_{opt} = x(0)^* Px(0)$$

$$V_{opt} = 49.8812$$

และปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ได้จากรูปจะเป็นดังนี้

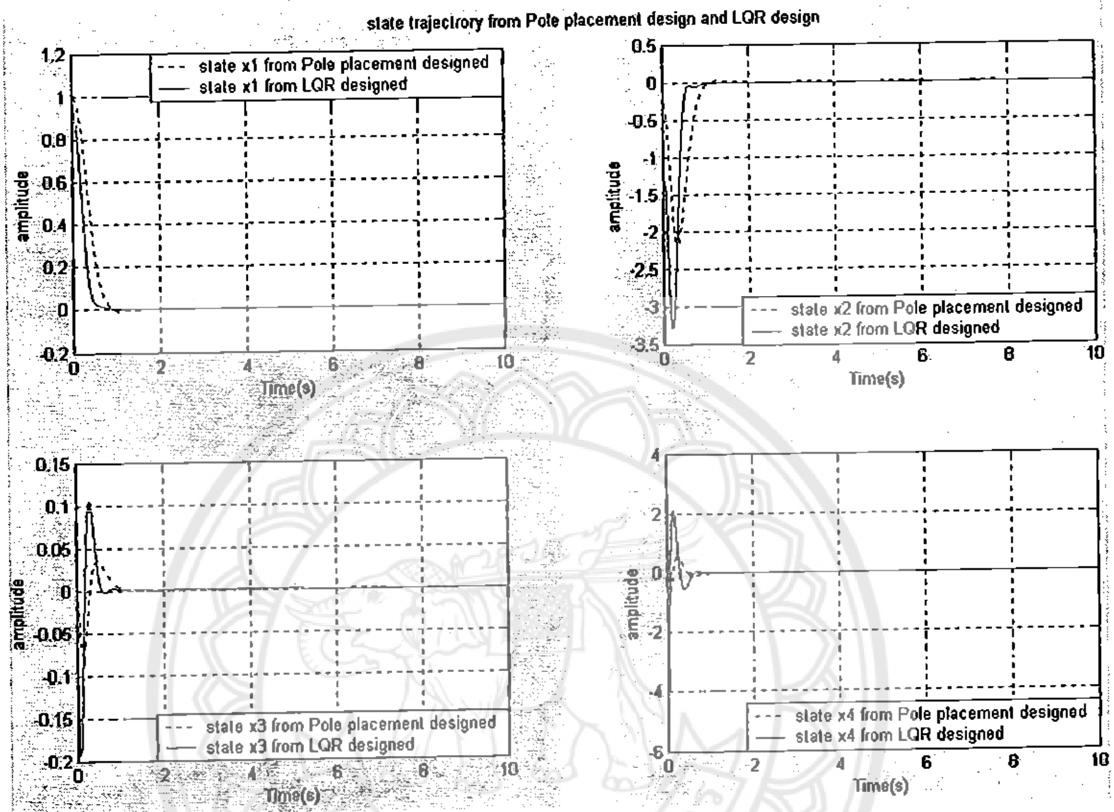
กรณี $R = 0.01$ $U_{LQR} = 1.3446$

กรณี $R = 1$ $U_{LQR} = 0.6287$

กรณี $R = 100$ $U_{LQR} = 0.5411$

พิจารณารูปที่ 3.14 พิจารณารูปล่าง จะเห็นได้ว่าเมื่อผู้ออกแบบเลือก $R = 100$ จะทำให้ระบบมีปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมลดลง ทั้งนี้เพราะว่าเมื่อผู้ออกแบบเลือก R ให้มีค่ามากขึ้น ทำให้ในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเน้นไปที่สัญญาณควบคุมมากกว่าตัวแปรสถานะ จึงส่งผลให้ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมน้อยลงและด้วยเหตุผลเดียวกัน เมื่อเราพิจารณารูปกลางและรูปบนจะเห็นได้ว่ามีปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่มากขึ้นตามลำดับ แต่เมื่อพิจารณาค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเห็นได้ว่า

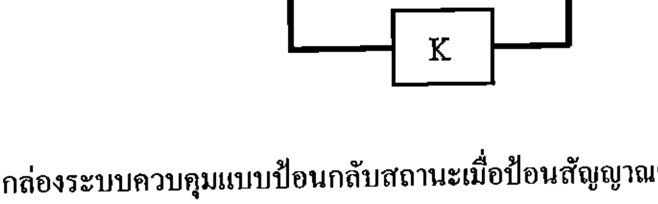
กรณีเลือก $R = 0.01$ จะมีค่าสุดและเมื่อพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะกรณีเลือก $R = 0.01$ ดังรูปที่3.15จะเห็นได้ว่ามีเวลาเข้าสู่ศูนย์ที่เร็วกว่าเดิม ทำให้ผู้ออกแบบเลือก $R = 0.01$ ถึงแม้ว่าปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมจะมากกว่าทุกๆกรณีก็ตาม



รูปที่ 3.15 เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ x กรณี $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$ $R = [0.01]$

3.2.2.3 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย(Step Response)และตำแหน่งขั้ว-ศูนย์(Pole-Zero)

หลังจากที่ผู้ออกแบบ ได้ค่าฟังก์ชันน้ำหนัก Q, R ที่เหมาะสมแล้ว ต่อไปจะพิจารณาผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย ซึ่งจะเป็นการตรวจสอบผลตอบสนองชั่วครู่(Transient Response) และผลตอบสนองในสภาวะคงที่(Steady-State Response)รวมถึงจะตรวจสอบตำแหน่งขั้วและศูนย์ของระบบที่ได้จากการออกแบบ โดยในโครงงานนี้จะมีขั้นตอนตรวจสอบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะดังนี้



รูปที่ 3.16 แผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเมื่อป้อนสัญญาณขาเข้าแบบหนึ่งหน่วย

ในการเลือก Q, R จะนำค่าที่ทำให้ผลตอบสนองออกมาเหมาะสมที่สุด ที่ได้มาจากการพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะและปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมคือ $Q=\begin{bmatrix}50 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $R=[0.01]$ ทำให้ได้ค่าอัตราขยาย K ออกมาเป็น

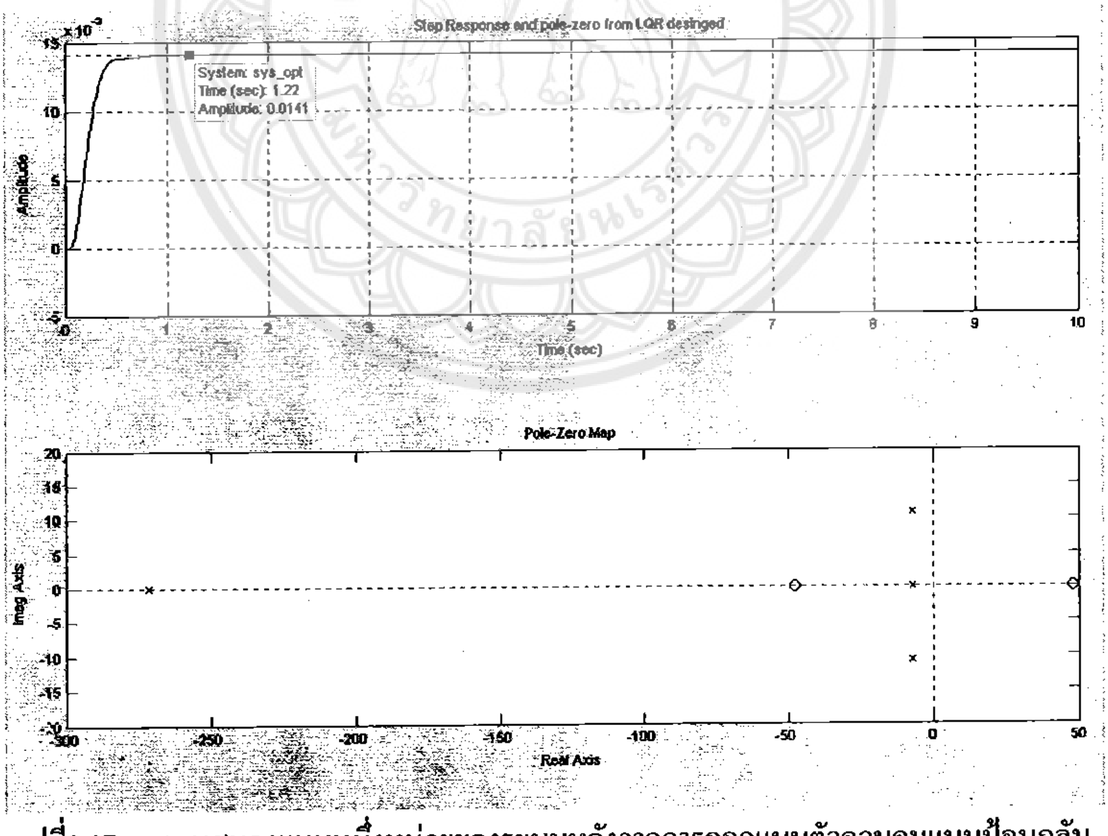
$$K=\begin{bmatrix}70.7107 & 16.0180 & 188.4011 & 4.5598\end{bmatrix}$$

ในกระบวนการสังเคราะห์ระบบเพื่อที่จะสามารถหาผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีวิธีการดังต่อไปนี้

$$\frac{Y}{R}=C(sI-A+BK)^{-1}B \tag{3.2.11}$$

$$\frac{Y}{R}=\frac{-1.92\,s^2-0.1899s+4394}{s^4+292.4s^3+5957s^2+72755s+310722}$$

โดยต่อไปจะตรวจสอบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและตำแหน่งขั้วและศูนย์ของระบบหลังจากการออกแบบโดยใช้วิธีLQR ซึ่งแสดงได้ดังรูป 3.17



รูปที่3.17 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ

จากรูปที่ 3.17 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเข้าไปในระบบจะมีเสถียรภาพที่ดีและตำแหน่งขั้วอยู่ฝั่งซ้ายของระนาบS แต่มีข้อเสียในเรื่องสมรรถนะของระบบจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีความผิดพลาดในสภาวะคงที่ (error steady state) โดยมีขนาดประมาณ 0.0141 หน่วย ทำให้ผู้ออกแบบจึงต้องออกแบบอัตราขยายเข้าไป และเพื่อเป็นการชดเชยให้ผลตอบสนองมีสมรรถนะเพิ่มมากขึ้น โดยมีแผนผังกล่องแสดงตำแหน่งของอัตราขยายดังรูปที่ 3.6 และมีวิธีออกแบบ ดังต่อไปนี้

ค่าคงที่ของตำแหน่งในสภาวะคงที่(Static Position error: K_p)จะหามาได้จาก

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$$
$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{-1.92\,s^2 - 0.1899s + 4394}{s^4 + 292.4s^3 + 5957s^2 + 72755s + 310722}$$
$$K_p = \frac{4394}{310722}$$

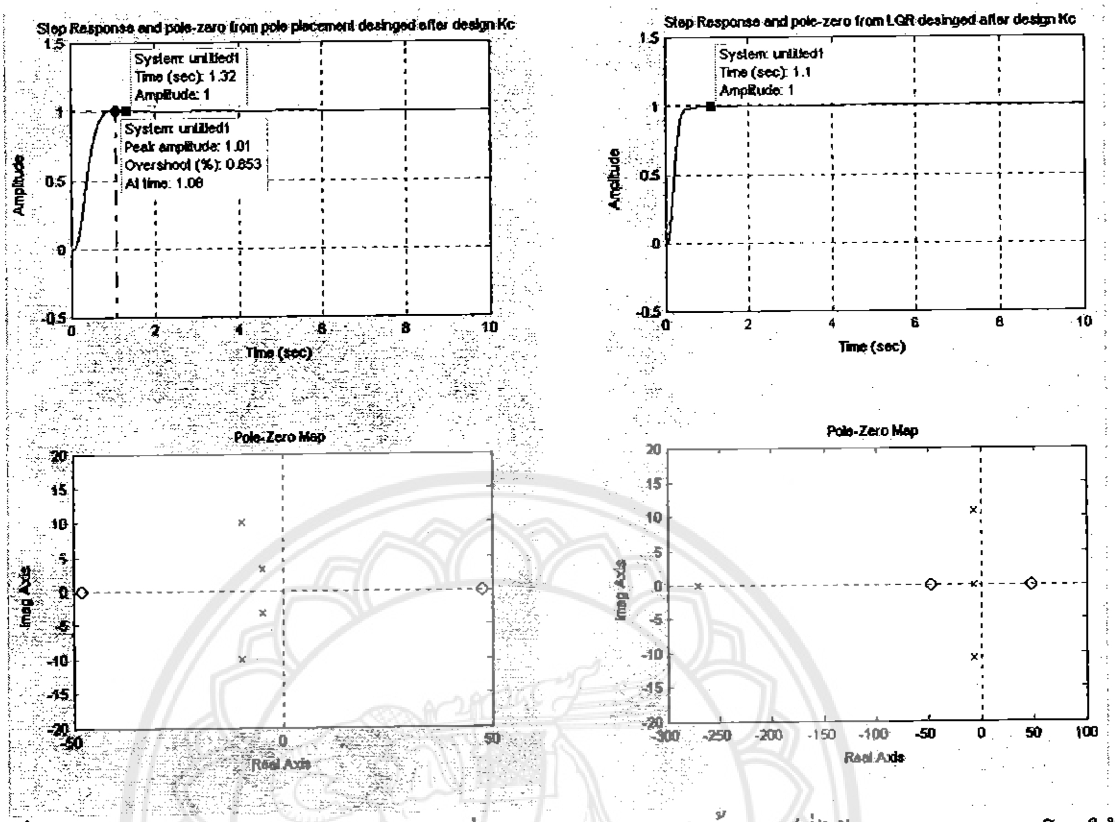
ทำให้ต้องออกแบบอัตราขยาย(Gain) K_c เพื่อทำให้ความผิดพลาดในสภาวะคงที่เป็น 0 ได้จาก

$$K_c = \frac{1}{K_p}$$
$$K_c = \frac{310722}{4394}$$
$$K_c = 70.7$$

จะสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

$$\frac{Y}{R} = K_c \times \frac{-1.92\,s^2 - 0.1899s + 4394}{s^4 + 292.4s^3 + 5957s^2 + 72755s + 310722}$$
$$\frac{Y}{R} = 70.7 \times \frac{-1.92\,s^2 - 0.1899s + 4394}{s^4 + 292.4s^3 + 5957s^2 + 72755s + 310722}$$

หลังจากได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหลังจากออกแบบอัตราขยาย K_c เพื่อชดเชยความผิดพลาดในสภาวะคงที่แล้ว ต่อไปจะทำการตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ โดยผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและตำแหน่งขั้ว-ศูนย์ ซึ่งจะเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วดังรูป 3.18



