



การออกแบบระบบควบคุมเวลาวิฤตโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR)

Discrete-time Control System Design using Optimization Method(LQR)

นายธีระพล ภาวดี รหัส 44362267
นายยุทธนา ปัญญาแก้ว รหัส 44362358

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์
วันที่รับ..... 25 / พ.ค. 2553 /
เลขทะเบียน..... 15000713
เลขเรียกหนังสือ..... ๒๖.....
มหาวิทยาลัยนเรศวร
๒๕๕๓

๒๕๔๗
C. ๒

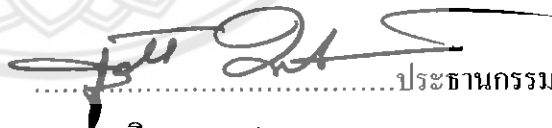
ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
ปีการศึกษา 2547




ใบรับรองโครงการวิศวกรรม

หัวข้อโครงการ	การออกแบบระบบควบคุมเวลาวิฤตโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (LQR)		
ผู้ดำเนินโครงการ	นายธีระพล	ภาวดี	รหัส 44362267
	นายชุตานา	ปัญญาแก้ว	รหัส 44362358
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ธนิต มาลากร		
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า		
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์		
ปีการศึกษา	2547		

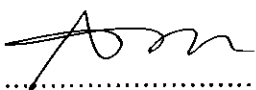
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนครพนม อนุมัติให้โครงการฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการ
ศึกษาตามหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะกรรมการสอบโครงการวิศวกรรม


.....ประธานกรรมการ

(ดร.ธนิต มาลากร)


.....กรรมการ

(ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชา)


.....กรรมการ

(ดร.สมยศ เกียรติวิชวิไล)

หัวข้อโครงการ	การออกแบบระบบควบคุมเวลาวิฤตโดยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR)		
ผู้ดำเนินโครงการ	นายธีระพล	ภาวดี	รหัส 44362267
	นายยุทธนา	ปัญญาแก้ว	รหัส 44362358
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ชนิด มาลากร		
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า		
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์		
ปีการศึกษา	2547		

บทคัดย่อ

เร็วๆ นี้ ได้มีการนำเอาการควบคุมด้วยระบบคิิจิตอล(digital control) มาใช้ในการควบคุมกระบวนการเพิ่มมากขึ้น โดยจะสังเกตเห็นได้จากระบบควบคุมภายในโรงงานอุตสาหกรรมต่างๆ มักจะมีการใช้คอมพิวเตอร์เป็นส่วนสำคัญในการช่วยควบคุมการปฏิบัติงาน ซึ่งการควบคุมโดยคอมพิวเตอร์นั้นจะต้องอาศัยการชักข้อมูลตัวอย่างจากสัญญาณต่อเนื่อง และผลจากการชักข้อมูลตัวอย่างนี้ จะทำให้ได้สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องเพื่อจะสามารถนำไปพิจารณาการควบคุมในระบบเวลาวิฤตได้

ฉะนั้น ในโครงการนี้จึงจะทำการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะในระบบเวลาวิฤตด้วยวิธีการวางขั้ว(pole placement) และวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR) ที่จะพิจารณากรณีการกำจัดสัญญาณรบกวน(disturbance rejection) และกรณีปัญหาการตาม(tracking problem) ร่วมด้วย

Project Title Discrete-time Control System Designed using Optimization Technique (LQR)

Name Mr. Teerapon Pawadee ID. 44362267
Mr. Yutthana Panyagaew ID. 44362358

Project Advisor Dr. Tanit Malakom

Major Electrical Engineering

Department Electrical and Computer Engineering

Academic Year 2004

ABSTRACT

Recently, digital control has been used widespread in the process control. Most industrial plants adopt digital computer as an integral part of their operation. In the computer control application, the continuous signal has to be sampled to get the discrete data in which can be used as an input to the digital controller.

Thus, this project presents the state feedback controller design using the pole placement method and Linear Quadratic Regulator (LQR). Besides stability and performance issues, we here formulate and solve for the solution of the so-called disturbance rejection problem and the tracking problem as well.

กิตติกรรมประกาศ

โครงการนิพนธ์กรรมไฟฟ้า เรื่องการออกแบบระบบควบคุมป้อนกลับสถานะโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR)นี้ สำเร็จลงได้ เนื่องด้วยความอนุเคราะห์จาก อาจารย์ธนิต มาตากร ที่ปรึกษาโครงการที่คอยให้คำปรึกษาและแนะนำสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อ โครงการนี้เรื่อยมา ขอขอบคุณอาจารย์ ดร.สมยศ เกียรติวนิชวิไล และ อาจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชา ที่กรุณามาเป็นกรรมการในการสอบโครงการ พร้อมด้วยคณะอาจารย์ทุกท่านที่ได้ถ่ายทอดความรู้ที่เป็นประโยชน์ให้แก่บัณฑิตทุกคน จึงขอแสดงความขอบคุณเป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้ด้วย

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจให้ผู้จัดทำ โครงการนี้อยู่เสมอมา ส่งผลทำให้โครงการนี้เสร็จสมบูรณ์ไปได้ด้วยดี



นายธีระพล ภาวดี

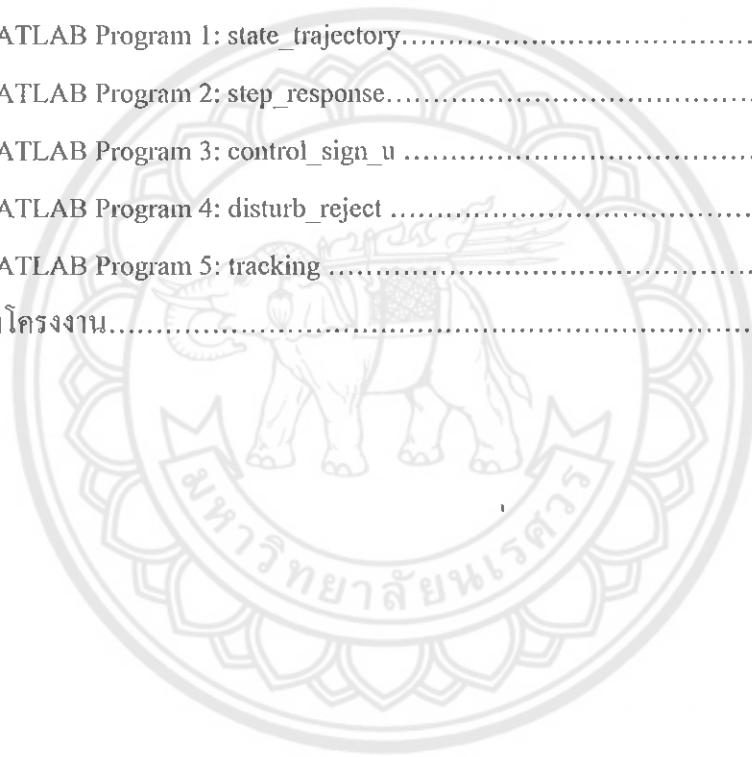
นายยุทธนา ปัญญาแก้ว

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง-จ
สารบัญรูป.....	ฉ-ช
สารบัญตาราง.....	ฃ
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 หลักการและเหตุผล.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	2
1.3 ขอบข่ายงาน.....	2
1.4 ตารางกิจกรรมการดำเนินงาน.....	3
1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ.....	4
1.6 งบประมาณ.....	4
บทที่ 2 หลักการและทฤษฎีเบื้องต้น	
2.1 พื้นฐานการวิเคราะห์ฟังก์ชันและทฤษฎีตัวดำเนินการ(Introductory functional analysis and operator theory).....	5
2.2 ทฤษฎีพื้นฐานของระบบควบคุม(Basic control system theory).....	14
2.3 การออกแบบระบบควบคุมแบบการวางขั้ว(Pole placement).....	20
2.4 วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(Linear Quadratic Regulator: LQR).....	24
บทที่ 3 ตัวอย่างระบบที่ศึกษา	
3.1 ระบบที่ศึกษา.....	33
3.2 ตัวอย่างการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้ว(Pole placement method).....	35
3.3 การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(Optimization: LQR).....	45

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 บทสรุป	
4.1 สรุปและวิเคราะห์ผล.....	64
4.2 ข้อเสนอแนะ.....	65
เอกสารอ้างอิง.....	66
ภาคผนวก(โปรแกรมคอมพิวเตอร์).....	67
MATLAB Program 1: state_trajectory.....	67
MATLAB Program 2: step_response.....	70
MATLAB Program 3: control_sign_u.....	72
MATLAB Program 4: disturb_reject.....	75
MATLAB Program 5: tracking.....	78
ประวัติผู้ทำโครงการ.....	80



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 การส่งระหว่างระนาบ S และระนาบ Z	14
2.2 ระบบควบคุมแบบวงเปิด(open-loop control system).....	17
2.3 ระบบควบคุมแบบวงปิด(closed-loop control system).....	18
2.4 แผนฟังก์ชันแสดงระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(state feedback).....	20
2.5 แผนฟังก์ชันแสดงระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(state feedback).....	25
2.6 แผนฟังก์ชันของระบบที่มีสัญญาณรบกวน.....	31
2.7 แผนฟังก์ชันของระบบปัญหาการตามสัญญาณกรณีไม่มีสัญญาณรบกวน.....	32
3.1 รูประบบทางกายภาพของแขนกลหุ่นยนต์(flexible robot arm).....	33
3.2 ขั้นตอนการออกแบบระบบควบคุม.....	35
3.3 ผลตอบสนองของระบบแขนกลหุ่นยนต์.....	37
3.4 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบแขนกลหุ่นยนต์ที่ผู้ออกแบบต้องการ.....	38
3.5 ผลตอบสนองหนึ่งหน่วยของตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ.....	41
3.6 แผนภาพพล็อตของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเมื่อออกแบบอัตราขยาย K_c เข้าไปในระบบ.....	42
3.7 ผลตอบสนองของระบบหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและ ออกแบบอัตราขยาย K_c	44
3.8 แผนฟังก์ชันแสดงตำแหน่งในการตรวจสอบพฤติกรรมของสถานะ(state trajectory).....	46
3.9 พฤติกรรมของสถานะจริง x กรณีปรับ $Q[q_{11} = 1, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1], R = [1]$	47
3.10 พฤติกรรมของสถานะจริง x กรณีปรับ $Q[q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1], R = [1]$	48
3.11 พฤติกรรมของสถานะจริง x กรณีปรับ $Q[q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5], R = [1]$	49
3.12 แผนฟังก์ชันแสดงตำแหน่งในการวัดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม.....	50

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.13 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อปรับ	
$R = [1]$ และ $Q = [q_{11} = 1, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$	51
3.14 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อปรับ	
$R = [1]$ และ $Q [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5]$	52
3.15 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อปรับ	
$R = [100]$ และ $Q [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5]$	53
3.16 แสดงสถานะของระบบควบคุมเมื่อปรับ	
$R = [100]$ และ $Q [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5]$	54
3.17 แผนผังกล่องผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ.....	55
3.18 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย(step response) ระหว่างการออกแบบ	
โดยใช้วิธีการวางขั้วและวิธีการเหมาะสมที่สุด.....	57
3.19 ตำแหน่งขั้ว-ศูนย์(pole-zero) ระหว่างการออกแบบ โดยใช้วิธีการวางขั้ว	
และวิธีการเหมาะสมที่สุด.....	58
3.20 ผลตอบสนองของการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ	
โดยการกำจัดสัญญาณรบกวน(disturbance rejection).....	61
3.21 ผลตอบสนองของการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ	
ในปัญหาการตามสัญญาณ(tracking problem).....	63

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
I ตารางการดำเนินโครงการ.....	3



บทที่ 1

บทนำ

1.1 หลักการและเหตุผล

ระบบควบคุม(control system) นับว่ามีส่วนสำคัญในการช่วยพัฒนาอุปกรณ์และเทคโนโลยีต่างๆ ในปัจจุบันเป็นอย่างมาก ซึ่งพื้นฐานของระบบควบคุมเองก็ได้รับการพัฒนามาอย่างต่อเนื่องเช่นกัน ทั้งนี้ก็เพื่อต้องการให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะรวมทั้งผลตอบสนองที่ดีมากยิ่งขึ้น

โดยพบว่าเริ่มมีการนำระบบควบคุมแบบอัตโนมัติมาใช้เป็นครั้งแรกเมื่อประมาณสองพันปีมาแล้ว อุปกรณ์ชิ้นแรกที่มีการค้นพบและบันทึกไว้เป็นหลักฐานได้แก่ นาฬิกาน้ำโบราณ(ancient water clock) ของชาวเคตสซิบิออส(Ktesibios) ในเมืองอเล็กซานเดรีย ประเทศอียิปต์ ซึ่งอาศัยหลักการของการรักษาระดับน้ำในถังเป็นตัวบอกเวลา ส่วนในแถบยุโรปนั้น ได้มีการประดิษฐ์เครื่องควบคุมอุณหภูมิที่ใช้กับเตาเผา(temperature regulator of a furnace) ขึ้นเป็นครั้งแรกในช่วง ค.ศ. 1572-1633 โดยนายคอร์เนลิส เดรเบล(Cornelis Drebbel) จากนั้นในปี ค.ศ. 1647-1712 ได้มีการพัฒนาเครื่องควบคุมความดันสำหรับหม้อไอน้ำ(pressure regulator for steam boiler) โดยนายเคนนิส ป่าแปง และระบบควบคุมแบบป้อนกลับก็ได้รับการพัฒนาเรื่อยมา จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1769 จึงได้มีการนำเอาระบบควบคุมอัตโนมัติแบบป้อนกลับมาใช้ในกระบวนการอุตสาหกรรม โดยนายเจมส์วัตต์(James watt) ซึ่งได้ประดิษฐ์เครื่องควบคุมความเร็วแบบฟลายบอล(flyball governor) จนเป็นที่แพร่หลาย ต่อมาในปี ค.ศ. 1868 นายเจซีแมกซ์เวลล์(J.C. Maxwell ผู้ค้นพบสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าแมกซ์เวลล์) ได้อธิบายคุณสมบัติความไม่เสถียรภาพของเครื่องควบคุมความเร็วแบบฟลายบอล ของเจมส์ วัตต์ ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์(สมการอนุพันธ์) ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของสมการหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์(mathematical model) ที่ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์และอธิบายถึงปรากฏการณ์ต่างๆ ในระบบควบคุมและจุดนี้เองที่เป็นจุดเริ่มต้นที่สำคัญของทฤษฎีระบบควบคุมในทางคณิตศาสตร์

ทฤษฎีระบบควบคุมได้รับการพัฒนาเรื่อยมาและก่อให้เกิดความก้าวหน้าในการพัฒนาระบบควบคุมแบบเชิงพื้นที่สุ่ม(stochastic control) ระบบควบคุมแบบคงทน(robust control) ระบบควบคุมแบบปรับตัวได้(adaptive control) ระบบควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด(optimal control) ตามลำดับ ซึ่งการนำเอาวิธีการต่างๆ เหล่านี้ของระบบควบคุมมาประยุกต์ใช้งานมีส่วนช่วยให้เทคโนโลยีต่างๆ มีความก้าวหน้าอย่างรวดเร็ว โดยเฉพาะภายหลังมีการพัฒนานำเอาระบบคอมพิวเตอร์เข้ามาใช้ในระบบควบคุมที่เรียกว่า “computer control system” หรือที่รู้จักกันดีในระบบควบคุมแบบดิจิทัล “digital control system” ซึ่งเป็นที่นิยมกันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน