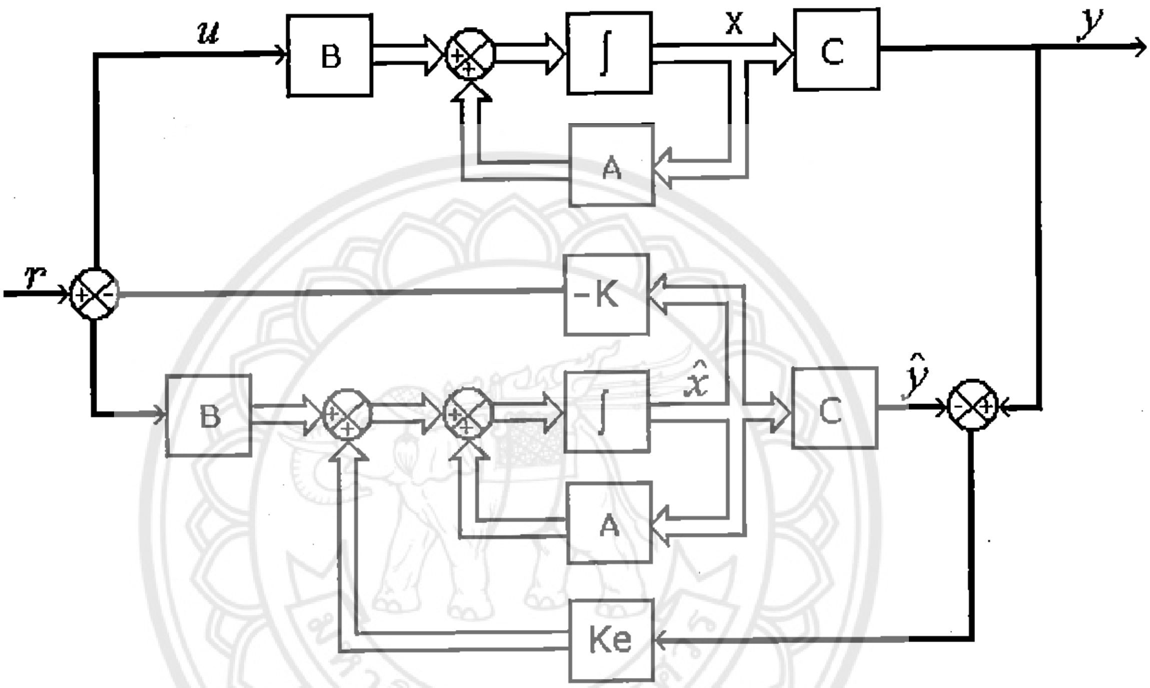
รูปที่ 3.18 เปรียบเทียบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและตำแหน่งขั้ว-ศูนย์ที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วและวิธีLQR

พิจารณารูปที่ 3.18 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีLQRและวิธีการวางขั้วมีเวลาสู่สภาวะคงที่ที่เร็วและค่าสูงสุดของสัญญาณค่อนข้างต่ำ ซึ่งจะสามารถอธิบายผลตอบสนองที่ได้ในเชิงกายภาพของระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวได้ว่า เมื่อผู้ออกแบบออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเข้าไปในระบบแล้วและเมื่อทำการทดสอบระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมเข้าไปในระบบ โดยการป้อนสัญญาณขาเข้าเพื่อทำให้แขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวหมุนไปตำแหน่งอ้างอิงที่ต้องการตามรูปที่3.1 ซึ่งจะเห็นได้ว่าระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวที่ออกแบบตัวควบคุมโดยใช้วิธีLQRจะใช้เวลาหมุนไปยังตำแหน่งอ้างอิงเพียง 1.1 วินาทีและไม่มีการแกว่ง และในระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวที่ออกแบบตัวควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้วจะใช้เวลาหมุนไปยังตำแหน่งอ้างอิงประมาณ 1.32 วินาทีและจะมีการแกว่งเล็กน้อย ซึ่งถือได้ว่าผลที่ได้จากการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะในระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวจะทำให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะที่ดีขึ้น

3.3 การออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกในระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

3.3.1 การออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกโดยใช้วิธีการวางขั้ว

ในกรณีนี้สมมุติว่าผู้ออกแบบไม่ทราบตัวแปรสถานะทุกตัว ด้วยเหตุนี้ผู้ออกแบบจำเป็นต้องวัดสัญญาณขาออก y เพื่อนำมาสังเคราะห์ตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ โดยที่แผนผังกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกจะเป็นดังรูปที่ 3.19



รูปที่ 3.19 แผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออก

เนื่องจากตัวอย่างระบบที่กำหนดมา เป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 7.85\\ 0\\ 25.71\end{bmatrix}u \tag{3.3.1}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.38 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u \tag{3.3.2}$$

ทราบมาแล้วว่าตัวอย่างระบบมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ ทำให้สามารถออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะกรณีมีตัวสังเกตได้โดยที่สัญญาณควบคุมสามารถเขียนได้เป็น

$$u = -K\hat{x} + r$$

$$u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + r \qquad (3.3.3)$$

แทนสัญญาณควบคุมลงในสมการที่ 3.3.1 เขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.85K_1 & 7.85K_2 & 7.85K_3 & 7.85K_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25.71K_1 & 25.71K_2 & 25.71K_3 & 25.71K_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} r \qquad (3.3.4)$$

และเนื่องจากผู้ออกแบบไม่ทราบตัวแปรสถานะทุกตัวผู้ออกแบบจำเป็นต้องสังเคราะห์ตัวสังเกตสถานะดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \\ K_{e3} \\ K_{e4} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}\right] \qquad (3.3.5)$$

$$\hat{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.38 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

ความผิดพลาด(error)ระหว่างสถานะ x กับสถานะ $\hat{x}$

$$\dot{e}=(A-K_eC)e$$

$$=\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}K_{e1}\\ K_{e2}\\ K_{e3}\\ K_{e4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.38 & 0\end{bmatrix}\right)e$$

$$=\begin{bmatrix}-K_{e1} & 1 & 0.38K_{e1} & 0\\ -K_{e2} & -4.22 & 0.38K_{e2} & -13.81\\ -K_{e3} & 0 & 0.38K_{e3} & 1\\ -K_{e4} & -13.81 & -559.78+0.38K_{e4} & -45.21\end{bmatrix}e \tag{3.3.7}$$

เขียนสมการสถานะและสมการสัญญาณขาออกของสถานะ x และความผิดพลาด e ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}r \tag{3.3.8}$$

สมการคุณลักษณะของระบบป้อนกลับสถานะกรณีมีตัวสังเกตสถานะ เขียนได้เป็น

$$\begin{vmatrix}sI-A+BK & -BK\\ 0 & sI-A+K_eC\end{vmatrix}=0$$

$$\left|sI-A+BK\right|\left|sI-A+K_eC\right|=0 \tag{3.3.9}$$

จากสมการคุณลักษณะ จะเห็นได้ว่าการออกแบบตำแหน่งขั้วของการป้อนกลับตัวแปรสถานะและการออกแบบตำแหน่งขั้วของตัวสังเกตตัวแปรสถานะสามารถพิจารณาแยกกันได้ สำหรับการออกแบบตำแหน่งขั้วของการป้อนกลับนั้น ผู้ออกแบบจะวางขั้วไว้ที่ตำแหน่งเดิม นั้นคือที่ตำแหน่ง $-4.86\pm j3.14, 10\pm j10$ ในการวางตำแหน่งขั้วของตัวสังเกตนิยมวางให้ส่วนจริงของตำแหน่งขั้วมี

ขนาดประมาณ 2-5 เท่าของขนาดของส่วนจริงของขั้วที่ผู้ออกแบบต้องการดังนั้นจะวางขั้วของตัวสังเกตไว้ที่ $-20,-20,-22,-22$ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 7.85K_1 & s+4.22+7.85K_2 & 7.85K_3 & 13.81+7.85K_4 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 25.71K_1 & 13.81+25.71K_2 & 559.78+25.71K_3 & s+45.21+25.71K_4 \end{vmatrix} =$$
$$(s+4.86+j3.14)(s+4.86-j3.14)(s+10+j10)(s+10-j10)$$

นั่นคือ

$$s^4+(25.71K_4+7.85K_2+49.43)s^3+(0.0877K_4+25.71K_3-0.1566K_2+7.85K_1+559.85)s^2+$$
$$(0.0877K_3+4394.27K_2-0.1566K_1+2362.27)s+4394.27K_1=$$
$$s^4+29.72s^3+427.88s^2+2613.58s+6695.84 \tag{3.3.10}$$

$$\begin{vmatrix} s+K_{e1} & -1 & -0.38K_{e1} & 0 \\ K_{e2} & s+4.22 & -0.38K_{e2} & 13.81 \\ K_{e3} & 0 & s-0.38K_{e3} & -1 \\ K_{e4} & 13.81 & 559.78-0.38K_{e4} & s+45.21 \end{vmatrix} = (s+20)^2(s+22)^2$$

นั่นคือ

$$s^4+(-0.38K_3+K_1+49.43)s^3+(-0.38K_4-18.78K_3+K_2+49.43K_1+559.85)s^2+$$
$$(-15.41K_4-0.0266K_3+50.45K_2+559.85K_1+2362.3)s+7730.6K_3+559.78K_2+2362.3K_1=$$
$$s^4+84s^3+2644s^2+36960s+193600 \tag{3.3.11}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์แล้ว จะได้อัตราขยาย(Gain) K, K_e ออกมาดังนี้

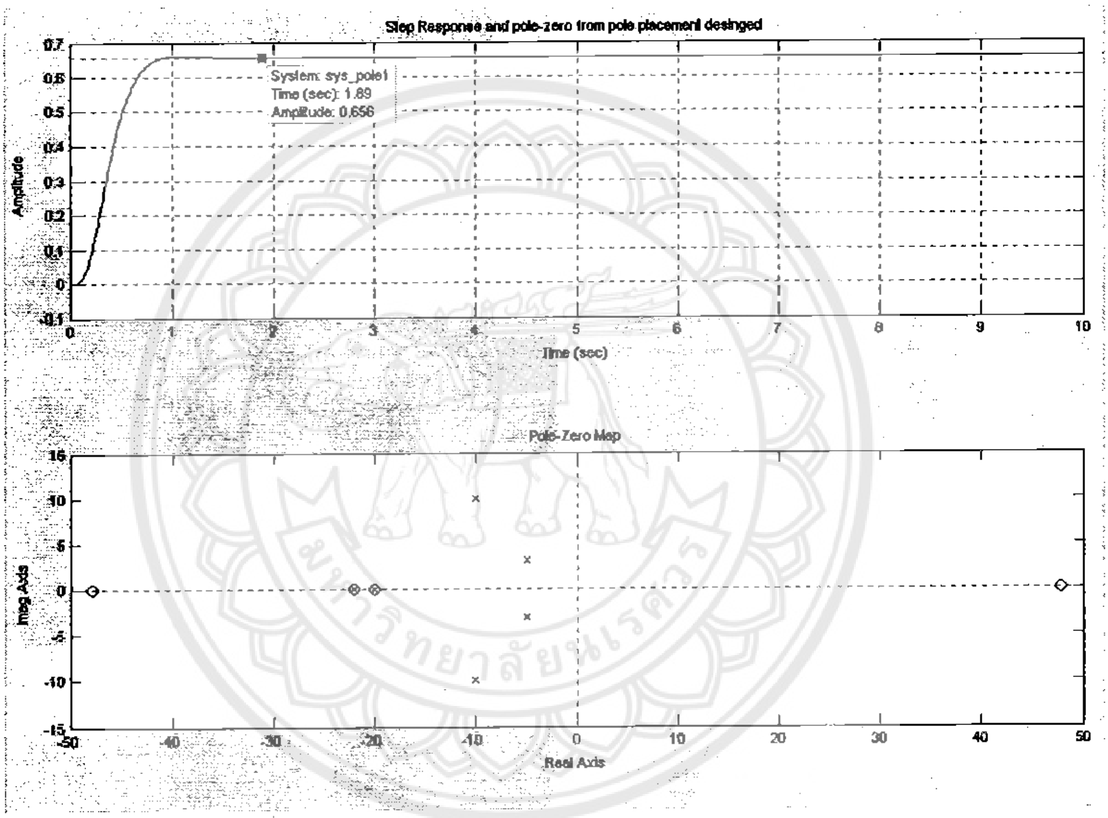
$$K = \begin{bmatrix} 1.5238 & 0.0574 & -5.5953 & -0.784 \end{bmatrix}$$
$$K_e = \begin{bmatrix} 22.1938 \\ 701.9687 \\ -32.5689 \\ 859.5103 \end{bmatrix}$$

จะสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะได้จาก

$$\frac{Y}{R}=[C \quad 0]\begin{bmatrix} sI-A+BK & -BK \\ 0 & sI-A+K_eC \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y}{R}=\frac{-1.92\,s^6-161.5\,s^5-697.6\,s^4+297700s^3+11240000s^2+162400000s+850700000}{s^8+113.7s^7+5568s^6+154100s^5+2.65\times10^6s^4+2.90\times10^7s^3+1.971\times10^8s^2+7.535\times10^8s+1.296\times10}$$

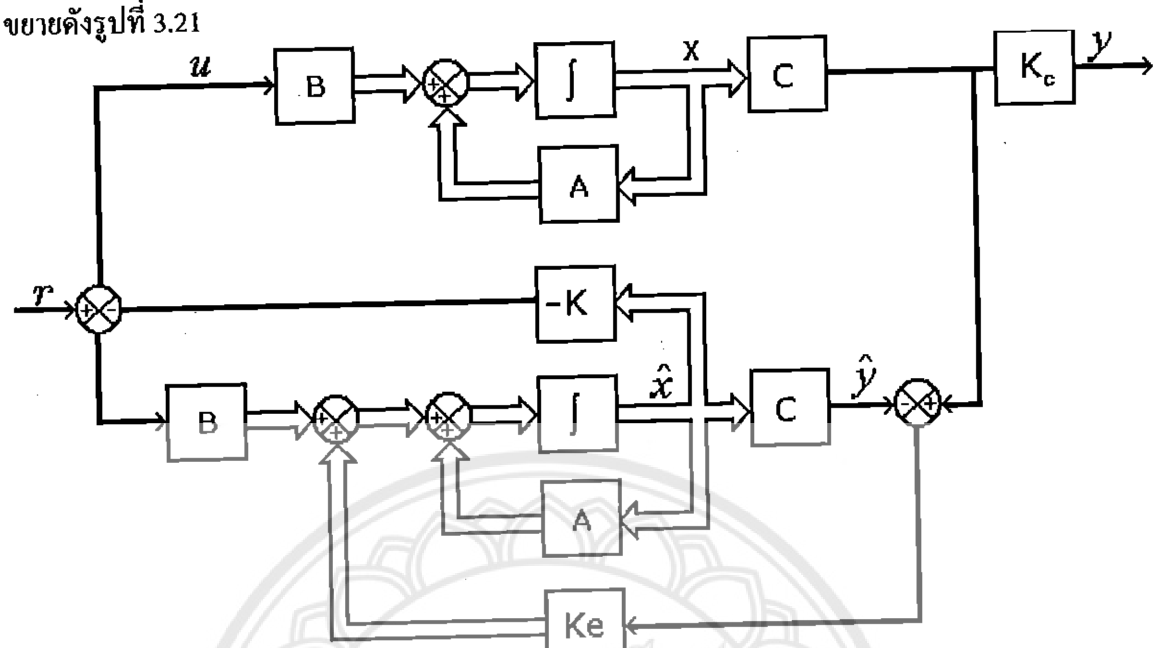
และจะตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมโดยจะได้ผลตอบสนอง เป็นดังรูป 3.20



รูปที่ 3.20 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออก

จากรูปที่ 3.20 เมื่อพิจารณารูปล่างจะเห็นได้ว่าจะมีตำแหน่งศูนย์ทับอยู่ที่ตำแหน่งขั้วของตัวสังเกตสถานะที่ผู้ออกแบบเลือกวางไว้ที่ $-20,-20,-22,-22$ ด้วย โดยลักษณะที่ตำแหน่งศูนย์และขั้ววางทับกันแบบนี้จะเรียกว่า การตัดกันของขั้วและศูนย์(pole-zero Cancellation) ซึ่งลักษณะแบบนี้จะทำให้ตำแหน่งขั้วที่ถูกวางทับด้วยศูนย์นั้นจะไม่มีผลใดๆ กับระบบและเช่นเดียวกันเมื่อพิจารณารูปผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีความผิดพลาดในสภาวะคงที่(error steady state) โดยมีขนาดประมาณ 0.656 หน่วย ทำให้ผู้ออกแบบจึงต้องออกแบบอัตราขยายเข้าไป และ

เพื่อเป็นการชดเชยให้ผลตอบสนองมีสมรรถนะเพิ่มมากขึ้น โดยมีแผนผังกล่องแสดงตำแหน่งของอัตราขยายดังรูปที่ 3.21



รูปที่ 3.21 แผนภาพกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกเมื่อออกแบบอัตราขยาย K_c

หลักการออกแบบค่าอัตราขยาย K_c เข้าไปเพื่อชดเชยความผิดพลาดที่สภาวะสมดุลให้ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยมีค่าเป็นหนึ่ง ซึ่งมีวิธีหาดังนี้
ค่าคงที่ของตำแหน่งในสภาวะคงที่(Static Position error: K_p)จะหามาได้จาก

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$$

$$K_p = \lim_{s\to 0}[(-1.92\,s^6 - 161.5\,s^5 - 697.6\,s^4 + 297700s^3 + 11240000s^2 + 162400000s + 850700000) \div$$
$$s^8 + 113.7s^7 + 5568s^6 + 154100s^5 + 2.65\times10^6 s^4 + 2.90\times10^7 s^3 + 1.971\times10^8 s^2 + 7.535\times10^8 s + 1.296\times10^9$$

$$K_p = \frac{850700000}{1.296\times10^9}$$

ทำให้ต้องออกแบบอัตราขยาย(Gain) K_c เพื่อทำให้ความผิดพลาดในสภาวะคงที่เป็น 0 ได้จาก

$$K_c = \frac{1}{K_p}$$

$$K_p = \frac{1.296\times10^9}{850700000}$$

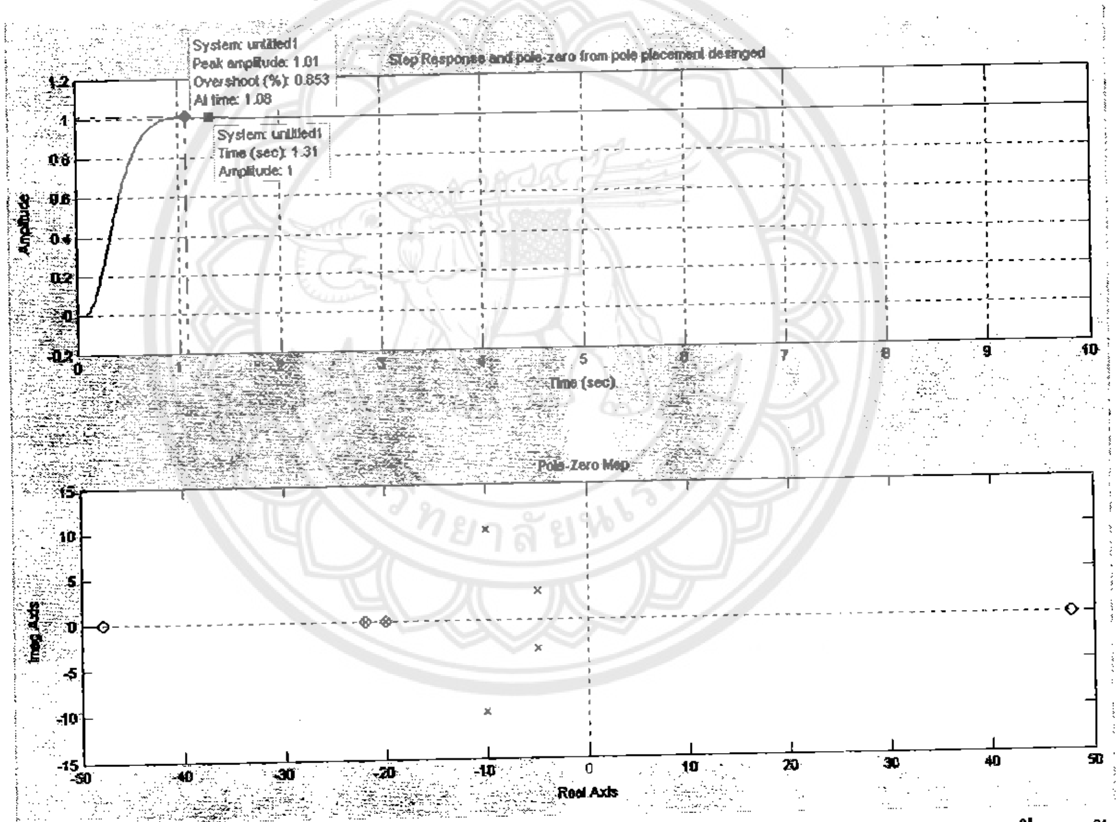
$$K_c = 1.52$$

จะสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

$$\frac{Y}{R}=\frac{K_c\times\left(-1.92\,s^6-161.5\,s^5-697.6\,s^4+297700s^3+11240000s^2+162400000s+850700000\right)}{s^8+113.7s^7+5568s^6+154100s^5+2.65\times10^6s^4+2.90\times10^7s^3+1.971\times10^8s^2+7.535\times10^8s+1.296\times10^9}$$

$$\frac{Y}{R}=\frac{1.52\times\left(-1.92\,s^6-161.5\,s^5-697.6\,s^4+297700s^3+11240000s^2+162400000s+850700000\right)}{s^8+113.7s^7+5568s^6+154100s^5+2.65\times10^6s^4+2.90\times10^7s^3+1.971\times10^8s^2+7.535\times10^8s+1.296\times10^9}$$

หลังจากได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหลังจากออกแบบอัตราขยาย K_c เพื่อชดเชยความผิดพลาดในสภาวะคงที่แล้ว ต่อไปจะทำการตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ โดยผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและตำแหน่งขั้ว-ศูนย์จะเป็นดังรูป 3.22



รูปที่ 3.22 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกและออกแบบ K_c เข้าไป

พิจารณารูปที่ 3.22 จะเห็นว่าสมรรถนะของระบบหลังจากการออกแบบค่า K_c เข้าไปในระบบจะทำให้ลดความผิดพลาดในสภาวะคงที่(error steady state)ในขณะที่คุณสมบัติอื่นๆ ที่ผู้ออกแบบต้องการ อาทิ ค่าสูงสุดของสัญญาณ(Overshoot),เวลาสูงสุด(peak Time)และเวลาสู่สภาวะคงที่ ก็ยังค่าเท่าเดิม

3.3.2 การออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกที่มีสัญญาณรบกวนความถี่สูงโดยใช้วิธีLQG

ในการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกที่เกี่ยวข้องกับสัญญาณรบกวนความถี่สูงแบบขาว(White noise) โดยใช้หลักการLQGนั้น ซึ่งขั้นตอนที่ถือว่ายากที่สุดก็คือการเลือก Q, R โดยที่ขั้นตอนการออกแบบจะเป็น ดังนี้

แบบจำลองในรูปปริภูมิสถานะ(State Space) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

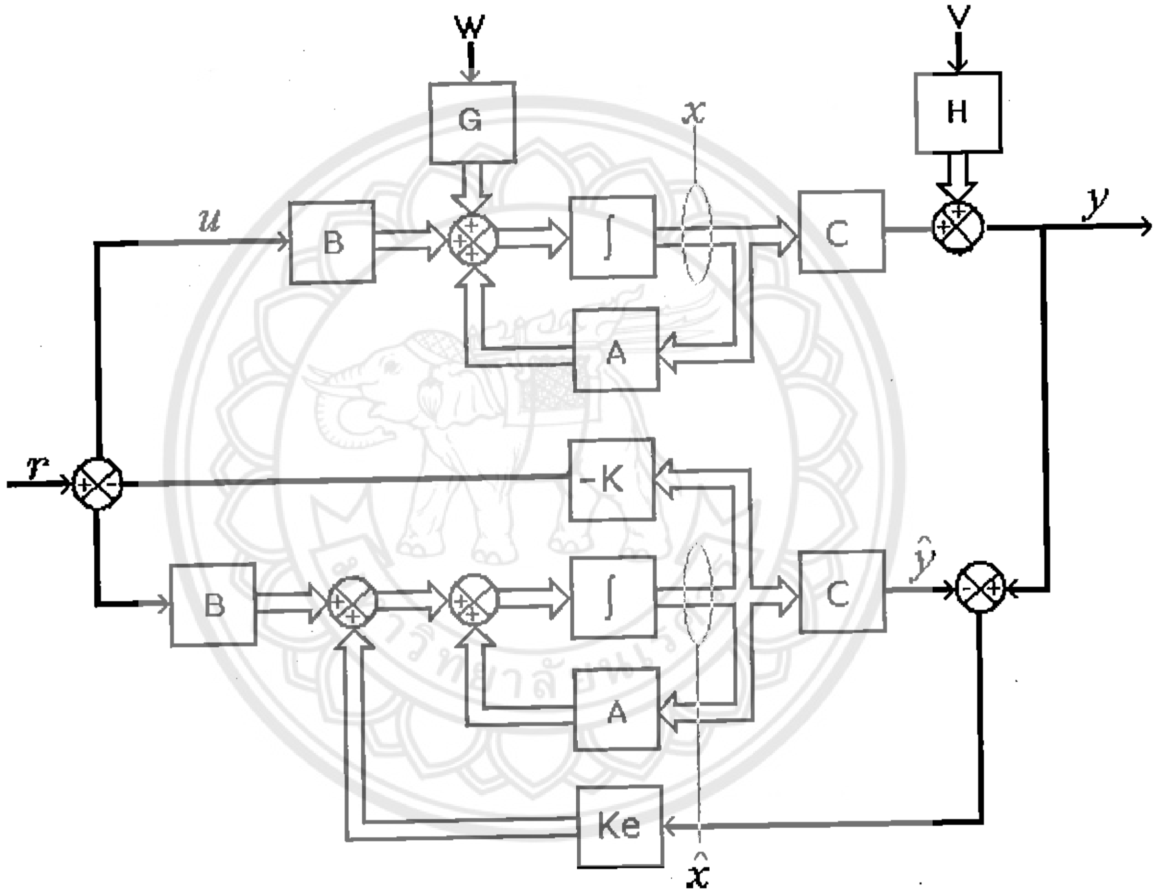
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0]u + [1]v$$

ในกรณีการออกแบบระบบควบคุมแบบLQG ระบบต้องมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้และความสามารถสังเกตได้ ซึ่งวิธีการหาค่า K, K_e นั้น โดยขั้นแรกต้องทำการเลือก Q, R และกำหนดค่า G, W, H, V แล้วจึงแก้สมการริกคาติเชิงพีชคณิตและแก้สมการตัวกรองของริกคาติเชิงพีชคณิตเพื่อหาค่า P และก็จะได้ค่า K, K_e ทั้งสองออกมา ซึ่งรายละเอียดจะอยู่ในหัวข้อ 2.4.5และ2.4.6 ซึ่งในขั้นตอนการหาค่า K, K_e ผู้ออกแบบจะคำนวณโดยใช้โปรแกรมMATLAB ซึ่งในการเลือก Q, R จะพิจารณาจากผลตอบสนองของระบบ จึงทำให้ผู้ออกแบบจะทำการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะควบคู่ไปด้วยกันและจะเปรียบเทียบผลตอบสนองที่ได้กับการออกแบบ โดยใช้วิธีการวางขั้วอีกด้วย

ในการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะหลังจากการออกแบบนั้น ค่อนข้างจะมีหลากหลายวิธี โดยในส่วนของโครงงานนี้ จะนำเสนอการวิเคราะห์ผลในรูปแบบต่างๆ ได้แก่ การตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ(State Trajectory), ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม(Control Signal afford: u), ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย(Step Response),ตำแหน่งขั้วและศูนย์(Pole and zero) ซึ่งรายละเอียดต่างๆ จะแสดงให้ทราบดังนี้

3.3.2.1 การตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ (State Trajectory)

ในการตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะของระบบ ซึ่งการออกแบบระบบควบคุมที่ดีจะต้องออกแบบให้ตัวแปรสถานะจริง x และตัวสังเกตตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ มีค่าเข้าใกล้กันมากที่สุดและในขณะเดียวกันต้องมีเสถียรภาพและสมรรถนะที่ดีด้วย ซึ่งก็คือในสภาวะที่ไม่มีการป้อนสัญญาณขาเข้าและเมื่อกำหนดค่าสภาวะเริ่มต้นของตัวแปรสถานะจริง x และตัวสังเกตตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ แล้ว ณ เวลาที่สถานะคงที่(Steady state)เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะทั้งคู่จะมีค่าเข้าสู่ 0 ให้เร็วที่สุดและมีค่าเข้าใกล้กันมากที่สุดนั่นเอง



รูปที่ 3.23 แผนผังกล่องแสดงตำแหน่งในการการตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ

ตัวแปรสถานะ x จะเขียนในปริภูมิสถานะ(State Space)ได้เป็น

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \tag{3.3.12}$$

$$y = Cx + Hv \tag{3.3.13}$$

ตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ จะเขียนในปริภูมิสถานะ(State Space)ได้เป็น

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(Cx + Hv - C\hat{x}) \tag{3.3.14}$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \tag{3.3.15}$$

สัญญาณควบคุมของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะในกรณีมีตัวสังเกตสถานะเขียนได้เป็น

$$u = -K\hat{x} + r \tag{3.3.16}$$

แทนสัญญาณควบคุมในสมการที่ 3.3.12 และ3.3.14 และจัดรูปสมการจะเขียนได้เป็น

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Br + Gw \tag{3.3.17}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - K_eC)\hat{x} + K_eCx + Br + K_eHv \tag{3.3.18}$$

เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ K_eC & A - BK - K_eC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & K_eH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \tag{3.3.19}$$