อาทิเช่น การติดต่อสื่อสารผ่านดาวเทียม เครื่องบินความเร็วสูง การเดินทางในอวกาศ หรือแม้กระทั่งในกระบวนการอุตสาหกรรม เป็นต้น

ดังนั้นในโครงการนี้จึงจะนำเสนอการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการวางขั้วและวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(optimal) แบบหนึ่งที่อยู่กันโดยวิธี "Linear Quadratic Regulator; LQR" ซึ่งผู้จัดทำโครงการจะทำการออกแบบและพิจารณาระบบควบคุมในระบบเวลาวิฤต(discrete-time control system) ที่สามารถอาจจะนำไปประยุกต์ใช้ในระบบการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ได้

1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อนำความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ในระบบควบคุม
2. เพื่อศึกษาการออกแบบระบบควบคุม โดยใช้วิธีการวางขั้ว(pole placement)
3. เพื่อศึกษาการออกแบบระบบควบคุม โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR)
4. เพื่อแสดงผลตอบสนองของระบบควบคุมที่ได้จากการออกแบบ โดยใช้วิธีการวางขั้ว(pole placement) และวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR)

1.3 ขอบข่ายงาน

1. ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์(mathematical model) ของระบบ
2. ศึกษาการควบคุมป้อนกลับสถานะ(state feedback) แบบเวลาวิฤต(discrete-time)
3. ศึกษาวิธีการวางขั้ว(pole placement) และวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR)
4. จำลองการออกแบบระบบควบคุม โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR)

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้ได้ทราบแนวคิดและหลักการทำงานของระบบควบคุมมากขึ้น
2. นำวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR) ไปใช้ออกแบบระบบควบคุมได้ในระบบตัวอย่าง
3. ได้ความรู้และประสบการณ์ในการออกแบบระบบควบคุมที่อาจจะสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ต่อไปในการทำงานจริง

1.6 งบประมาณ

1. ค่าถ่ายเอกสาร	500	บาท
2. ค่าพิมพ์เอกสาร	1,000	บาท
3. แผ่นคิสเก็ต	100	บาท
4. เอกสารประกอบโครงการ	400	บาท
รวม	2,000	บาท



บทที่ 2

หลักการและทฤษฎีเบื้องต้น

ในการศึกษาและการออกแบบระบบควบคุม จำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐานหลายส่วนมาประกอบในการใช้สังเคราะห์และวิเคราะห์ระบบ ซึ่งในส่วนของโครงการนี้ การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(state feedback) โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(Linear Quadratic Regulator: LQR) ที่จะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกฎและทฤษฎีต่างๆ ดังนี้

2.1 พื้นฐานการวิเคราะห์ฟังก์ชันและทฤษฎีตัวดำเนินการ(Introductory functional analysis and operator theory)

เนื่องจากการวิเคราะห์ระบบควบคุมส่วนใหญ่มักเขียนแทนพารามิเตอร์หรือตัวแปรต่างๆ ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อสะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในบางหัวข้อ ดังนี้

2.1.1 นอร์ม (Norm)

ถ้าเราต้องการตรวจสอบผลตอบสนองของระบบควบคุมนั้นอาจสามารถดูได้จากขนาดของสัญญาณ ตัวอย่างเช่น สามารถดูจากค่าความผิดพลาดของสัญญาณ(error signal) หรือค่าสัญญาณขาออก(output signal) ซึ่งขนาดของสัญญาณที่กล่าวถึงนี้ก็สามารถพิจารณาจากค่านอร์ม(norm) ซึ่งนิยามดังนี้

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ใด ๆ นอร์มบน X คือค่าฟังก์ชันจริงบน X ซึ่งใช้สัญลักษณ์ว่า $\|x\|$ โดยที่ x เป็นสมาชิกใด ๆ ในปริภูมิเวกเตอร์ X โดยที่นอร์มจะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

โดย x และ y เป็นสมาชิกใด ๆ ใน X และ α เป็นค่าสเกลาร์ใด ๆ
ตัวอย่างของนอร์มบนปริภูมิเวกเตอร์ชนิดต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 1 นอร์มของเวกเตอร์ x ในปริภูมิของยูคลิด (Euclidean space) \mathbb{R}^n สามารถนิยามได้ดังนี้

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ X แทนปริภูมิเวกเตอร์ของฟังก์ชันต่อเนื่องเชิงค่าจริงที่นิยามในช่วงปิดจาก a ไป b เราสามารถนิยามนอร์มดังนี้

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

เมื่อพิจารณาระบบที่เป็นเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้า และสัญญาณออกของระบบสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$y = G * u, \text{ โดยที่ } * \text{ คือ สัมพัทธ์การ (convolution integral)}$$

ซึ่งถูกนิยามโดย

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

ดังนั้นขนาดหรือนอร์มของสัญญาณขาออก $y(t)$ สามารถนิยามได้เป็น

$$\|y\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} |y(t)|^2 dt}$$

2.1.2 พีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra)

เมทริกซ์(Matrix)

นิยาม เมทริกซ์ A ใดๆ ขนาด $m \times n$ คือ เมทริกซ์ที่มีขนาด m แถวและ n หลัก ซึ่งจะเขียนรูปแบบเมทริกซ์ค่าจริง

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

ที่มี m แถวและ n หลัก คือตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ส่งปริภูมิเวกเตอร์ \mathbb{R}^n ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ \mathbb{R}^m ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$) ดังสมการ $y = Ax$ โดยที่ $x = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ และ $y = [y_1 \dots y_m]^T \in \mathbb{R}^m$ ในกรณีนี้เราสามารถเขียนเมทริกซ์ A ออกมาเป็น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} เรียกว่าสมาชิก(element) ของ A

ถ้าเมทริกซ์ A มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน(นั่นคือ $m = n$) เราจะเรียก A ว่า เมทริกซ์จัตุรัส

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrices)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A เรียกว่าเป็นเมทริกซ์สมมาตร ถ้า $A^T = A$ หรือ $a_{ji} = a_{ij}$ โดยที่ A^T คือ เมทริกซ์สลับสับเปลี่ยนของเมทริกซ์ A (transpose)

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมทริกซ์สมมาตร}$$

เมทริกซ์เฮอร์มิเทียน (Hermitian)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่า เมทริกซ์เฮอร์มิเทียน ถ้า $A = A^*$ หรือ $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ โดยที่

$$A^* = (\bar{A})^T$$

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} -1+j & -3+j \\ -1+j & -3-j3 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} -1-j & -1-j \\ -3-j & -3+j3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive-definite matrix)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัสค่าจริง A ขนาด $n \times n$ เรียกได้ว่าเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite matrix) ถ้า $x^T A x > 0$ ทุกค่า $x \neq 0$ ใน \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} x^T A x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

เมทริกซ์กึ่งบวก (Positive-semi definite matrix)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัสค่าจริง A ขนาด $n \times n$ เรียกได้ว่าเป็นเมทริกซ์กึ่งบวก (positive-semi definite matrix) ถ้า $x^T A x \geq 0$ ทุกค่า $x \neq 0$ ใน \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} x^T A x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

จะได้เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์กึ่งบวก (positive-semidefinite matrix)

การหาค่าเฉพาะ (Eigenvalues; λ)

เมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ จะหาค่า λ หาได้จากสมการคุณลักษณะ

$$|\lambda I - A| = 0$$

ซึ่งค่า λ ที่ได้จะเป็นค่าเฉพาะ (eigenvalues) ของเมทริกซ์ A

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -9 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\therefore |\lambda I - A| = \lambda^2 - 8\lambda + 15 \quad \text{จะได้ค่า } \lambda = 3, 5$$

2.1.3 การแปลงแซด (The z Transform)

ในวิธีการทางคณิตศาสตร์มีการแปลงอยู่หลายรูปแบบที่ช่วยในการวิเคราะห์ระบบ เช่น การแปลงลาปลาซ การแปลงฟูเรียร์ และการแปลงแซด เป็นต้น การแปลงเป็นวิธีการแก้ปัญหาของระบบ โดยอ้อมที่สะดวกกว่าการแก้ปัญหาโดยตรง ซึ่งในการศึกษาระบบควบคุมเวลาวิยุตนี้จำเป็นต้องอาศัยการแปลงแซดเพื่อช่วยในการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมด้วยเช่นกัน

การแปลงแซดเป็นวิธีการแปลงฟังก์ชันต่อเนื่องที่อยู่ใน โดเมนเวลา $x(t)$ ไปเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องใน โดเมนของ z ในรูป $X(z)$ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathbb{Z}[x(t)] = \mathbb{Z}[x(kT)] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k} \end{aligned}$$

โดยที่ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา

k เป็นจำนวนเต็ม ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

T เป็นคาบของช่วงเวลาการซัดตัวอย่าง (sampling)

จากนิยามจะสามารถสังเกตได้ว่าเป็นการแปลงแซดทั้งด้านบวกและลบ(two side z transform) แต่เนื่องจากโดยปกติ $x(t)$ ในช่วงเวลา $t < 0 (k < 0)$ จะไม่นำมาพิจารณาเพราะ การเริ่มการทำงานของระบบจะเริ่มที่เวลาศูนย์ ฉะนั้นจึงนิยาม นิยามการแปลงแซดในช่วง $t \geq 0 (k \geq 0)$ เรียกว่า “One side z transform” ดังนี้

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathbb{Z}[x(t)] = \mathbb{Z}[x(kT)] \\ &= \sum_0^{\infty} x(kT)z^{-k} \end{aligned}$$

จากสมการข้างต้นสามารถกระจายอนุกรมได้เป็น

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + \dots + x(kT)z^{-k} + \dots$$

ในทำนองเดียวกันเราก็สามารถแปลงฟังก์ชันที่อยู่ในโดเมนแซด $X(z)$ ให้ย้อนกลับไปอยู่ในรูปของฟังก์ชันในโดเมนเวลาได้ คือ

$$\mathbb{Z}^{-1}[X(z)] = x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{k-1} dz$$

โดยที่ c เป็นขอบเขตวงกลม จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดในระนาบ z ที่มีขั้วทุกตัว $X(z)z^{k-1}$ อยู่ข้างในขอบเขตนี้

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

หรือ

$$X(z) = \frac{b_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

โดยที่ z_i เป็นศูนย์ของ $X(z)$

p_i เป็นขั้วของ $X(z)$

ซึ่งในระบบควบคุมจะเขียน $X(z)$ ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน Polynomial z^{-1} (พิจารณา $|z| > 1$ อยู่ภายนอกวงกลมหนึ่งหน่วย) ได้เป็น

$$X(z) = \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

โดยที่ a, b , เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง

หาขั้วและศูนย์ของ $X(z)$

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z+0.5)}{(z+1)(z+2)}$$

\therefore ขั้วของ $X(z)$ คือ $z = -1, z = -2$

และศูนย์ของ $X(z)$ คือ $z = 0, z = -0.5$

2.1.4 ทฤษฎีการซีกตัวอย่าง(The sampling theorem)

การซีกตัวอย่างเป็นการกำหนดเลือกช่วงคาบเวลา (T) เพื่อให้สัญญาณที่ได้จากการซีกตัวอย่างนั้นมีลักษณะที่เหมือนกับลักษณะของสัญญาณเวลาต่อเนื่อง

ซึ่งถ้าหากเราเลือกช่วงคาบเวลาที่ไม่ดีพอ ก็จะทำให้ลักษณะสัญญาณที่ได้ออกมานั้นแตกต่างจากสัญญาณจริง เพราะฉะนั้นการเลือกคาบเวลาที่เหมาะสมจึงเป็นสิ่งที่สำคัญ โดยปกติแล้วจะเลือกคาบเวลา

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

โดยที่ $\omega_s \geq 2\omega_1$ และ ω_1 คือช่วงความถี่สูงสุดของสัญญาณเวลาต่อเนื่อง

ω_s คือช่วงความถี่การซีกตัวอย่าง

ถ้าหากเราทำการซีกตัวอย่างด้วย $\omega_s < 2\omega_1$ จะเกิดปัญหาคือเมื่อเราต้องการที่จะแปลงกลับไปเป็นสัญญาณเวลาต่อเนื่อง เมื่อแปลงแล้วจะทำให้ไม่ได้สัญญาณตรงกับสัญญาณจริงที่เราแปลงมา เนื่องจากสัญญาณเกิดการสูญเสีย

2.1.5 การทำให้เป็นดิสครีต(Discretization)

เราสามารถแปลงสมการสถานะของสัญญาณเวลาต่อเนื่องให้อยู่ในรูปสมการสถานะของสัญญาณเวลาวิฤตได้โดยการแทนตัวแปรของเวลา t ด้วยลำดับคาบของการซิกตัวอย่าง(sampling) นั่นคือ

$$t = kT, k = 0, 1, 2, \dots$$

จากสมการสถานะของสัญญาณเวลาต่อเนื่อง

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

เราสามารถหาค่าของเมทริกซ์ $G(T)$ และ $H(T)$ ได้จากสมการดังต่อไปนี้ สมมติ $u(t)$ เป็นสัญญาณที่มีค่าคงที่ในช่วงคาบเวลาของการซิกตัวอย่าง

$$u(t) = u(kT), kT \leq t < kT + T$$

$$\text{ให้ } x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2.1.1)$$

$$\text{และ } x(kT) = e^{AkT}x(0) + e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2.1.2)$$

นำ e^{AT} คูณสมการ 2.1.2 ได้

$$e^{AT}x(kT) = e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{kT} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2.1.3)$$

สมการที่ 2.1.1 - 2.1.3 จะได้ว่า

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = e^{A(k+1)T}x(0) - e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau - e^{A(k+1)T} \int_0^{kT} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

จาก $u(t) = u(kT)$, $kT \leq t < kT + T$

และถ้าพิจารณาในช่วงคาบเวลาของการซิกตัวอย่างสัญญาณที่ได้จะมีค่าคงที่

นั่นคือ $u(\tau) = u(kT) =$ ค่าคงที่

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x((k+1)T) &= e^{AT} x(kT) + e^{AT} \int_0^T e^{-At} Bu(kT) dt \\ &= e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\lambda} Bu(kT) d\lambda \\ &= e^{AT} x(kT) + \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) Bu(kT) \end{aligned}$$

โดยที่ $\lambda = T - t$

ฉะนั้นจะได้ $G(T) = e^{AT}$

$$H(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B$$

2.1.6 การส่ง(Mapping)

ในที่นี้คือการเปลี่ยนระนาบระหว่างระนาบ S และระนาบ Z (mapping between the S plane and the Z plane)

การออกแบบระบบควบคุมในระบบสัญญาณเวลาต่อเนื่องและระบบสัญญาณเวลาวิฤต ตำแหน่งของขั้วและศูนย์ในระนาบ S และระนาบ Z นั้นว่ามีความสำคัญต่อเสถียรภาพของระบบมาก ซึ่งทั้งสองระนาบยังมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$z = e^{Ts}, s = \sigma + j\omega$$

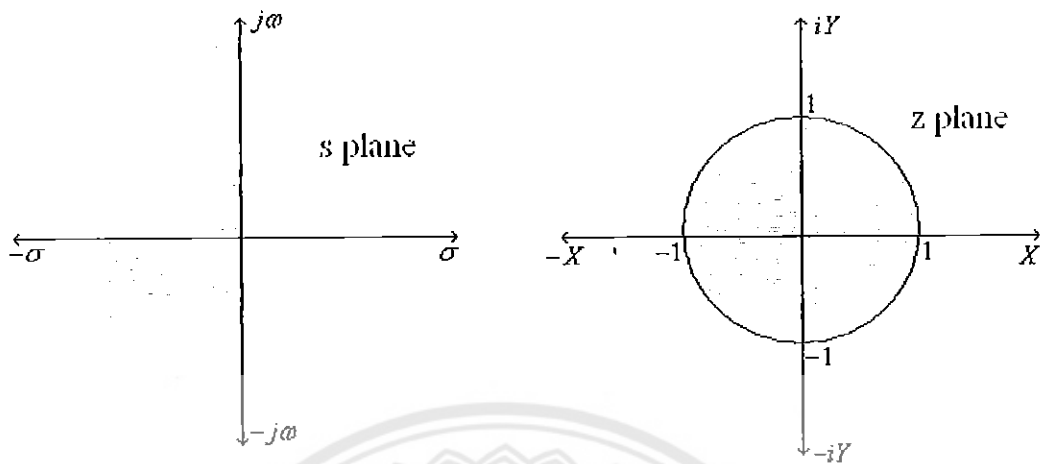
$$\text{จะได้ } z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2\pi k)}$$

จากสมการเราก็สามารถเปลี่ยนระนาบจากค่า S ใดๆ ไปอยู่ในระนาบ Z ได้

ถ้าค่า σ เป็นลบ, $|z| = e^{T\sigma} < 1$

แต่ถ้า $\sigma = 0$, $|z| = 1$

จะสังเกตได้ว่าการเปลี่ยนระนาบด้านซ้ายของ S ไปในระนาบของ Z จะอยู่ในวงกลม 1 หน่วย แสดงได้ดังรูป



รูปที่ 2.1 การส่งระหว่างระนาบ S และระนาบ Z

2.2 ทฤษฎีพื้นฐานของระบบควบคุม(Basic control system theory)

2.2.1 ฟังก์ชันถ่ายโอน(Transfer function)

ฟังก์ชันถ่ายโอนคือ อัตราส่วนของสมการด้านสัญญาณขาออกต่อสมการด้านสัญญาณขาเข้าที่ถูกแปลงไปอยู่ในระนาบแซด(Z plane)แล้ว เมื่อพิจารณาสมการของระบบควบคุมเวลาวิฤตของสัญญาณขาเข้า $u(k)$ และสัญญาณขาออกของระบบ $y(k)$ ดังนี้

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)$$

โดย a_i คือ สัมประสิทธิ์ของสัญญาณขาออก ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$)

b_j คือ สัมประสิทธิ์ของสัญญาณขาเข้า ($j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$)

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบสามารถหาได้โดยการแปลงแซดสมการทั้งสองข้างของสมการข้างต้น จะเขียนได้เป็น

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

โดยปกติกำลังของเศษ < กำลังของส่วน

2.2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์(Mathematical model)

ในการออกแบบระบบควบคุมจำเป็นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์(mathematical model) โดยทั่วไปเรานิยมแทนค่าตัวแปรที่สนใจด้วยตัวแปรสถานะ x แทนสัญญาณควบคุมขาเข้าด้วย u แทนสัญญาณขาออกด้วย y

ถ้าเรามีสัญญาณควบคุมขาเข้า r ตัว สัญญาณขาออก m ตัว ($y \in \mathcal{R}^m$) และมีจำนวนตัวแปรสถานะ n ตัว ($x \in \mathcal{R}^n$) เราสามารถเขียนสมการสถานะและสมการขาออก ในรูปทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned}x_1((k+1)T) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; kT) \\x_2((k+1)T) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; kT) \\&\vdots \\x_n((k+1)T) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; kT) \\y_1(kT) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; kT) \\y_2(kT) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; kT) \\&\vdots \\y_m(kT) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; kT)\end{aligned}$$

ถ้าเป็นระบบเชิงเส้นแปรตามเวลา จะเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}x((k+1)T) &= G(kT)x(kT) + H(kT)u(kT) \\y(kT) &= C(kT)x(kT) + D(kT)u(kT)\end{aligned}$$

ถ้าเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา จะเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}x((k+1)T) &= Gx(kT) + Hu(kT) \\y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT)\end{aligned}$$

2.2.3 การเขียนแทนปริภูมิสถานะในรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

วิธีในการแปลงรูปแบบของปริภูมิสถานะ(state space) มาเป็นของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ ซึ่งจะมีรูปแบบบัญญัติ(canonical form) หลายรูปแบบ โดยจะแสดงรูปแบบที่นิยม 2 รูปแบบ ซึ่งการนำไปใช้จะมีความแตกต่างกันโดยจะมีรูปแบบต่างๆ ดังนี้

จากฟังก์ชันถ่ายโอน

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

รูปแบบบัญญัติที่เข้าถึงได้(reachable canonical form)

สำหรับรูปแบบบัญญัติที่ควบคุมได้ จะใช้ในการอธิบายการวางตำแหน่งขั้ว(pole-placement) ที่เหมาะสมในการออกแบบระบบควบคุม ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \\ \vdots \\ x_{n-1}((k+1)T) \\ x_n((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_{n-1}(kT) \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + b_0 u(kT)$$

รูปแบบบัญญัติที่สังเกตได้(observable canonical form)

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_{n-1}(kT) \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + b_0 u(kT)$$

2.2.4 ระบบควบคุมแบบวงเปิด(open-loop control system)

ระบบควบคุมแบบเปิดหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ระบบควบคุมแบบไม่มีการป้อนกลับ ซึ่งระบบนี้จะเป็นระบบที่ง่ายที่สุด ไม่มีความซับซ้อน โดยระบบนี้ค่าสัญญาณขาออกที่ได้จะไม่มีการควบคุมขบวนการ ซึ่งก็คือไม่มีการนำค่าสัญญาณออกที่ได้มาเปรียบเทียบกับค่าสัญญาณขาเข้า(สัญญาณอ้างอิง) ที่ป้อนให้กับระบบเลย โดยในระบบควบคุมแบบนี้ จะใช้ในกรณีที่ต้องไม่มีสัญญาณรบกวนเลยและรู้ความสัมพันธ์ระหว่างขาเข้าและสัญญาณขาออกอยู่แล้ว ในกรณีนี้ถ้ามีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบ จะทำให้ระบบแบบนี้มีค่าผิดพลาด(error) และความแม่นยำจะลดลง ซึ่งสามารถแสดงลักษณะ แพนฟังก์ชั่นของระบบได้ ดังนี้



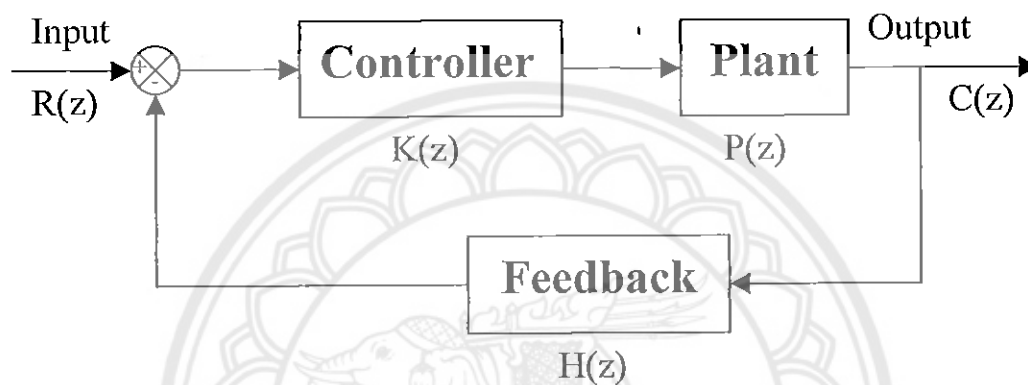
รูปที่ 2.2 ระบบควบคุมแบบวงเปิด(open-loop control system)

สมมุติให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมและระบบที่ต้องการควบคุมเป็นเท่ากับ $K(z)$ และ $P(z)$ ตามลำดับ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบวงเปิด ของระบบจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{C(z)}{R(z)} = K(z) \cdot P(z)$$

2.2.5 ระบบควบคุมแบบวงปิด (closed-loop control system)

เนื่องจากการควบคุมแบบวงเปิด ไม่ค่อยมีความแม่นยำในการควบคุม ดังนั้นจึงมีการพิจารณา นำสัญญาณขาออกซึ่งมีผลโดยตรงกับระบบควบคุม มาใช้เป็นส่วนหนึ่งในการควบคุมระบบ โดยนำสัญญาณออกมาเปรียบเทียบกับสัญญาณขาเข้า(อ้างอิง) ซึ่งค่าความต่างต่างนั้นจะเป็นค่าความผิดพลาด (error) ของระบบ ซึ่งจะนำค่าความผิดพลาดที่ได้นั้นมาเป็นสัญญาณเข้าตัวควบคุม (controller) เพื่อให้ตัวควบคุมไปสร้างสัญญาณควบคุมใหม่เพื่อลดค่าความผิดพลาดนั้น ซึ่งสามารถแสดงลักษณะแผนผังกล่องของระบบได้ ดังนี้



รูปที่ 2.3 ระบบควบคุมแบบวงปิด(closed-loop control system)

สมมติให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมและระบบที่ต้องการควบคุมเป็นเท่ากับ $K(z)$ และ $P(z)$ ตามลำดับ และฟังก์ชันถ่ายโอนตัวป้อนกลับ(feedback) เท่ากับ $H(z)$ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบวงปิด ของระบบจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(z).P(z)}{1 + K(z).P(z).H(z)}$$

2.2.6 ความเข้าถึงได้ (Reachability)

สำหรับระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลาเขียนได้ด้วยสมการ

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Gx_k + Hu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \\ x_{k_0} &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

คำนิยาม ระบบเชิงเส้น 2.2.1 ถูกกล่าวว่าสามารถเข้าถึงได้(reachable) ภายในช่วงปิด $[k_0, k_f]$ ถ้าหาสัญญาณขาเข้า u ใดๆที่ซึ่งผลตอบสนองที่สภาวะศูนย์(zero-state response) ของระบบ 1 สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $x_{k_f} = x_f$ เมื่อเริ่มต้นจากเวลา k_0 ซึ่งความสัมพันธ์ดังกล่าวต้องเป็นจริงทุกๆตัวแปรสถานะ x_f ที่กำหนดมาให้

โดยที่ x_k คือตัวแปรสถานะมิติ n และ u_k คือเวกเตอร์เข้าถึงมิติ m เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ระบบเข้าถึงได้อย่างสมบูรณ์ คือเมตริกซ์ความเข้าถึงได้(reachability matrix)

$$U \triangleq [H : GH : G^2H : \dots : G^{n-1}H]$$

U ต้องมีค่าลำดับชั้น(rank) เป็น n

2.2.7 ความสังเกตได้(Observability)

คำนิยาม ระบบเชิงเส้น 2.2.1 ถูกกล่าวว่าสามารถสังเกตได้(observable) ภายในช่วงปิด $[k_0, k_f]$ ถ้าทุกๆ ตัวแปรสถานะเริ่มต้น $x_{k_0} = x_0$ สามารถหาค่าเดียวเท่านั้นจากผลตอบสนองที่สัญญาณขาเข้าเป็นศูนย์(zero-input response) y_k สำหรับทุกๆค่า $k = k_0, k_1, \dots, k_f - 1$

โดยที่ x_k มีมิติ n และ y_k มิติ p เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ระบบสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ เมตริกซ์ V

$$V \triangleq [C^T : G^T C^T : \dots : (G^T)^{n-1} C^T]$$

V ต้องมีค่าลำดับชั้น(rank) เป็น n

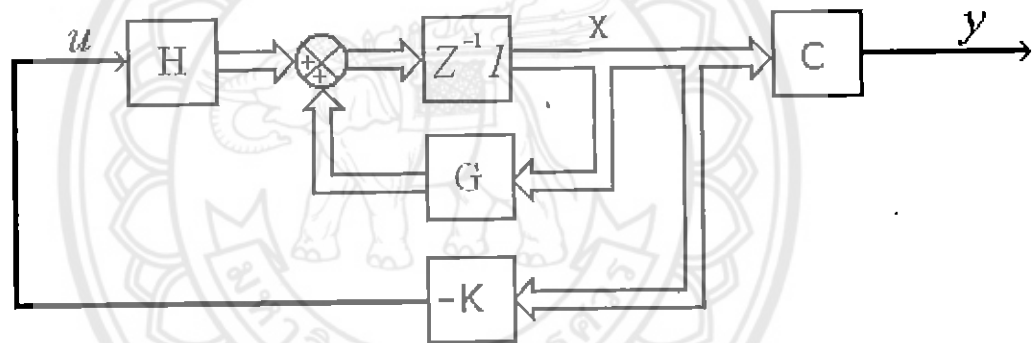
2.3 การออกแบบระบบควบคุมแบบการวางขั้ว(pole placement)

2.3.1 บทนำ

ในการออกแบบระบบควบคุมนั้นมีวิธีการออกแบบอยู่หลากหลายวิธีซึ่งแต่ละวิธีต่างก็มีข้อดีแตกต่างกันไป ในอดีตการออกแบบระบบควบคุมอย่างง่ายไม่มีความซับซ้อนมากนักและง่ายต่อการออกแบบ แต่ข้อเสียก็คือระบบอาจจะมีเสถียรภาพไม่ดีเท่าที่ควร ดังนั้นจึงมีการออกแบบระบบควบคุมที่ทำให้เสถียรภาพของระบบดีขึ้นคือการออกแบบระบบควบคุมแบบมีการป้อนกลับมาทดแทน

การออกแบบระบบควบคุมที่มีการนำเอาตัวแปรสถานะ(state variable) มาป้อนกลับ ก็เป็นหนึ่งในหลายๆ วิธีที่นิยม โดยที่ตัวแปรสถานะอาจจะอยู่ในรูปของ การกระจัด,ระยะทาง,ความเร็วหรือความเร่ง เป็นต้น เราจะเรียกระบบควบคุมแบบนี้ว่าระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(state feedback)

ในการออกแบบระบบแบบป้อนกลับสถานะสำหรับระบบเวลาวิฤตสิ่งแรกที่ต้องพิจารณาคือต้องตรวจสอบความสามารถเข้าถึงได้(reachability) ของระบบ(plant) เสียก่อน หลังจากนั้นจึงทำการออกแบบระบบควบคุมซึ่งสามารถแสดงได้ดังแผนผังต่อไปนี้



รูปที่ 2.4 แผนผังกล่องแสดงระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(state feedback)

2.3.2 ทฤษฎีการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการวางขั้ว

การออกแบบระบบควบคุม โดยวิธีการวางขั้วนี้ หลังจากที่เราได้ทำการตรวจสอบความสามารถเข้าถึงได้ของระบบแล้วนั้น ขั้นตอนต่อไปเราก็จะทำการกำหนดคุณลักษณะของผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่เราต้องการ อาทิเช่น ค่าพุ่งเกิน(Maximum overshoot: M_p), เวลาเข้าสู่สถานะคงตัว(settling time), เวลาสูงสุด(peak time), ค่าความผิดพลาดที่สถานะคงตัว(error steady state) เป็นต้น ซึ่งจากค่าต่างๆ เหล่านี้ทำให้ผู้ออกแบบสามารถคำนวณหาค่า ζ , ω_n และ ω_d สำหรับระบบสมการอันดับสองได้ ยกตัวอย่างเช่น การกำหนดค่าพุ่งเกิน(Maximum overshoot: M_p), เวลาเข้าสู่สถานะคงตัว(settling time) มาให้จะได้ว่า