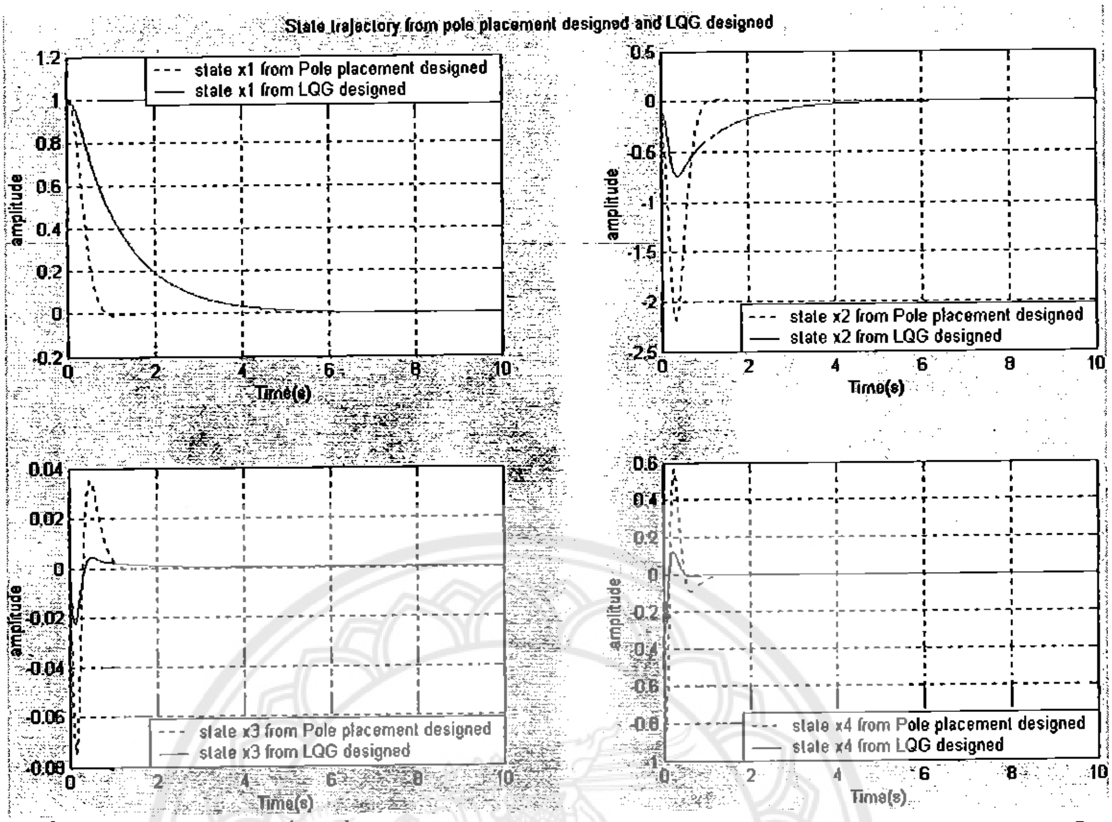
$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + Hv \tag{3.3.20}$$

โดยในการตรวจสอบ เราจะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

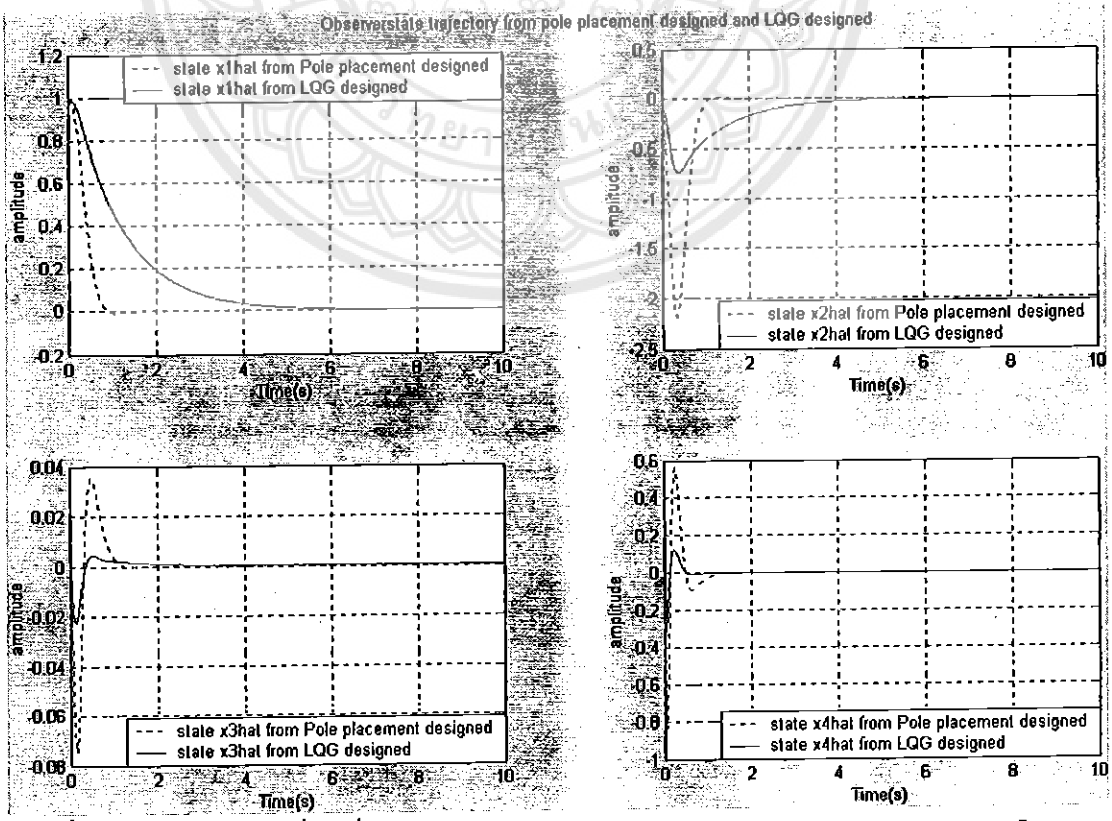
1. ไม่มีการป้อนสัญญาณขาเข้า $r = 0$
2. กำหนดสภาวะเริ่มต้น(Initial state)ของตัวแปรสถานะแต่ละตัวเท่ากับ $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0$, $\hat{x}_1(0) = 1, \hat{x}_2(0) = 0, \hat{x}_3(0) = 0, \hat{x}_4(0) = 0$
3. การออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วซึ่งได้ออกแบบมาแล้วโดยวางตำแหน่งขั้วของตัวแปรสถานะจริง x ไว้ที่ $-4.86 \pm j3.14, 10 \pm j10$ และตัวสังเกตตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ ไว้ที่ $-20, -20, -22, -22$
4. กำหนดค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว $W = 0.01, V = 0.01$

สำหรับการออกแบบโดยใช้วิธีLQG ขั้นแรกจะทำการเลือก $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1]$

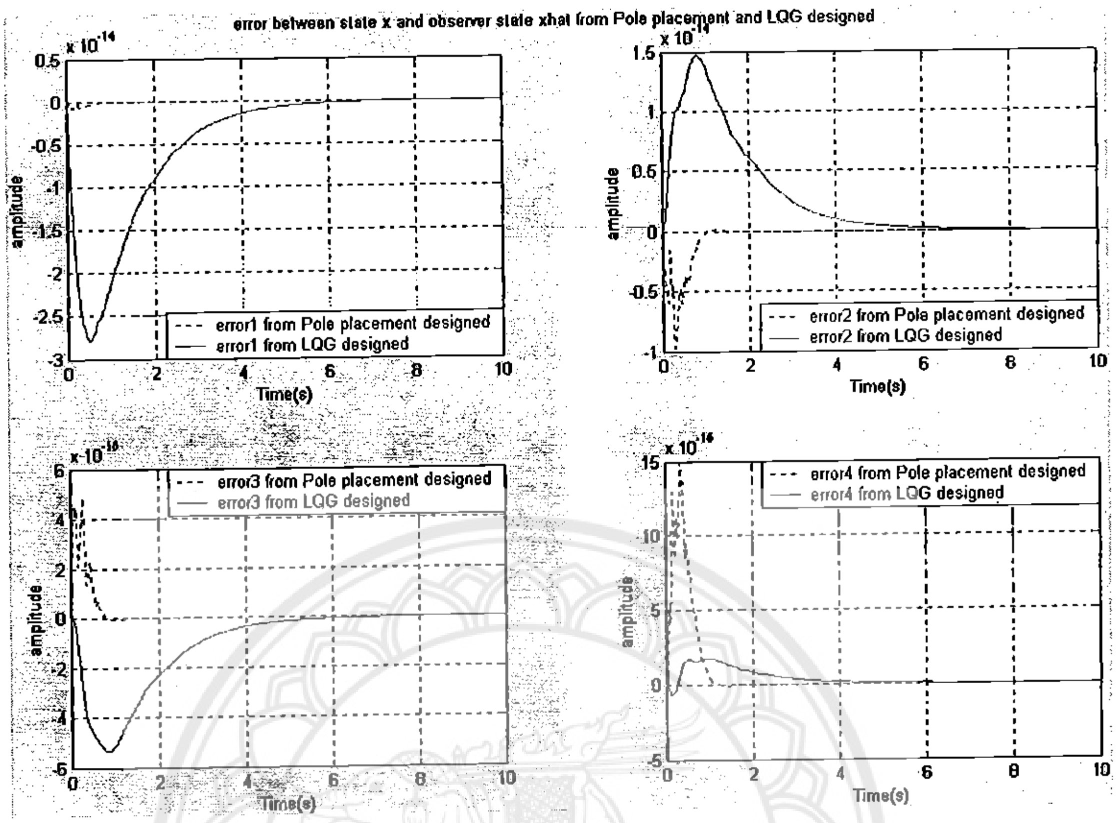
ก่อน จะทำให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะออกมา ดังรูป



รูปที่ 3.24 เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะ x กรณี $Q=\left[q_{11}=1, q_{22}=1, q_{33}=1, q_{44}=1\right]$ $R=[1]$



รูปที่3.25 เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวสังเกต $\hat{x}$ กรณี $Q=\left[q_{11}=1, q_{22}=1, q_{33}=1, q_{44}=1\right]$ $R=[1]$



รูปที่ 3.26 ความผิดพลาด(error)ระหว่างตัวแปรสถานะ x และตัวสังเกต $\hat{x}$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABจะได้ เมทริกซ์ $\overline{P}, P_f$ และ K_e เป็น

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 1.2902 & 0.1878 & 1.9770 & -0.0184 \\ 0.1878 & 0.1622 & 1.6228 & -0.0202 \\ 1.9770 & 1.6228 & 28.5894 & -0.0942 \\ -0.0184 & -0.0202 & -0.0942 & 0.0146 \end{bmatrix}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} 0.0342 & 0.0543 & -0.0005 & -0.0118 \\ 0.0543 & 0.2437 & -0.0006 & -0.0848 \\ -0.0005 & -0.0006 & 0.0006 & -0.0050 \\ -0.0118 & -0.0848 & -0.0050 & 0.0875 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 3.4424 \\ 5.4465 \\ -0.0683 \\ -0.9895 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด

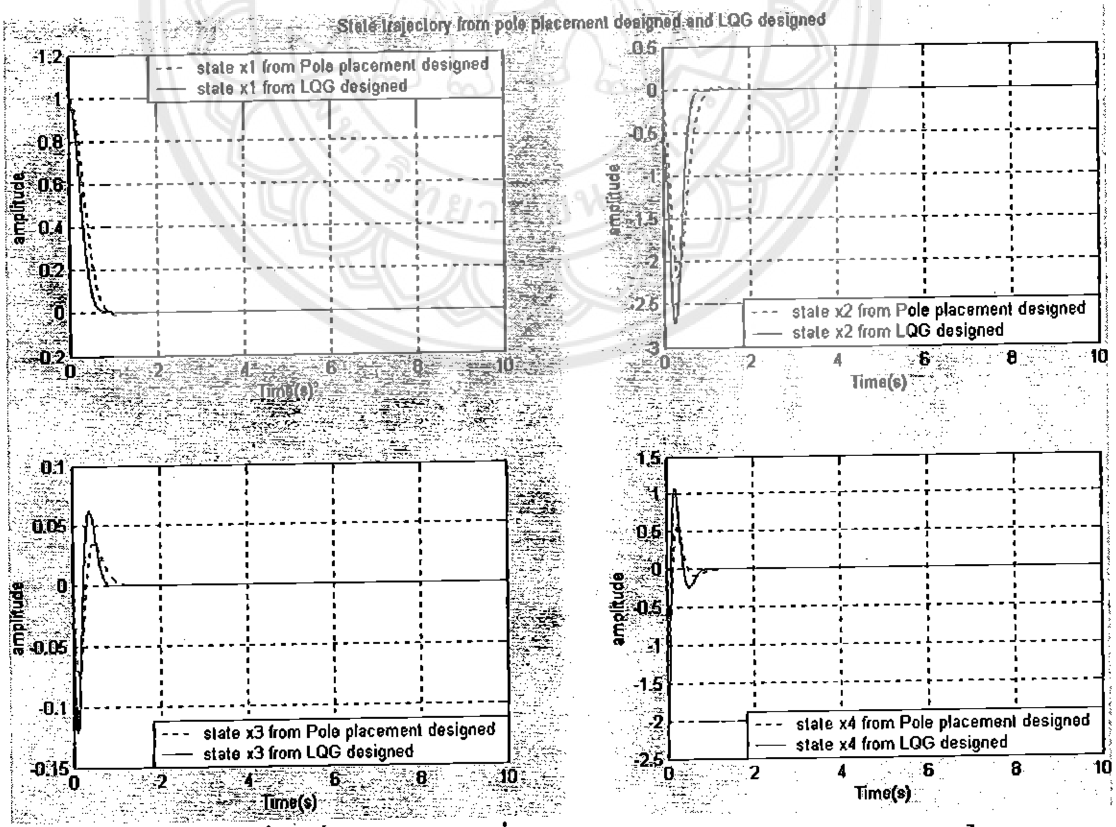
$$V_{s\_opt} = Tr\left\{\overline{P}K_e HVH^* K_e^*\right\} + Tr\left\{P_f Q\right\}$$

$$V_{s\_opt} = 0.6208$$

จากรูปที่ 3.24 จะเป็นรูปเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะจริง x ที่มาจากวิธีการออกแบบทั้ง 2 แบบและรูปที่ 3.25 จะเป็นรูปเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะสังเกต $\hat{x}$ ที่มาจากวิธีการออกแบบทั้ง 2 แบบ ซึ่งจะเห็นได้ว่าตัวแปรสถานะจริง x และตัวแปรสถานะสังเกต $\hat{x}$ จะมีค่าใกล้เคียงกันมากโดยความแตกต่างของตัวแปรสถานะ x และตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ จะมีค่าน้อยมากโดยแสดงในรูปที่ 3.26 ซึ่งถือว่าเป็นการออกแบบที่ดี

เมื่อพิจารณารูปที่ 3.24 จะเห็นได้ว่าจะเป็นรูปเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ x ที่มาจากวิธีการออกแบบทั้ง 2 แบบมีจะเห็นได้ว่าระบบที่ได้จากการออกแบบมีเสถียรภาพที่ดีทั้งคู่ แต่จะเห็นได้ว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ตัวแปรสถานะ x_1 ที่ได้จากการออกแบบ โดยใช้วิธีLQGค่อนข้างจะมีเวลาเข้าสู่ 0 ที่ช้ากว่าการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วอย่างชัดเจน ส่วนเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะอื่นๆจะมีเวลาเข้าสู่สภาวะคงที่ใกล้เคียงกัน ดังนั้นผู้ออกแบบจึงจะทำการเลือก q_{11} ที่มีผลต่อตัวแปรสถานะ x_1 ให้มากกว่าเดิม

โดยต่อไปทำการเลือก $Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = [1]$ ก่อน จะทำให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะออกมา ดังรูป



รูปที่ 3.27 เส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะ x เมื่อ $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$ $R = [1]$

จากการคำนวณในโปรแกรมMATABจะได้ เมทริกซ์ $\bar{P}, P_f$ และ K_e เป็น

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 15.1694 & 1.6563 & 13.2363 & -0.2307 \\ 1.6563 & 0.3565 & 3.2994 & -0.0463 \\ 13.2363 & 3.2994 & 44.5402 & -0.2970 \\ -0.2307 & -0.0463 & -0.2970 & 0.0185 \end{bmatrix}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} 0.0342 & 0.0543 & -0.0005 & -0.0118 \\ 0.0543 & 0.2437 & -0.0006 & -0.0848 \\ -0.0005 & -0.0006 & 0.0006 & -0.0050 \\ -0.0118 & -0.0848 & -0.0050 & 0.0875 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 3.4424 \\ 5.4465 \\ -0.0683 \\ -0.9895 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะที่น้อยที่สุด

$$V_{s\_opt} = Tr\left\{\bar{P}K_e HVH^* K_e^*\right\} + Tr\left\{P_f Q\right\}$$

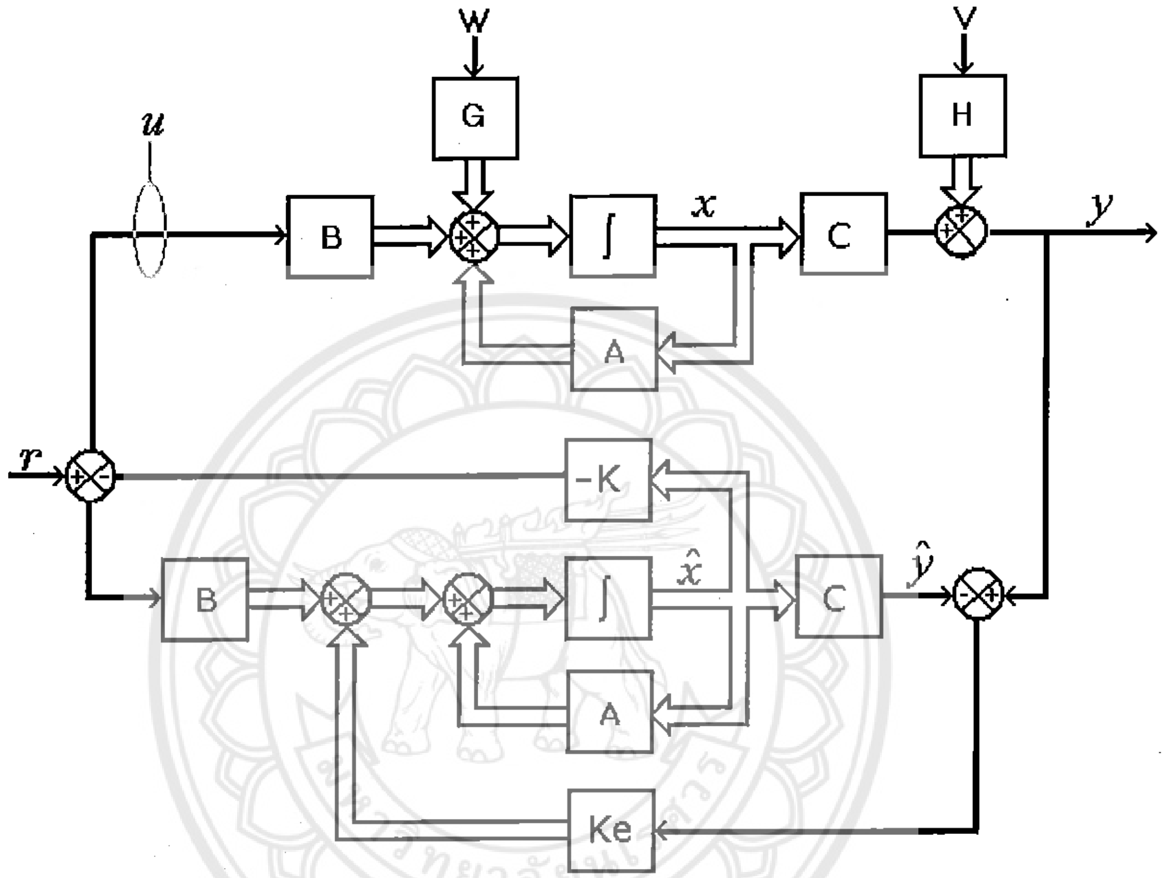
$$V_{s\_opt} = 4.5044$$

จากรูปที่ 3.27 จะเห็นได้ว่าเมื่อเราเลือก q_{11} มากกว่าเดิมจะมีผลโดยตรงกับตัวแปรสถานะ x_1 โดยจะทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะ x_1 มีเวลาเข้าสู่ 0 ที่เร็วกว่าเดิมและเมื่อพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะอื่นๆก็จะมีเวลาเข้าสู่ 0 ที่เร็วกว่าเดิมเช่นเดียวกัน

ซึ่งสรุปได้ว่าในการตรวจสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะที่ได้จากการออกแบบระบบควบคุมแบบตัวสังเกตสถานะในแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวโดยใช้วิธี LQG จะทำให้ระบบมีเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะจริง x และสถานะสังเกต $\hat{x}$ มีค่าเข้าใกล้กันและมีเวลาเข้าสู่สภาวะคงที่ที่เร็ว ซึ่งจะได้ค่าการเลือก Q ที่เหมาะสมเป็น $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$

3.3.3.2 ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม (Control Signal affords: U)

ในการตรวจสอบสมรรถนะของระบบอีกแบบหนึ่งนอกเหนือจากการสังเกตเวลาที่สถานะเข้าสู่สภาวะคงที่แล้ว ก็คือการหาปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม ซึ่งสิ่งนี้หมายถึงปริมาณการใช้พลังงานที่ต้องป้อนให้กับระบบ ซึ่งการออกแบบระบบที่ดีควรจะมีการใช้สัญญาณควบคุมที่น้อยที่สุด



รูปที่ 3.28 แผนผังกล่องแสดงตำแหน่งในการวัดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม

จากรูปที่ 3.28 สมมุติให้สัญญาณขาเข้าเป็นศูนย์จะสามารถเขียนสัญญาณควบคุมได้เป็น

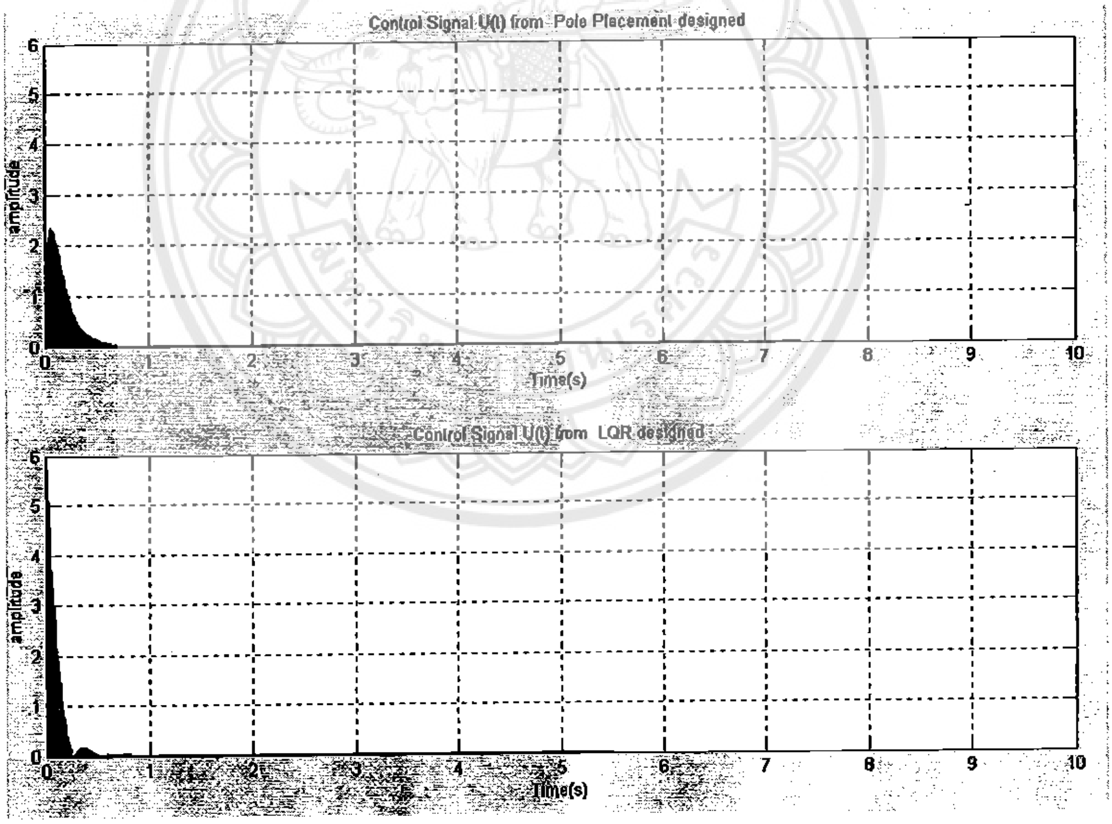
$$u = r - k\hat{x}$$
$$u = -(k_1\hat{x}_1 + k_2\hat{x}_2 + k_3\hat{x}_3 + k_4\hat{x}_4)$$

สิ่งที่มีผลโดยตรงกับปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมของวิธีการออกแบบ โดยใช้วิธีLQGนั้น จะขึ้นอยู่กับการเลือก R โดยตรง ซึ่งแน่นอนว่าจะขึ้นอยู่กับการเลือก Q ด้วยเช่นเดียวกัน

โดยในการวัดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมเราจะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

1. ไม่มีการป้อนสัญญาณขาเข้า $r = 0$
2. กำหนดสภาวะเริ่มต้น(Initial state)ของตัวแปรสถานะแต่ละตัวเท่ากับ $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0$, $\hat{x}_1(0) = 1, \hat{x}_2(0) = 0, \hat{x}_3(0) = 0, \hat{x}_4(0) = 0$
3. การออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว ซึ่งได้ออกแบบมาแล้วโดยวางตำแหน่งขั้วไว้ที่ $-4.86 \pm j3.14, 10 \pm j10$
4. กำหนด $W = 0.01, V = 0.01$

สำหรับการออกแบบโดยใช้วิธีLQG ผู้ออกแบบจะเลือก Q ที่ได้มาจากการพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะก็คือ $Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และจะเลือก $R = [1]$ ก่อน จะทำให้ได้ปริมาณสัญญาณควบคุมออกมาดังรูป



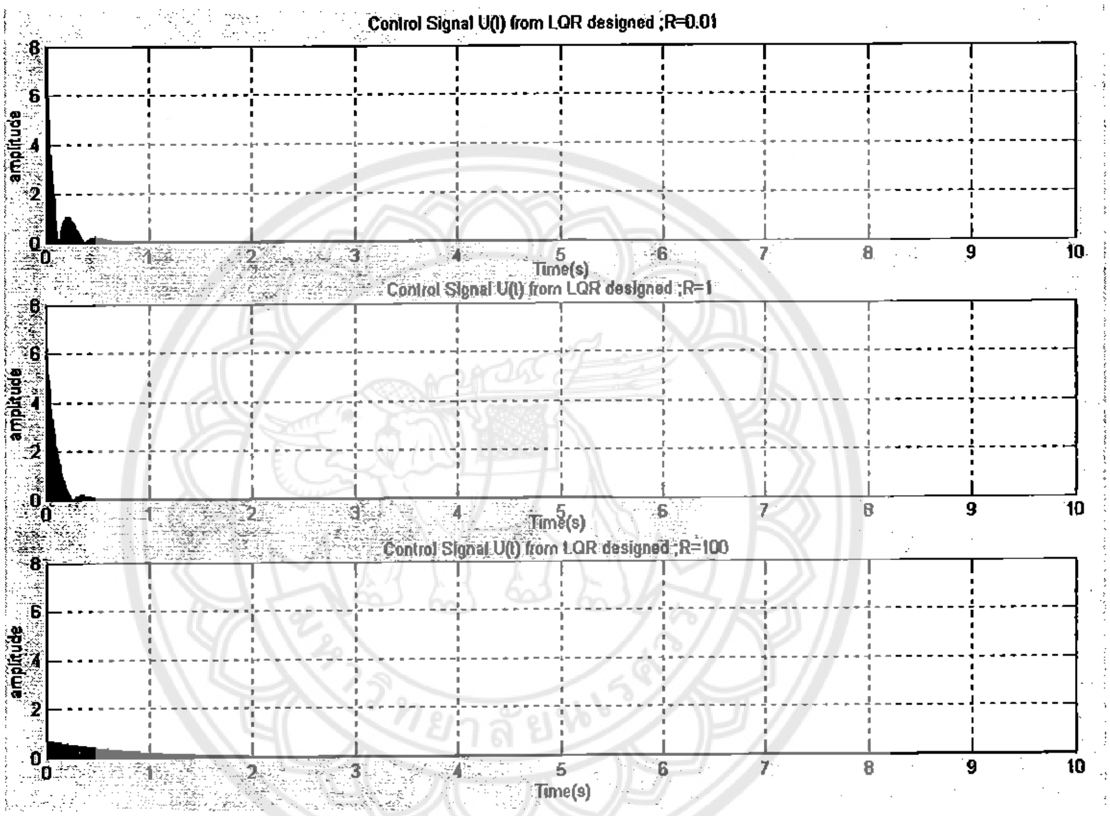
รูปที่ 3.29 รูปปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อ $R = [1]$ และ $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$

ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ได้จากรูปจะเป็นดังนี้

$$U_{pole} = 0.5536$$

$$U_{LQR} = 0.6287$$

เมื่อพิจารณารูป3.29 จะเห็นว่าปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ได้มาจากการออกแบบโดยวิธี LQGจะน้อยและจะเห็นได้ว่าเมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 3.29 กับรูปที่ 3.13 จะเห็นได้ว่ารูปปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมจะมีลักษณะคล้ายกัน ทั้งนี้ก็เนื่องมาจากตัวแปรสถานะ $\hat{x}$ ที่ได้จากการประมาณค่อนข้างจะมีค่าใกล้เคียงกับตัวแปรสถานะ x ทำให้รูปปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมมีลักษณะคล้ายกัน โดยในขั้นตอนต่อไปจะแสดงปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมในกรณีที่เลือก $R = 0.01, 1, 100$ และเลือก Q เท่าเดิม ดังนี้



รูปที่ 3.30 รูปปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อ $Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1], R = 0.01, 1, 100$

ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ได้จากรูปจะเป็นดังนี้

กรณี $R = 0.01$ $U_{LQR} = 1.3446$

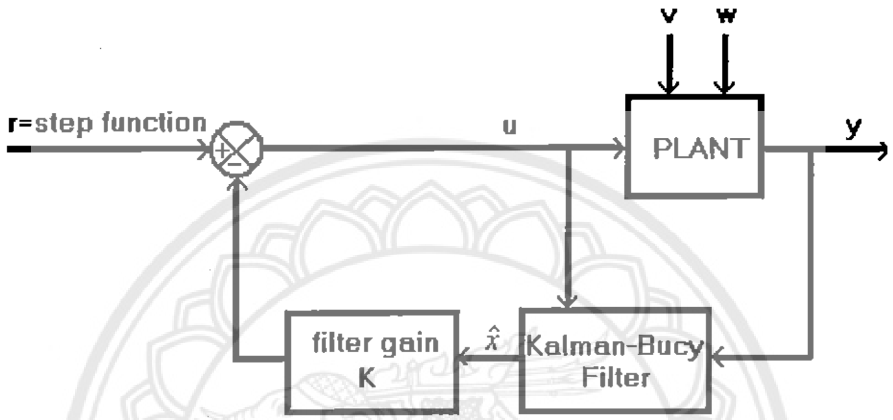
กรณี $R = 1$ $U_{LQR} = 0.6287$

กรณี $R = 100$ $U_{LQR} = 0.5411$

พิจารณารูปที่ 3.30 พิจารณารูปล่าง จะเห็นได้ว่าเมื่อผู้ออกแบบเลือก $R = 100$ จะทำให้ระบบมีปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่ลดลง ทั้งนี้ก็เพราะว่าเมื่อผู้ออกแบบเลือก R ให้มีค่ามากขึ้น ทำให้ในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะจะเน้นไปที่สัญญาณควบคุมมากกว่าตัวแปรสถานะ จึงส่งผลให้ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมน้อยลงและเมื่อเราพิจารณารูปกลางและรูปบนจะเห็นได้ว่ามีปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมที่มากขึ้นตามลำดับ ในกรณีการออกแบบโดยวิธีLQGนี้ ผู้ออกแบบเลือก $R = 1$