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (2.3.1)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{ค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้} = 2\%) \quad (2.3.2)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.3.3)$$

โดยที่

ζ = อัตราหน่วงของระบบ(Damping ratio)

ω_n = ความเร็วเชิงมุมในการแกว่งตามธรรมชาติ(Undamped natural frequency)

ω_d = ความเร็วเชิงมุมในการแกว่งขณะระบบมีความหน่วงน้อย(Damped natural)

จากสมการ 2.3.1 และ 2.3.2 เราจะคำนวณค่า ζ , ω_n , ω_d ออกมาได้ซึ่งสามารถนำไปแทนค่าในฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดของระบบอันดับสองเวลาวิฤตที่มีความหน่วงน้อย(under damped) ดังนี้

$$\frac{Y}{R} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \quad (2.3.4)$$

ซึ่งขั้ววงปิดคือ $(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d) = 0$ (2.3.5)

แต่จะสังเกตได้ว่าขั้ววงปิดที่ได้ยังอยู่ในโดเมน s ดังนั้นเราจึงทำการส่ง(mapping) เพื่อที่จะทำให้ได้ขั้วที่อยู่ในโดเมน z คือ

$$(z + e^{T(-\zeta\omega_n + j\omega_d)})(z + e^{T(-\zeta\omega_n - j\omega_d)}) = 0 \quad (2.3.6)$$

เมื่อ T คือ คาบเวลาการซิกตัวอย่าง(sampling)

ต่อไปเราจะทำการออกแบบระบบควบคุมโดยในที่นี้จะอาศัยสูตรของแอกเคอแมนน์ (Ackermann's formula) ในการหาตัวควบคุม K ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

จากสมการป้อนกลับสถานะ $u(k) = -Kx(k)$

และตำแหน่งขั้ววงปิดที่ต้องการจะวาง $z = p_1, z = p_2, z = p_3, \dots, z = p_n$

เมื่อจัดตำแหน่งการวางขั้ววงปิดให้เท่ากับสมการคุณลักษณะในระบบเวลาวิฤตได้เป็น

$$\begin{aligned} |zI - G + HK| &= (z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \dots (z - p_n) \\ &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \alpha_3 z^{n-3} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

กำหนดให้ $\tilde{G} = G - HK$

และจากทฤษฎีของ คลอีย์ ฮามิลตัน สมการคุณลักษณะของ \tilde{G} คือ

$$\tilde{G}^n + \alpha_1 \tilde{G}^{n-1} + \alpha_2 \tilde{G}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{G} + \alpha_n I = \phi(\tilde{G}) = 0$$

จาก

$$I = I$$

$$\tilde{G} = G - HK$$

$$\tilde{G}^2 = \tilde{G}(G - HK) = G^2 - GHK - HK\tilde{G}$$

$$\tilde{G}^3 = \tilde{G}^2(G - HK) = G^3 - G^2HK - GHK\tilde{G} - HK\tilde{G}^2$$

⋮

⋮

⋮

$$\tilde{G}^n = \tilde{G}^{n-1}(G - HK) = G^n - G^{n-1}HK - \dots - HK\tilde{G}^{n-1}$$

คูณฝั่งซ้ายสมการทั้งหมดด้วยค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ โดยที่ $\alpha_0 = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} \alpha_n I + \alpha_{n-1} \tilde{G} + \alpha_{n-2} \tilde{G}^2 + \dots + \tilde{G}^n &= \alpha_n I + \alpha_{n-1} G + \alpha_{n-2} G^2 + \dots + G^n \\ &\quad - \alpha_{n-1} HK - \alpha_{n-2} GHK - \alpha_{n-2} HK\tilde{G} - \dots - G^{n-1} HK - \dots - HK\tilde{G}^{n-1} \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\phi(\tilde{G}) = \phi(G) - \alpha_{n-1} HK - \alpha_{n-2} GHK - \alpha_{n-2} HK\tilde{G} - \dots - HK\tilde{G}^{n-1} - G^{n-1} HK$$

$$= \phi(G) - \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} K + \alpha_{n-2} K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2} K + \alpha_{n-3} K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}$$

เนื่องจากว่า $\phi(\tilde{G}) = 0$ ดังนั้น

$$\phi(G) = [H:GH:\dots:G^{n-1}H] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}$$

จากสมมติฐานที่ว่าระบบสามารถเข้าถึงได้อย่างสมบูรณ์ ดังนั้นเมทริกซ์ความเข้าถึงได้

$[H:GH:\dots:G^{n-1}H]$ จึงมีลำดับขั้นเต็ม (full rank) เพราะฉะนั้นจึงสามารถหาตัวผกผันได้ซึ่งจะได้ว่า

$$\phi(G) [H:GH:\dots:G^{n-1}H]^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเราต้องการหาตัวควบคุมของการป้อนกลับสถานะ K ซึ่งสามารถกระทำได้โดยการคูณทั้งสองฝั่งของสมการด้วยเมทริกซ์ $[0 \dots 0 \ 1]$ ซึ่งจะพบว่า

$$[0 \dots 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\tilde{G} + \dots + K\tilde{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = [0 \dots 0 \ 1] [H:GH:\dots:G^{n-1}H] \phi(G)$$

ซึ่งจะได้

$$K = [0 \dots 0 \ 1] [H:GH:\dots:G^{n-1}H] \phi(G) \quad (2.3.7)$$

สมการ 2.3.7 เรียกว่าสูตรของแอกเคอแมน (Ackermann's formula) ซึ่งจะช่วยให้ได้ตัวควบคุม K ในการออกแบบโดยการวางขั้วและยังสามารถนำตัวควบคุมที่ได้มาสังเคราะห์เพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะจาก

$$\frac{Y}{R} = C(zI - G + HK)^{-1}H \quad (2.3.8)$$

2.4 วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(Linear Quadratic Regulator: LQR)

2.4.1 บทนำ

วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดที่เรียกว่า Linear Quadratic Regulator (LQR) เป็นวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบที่เป็นเชิงเส้น โดยคำนึงถึงค่าเหมาะสมที่สุดของตัวบ่งชี้สมรรถนะ(Performance index: J) เพื่อให้ได้ผลตอบสนองตามที่ผู้ออกแบบต้องการดังนี้

1. ทำให้ระบบมีเสถียรภาพ(stability)มากขึ้น
2. มีสมรรถนะ(performance)ในเรื่องผลตอบสนองที่เร็ว และมีปริมาณการใช้พลังงานที่น้อย

ในการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้น ผู้ออกแบบจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานที่ใช้ในการออกแบบดังหัวข้อต่อไปนี้

2.4.2 การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ(state feedback) โดยใช้วิธี Linear Quadratic Regulator (LQR)

หลักการของวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด จะใช้วิเคราะห์ระบบที่เป็นเชิงเส้นและจะต้องคำนึงถึงค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ(Performance index: J) ให้เหมาะสม ซึ่งตัวบ่งชี้สมรรถนะจะอยู่ในรูปสถานะ(state) และสัญญาณควบคุม(control signal) โดยจะเขียนได้ ดังนี้

$$J(x_0, k_0, u(\cdot)) = m(x_N) + \sum_{k=k_0}^{N-1} L(x_k, u_k, k) \quad (2.4.1)$$

ในระบบเวลาวิฤดแบบไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ตัวบ่งชี้สมรรถนะสามารถเขียนได้เป็น

$$J = x_N^* S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^* Q x_k + u_k^* R u_k) \quad (2.4.2)$$

เมื่อ S เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(weighting function) ของสถานะสุดท้ายและเป็นเมทริกซ์กึ่ง

บวก

Q เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(weighting function) ของสถานะและเป็นเมทริกซ์กึ่งบวก

R เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก(weighting function) ของสัญญาณควบคุมที่ใช้และเป็นเมทริกซ์

บวกเสมอ

x เป็นเวกเตอร์สถานะ มีมิติ n

u เป็นเวกเตอร์สัญญาณควบคุม มีมิติ r

ซึ่งเมื่อเราพิจารณาสมการ 2.4.2 ที่สถานะคงตัว (steady state) N เข้าใกล้ค่าอนันต์แล้วพจน์ $x_N^* S x_N$ มีค่าเป็นศูนย์ จะสามารถเขียนสมการตัวบ่งชี้สมรรถนะใหม่ได้เป็น

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^* Q x_k + u_k^* R u_k) \quad (2.4.3)$$

พ.ร.

ชบ๖๖11

๒๕17

0.2

สมการระบบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x_k , u_k และ k ได้ดังนี้

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k)$$

ในระบบเวลาวิฤตแบบไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาสามารถเขียนได้เป็น

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k \quad (2.4.4)$$

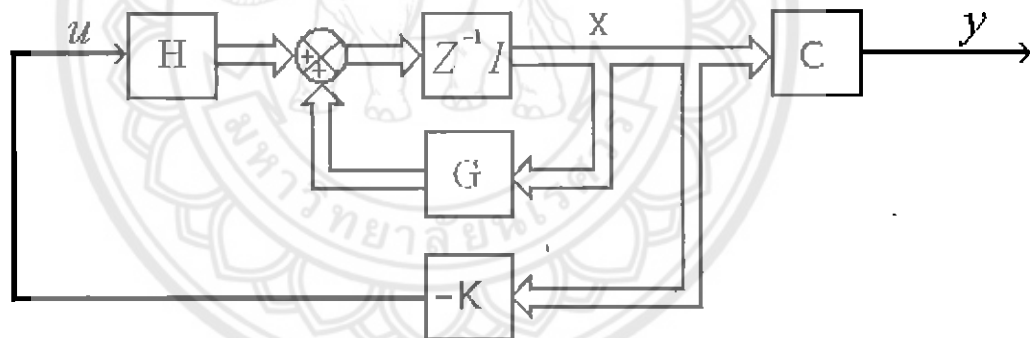
โดย

x_k = เวกเตอร์สถานะ มีมิติ n

u_k = เวกเตอร์สัญญาณควบคุม มีมิติ r

G = เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$

H = เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times r$



รูปที่ 2.5 แผนผังกล่องแสดงระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ (state feedback)

หลักการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด(optimal) คือ การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของสมการบ่งชี้สมรรถนะ โดยการหาค่าต่ำสุดของ u จากการหาอนุพันธ์เท่ากับศูนย์ เริ่มแรกหาค่าที่จุดปลายสุดคือ N แล้วหาค่าย้อนกลับมาจากจุด $N-1, N-2$ ไปเรื่อยๆ จนถึงจุดเริ่มต้นคือศูนย์ ให้ $J_{opt}(x_i, i)$ เป็นตัวบ่งชี้สมรรถนะที่เหมาะสมที่สุดจาก x ที่ i และกำหนดให้

$$J_{opt}(x_N, N) = x_N^* S x_N \triangleq x_N^* P_N x_N$$

เนื่องจาก $J(x_{N-1}, N-1) = (x_{N-1}^* Q x_{N-1} + u_{N-1}^* R u_{N-1}) + J_{opt}(x_N, N)$

เพราะฉะนั้น $J_{opt}(x_{N-1}, N-1) = \min_{u_{N-1}} [(x_{N-1}^* Q x_{N-1} + u_{N-1}^* R u_{N-1}) + J_{opt}(x_N, N)]$

$$= \min_{u_{N-1}} [x_{N-1}^* Q x_{N-1} + u_{N-1}^* R u_{N-1} + J_{opt}(G x_{N-1} + H u_{N-1}, N)]$$

$$= \min_{u_{N-1}} [x_{N-1}^* Q x_{N-1} + u_{N-1}^* R u_{N-1} + (G x_{N-1} + H u_{N-1})^* P_N (G x_{N-1} + H u_{N-1})]$$
 (2.4.5)

โดยที่ P_N เป็นบวก(positive definite)

จากสมการที่ 2.4.5 พิจารณาพจน์ที่ติดตัว u_{N-1} คือ

$$\{u_{N-1}^* R u_{N-1} + u_{N-1}^* H^* P_N G x_{N-1} + u_{N-1}^* H^* P_N H u_{N-1} + x_{N-1}^* G^* P_N H u_{N-1}\}$$
 (2.4.6)

หาค่าต่ำสุดโดยการหาอนุพันธ์เทียบ u_{N-1} จากสมการ 2.4.6 จะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial J(x_{N-1}, N-1)}{\partial u_{N-1}} = 0$$

$$2R u_{N-1} + 2H^* P_N H u_{N-1} + 2H^* P_N G x_{N-1} = 0$$

$$2((R + H^* P_N H) u_{N-1} + H^* P_N G x_{N-1}) = 0$$

$$(R + H^* P_N H) u_{N-1} = -H^* P_N G x_{N-1}$$
 (2.4.7)

ดังนั้นจากสมการที่ 2.4.7 จะได้ u_{N-1} คือ

$$u_{N-1} = -[R + H^* P_N H]^{-1} H^* P_N G x_{N-1}$$
 (2.4.8)

หมายเหตุ สังเกตพจน์ $[R + H^* P_N H]^{-1}$ สามารถผกผัน(inverse) ได้เนื่องจาก R เป็นค่าบวกเสมอ(positive definite) และ P_N เป็นค่ากึ่งบวก(positive semi-definite)

จากรูปแผนผังกล่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะจะได้ว่า

$$u_{N-1} = -K_{N-1}x_{N-1} \quad (2.4.9)$$

เมื่อเทียบสมการที่ 2.4.8 และ 2.4.9 จะได้ว่าค่า K_{N-1} ดังนี้

$$K_{N-1} = [R + H^* P_N H]^{-1} H^* P_N G$$

สังเกต จากสมการ 2.4.6 เมื่อหาอนุพันธ์อันดับสองเทียบ u_{N-1} จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 J(x_{N-1}, N-1)}{\partial u_{N-1}^2} = R + H^* P_N H \quad (2.4.10)$$

เนื่องจาก R เป็นค่าบวกเสมอ(positive definite) และ P_N เป็นค่ากึ่งบวก(positive semi-definite)

ดังนั้นสมการที่ 2.4.10 เป็นบวกแน่นอน ค่า J_{opt} ที่ได้จึงเป็นค่าต่ำสุด

แทนค่าจากสมการ 2.4.9 ลงในสมการ 2.4.5 จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} J_{opt}(x_{N-1}, N-1) &= x_{N-1}^* Q x_{N-1} + x_{N-1}^* K_{N-1}^* R K_{N-1} x_{N-1} + x_{N-1}^* (G - H K_{N-1})^* P_N (G - H K_{N-1}) x_{N-1} \\ &= x_{N-1}^* [Q + K_{N-1}^* R K_{N-1} + (G - H K_{N-1})^* P_N (G - H K_{N-1})] x_{N-1} \\ &\triangleq x_{N-1}^* P_{N-1} x_{N-1} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } P_{N-1} = Q + K_{N-1}^* R K_{N-1} + (G - H K_{N-1})^* P_N (G - H K_{N-1}) \quad (2.4.11)$$