3.3.3.3 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย(Step Response)และตำแหน่งขั้ว-ศูนย์(Pole-Zero)

หลังจากที่ผู้ออกแบบได้ค่าฟังก์ชันน้ำหนัก Q, R ที่เหมาะสมแล้ว ต่อไปจะพิจารณาผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย ซึ่งจะเป็นการตรวจสอบผลตอบสนองชั่วครู่(Transient Response) และผลตอบสนองในสภาวะคงที่(Steady-State Response)รวมถึงจะตรวจสอบตำแหน่งขั้วและศูนย์ของระบบที่ได้จากการออกแบบ โดยในโครงงานนี้จะมีขั้นตอนตรวจสอบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะดังนี้



รูปที่ 3.31 แผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกเมื่อป้อนสัญญาณขาเข้าแบบหนึ่งหน่วย

ในการเลือก Q, R จะนำค่าที่ทำให้ผลตอบสนองออกมาเหมาะสมที่สุด ที่ได้มาจากการพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะและปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมคือ $Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1]$

$W = 0.0001, V = 0.0001$ ทำให้ได้ค่าอัตราขยาย K, K_e ออกมาเป็น

$$K = \begin{bmatrix} 7.0711 & 1.6073 & 18.2633 & 0.1120 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 3.4424 \\ 5.4465 \\ -0.0683 \\ -0.9895 \end{bmatrix}$$

ในกระบวนการสังเคราะห์ระบบเพื่อที่จะสามารถหาผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีวิธีการดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}G & 0\\ G & -K_cH\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w\\ v\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}G\\ G\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\ -K_eH\end{bmatrix}v \qquad (3.3.21)$$

$$y=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}+[0]u \qquad (3.3.22)$$

$$y=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}G\\ G\end{bmatrix}w+$$
$$\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ -K_e\end{bmatrix}Hv$$

ซึ่งจะหาตำแหน่งขั้ว-ศูนย์ในสภาวะไม่มีสัญญาณรบกวนหรือเขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนได้ ดังนี้

$$y=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_eC\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}r$$

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเขียนได้เป็น

$$\frac{Y}{R}=\frac{-1.92s^6-101.7s^5+2969s^4+2.235\times10^5s^3+3.218\times10^6s^2+2.012\times10^7+4.681\times10^7}{s^8+117.8s^7+5256s^6+1.9\times10^5s^5+1.6\times10^6s^4+1.4\times10^7s^3+7.8\times10^7s^2+2.4\times10^8s+3.3\times1}$$

โดยต่อไปจะตรวจสอบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบหลังจากการออกแบบโดยใช้วิธีLQG โดยที่มีเงื่อนไขดังนี้

1. ป้อนสัญญาณขาเข้าแบบหนึ่งหน่วย
2. จะเลือก Q และ R ที่ได้มาจากการพิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของสถานะและปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมก็คือ $Q=\begin{bmatrix}50 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, และ $R=[1]$

3. ป้อนสัญญาณรบกวนกระบวนการ w และสัญญาณรบกวนการวัด v แบบสุ่ม(Random)ตั้งแต่เวลา 0 – 10 วินาที
4. แสดงผลตอบสนอง 3 กรณีตามขนาดของของสัญญาณรบกวนกระบวนการ w และสัญญาณรบกวนการวัด v ดังนี้

   4.1 w มีความแปรปรวนเป็น 0.01 และ v มีความแปรปรวนเป็น 0.01 ทำให้ได้ค่า

   $$W = 0.0001, \quad V = 0.0001$$

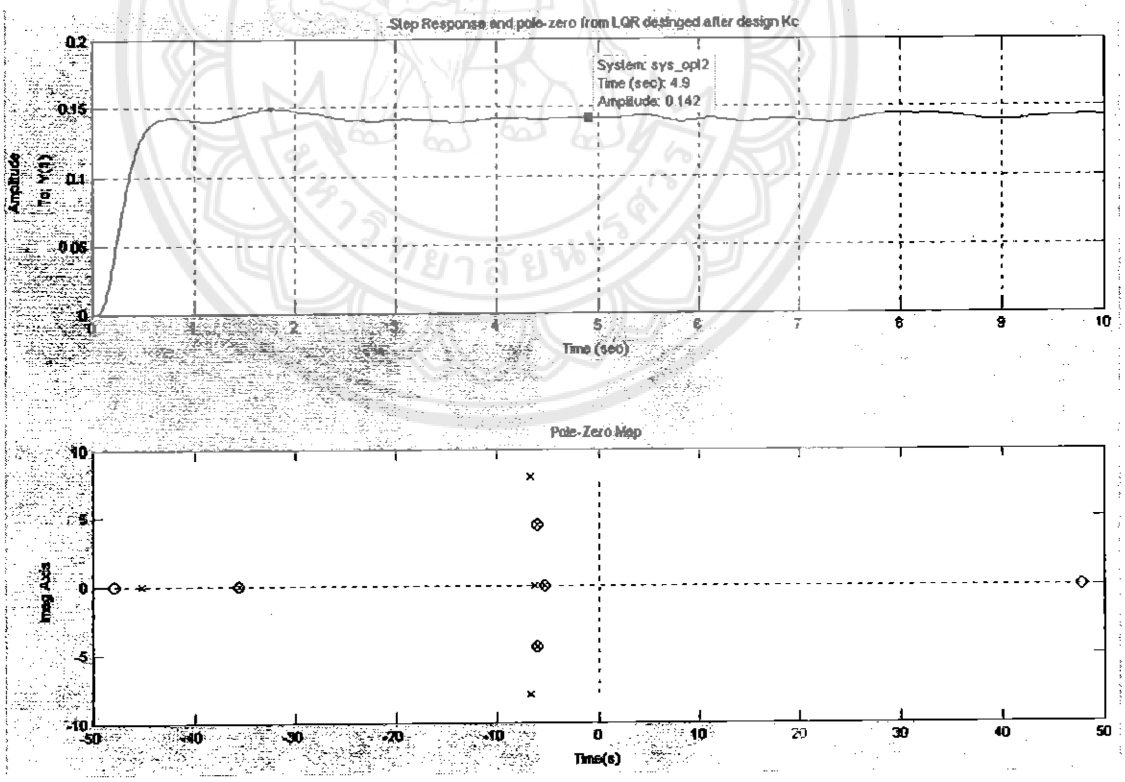
   4.2 w มีความแปรปรวนเป็น 0.01 และ v มีความแปรปรวนเป็น 0.1 ทำให้ได้ค่า

   $$W = 0.0001, \quad V = 0.01$$

   4.3 w มีความแปรปรวนเป็น 0.1 และ v มีความแปรปรวนเป็น 0.01 ทำให้ได้ค่า

   $$W = 0.01, \quad V = 0.0001$$

โดยในขั้นแรกป้อนสัญญาณรบกวน w มีความแปรปรวนเป็น 0.01 และ v มีความแปรปรวนเป็น 0.01 ทำให้ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบและตำแหน่งขั้วศูนย์ซึ่งจะทำให้ได้ผลตอบสนองออกมา ดังรูป



รูปที่ 3.32 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออก

จากรูปที่ 3.32 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเข้าไปในระบบจะมีเสถียรภาพที่ดีและตำแหน่งขั้วอยู่ฝั่งซ้ายของระนาบS แต่มีข้อเสียในเรื่องสมรรถนะของระบบจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีความผิดพลาดในสภาวะคงที่ (error steady state) โดยมีขนาดประมาณ 0.142 หน่วย ทำให้ผู้ออกแบบจึงต้องออกแบบอัตราขยายเข้าไป และเพื่อเป็นการชดเชยให้ผลตอบสนองมีสมรรถนะเพิ่มมากขึ้น โดยมีแผนผังกล่องแสดงตำแหน่งของอัตราขยายดังรูปที่ 3.21 และมีวิธีออกแบบ ดังต่อไปนี้

ค่าคงที่ของตำแหน่งในสภาวะคงที่(Static Position error: K_p)จะหามาได้จาก

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{-1.92s^6 - 101.7s^5 + 2969s^4 + 2.235\times10^5 s^3 + 3.218\times10^6 s^2 + 2.012\times10^7 + 4.681\times10^7}{s^8 + 117.8s^7 + 5256s^6 + 1.9\times10^5 s^5 + 1.6\times10^6 s^4 + 1.4\times10^7 s^3 + 7.8\times10^7 s^2 + 2.4\times10^8 s + 3.3}$$

$$K_p = \frac{4.681\times10^7}{3.3\times10^8}$$

ทำให้ต้องออกแบบอัตราขยาย(Gain) K_c เพื่อทำให้ความผิดพลาดในสภาวะคงที่เป็น 0 ได้จาก

$$K_c = \frac{1}{K_p}$$

$$K_c = \frac{3.3\times10^8}{4.681\times10^7}$$

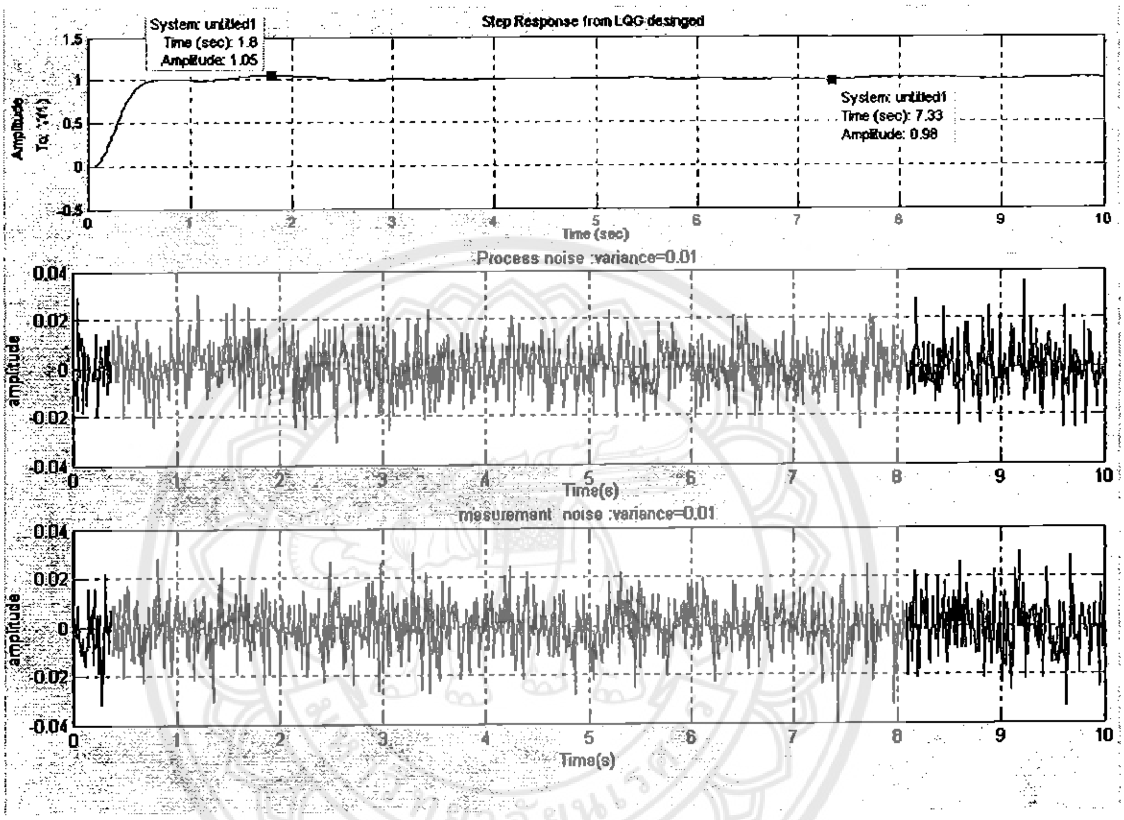
$$K_c = 7.04$$

จะสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

$$\frac{Y}{R} = K_c \times \frac{-1.92s^6 - 101.7s^5 + 2969s^4 + 2.235\times10^5 s^3 + 3.218\times10^6 s^2 + 2.012\times10^7 + 4.681\times10^7}{s^8 + 117.8s^7 + 5256s^6 + 1.9\times10^5 s^5 + 1.6\times10^6 s^4 + 1.4\times10^7 s^3 + 7.8\times10^7 s^2 + 2.4\times10^8 s + 3.3\times}$$

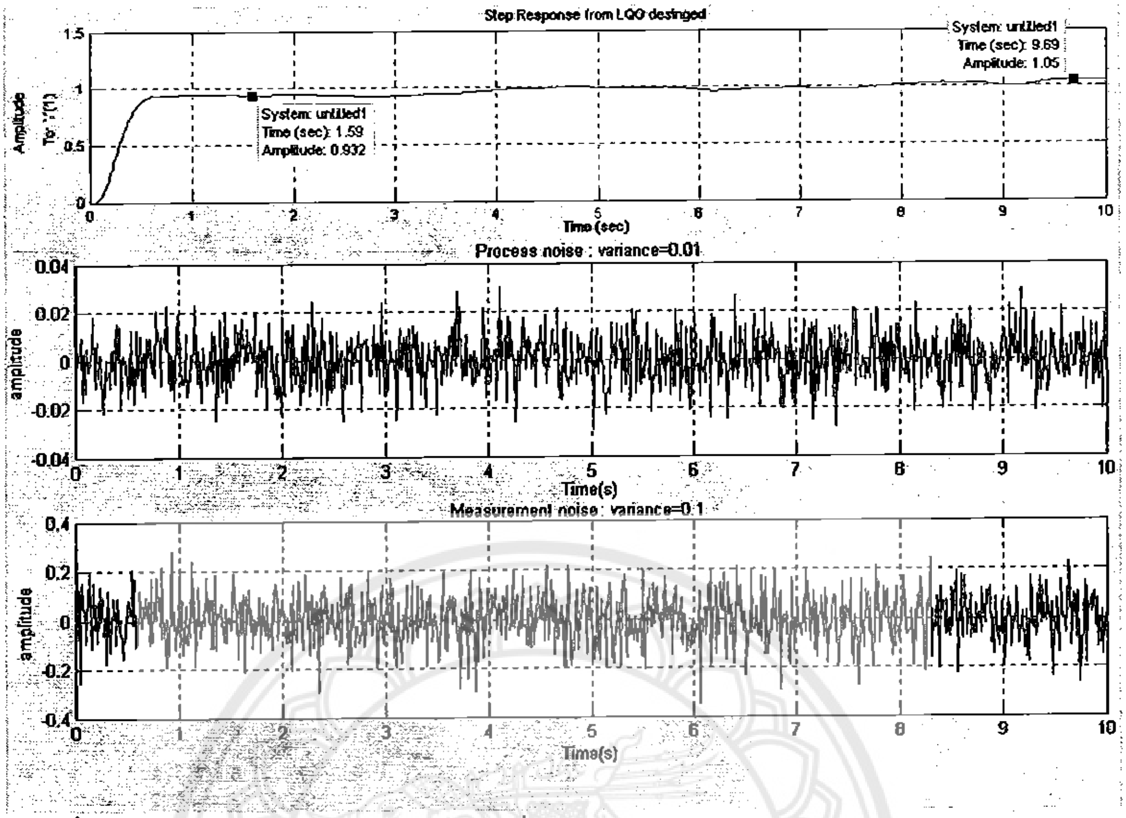
$$\frac{Y}{R} = 7.04 \times \frac{-1.92s^6 - 101.7s^5 + 2969s^4 + 2.235\times10^5 s^3 + 3.218\times10^6 s^2 + 2.012\times10^7 + 4.681\times10^7}{s^8 + 117.8s^7 + 5256s^6 + 1.9\times10^5 s^5 + 1.6\times10^6 s^4 + 1.4\times10^7 s^3 + 7.8\times10^7 s^2 + 2.4\times10^8 s + 3.3}$$