ต่อไปหาค่าเหมาะสมที่สุดที่ $N-2$ ทำตามขั้นตอนตาม $N-1$ จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} J_{opt}(x_{N-2}, N-2) &= \min_{u_{N-2}} [(x_{N-2}^* Q x_{N-2} + u_{N-2}^* R u_{N-2}) + J_{opt}(x_{N-1}, N-1)] \\ &= \min_{u_{N-2}} [x_{N-2}^* Q x_{N-2} + u_{N-2}^* R u_{N-2} + J_{opt}((G x_{N-2} + H u_{N-2}), N-1)] \\ &= \min_{u_{N-2}} [x_{N-2}^* Q x_{N-2} + u_{N-2}^* R u_{N-2} \\ &\quad + (G x_{N-2} + H u_{N-2})^* P_{N-1} (G x_{N-2} + H u_{N-2})] \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

เมื่อแทน $u_{N-2} = -K_{N-2}x_{N-2}$ ลงในสมการ 2.4.12 จะได้

$$\begin{aligned} J_{opt}(x_{N-2}, N-2) &= x_{N-2}^* Q x_{N-2} + x_{N-2}^* K_{N-2}^* R K_{N-2} x_{N-2} + x_{N-2}^* (G - H K_{N-2})^* P_{N-1} (G - H K_{N-2}) x_{N-2} \\ &= x_{N-2}^* [Q + K_{N-2}^* R K_{N-2} + (G - H K_{N-2})^* P_{N-1} (G - H K_{N-2})] x_{N-2} \\ &\triangleq x_{N-2}^* P_{N-2} x_{N-2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } P_{N-2} = Q + K_{N-2}^* R K_{N-2} + (G - H K_{N-2})^* P_{N-1} (G - H K_{N-2}) \quad (2.4.13)$$

จากสมการข้างต้นที่กล่าวมาสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้คือ

$$u_i = -K_i x_i$$

$$K_i = [R + H^* P_{i+1} H]^{-1} H^* P_{i+1} G \quad (2.4.14)$$

$$P_i = Q + K_i^* R K_i + (G - H K_i)^* P_{i+1} (G - H K_i) \quad (2.4.15)$$

$$J_{opt}(x_i, i) = x_i^* P_i x_i \quad (2.4.16)$$

แทนค่า K_i จากสมการที่ 2.4.14 ลงในสมการที่ 2.4.15 จะเขียนได้เป็น

$$P_i = Q + G^* P_{i+1} G - G^* P_{i+1} H [R + H^* P_{i+1} H]^{-1} H^* P_{i+1} G \quad (2.4.17)$$

สมการ 2.4.17 เรียกว่าสมการรีคาติ(Riccati equation)

จาก [1] หน้า 824 สมการที่ 7-36 จะพบว่า

$$J_{opt} = x_N^* S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^* Q x_k + u_k^* R u_k)$$

$$= x_0^* P_0 x_0 \quad (2.4.18)$$

เมื่อพิจารณาสถานะคงตัว(steady state) และ N เข้าสู่อนันต์ แล้ว $P_0 = P =$ ค่าคงที่ ดังนั้นจากสมการที่ 2.4.18 จะเขียนได้เป็น

$$J_{opt} = x_0^* P x_0$$

และเช่นเดียวกันจากสมการที่ 2.4.14 และ 2.4.15 จะได้ว่า K คงที่ก็ต่อเมื่อ P คงที่เมื่อ $P_{i+1} = P_i = P$ จะเขียนได้เป็น

$$P = G^* P G - G^* P H (R + H^* P H)^{-1} H^* P G + Q \quad (2.4.19)$$

$$K = (R + H^* P H)^{-1} H^* P G \quad (2.4.20)$$

วิธีการหาค่า K สามารถทำได้ดังนี้ คือ

1. แก้สมการหาค่า P ได้จากสมการที่ 2.4.19 โดยที่ P เป็นค่าบวกเสมอ (Positive definite)
2. แทนค่า P ที่ได้จากข้อ 1 ลงในสมการที่ 2.4.20 ก็สามารหาค่า K ที่ได้จากการหาค่าต่ำสุดของสมการบังคับที่สมรรถนะ

2.4.3 ปัญหาการกำจัดสัญญาณรบกวน(Disturbance rejection problem)

2.4.3.1 กรณีที่ทราบสถานะของสัญญาณรบกวน z_k

สมการระบบเวลาวิฤตแบบ ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k + Ew_k \quad (2.4.21)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.4.22)$$

โดยที่ $E =$ เมทริกซ์มีมิติ $n \times r$

$w_k =$ เวกเตอร์ของสัญญาณรบกวน มีมิติ r

เราต้องการหาค่าต่ำสุดของสมการบ่งชี้สมรรถนะ

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^* Q x_k + u_k^* R u_k) \quad (2.4.23)$$

สมมติว่าเราทราบรูปแบบของสัญญาณรบกวน โดยมีสมการระบบดังนี้

$$z_{k+1} = G_d z_k \quad (2.4.24)$$

และสมการขาออกของสัญญาณรบกวนดังนี้

$$w_k = C_d z_k \quad (2.4.25)$$

โดยที่ $z_k =$ เวกเตอร์สถานะของสัญญาณรบกวน มีมิติ q

$G_d =$ เมทริกซ์มีมิติ $q \times q$

$C_d =$ เมทริกซ์มีมิติ $r \times q$

จากความสัมพันธ์จากสมการที่ 2.4.21, 2.4.22, 2.4.24 และ 2.4.25 เราสามารถขยายให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & EC_d \\ 0 & G_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad (2.4.26)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad (2.4.27)$$

กำหนดให้ $\xi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$, $G_a = \begin{bmatrix} G & EC_d \\ 0 & G_d \end{bmatrix}$, $H_a = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบใหม่ดังนี้

$$\xi_{k+1} = G_a \xi_k + H_a u_k \quad (2.4.28)$$

$$y_k = C_a \xi_k \quad (2.4.29)$$

โดยสามารถเขียนตัวบ่งชี้สมรรถนะให้อยู่ในรูปแบบใหม่ดังนี้

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\xi_k^* \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_k + u_k^* R u_k \right)$$

จากสมการสัญญาณควบคุม $u_k = -K \xi_k$ แทนค่าลงในสมการที่ 2.4.28 จะเขียนได้เป็น

$$\xi_{k+1} = (G_a - H_a K) \xi_k$$

2.4.3.2 กรณีไม่ทราบสถานะของสัญญาณรบกวน z_k

โดยเราต้องออกแบบตัวสังเกตสถานะของระบบเวลาวิฤตโดยไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาดังนี้

$$\hat{\xi}_{k+1} = G_a \hat{\xi}_k + H_a u_k + K_e (y_k - \hat{y}_k) \quad (2.4.30)$$

$$\hat{y}_k = C_a \hat{\xi}_k \quad (2.4.31)$$

สมการสัญญาณควบคุมเขียนใหม่ได้เป็น

$$u_k = -K \hat{\xi}_k \quad (2.4.32)$$

แทนค่าสมการที่ 2.4.56 ลงในสมการที่ 2.4.52 จะเขียนได้เป็น

$$\xi_{k+1} = G_a \xi_k - H_a K \hat{\xi}_k \quad (2.4.33)$$

แทนค่าสมการที่ 2.4.29, 2.4.31 และ 2.4.32 ลงในสมการที่ 2.4.33 จะเขียนได้เป็น

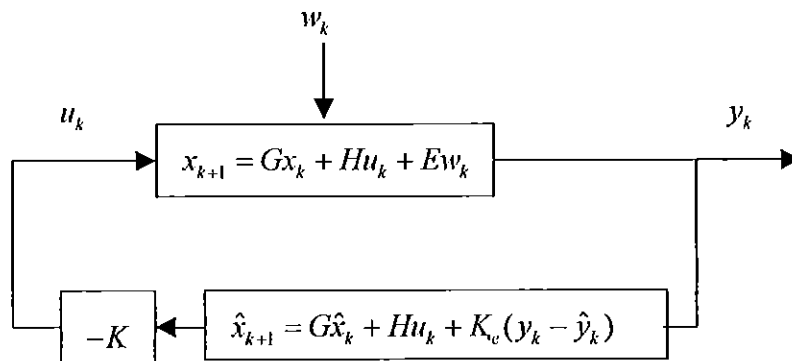
$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{k+1} &= G_a \hat{\xi}_k - H_a K \hat{\xi}_k + K_e (C_a \xi_k - C_a \hat{\xi}_k) \\ &= K_e C_a \xi_k + (G_a - H_a K - K_e C_a) \hat{\xi}_k \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

จากความสัมพันธ์ของสมการที่ 2.4.33 และ 2.4.34 จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ \hat{\xi}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_a & -H_a K \\ K_e C_a & G_a - H_a K - K_e C_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ \hat{\xi}_k \end{bmatrix} \quad (2.4.35)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ \hat{\xi}_k \end{bmatrix} \quad (2.4.36)$$

จากสมการที่ 2.4.35 และ 2.4.36 ยังเป็นระบบที่ไม่มีสัญญาณรบกวน ดังนั้นเมื่อมีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบจะสามารถเขียนในรูปแผนผังกล่องใหม่ได้ดังนี้



รูปที่ 2.6 แผนผังกล่องของระบบที่มีสัญญาณรบกวน

จากรูปที่ 2.6 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -HK \\ K_c C & G - HK - K_c C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} w_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}$$

2.4.4 ปัญหาการตามสัญญาณ(Tracking problem)

ปัญหาการตามสัญญาณ คือ ปัญหาการกำจัดค่าความผิดพลาดระหว่างสถานะ x_k และ r_k โดย r_k จะมีระบบพลวัตเหมือนกับ x_k และสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR problem) ได้ โดยมีสมการระบบเวลาวิชุดแบบไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาคือ

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k \quad (2.4.37)$$

$$r_{k+1} = Gr_k \quad (2.4.38)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.4.39)$$

นำสมการที่ 2.4.37 ลบด้วยสมการที่ 2.4.38 จะได้

$$\begin{aligned} x_{k+1} - r_{k+1} &= Gx_k + Hu_k - Gr_k \\ &= G(x_k - r_k) + Hu_k \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

ให้ $\xi_k = x_k - r_k$ ดังนั้นจากสมการที่ 2.4.40 จะเขียนได้เป็น

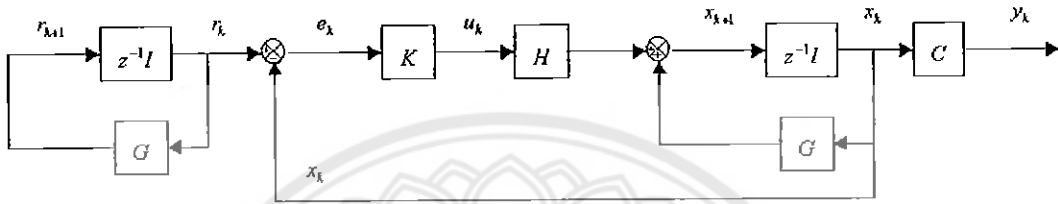
$$\xi_{k+1} = G\xi_k + Hu_k$$

โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการบ่งชี้สมรรถนะดังนี้คือ

$$J = \xi_N^* S \xi_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\xi_k^* Q \xi_k + u_k^* R u_k)$$

และมีสมการสัญญาณควบคุมคือ

$$\begin{aligned} u_k &= -K(x_k - r_k) \\ &= -K\xi_k \end{aligned}$$



รูปที่ 2.7 แผนผังกล่องของระบบปัญหาการตามสัญญาณกรณีไม่มีสัญญาณรบกวน

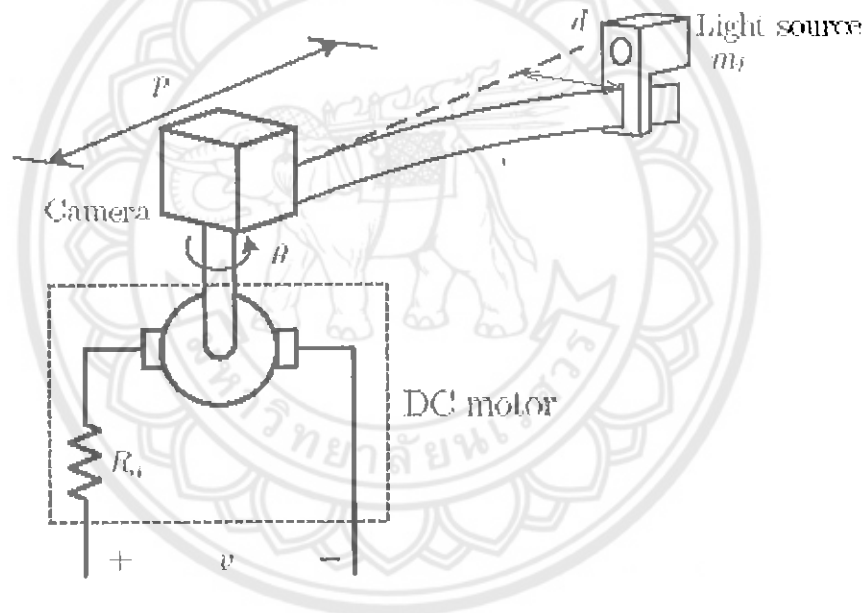
บทที่ 3

ตัวอย่างระบบที่ศึกษา

จากที่กล่าวมาแล้วในบทที่ผ่านมาเกี่ยวกับหลักการและทฤษฎีของการออกแบบระบบควบคุม โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด ซึ่งในบทนี้จะแสดงตัวอย่างการออกแบบให้เห็นเป็นรูปธรรมมากขึ้น และจะแสดงวิธีต่างๆ ในการตรวจสอบผลตอบสนองของระบบหลังจากที่ได้ทำการออกแบบตัวควบคุม อีกด้วย

3.1 ระบบที่ศึกษา

ตัวอย่างระบบที่จะเป็นระบบแขนกลของหุ่นยนต์ [5] ซึ่งระบบจะมีลักษณะทางกายภาพ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 รูประบบทางกายภาพของแขนกลหุ่นยนต์(flexible robot arm)

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าเมื่อเราทำการป้อนแรงดัน v เป็นสัญญาณขาเข้า(input) ให้กับระบบทำให้พลาโมเตอร์หมุนไปเป็นมุม θ ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม $\dot{\theta}$ ซึ่งจะส่งผลให้แขนกลหุ่นยนต์หมุนจากตำแหน่ง $d(0)$ ไปยังตำแหน่ง $d(\infty)$ (เส้นประ) ด้วยอัตราเร็ว \dot{d} และจากการประยุกต์วิธีขึ้นประกอบอันตะ(finite element method) และวิธีลากรังจ(lagrange technique) กับสมการออยเลอร์-เบอร์นูลี โดยคิดคานอ่อนตัวเป็น 1 ท่อน ได้แบบจำลองในรูปปริภูมิสถานะ(state space) ดังนี้

สมการสถานะในระบบแบบเวลาต่อเนื่อง

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 0 & -13.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.81 & -559.78 & -45.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.85 \\ 0 \\ 25.71 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad -0.38 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0]u$$

เมื่อ $x_1 = x_1(k) = \theta$; มุมที่หมุน (rad)
 $x_2 = x_2(k) = \dot{\theta}$; อัตราเร็วเชิงมุมที่หมุน (rad/s)
 $x_3 = x_3(k) = d$; ตำแหน่งที่แขนกลแกว่ง (m)
 $x_4 = x_4(k) = \dot{d}$; อัตราเร็วที่แขนกลแกว่ง (m/s)
 $u(k)$ = แรงดันเข้ามอเตอร์ ($volt$)
 $y(k)$ = ตำแหน่งเชิงมุมของโหลด (m)

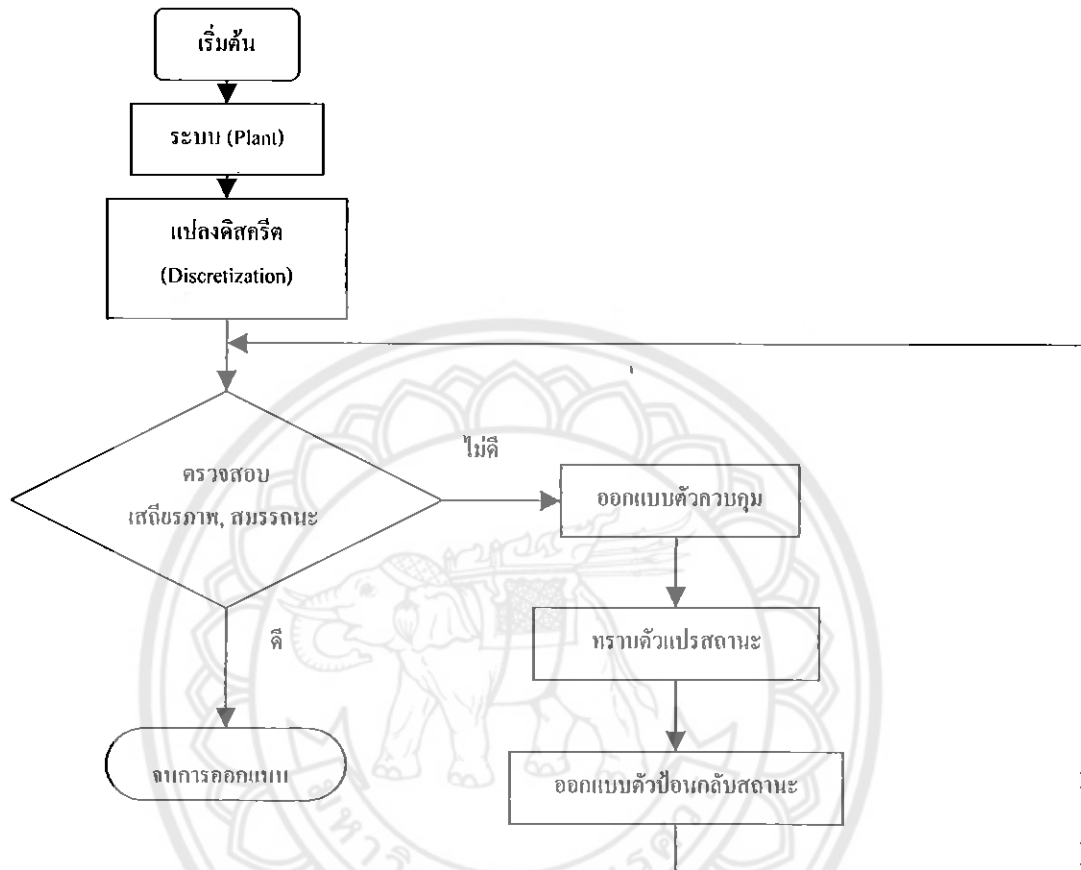
และระบบจะมีฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function) แบบวงปิดเป็นดังนี้

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-1.92 s^2 - 0.1899 s + 4394}{s^4 + 49.43 s^3 + 559.9 s^2 + 2362 s}$$

ในการทดลองออกแบบระบบควบคุมระบบตัวอย่างนั้น ในโครงการนี้เราจะออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (LQR) และวิธีการวางขั้ว (pole placement) โดยในการออกแบบและการตรวจสอบผลตอบสนองในรูปแบบต่างๆ นั้นเราจะแสดงโดยใช้โปรแกรม MATLAB เป็นเครื่องมือช่วยในการออกแบบ ซึ่งจะแสดงในหัวข้อต่อไป

3.2 ตัวอย่างการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้ว(Pole placement method)

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้วกรณีทราบตัวแปรสถานะทุกสถานะ สำหรับขั้นตอนในการออกแบบจะเป็นดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ขั้นตอนการออกแบบระบบควบคุม

ในการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการวางขั้วจะมีวิธีการดังที่กล่าวมาแล้ว เริ่มโดยการนำสมการสถานะในระบบแบบเวลาต่อเนื่องมาทำการแปลงคิสดรีต(discretization) ที่คาบเวลาการซีกตัวอย่าง $T = 0.1s$ (จากการได้ทดลองใช้ค่าต่างๆ แล้วพบว่าค่านี้เป็นค่าที่เหมาะสมสำหรับระบบตัวอย่างนี้) จะทำให้ได้สมการสถานะในระบบควบคุมเวลาวิฤตเป็น

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0910 & 0.4350 & -0.0158 \\ 0 & 0.8347 & 8.8697 & -0.1058 \\ 0 & -0.0158 & 0.2248 & 0.0125 \\ 0 & -0.1058 & -6.9991 & -0.1217 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0167 \\ 0.3073 \\ 0.0295 \\ 0.1971 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad -0.38 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + [0] u(k)$$

ซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดคือ

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.005449 z^{-1} + 0.04218 z^{-2} + 0.01392 z^{-3} - 0.0000371 z^{-4}}{1 - 1.938 z^{-1} + 1.213 z^{-2} - 0.2827 z^{-3} + 0.007133 z^{-4}}$$

ตรวจสอบคุณสมบัติความเข้าถึงได้(reachability) ของระบบโดย

$$U \triangleq [H \quad GH \quad G^2H \quad G^3H \dots G^{n-1}H]$$

$$U \triangleq \begin{bmatrix} 0.0167 & 0.0543 & 0.1056 & 0.1457 \\ 0.3073 & 0.4973 & 0.4804 & 0.3156 \\ 0.0295 & 0.0042 & -0.0102 & -0.0105 \\ 0.1971 & -0.2630 & -0.0502 & 0.0268 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก U มีค่าลำดับชั้น(rank) เป็น 4 ดังนั้นระบบมีคุณสมบัติเข้าถึงได้

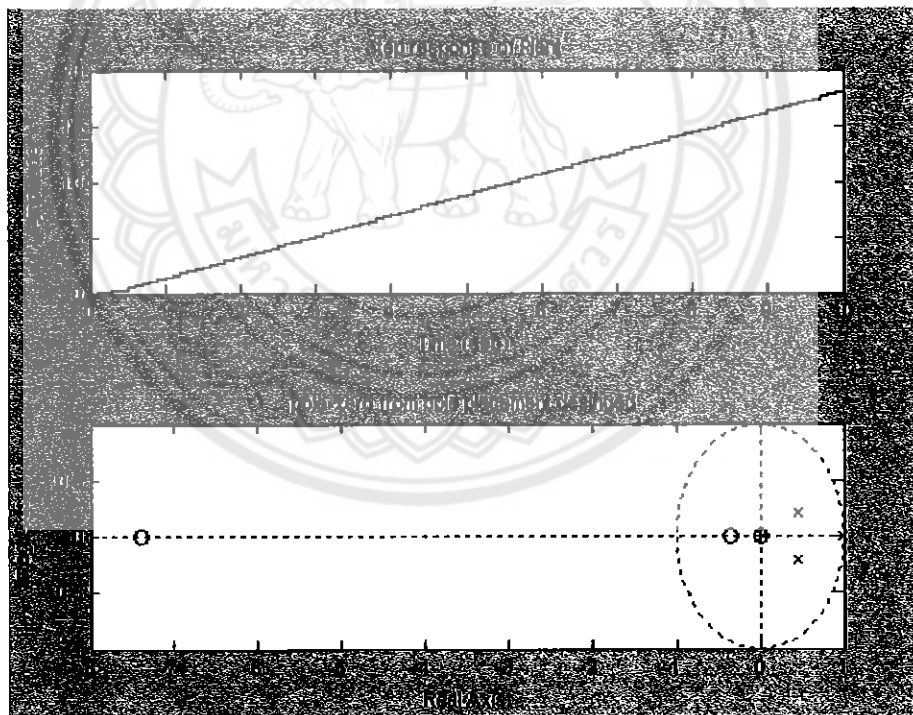
ตรวจสอบคุณสมบัติความสังเกตได้(observability) โดย

$$V \triangleq [C^T \ G^T C^T \ (G^2)^T C^T \ (G^3)^T C^T \ \dots (G^{n-1})^T C^T]$$

$$V \triangleq \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0.0971 & 0.1687 & 0.2098 \\ -0.3800 & 0.3496 & 1.5186 & 2.4072 \\ 0 & -0.0206 & -0.0192 & -0.0124 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก V มีค่าลำดับชั้น(rank) เป็น 4 ดังนั้นระบบมีคุณสมบัติสังเกตได้

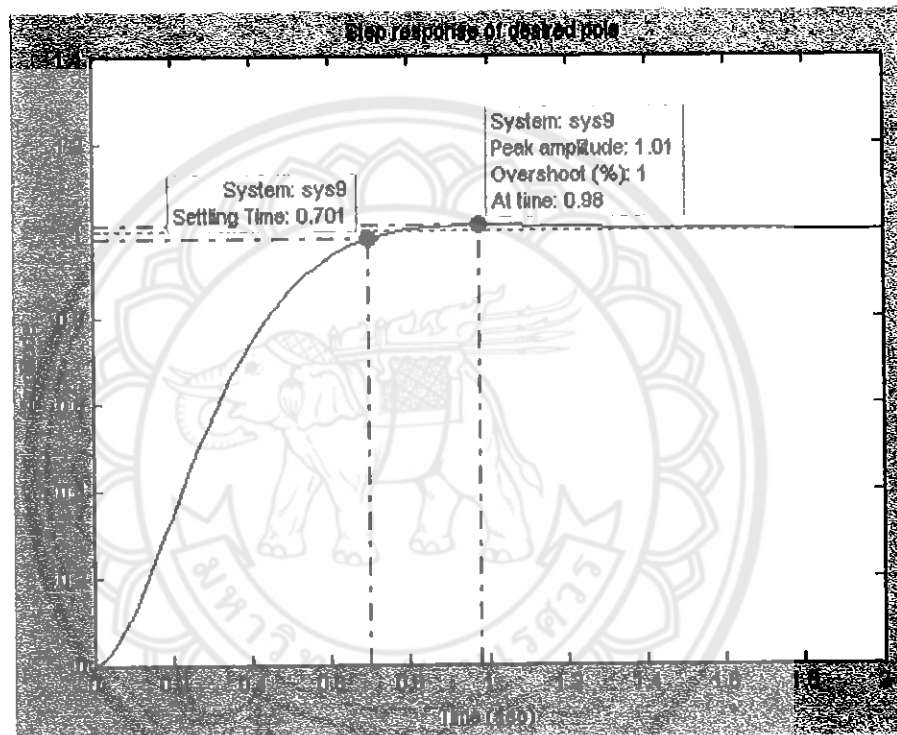
โดยสิ่งที่ต้องทำเสมอก็คือตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ โดยการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะของระบบแกนกลหุ่นยนต์จะยังไม่ได้ออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะจะมีผลดังนี้



รูปที่ 3.3 ผลตอบสนองของระบบแกนกลหุ่นยนต์

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ซึ่งจะแสดงว่าระบบขาดเสถียรภาพ ดังนั้นจึงต้องออกแบบตัวควบคุมเข้าไปในระบบ เพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพ(stability) และสมรรถนะ(performance) ที่ดีขึ้น โดยในตัวอย่างนี้ สมมติตัวแปรสถานะต่างๆ ตัวแปรของระบบแกนกลหุ่นยนต์ทราบค่าและสามารถวัดได้

การออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะในกรณีที่มีตัวแปรสถานะ โดยใช้วิธีการวางขั้วนั้น จะกำหนดคุณสมบัติของผลตอบสนองที่ผู้ออกแบบต้องการคือ ค่าสูงสุดของสัญญาณ(Maximum overshoot; M_p) ไม่เกิน 1%, เวลาเข้าสู่สถานะคงตัว(settling time) ประมาณ 0.7 วินาที ดังรูป



รูปที่ 3.4 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบแกนกลหุ่นยนต์ที่ผู้ออกแบบต้องการ

เนื่องจากระบบตัวอย่างมีขั้วทั้งหมด 4 ตัว แต่ตำแหน่งการวางขั้วที่มีผลกระทบต่อผลตอบสนองโดยตรงจะมีเพียง 2 ตัว ซึ่งจะเรียกขั้ว 2 ตัวนี้ว่าขั้วเด่น(dominant pole) โดยขั้วอีก 2 ตัวที่เหลือจะต้องทำการเลือกวางในตำแหน่งที่มีผลกระทบต่อระบบน้อยที่สุด แต่อย่างไรก็ตามเพื่อเป็นการชดเชยผลกระทบที่เกิดจากขั้ว 2 ตัวนี้ต่อระบบ ในการคำนวณจริงผู้ออกแบบจะออกแบบโดยใช้ค่าสูงสุดของสัญญาณ(Maximum overshoot: M_p) ไม่เกิน 0.95%, เวลาเข้าสู่สถานะคงตัว(setting time) ประมาณ 0.7 วินาที

จากสมการ 2.3.1 จะหาอัตราหน่วงของระบบ(damping ratio; ζ) ได้เป็น

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}$$

$$0.0095 = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}$$

$$\zeta = 0.83$$

จากสมการ 2.3.2 จะสามารถหาความเร็วเชิงมุมในการแกว่งตามธรรมชาติ(undamped natural frequency ω_n) ได้เป็น

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$0.7 = \frac{4}{0.83\omega_n}$$

$$\omega_n = 6.885 \text{ rad/s}$$

จากสมการ 2.3.3 จะสามารถหาความเร็วเชิงมุมในการแกว่งขณะระบบมีความหน่วงน้อย(damped natural frequency: ω_d) ได้เป็น

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_d = 6.885 \sqrt{1-0.83^2}$$

$$\omega_d = 3.84 \text{ rad/s}$$

นำ ζ , ω_n , ω_d ที่ได้จากการกำหนดคุณสมบัติของผลตอบสนองที่ผู้ออกแบบต้องการ ไปแทนในสมการ 2.3.5 จะได้สมการคุณลักษณะคือ

$$|(s + 5.715 + j3.84)(s + 5.715 - j3.84)| = 0$$

ดังนั้นจะได้ตำแหน่งขั้วเด่น 2 ขั้วคือ $-5.715 \pm j3.84$

แต่จากสมการสถานะจะสามารถสังเกตได้ว่าเราต้องใช้ขั้วถึง 4 ขั้ว ดังนั้นเราจึงเลือกวางตำแหน่งขั้วอีกสองขั้วให้ไกลจากขั้วเด่น ซึ่งจะทำให้ขั้ว 2 ตัวนี้มีผลกระทบต่อระบบน้อย โดยในที่นี้จะวางไว้ที่ตำแหน่ง $-12 \pm j10$ จะได้

$$|(s + 5.715 + j3.84)(s + 5.715 - j3.84)(s + 12 + j10)(s + 12 - j10)| = 0$$

สมการคุณลักษณะของระบบเวลาวิฤต

$$|zI - G + HK| = 0$$

จัดให้เท่ากับ สมการการวางขั้วของระบบจะได้

$$|zI - G + HK| = |(z + e^{T(-5.715 + j3.84)}) (z + e^{T(-5.715 - j3.84)}) (z + e^{T(-12 + j10)}) (z + e^{T(-12 - j10)})|$$