หลังจากได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหลังจากออกแบบอัตราขยาย K_c เพื่อชดเชยความผิดพลาดในสภาวะคงที่แล้ว ต่อไปจะทำการตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ โดยผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดเข้าไปในระบบ ดังรูป

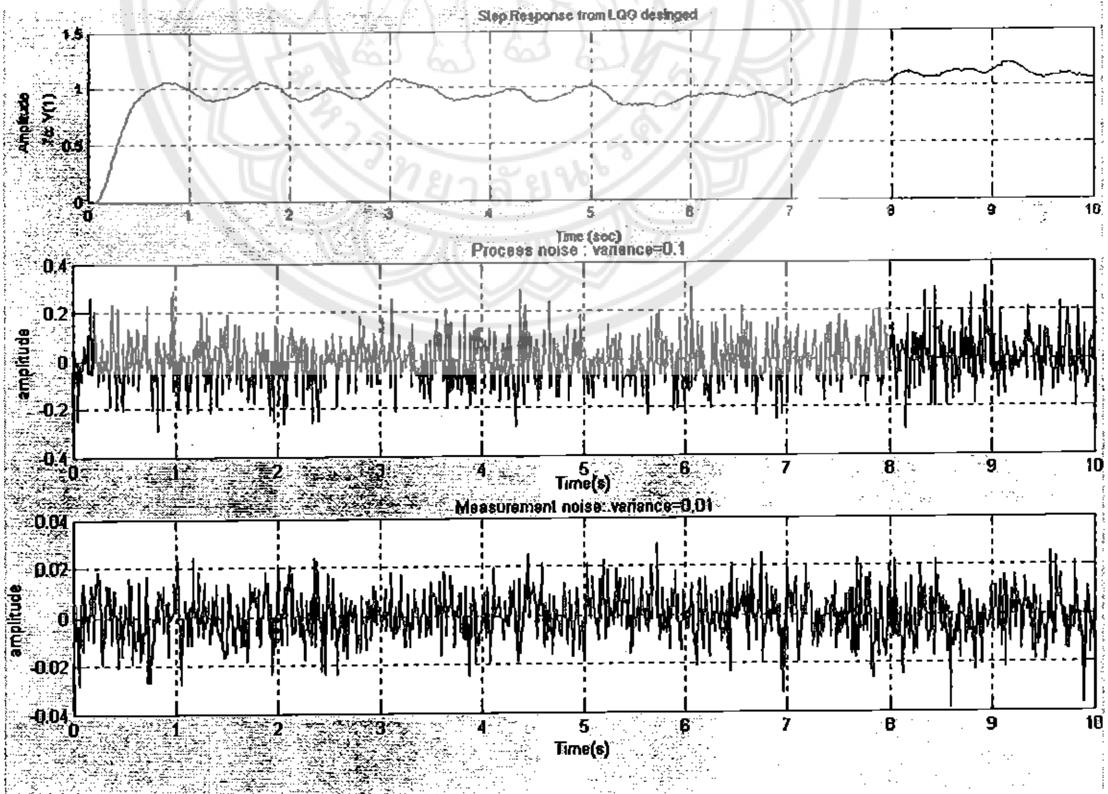


รูปที่ 3.33 เปรียบเทียบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดกรณี w มีความแปรปรวนเป็น 0.01 และ v มีความแปรปรวนเป็น 0.01

พิจารณารูปที่ 3.33 ในสภาวะที่มีสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดเข้ามาระบบ ซึ่งทั้งคู่เป็นสัญญาณรบกวนความถี่สูง จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีLQG จะกรองสัญญาณรบกวนที่มีความถี่สูง ทำให้รูปผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยค่อนข้างเรียบและรูปสัญญาณเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อย โดยในกรณีต่อไปจะทำการเปรียบเทียบผลกระทบที่มีต่อระบบเมื่อป้อนสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดที่มีค่าต่างกัน โดยรูปผลตอบสนองจะออกแบบค่า K_c เรียบร้อยแล้วดังรูป



รูปที่ 3.34 เปรียบเทียบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดกรณี *w* มีความแปรปรวนเป็น 0.01 และ *v* มีความแปรปรวนเป็น 0.1



รูปที่ 3.35 เปรียบเทียบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยและสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดกรณี *w* มีความแปรปรวนเป็น 0.1 และ *v* มีความแปรปรวนเป็น 0.01

พิจารณารูปที่ 3.34 เมื่อป้อนสัญญาณรบกวนกระบวนการมีค่าความแปรปรวนเป็น 0.01 และป้อนสัญญาณรบกวนการวัดมีความแปรปรวนมากขึ้นเป็น 0.1 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบที่ได้ จะไม่แตกต่างกับกรณีป้อนสัญญาณรบกวนการวัดที่มีความแปรปรวนเป็น 0.01 เลย ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า การออกแบบระบบโดยใช้วิธีLQG จะกรองสัญญาณรบกวนการวัดได้ดี

พิจารณารูปที่ 3.35 เมื่อป้อนสัญญาณรบกวนกระบวนการมีค่ามากขึ้นมีความแปรปรวนเป็น 0.1 และป้อนสัญญาณรบกวนการวัดมีความแปรปรวนเป็น 0.01 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบที่ได้ จะมีความเปลี่ยนแปลงไปค่อนข้างมาก ตามขนาดของสัญญาณรบกวนกระบวนการที่เข้ามา ซึ่งสามารถกล่าวได้ว่าในการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกโดยใช้วิธีLQG ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการหาตัวสังเกตตัวแปรสถานะและเป็นตัวกรองสัญญาณรบกวนควบคู่กันไปด้วย โดยที่จะสามารถกรองสัญญาณรบกวนการวัดได้มากกว่าสัญญาณรบกวนกระบวนการ

บทที่ 4
บทสรุป

1.1 สรุปผลการวิเคราะห์

จากการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดและวิธีการวางขั้วในตัวอย่างระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ซึ่งเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ หลังจากได้มีการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะไปควบคุมระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวแล้ว จะทำให้ระบบมีคุณสมบัติต่างๆ โดยสามารถสรุปเป็นข้อๆ ได้ดังนี้

1. เสถียรภาพ(Stability)ซึ่งก็คือ ในกรณีที่ไม่มีสัญญาณขาเข้า ที่สภาวะคงที่(Steady state) เส้นทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรสถานะทุกๆตัว จะมีค่าเป็น 0
2. สมรรถนะ(Performance)ซึ่งก็คือระบบใช้สัญญาณควบคุม(Control Signal afford)และระบบจะมีเวลาเข้าสภาวะคงที่(Setting time)ที่เร็ว

จะเห็นได้ว่าคุณสมบัติที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ที่ได้จากการออกแบบระบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดและวิธีการวางขั้ว คุณสมบัติเหล่านี้ล้วนแต่เป็นเป้าหมายของการออกแบบตัวควบคุมมาใช้ควบคุมระบบทั้งสิ้น

4.2 ข้อเสนอแนะ

จากการที่ผู้ออกแบบได้ศึกษาและนำเอาวิธีการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดมาออกแบบระบบแขนกลหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวนั้น ทำให้ผู้ออกแบบมีข้อเสนอแนะ เพื่อทำให้ผู้ที่สนใจมีเป้าหมายในการศึกษาเกี่ยวกับวิธีการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีนี้และอีกทั้งยังเป็นการทำให้โครงงานนี้มีความสมบูรณ์มากขึ้น ดังนี้

1. ควรมีการเปรียบเทียบผลที่ได้จากจากการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Linear Quadratic: LQ)กับวิธีการออกแบบอื่นๆเช่น วิธีลูป-เชพปิ้ง ,วิธี H_∞ เป็นต้น
2. ควรมีการวิเคราะห์การออกแบบโดยใช้วิธีLQRให้อยู่ในรูปLMI(Linear Matrix Inequality)
3. ควรมีการวิเคราะห์ระบบสภาวะที่มีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบทั้งสัญญาณรบกวนความถี่สูง(Noise)และสัญญาณรบกวนความถี่ต่ำ(Disturbance)
4. ควรจะนำไปประยุกต์ใช้ออกแบบระบบทางกายภาพให้เห็นเป็นรูปธรรมมากกว่านี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Katsuhiko Ogata. **Modern Control Engineering.** 3rd Edition New Jersey,USA: Prentice Hall International,Inc 1997

[2] Peter Dorato and Chaouki Abdallah and Vito Cerome. **Linear-Quadratic Control.** New Jersey, USA: Prentice Hall International,Inc 1995

[3] Raymond T.Stefani and Clement J.Sarant,Jr and Bahram Shahian and Gene H.Hostetter. **Design of Feedback Controll System.** 3rd Edition New USA: Harcourt Brace College Publishers 1994

[4] รศ.สุมาลี อุณหวณิชย์.**ระบบควบคุม(Control System).**กรุงเทพมหานคร,ประเทศไทย: บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด 2545

[5] Panu Chaichanavong and David Banjerdpongchai **"A Case Study of Robust Control Experiment on Onelink Flexible Robot Arm,"** IEEE Trans. On Computer. No.38. Dec. 1999.

มหาวิทยาลัยนเรศวร

ภาคผนวก

โปรแกรมคอมพิวเตอร์

MATLAB Program 1: statefeedback_lqr.m	Description : Control system design using LQR method

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%     State feedback Design using                       %%
%% Pole Placement Method and LQR Method                  %%
%% File Name:   statefeedback_lqr.m                      %%
%% Written By:  Mr.Somchai  Chuebunmee                   %%
%% Date:        On May 8, 2005                           %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
%Designed state observer system
%%State Space Plant%%
A=[0 1 0 0;0 -4.22 0 -13.81;0 0 0 1;0 -13.81 -559.78 -45.21];
B=[0 7.85 0 25.71]';
C=[1 0 -0.38 0];
D=[0];
%%assume Matrix For Output Plot%%
BB=zeros(size(1:4))';
CC=eye(4);
DD=0;
%%Designed System By Pole Placement Method%%
%Designed State Feedback Gain By Pole Placement
fprintf('Rank of Controllability Matrix is %d\n',rank(ctrb(A,B)));      %Check Rank of Controllability Matri
pole_st1=-4.86+3.14i;                                                    %Desire Pole1 for State Feedback
pole_st2=-4.86-3.14i;                                                    %Desire Pole2 for State Feedback
pole_st3=-10+10i;                                                        %Desire Pole3 for State Feedback
pole_st4=-10-10i;                                                        %Desire Pole4 for State Feedback
pole_st=[pole_st1 pole_st2 pole_st3 pole_st4];
K_pole = acker(A,B,pole_st);                                             %available Gain K

%%Designed System By Optimization%%
q1=input('Choose Weighting Function q1 =');                              %Weighting q1%
```

```
q2=input('Choose Weighting Function q2 =');                          %Weighting q2%
q3=input('Choose Weighting Function q3 =');                          %Weighting q3%
q4=input('Choose Weighting Function q4 =');                          %Weighting q4%
Q=[q1 0 0 0;0 q2 0 0;0 0 q3 0;0 0 0 q4];                             %Matrix Q
R = input('Choose Weighting Function for R = ');                     %Weighting R
[K_opt,P,E] = LQR(A,B,Q,R);                                          %Optimal Regulator

%state,transfer function,Gain Kc,Control signal from Pole Placement designed
sys_pole=ss(A-B*K_pole,B,C,D);                                       %state space of Pole Placement(for transfer functio
sys_pole1=ss(A-B*K_pole,BB,CC,DD);                                   %state space of Pole Placement(for state trajectory
X0=[1 0 0 0]';                                                       %initial condition of State X(0)
T0=0:0.01:10;                                                        %Time
[Y,T,X] = INITIAL(sys_pole1,X0,T0);                                  %initial command for stability check
X1_pole=X(:,1);                                                      %X1
X2_pole=X(:,2);                                                      %X2
X3_pole=X(:,3);                                                      %X3
X4_pole=X(:,4);                                                      %X4
[NUM,DEN] = SS2TF(A-B*K_pole,B,C,D);
s=tf('s');tf_pole=([s^4 s^3 s^2 s 1]*NUM')/([s^4 s^3 s^2 s 1]*DEN');  %Transfer function
Kp_pole=NUM(5)/DEN(5);                                               %Kp=lim(tf) ;take s->0
Kc_pole=1/Kp_pole;                                                   %Kc
fprintf('Gain Kc(Pole Placement) is %f\n',Kc_pole);                  %Gain Kc for pole placement designed
U_pole=abs([K_pole]*[X1_pole X2_pole X3_pole X4_pole]');             %U from Pole placement Designed

%state&transfer function,Gain Kc from LQR designed
sys_opt=ss(A-B*K_opt,B,C,D);                                         %state space of LQR(for tranfer function)
sys_opt1=ss(A-B*K_opt,BB,CC,DD);                                     %state space of LQR(for state trajectory)
X0=[1 0 0 0]';                                                       %initial condition of State X(0)
T0=0:0.01:10;                                                        %Time
[Y2,T2,X2] = INITIAL(sys_opt1,X0,T0);                                %initial command for stability check
X1_opt=X2(:,1);                                                      %X1
X2_opt=X2(:,2);                                                      %X2
X3_opt=X2(:,3);                                                      %X3
X4_opt=X2(:,4);                                                      %X4
[NUM2,DEN2] = SS2TF(A-B*K_opt,B,C,D);
s=tf('s');tf_opt =([s^4 s^3 s^2 s 1]*NUM2')/([s^4 s^3 s^2 s 1]*DEN2');  %Transfer function of plant
```