และเมื่อแก้สมการก็จะได้ค่าของตัวควบคุมสถานะป้อนกลับ K (ในที่นี้จะแสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม MATLAB เนื่องจากการคำนวณด้วยมือนั้นค่อนข้างที่จะมีความยุ่งยากมาก)

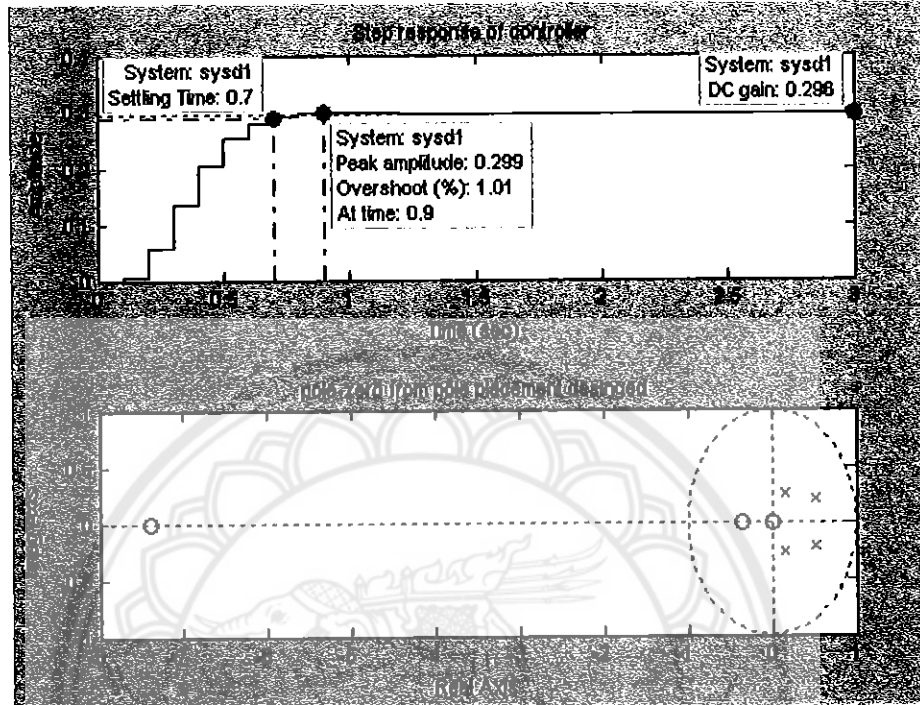
$$K = [3.3808 \quad 0.7575 \quad 10.1005 \quad -0.1109]$$

ซึ่งเราสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะได้จากตัวควบคุมสถานะป้อนกลับ K ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{Y}{R} = C(zI - G + HK)^{-1}H$$

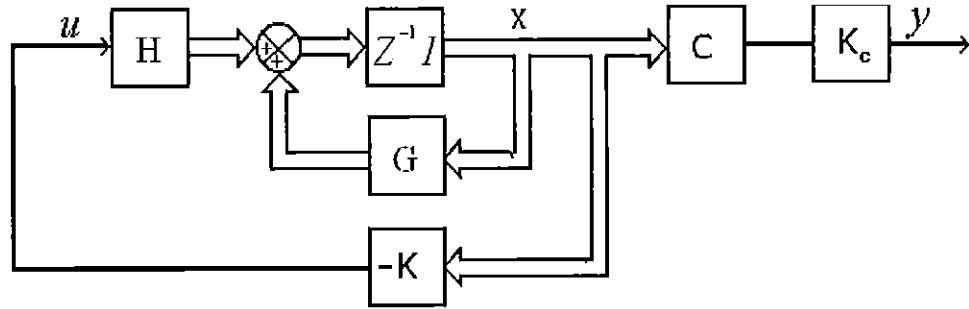
$$\frac{Y}{R} = \frac{0.005449z^1 + 0.04218z^2 + 0.01392z^3 - 0.0000371z^4}{1 - 1.373z^{-1} + 0.7504z^{-2} - 0.1988z^{-3} + 0.02893z^{-4}}$$

หลังจากที่ได้ออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะแล้วจะต้องตรวจสอบผลตอบสนองของระบบที่มีตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะด้วยการทดสอบป้อนสัญญาณหนึ่งหน่วยได้ผลดังรูป



รูปที่ 3.5 ผลตอบสนองหนึ่งหน่วยของตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ

จากรูปที่ 3.5 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเข้าไปในระบบจะมีเสถียรภาพที่ดีและตำแหน่งขั้วอยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วยในโดเมน z ตามที่ผู้ออกแบบต้องการ แต่มีข้อเสียในเรื่องสมรรถนะของระบบจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีความผิดพลาดในสภาวะคงที่ (error steady state) โดยมีขนาดประมาณ 0.296 หน่วย และเพื่อเป็นการเพิ่มสมรรถนะให้กับระบบ ผู้ออกแบบจึงจะออกแบบอัตราขยายเข้าไป โดยมีแผนผังกล่อง ดังรูปที่ 3.6 และมีวิธีออกแบบ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.6 แผนภาพกล่องของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเมื่อออกแบบอัตราขยาย K_c เข้าไปในระบบ

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ

$$\frac{Y}{R} = \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.373z^{-1} + 0.7504z^{-2} - 0.1988z^{-3} + 0.02893z^{-4}}$$

ป้อนสัญญาณเข้าแบบหนึ่งหน่วย $R = \frac{1}{1-z^{-1}}$ เข้าไปทำให้เขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

$$Y = \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.373z^{-1} + 0.7504z^{-2} - 0.1988z^{-3} + 0.02893z^{-4}} \times \frac{1}{1-z^{-1}}$$

หาค่าความผิดพลาดในสภาวะคงที่ (error steady state: e_{ss}) ของระบบได้ ดังนี้

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

$$E(z) = \frac{1 - 1.378449z^{-1} + 0.70822z^{-2} - 0.21272z^{-3} + 0.028971z^{-4}}{1 - 1.373z^{-1} + 0.7504z^{-2} - 0.1988z^{-3} + 0.02893z^{-4}} \times \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})E(z)$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \left(\frac{1 - 1.378449z^{-1} + 0.70822z^{-2} - 0.21272z^{-3} + 0.028971z^{-4}}{1 - 1.373z^{-1} + 0.7504z^{-2} - 0.1988z^{-3} + 0.02893z^{-4}} \right) \times \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$e_{ss} = \frac{0.14602}{0.20713} = 0.704$$

ค่าคงที่ของตำแหน่งในสภาวะคงที่ (Static position error: K_p) จะหามาได้จาก

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.373z^{-1} + 0.7504z^{-2} - 0.1988z^{-3} + 0.02893z^{-4}}$$

$$K_p = \frac{0.06151}{0.20713} = 0.296$$

ทำให้ต้องออกแบบอัตราขยาย (Gain) K_c เพื่อทำให้ความผิดพลาดในสภาวะคงที่เป็น 0 ได้จาก

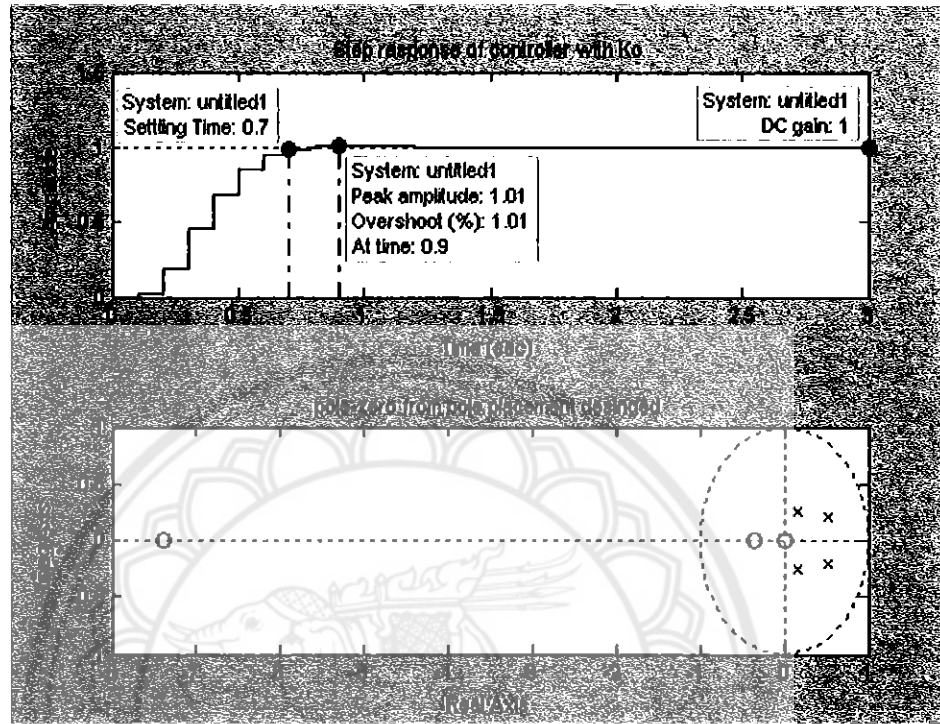
$$K_c = \frac{1}{K_p}$$

$$K_c = \frac{1}{0.296} = 3.378$$

จะสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

$$\frac{Y}{R} = \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.373z^{-1} + 0.7504z^{-2} - 0.1988z^{-3} + 0.02893z^{-4}} \times 3.378$$

ตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบหลังจากที่ได้ออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและออกแบบค่า K_c เข้าไป จะทำให้ผลตอบสนองออกมา ดังนี้



รูปที่ 3.7 ผลตอบสนองของระบบหลังจากออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและออกแบบอัตราขยาย K_c

พิจารณารูปที่ 3.7 จะเห็นว่าสมรรถนะของระบบหลังจากการออกแบบค่า K_c เข้าไปในระบบจะทำให้ลดความผิดพลาดในสภาวะคงที่ (error steady state) ในขณะที่คุณสมบัติอื่นๆ ที่ผู้ออกแบบต้องการ อาทิ ค่าสูงสุดของสัญญาณ (overshoot), เวลาสูงสุด (peak time) หรือเวลาสู่สมดุล (setting time) ก็ยังมีค่าคงเดิม

3.3 การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(Optimization: LQR)

ในการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดในระบบแขนกลหุ่นยนต์นั้น จะใช้วิธีที่เรียกว่า Linear Quadratic Regulator (LQR) ซึ่งจะเป็นวิธีการออกแบบที่คำนึงถึงค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ(Performance Index: J) ให้เหมาะสมที่สุด(ตัวบ่งชี้สมรรถนะมีค่าน้อยที่สุด) และในขั้นตอนที่ถือว่ายากก็คือการเลือกปรับ(weighting) Q, R โดยที่ขั้นตอนการออกแบบจะเป็น ดังนี้

จากสมการสถานะในระบบควบคุมเวลาวิฤตแบบไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาที่คาบของการซัดตัวอย่าง

$$T = 0.1s$$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0910 & 0.4350 & -0.0158 \\ 0 & 0.8347 & 8.8697 & -0.1058 \\ 0 & -0.0158 & 0.2248 & 0.0125 \\ 0 & -0.1058 & -6.9991 & -0.1217 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0167 \\ 0.3073 \\ 0.0295 \\ 0.1971 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.38 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(k)$$

ในการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดนี้ ขั้นตอนแรกเราก็จะต้องทำการตรวจสอบความสามารถเข้าถึงได้(reachability) และต้องทำการตรวจสอบเสถียรภาพของระบบด้วยซึ่งถ้าหากระบบมีเสถียรภาพที่ดีอยู่แล้วก็อาจจะไม่ต้องทำการออกแบบตัวควบคุมก็ได้

แต่หลังจากที่การตรวจสอบความเข้าถึงได้และเสถียรภาพของระบบดังที่แสดงไว้ในหัวข้อของการออกแบบโดยวิธีการวางขั้วแล้วนั้นปรากฏว่าระบบมีความสามารถเข้าถึงได้แต่ยังขาดเสถียรภาพดังนั้นจึงต้องการออกแบบตัวควบคุมเพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพที่ดีขึ้น

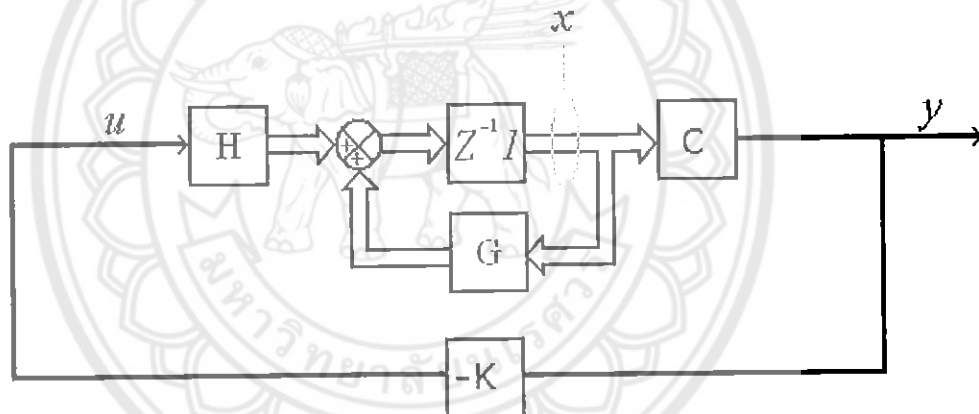
ในการออกแบบขั้นแรกต้องทำการสังเกตคุณผลของ Q, R ต่อระบบโดยทำการเลือกปรับ Q, R เพื่อสังเกตว่า Q, R ตัวไหนมีผลกระทบต่อระบบอย่างไร และมากน้อยแค่ไหน ซึ่งจากการสังเกตจะทำให้เราสามารถที่จะปรับ Q, R ได้ถูกต้องว่าควรปรับ Q, R อย่างไรเพื่อให้ได้ผลตอบสนองเป็นไปดังที่ผู้ออกแบบต้องการ

หลังจากที่ได้ทำการปรับค่า Q, R ที่ถูกต้องแล้วจึงแก้สมการลดรูปของริคคาติ(Riccati equation) เพื่อหาค่า P และก็จะได้ค่าตัวควบคุม K ออกมา ซึ่งรายละเอียดจะอยู่ในหัวข้อ 2.4 โดยในขั้นตอนการหาค่า K ผู้ออกแบบจะคำนวณโดยใช้โปรแกรม MATLAB

ในส่วนของการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะของระบบหลังจากการออกแบบตัวควบคุมแล้วนั้น ก่อนข้างจะมีหลากหลายวิธีโดยในส่วนของโครงการนี้ จะนำเสนอการวิเคราะห์ผลในรูปแบบต่างๆ ได้แก่ การตรวจสอบพฤติกรรมของสถานะ(state trajectory), ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม(control signal afford: u), ผลตอบสนองหนึ่งหน่วย(step response)

3.3.1 การตรวจสอบพฤติกรรมของสถานะ (State trajectory)