```
Kp_opt=NUM2(5)/DEN2(5);                                          %Kp=lim(tf) ;take s->0
Kc_opt=1/Kp_opt;                                                 %Kc
fprintf('Gain Kc(LQR) is %f\n',Kc_opt);                          %Gain Kc form LQR designed
U_opt=abs([K_opt]*[X1_opt X2_opt X3_opt X4_opt]');               %U from LQR Designed
%Control signal
fprintf('Control signal afford(Pole Placement)is %f\d',sum(U_pole*0.01,2))
fprintf('    and      Control signal afford(LQR)is %f\n',sum(U_opt*0.01,2))
%Performance Index
V=[X1_opt(1) X2_opt(1) X3_opt(1) X4_opt(1)]*P*[X1_opt(1) X2_opt(1) X3_opt(1) X4_opt(1)]';
fprintf('Performance index(V) is %f\n',V)
figure(1);
SUBPLOT(2,2,1),plot(T,X1_pole,':',T2,X1_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x1 from Pole placement designed','state x1 from LQR designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,2),plot(T,X2_pole,':',T2,X2_opt);XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x2 from Pole placement designed','state x2 from LQR designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,3),plot(T,X3_pole,':',T2,X3_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x3 from Pole placement designed','state x3 from LQR designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,4),plot(T,X4_pole,':',T2,X4_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x4 from Pole placement designed','state x4 from LQR designed',0);Grid
figure(2);SUBPLOT(2,1,1),plot(T,U_pole),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control
Signal U(t) from  Pole Placement designed')
          SUBPLOT(2,1,2),plot(T2,U_opt),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control
Signal U(t) from  LQR designed')
figure(2);SUBPLOT(2,1,1),AREA(T,U_pole),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control
Signal U(t) from  Pole Placement designed')
          SUBPLOT(2,1,2),AREA(T2,U_opt),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control
Signal U(t) from  LQR designed')
figure(3);SUBPLOT(2,2,1),STEP(sys_pole,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from pole placement desinged')
          SUBPLOT(2,2,2),STEP(sys_opt,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from LQR desinged')
          SUBPLOT(2,2,3),pzmap(sys_pole,T);
          SUBPLOT(2,2,4),pzmap(sys_opt,T);
figure(4);SUBPLOT(2,2,1),STEP(sys_pole*Kc_pole,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from pole placement desinge
after design Kc')
SUBPLOT(2,2,2),STEP(sys_opt*Kc_opt,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from LQR desinged after design Kc')
SUBPLOT(2,2,3),pzmap(sys_pole,T);
 SUBPLOT(2,2,4),pzmap(sys_opt,T);
```

MATLAB Program 2: outputfeedback_lqg.m	Description : Control system design using LQG method

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%     output feedback Design using                         %%
%% Pole Placement Method and LQG Method                     %%
%% File Name:   outputfeedback_lqg.m                        %%
%% Written By:  Mr.Somchai  Chuebunmee                      %%
%% Date:        On May 8, 2005                              %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
%Designed state observer system
%%State Space Plant%%
A=[0 1 0 0;0 -4.22 0 -13.81;0 0 0 1;0 -13.81 -559.78 -45.21];
B=[0 7.85 0 25.71]';
C=[1 0 -0.38 0];
D=[0];
%%assume Matrix For Output Plot%%
BB=zeros(size(1:8))';
CC=eye(8);
DD=0;
%%Designed System By Pole Placement Method%%
%Designed State Feedback Gain By Pole Placement
fprintf('Rank of Controllability Matrix is %d\n',rank(ctrb(A,B)));     %Check Rank of Controllability Matrix
pole_st1=-4.86+3.14i;                                                   %Desire Pole1 for State Feedback
pole_st2=-4.86-3.14i;                                                   %Desire Pole2 for State Feedback
pole_st3=-10+10i;                                                       %Desire Pole3 for State Feedback
pole_st4=-10-10i;                                                       %Desire Pole4 for State Feedback
pole_st=[pole_st1 pole_st2 pole_st3 pole_st4];
K_pole = acker(A,B,pole_st);                                            %available Gain K
%Designed State Observer Gain By Pole Placement
fprintf('Rank of Observability Matrix is %d\n',rank(obsv(A,C)));       %Check Rank of Observability Matrix
pole_ob1=-20;                                                           %Desire Pole1 for State Observer
pole_ob2=-20;                                                           %Desire Pole2 for State Observer
pole_ob3=-22;                                                           %Desire Pole3 for State Observer
pole_ob4=-22;                                                           %Desire Pole4 for State Observer
pole_ob=[pole_ob1 pole_ob2 pole_ob3 pole_ob4];
```

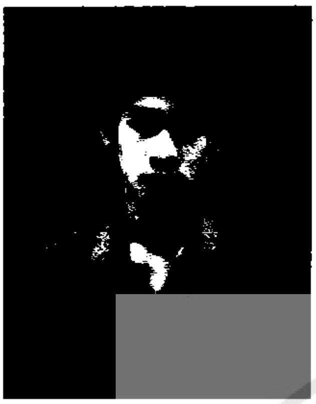
```
Ke_pole = [acker(A',C',pole_ob)]';                                %available Gain Ke
%%Designed System By Optimization%%
q1=input('Choose Weighting Function q1 =');                       %Weighting q1%
q2=input('Choose Weighting Function q2 =');                       %Weighting q2%
q3=input('Choose Weighting Function q3 =');                       %Weighting q3%
q4=input('Choose Weighting Function q4 =');                       %Weighting q4%
Q=[q1 0 0 0;0 q2 0 0;0 0 q3 0;0 0 0 q4];                          %Matrix Q
R =input('Choose Weighting Function for R = ');                   %Weighting R
w=input('Choose magnitude of w =');                               %process noise
W=[w^2];                                                          %covariance of process noise
v=input('Choose magnitude of v =');                               %measurement noise
V=[v^2];                                                          %covariance of measurement noise
G=[1;1;1;1];                                                      %process noise directly on state
[K_opt,P,E] = LQR(A,B,Q,R);                                       %Optimal Regulator
[Ke_opt,Pf,Ee]= LQE(A,G,C,W,V);                                   %Optimal estimator
T=0:0.01:10;                                                      %Time
%% define xdot-edot in state space
A_pole=[A-B*K_pole B*K_pole;zeros(4) A-Ke_pole*C];                %Matrix A_xdot-edot(Pole Placement)
A_opt=[A-B*K_opt B*K_opt;zeros(4) A-Ke_opt*C];                    %Matrix A_xdot-edot(LQG)
B_sys=[B;0;0;0;0];                                                %Matrix B_xdot-edot
C_sys=[C 0 0 0 0];                                                %Matrix C_xdot-edot
D_sys=0;                                                          %Matrix D_xdot-edot
%% xdot-xhatdot in state space
AA_pole=[A -B*K_pole;Ke_pole*C A-B*K_pole-Ke_pole*C];             %Matrix A_xdot-xhatdot(Pole Placement)
AA_opt=[A -B*K_opt;Ke_opt*C A-B*K_opt-Ke_opt*C];                  %Matrix A_xdot-xhatdot(LQG)
BB_sys=[B;B];                                                     %Matrix B_xdot-xhatdot
CC_sys=[C C];                                                     %Matrix C_xdot-xhatdot
DD_sys=0;                                                         %Matrix D_xdot-xhatdot
%state,transfer function,Gain Ke,Control signal from Pole Placement designed
sys_pole=ss(AA_pole,BB_sys,CC_sys,DD_sys);                        %state space of Pole Placement(for state trajectory
X0=[1 0 0 0 1 0 0 0]';                                            %initial condition of State X(0)&Xhat(0)
T0=0:0.01:10;                                                     %Time
[Y,T,X] = INITIAL(sys_pole,X0,T0);                                %initial command for stability check
X1_pole=X(:,1);                                                   %X1
X2_pole=X(:,2);                                                   %X2
X3_pole=X(:,3);                                                   %X3
```

```
X4_pole=X(:,4);                                                    %X4
X1hat_pole=X(:,5);                                                 %X1hat
X2hat_pole=X(:,6);                                                 %X2hat
X3hat_pole=X(:,7);                                                 %X3hat
X4hat_pole=X(:,8);                                                 %X4hat
sys_pole1=ss(A_pole,B_sys,C_sys,D_sys);                            %state space of Pole Placement(for transfer fn.
[NUM,DEN] = SS2TF(A_pole,B_sys,C_sys,D_sys);
s=tf('s');tf_pole=([s^8 s^7 s^6 s^5 s^4 s^3 s^2 s 1]*NUM')/([s^8 s^7 s^6 s^5 s^4 s^3 s^2 s 1]*DEN');   %Transfer function
Kp_pole=NUM(9)/DEN(9);                                             %Kp=lim(tf) ;take s->0
Kc_pole=1/Kp_pole;                                                 %Kc
fprintf('Gain Kc(Pole Placement) is %d\n',Kc_pole);                %Gain Kc for pole placement designed
U_pole=abs([K_pole]*[X1hat_pole X2hat_pole X3hat_pole X4hat_pole]');   %U from Pole placement Designed
%state&transfer function,Gain Kc from LQR designed
sys_opt=ss(AA_opt,BB_sys,CC_sys,DD_sys);                           %state space of LQG(for state trajectory)
X0=[1 0 0 0 1 0 0 0]';                                             %initial condition of State X(0)&Xhat(0)
T0=0:0.01:10;                                                      %Time
[Y2,T2,X2] = INITIAL(sys_opt,X0,T0);                               %initial command for stability check
X1_opt=X2(:,1);                                                    %X1
X2_opt=X2(:,2);                                                    %X2
X3_opt=X2(:,3);                                                    %X3
X4_opt=X2(:,4);                                                    %X4
X1hat_opt=X2(:,5);                                                 %X1hat
X2hat_opt=X2(:,6);                                                 %X2hat
X3hat_opt=X2(:,7);                                                 %X3hat
X4hat_opt=X2(:,8);                                                 %X4hat
sys_opt1=ss(A_opt,B_sys,C_sys,D_sys);                              %state space of LQG(for transfer fn.)
[NUM2,DEN2] = SS2TF(A_opt,B_sys,C_sys,D_sys);
s=tf('s');tf_opt=([s^8 s^7 s^6 s^5 s^4 s^3 s^2 s 1]*NUM2')/([s^8 s^7 s^6 s^5 s^4 s^3 s^2 s 1]*DEN2');    %Transfer function
Kp_opt=NUM2(9)/DEN2(9);                                            %Kp=lim(tf) ;take s->0
Kc_opt=1/Kp_opt;                                                   %Kc
fprintf('Gain Kc(LQG) is %d\n',Kc_opt);                            %Gain Kc for Optimization designed
%noise part
BB_lqg=[B G [0;0;0;0];[0;0;0;0] G -Ke_opt];                        %Matrix B_xdot-edot(for add r,v,w)
input1=1+zeros(size(T));                                           %input r=step function
input2=w*randn(length(T),1);                                       %Process Noise
input3=v*randn(length(T),1);                                       %Measurement Noise
```

```
sys_input=[input1 input2 input3]';                                   %3 input
sys_opt2=ss(A_opt,BB_lqg,C_sys,D_sys);                               %state space of LQG(for add r,v,w)
U_opt=abs([K_opt]*[X1hat_opt X2hat_opt X3hat_opt X4hat_opt]');      %U from LQG Designed
%error
error1_opt=X1_opt-X1hat_opt;                                         %error between x1 and x1hat form LQG
error2_opt=X2_opt-X2hat_opt;                                         %error between x2 and x2hat form LQG
error3_opt=X3_opt-X3hat_opt;                                         %error between x3 and x3hat form LQG
error4_opt=X4_opt-X4hat_opt;                                         %error between x4 and x4hat form LQG
error1_pole=X1_pole-X1hat_pole;                                      %error between x1 and x1hat form Pole placement
error2_pole=X2_pole-X2hat_pole;                                      %error between x2 and x2hat form Pole placement
error3_pole=X3_pole-X3hat_pole;                                      %error between x3 and x3hat form Pole placement
error4_pole=X4_pole-X4hat_pole;                                      %error between x4 and x4hat form Pole placement
%Performance index
fprintf('Performance index(V) is %f\n',trace(P*Ke_opt*V*Ke_opt')+trace(Pf*Q'))
%Control signall
fprintf('Control signal afford(Pole placement)is %f\d',sum(U_pole*0.01,2))
fprintf('   and     Control signal afford(LQG)is %f\n',sum(U_opt*0.01,2))


figure(1);
SUBPLOT(2,2,1),plot(T,X1_pole,':',T2,X1_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x1 from Pole placement designed','state x1 from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,2),plot(T,X2_pole,':',T2,X2_opt);XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x2 from Pole placement designed','state x2 from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,3),plot(T,X3_pole,':',T2,X3_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x3 from Pole placement designed','state x3 from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,4),plot(T,X4_pole,':',T2,X4_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x4 from Pole placement designed','state x4 from LQG designed',0);Grid
figure(2);
SUBPLOT(2,2,1),plot(T,X1hat_pole,':',T2,X1hat_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x1hat from Pole placement designed','state x1hat from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,2),plot(T,X2hat_pole,':',T2,X2hat_opt);XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x2hat from Pole placement designed','state x2hat from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,3),plot(T,X3hat_pole,':',T2,X3hat_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x3hat from Pole placement designed','state x3hat from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,4),plot(T,X4hat_pole,':',T2,X4hat_opt),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('state x4hat from Pole placement designed','state x4hat from LQG designed',0);Grid
```

```
figure(3);
SUBPLOT(2,2,1),plot(T,error1_pole,':',T2,error1_opt);XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('error1 from Pole placement designed','error1 from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,2),plot(T,error2_pole,':',T2,error2_opt);XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('error2 from Pole placement designed','error2 from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,3),plot(T,error3_pole,':',T2,error3_opt);XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('error3 from Pole placement designed','error3 from LQG designed',0);Grid
SUBPLOT(2,2,4),plot(T,error4_pole,':',T2,error4_opt);XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude');
legend('error4 from Pole placement designed','error4 from LQG designed',0);Grid

figure(4);SUBPLOT(2,1,1),plot(T,U_pole),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control
Signal U(t) from  Pole Placement designed')
      SUBPLOT(2,1,2),plot(T2,U_opt),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control Signal U
(t) from  LQR designed')
figure(4);SUBPLOT(2,1,1),AREA(T,U_pole),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control
Signal U(t) from  Pole Placement designed')
      SUBPLOT(2,1,2),AREA(T2,U_opt),grid,axis([0 7 0 2]),XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Control Signa
U(t) from  LQR designed')

figure(5);SUBPLOT(2,2,1),STEP(sys_pole1,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from pole placement desinged')
      SUBPLOT(2,2,2),lsim(sys_opt2,sys_input,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from LQG desinged')
      SUBPLOT(2,2,3),pzmap(sys_pole,T);
      SUBPLOT(2,2,4),pzmap(sys_opt,T);

figure(6);SUBPLOT(2,2,1),STEP(sys_pole1*Kc_pole,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from pole placement
desinged after design Kc')
      SUBPLOT(2,2,2),STEP(sys_opt1*Kc_opt,T);Grid;title('Step Response and pole-zero from LQR desinged after design
Kc')
      SUBPLOT(2,2,3),pzmap(sys_pole,T);
      SUBPLOT(2,2,4),pzmap(sys_opt,T);

figure(7);SUBPLOT(3,1,1),lsim(sys_opt2*Kc_opt,sys_input,T);Grid;title('Step Response from LQG desinged')
      ;SUBPLOT(3,1,2),plot(T,input2);Grid,XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Process noise ')
      ;SUBPLOT(3,1,3),plot(T,input3);Grid,XLABEL('Time(s)');YLABEL('amplitude'),title('Measurement noise ')
```

ประวัติผู้ทำโครงงาน



ชื่อ: นายสมชาย เชื้อบุญมี

รหัส: 44362408

ภูมิลำเนา: 126/1 ถ.คีรีรัฐ ต.กุดป่อง อ.เมือง จ.เลย

ประวัติการศึกษา:

- สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาจากโรงเรียนชุมชนศรีสะอาด จ.เลย
- สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนเลยพิทยาคม จ.เลย
- ปัจจุบันกำลังศึกษาระดับปริญญาตรีชั้นปีที่4 สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จ.พิษณุโลก

E-mail: som_ee@hotmail.com