ในการตรวจสอบพฤติกรรมของสถานะ(state) โดยการออกแบบระบบควบคุมที่ดีจะต้องออกแบบให้ตัวแปรสถานะจริง x มีสมรรถนะที่ดี ซึ่งก็คือ จะต้องเข้าสู่สถานะคงตัวให้เร็วที่สุดนั่นเอง ในการตรวจสอบพฤติกรรมของสถานะนี้จะเกี่ยวข้องโดยตรงกับกรณีปรับค่า Q ในวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดด้วย



รูปที่ 3.8 แผนผังกล่องแสดงตำแหน่งในการตรวจสอบพฤติกรรมของสถานะ (state trajectory)

สถานะ $x(k)$ กรณีการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะจะเขียนในปริภูมิสถานะ(state space) ได้โดยที่ $u(k) = -Kx(k)$ จะได้

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) - HKx(k) \\ &= (G - HK)x(k) \end{aligned}$$

โดยในการตรวจสอบ เราจะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

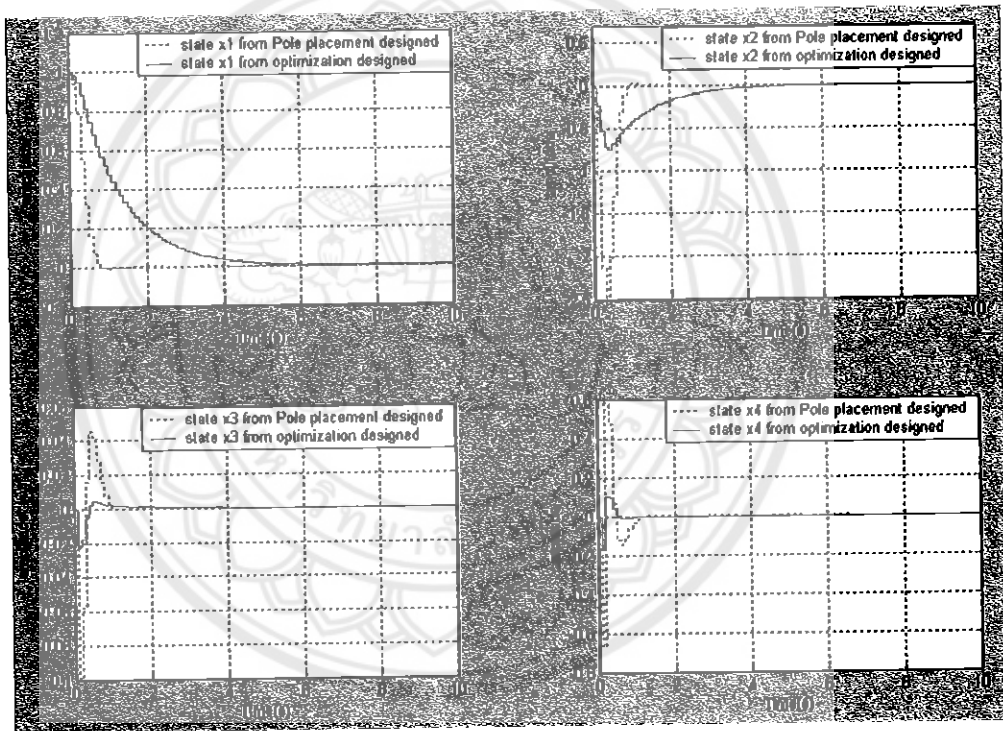
1. สภาวะเริ่มต้น(initial condition) ของตัวแปรสถานะทุกตัวเท่ากับ

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$$

2. ตำแหน่งขั้วของสถานะจริง x อยู่ที่ $e^{(-5.715 \pm j3.84)T}$, $e^{(-12 \pm j10)T}$ (ขั้วที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว)

สำหรับการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดขั้นแรกจะทำการปรับ

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1] \text{ ก่อนเพื่อจะสังเกตพฤติกรรมของสถานะออกมามีดังรูป}$$



รูปที่ 3.9 พฤติกรรมของสถานะจริง x กรณีปรับ

$$Q = [q_{11} = 1, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1], R = [1]$$

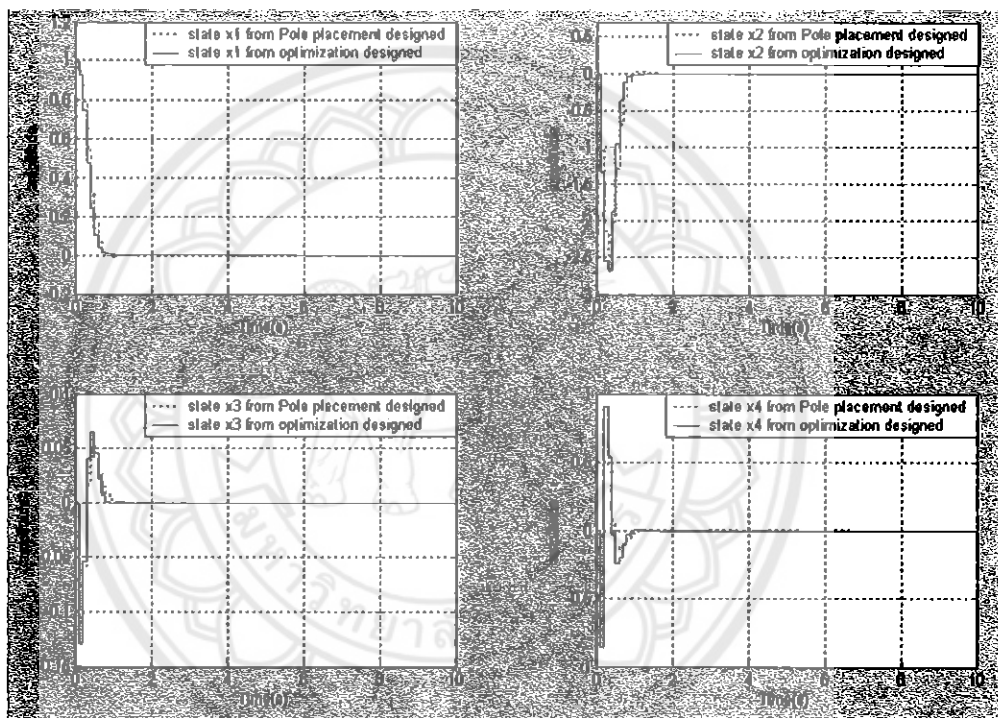
ค่าดัชนีชี้สมรรถนะ(performance index: J) = 13.4049

$$P = \begin{bmatrix} 13.4049 & 1.8690 & 18.8313 & -0.1479 \\ 1.8690 & 2.1458 & 14.5094 & -0.0706 \\ 18.8313 & 14.5094 & 241.3093 & 0.4473 \\ -0.1479 & -0.0706 & 0.4473 & 1.0371 \end{bmatrix}$$

$$K = [0.7553 \quad 0.4747 \quad 6.6814 \quad -0.0066]$$

ในการพิจารณาสถานะเพื่อใช้ในกรณีปรับ Q นั้นจะพิจารณาสถานะทั้ง 4 สถานะตามรูปที่ 3.9 จะเห็นว่าพฤติกรรมตัวแปรสถานะ x_1 และ x_2 ที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด เข้าสู่ 0 ซ้ำ ส่วนพฤติกรรมของตัวแปรสถานะอื่นๆ จะมีเวลาเข้าสู่ 0 ที่เร็วใกล้เคียงกัน ทำให้ต้องเลือกกรณีปรับ Q ใหม่โดยเราจะกรณีปรับ q_{11} มากขึ้นดังนี้

$$\text{ปรับให้ } Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1] \text{ จะทำให้ได้พฤติกรรมของสถานะออกมามีดังรูป}$$



รูปที่ 3.10 พฤติกรรมของสถานะจริง x กรณีปรับ

$$Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1], R = [1]$$

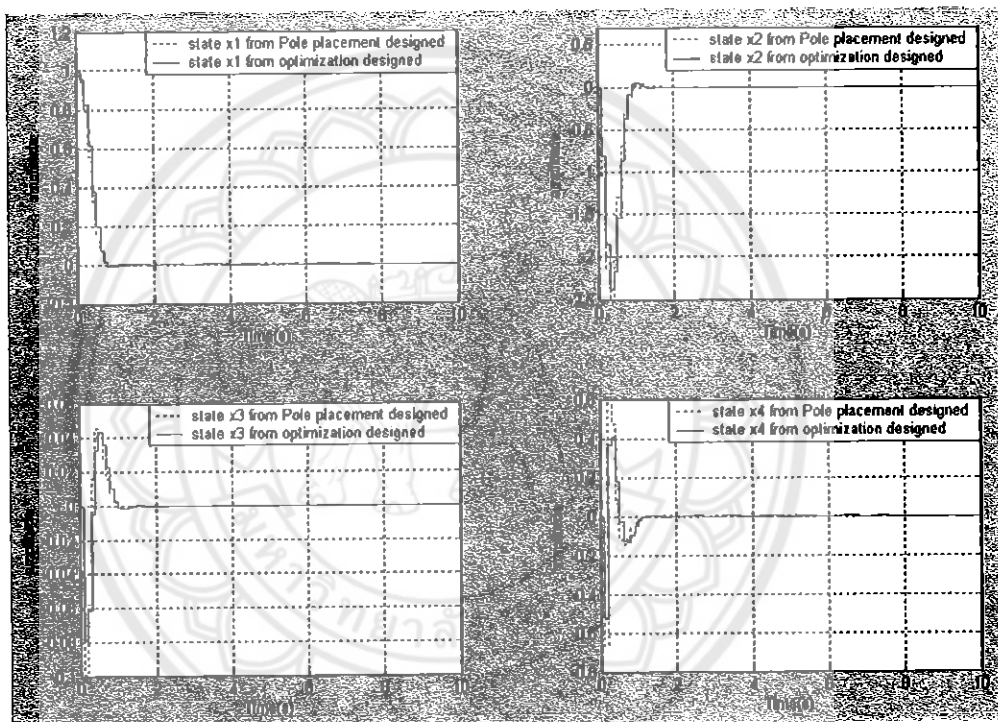
ค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ (performance index: J) = 177.9668

$$P = \begin{bmatrix} 177.9668 & 16.3263 & 130.0674 & -2.0095 \\ 16.3263 & 4.1046 & 30.8931 & -0.3004 \\ 130.0674 & 30.8931 & 390.7342 & -1.2458 \\ -2.0095 & -0.3004 & -1.2458 & 1.0684 \end{bmatrix}$$

$$K = [4.3773 \quad 1.0202 \quad 11.8596 \quad -0.0584]$$

จากรูปที่ 3.10 จะเห็นได้ว่าเมื่อเราปรับ q_{11} มากกว่าเดิมจะมีผลโดยตรงกับตัวแปรสถานะ x_1 โดยจะทำให้ตัวแปรสถานะ x_1 เข้าสู่ 0 เร็วกว่าเดิม และมีผลทำให้ตัวแปรสถานะ x_2 เข้าสู่ 0 เร็วกว่าเดิมตาม แต่ก็ยังผลกับตัวแปรสถานะ x_4 ที่ยังเข้าช้าอยู่แต่ก็ไม่มากจากเดิมมาก ซึ่งถือว่าเป็นการออกแบบที่ดี จึงจะทำการเลือกปรับ q_{44} มากกว่าเดิมก่อนดังนี้

$$\text{ปรับให้ } Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.5 \end{bmatrix}, R = [1] \text{ จะทำให้ได้พฤติกรรมของสถานะออกมาดังรูป}$$



รูปที่ 3.11 พฤติกรรมของสถานะจริง x กรณีปรับ

$$Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5], R = [1]$$

ค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ (performance index: J) = 202.7644

$$P = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.2028 & 0.0245 & 0.2762 & -0.0015 \\ 0.0245 & 0.0070 & 0.0890 & 0.0000 \\ 0.2762 & 0.0890 & 2.2559 & 0.0220 \\ -0.0015 & 0.0000 & 0.0220 & 0.0250 \end{bmatrix}$$

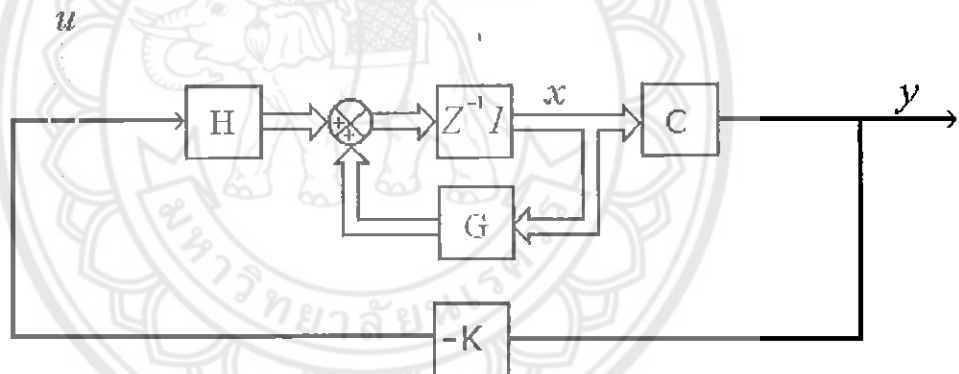
$$K = [2.6655 \quad 0.5432 \quad 5.4593 \quad -0.0337]$$

พิจารณารูปที่ 3.11 จะเห็นได้ว่าเมื่อเราปรับ q_{44} มากขึ้นก็จะทำให้พฤติกรรมของตัวแปรสถานะ x_4 มี เวลาในการเข้าสู่ 0 เร็วขึ้นโดยที่ตัวแปรสถานะอื่นๆ ไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก ซึ่งหลังจากที่ผู้ออกแบบได้ทดลองกรณีปรับ Q ในแบบต่างๆ แล้วนั้นจึงได้รู้ว่าการปรับ Q ด้วยค่า $q_{11} = 50$ และ $q_{44} = 24.5$ โดยค่า q อื่นๆ ให้มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งให้ผลตอบสนองของระบบที่ดีที่สุดทำให้ทราบได้ว่าค่าดังกล่าวนี้เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดแล้วในการออกแบบตัวควบคุม

ซึ่งสรุปได้ว่าการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะในแกนกลหุ่นยนต์โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดและวิธีการวางขั้วจะมีพฤติกรรมของสถานะจริง x มีสมรรถนะในเรื่องความเร็วของเวลาเข้าสู่สถานะคงตัวที่ดี

3.3.2 ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม(Control signal afford: U)

ในการตรวจสอบสมรรถนะของระบบอีกแบบหนึ่งนอกเหนือจากการสังเกตเวลาที่สถานะเข้าสู่ 0 แล้ว ก็คือการหาปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม(U) ซึ่งสิ่งนี้หมายถึงปริมาณการใช้พลังงานที่ต้องป้อนให้กับระบบ ซึ่งการออกแบบระบบที่ดีควรมีการใช้สัญญาณควบคุมที่น้อยที่สุด



รูปที่ 3.12 แผนผังกล่องแสดงตำแหน่งในการวัดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม

จากรูปที่ 3.12 สามารถเขียนสัญญาณควบคุมได้เป็น

$$u(k) = -Kx(k)$$

$$u(k) = -(K_1x_1(k) + K_2x_2(k) + K_3x_3(k) + K_4x_4(k))$$

สิ่งที่มีผล โดยตรงกับปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมของวิธีการออกแบบ โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้นจะขึ้นอยู่กับ การปรับ R โดยตรง(การปรับ Q ก็อาจจะมีผลต่อการ ใช้สัญญาณควบคุมด้วยเช่นเดียวกัน)

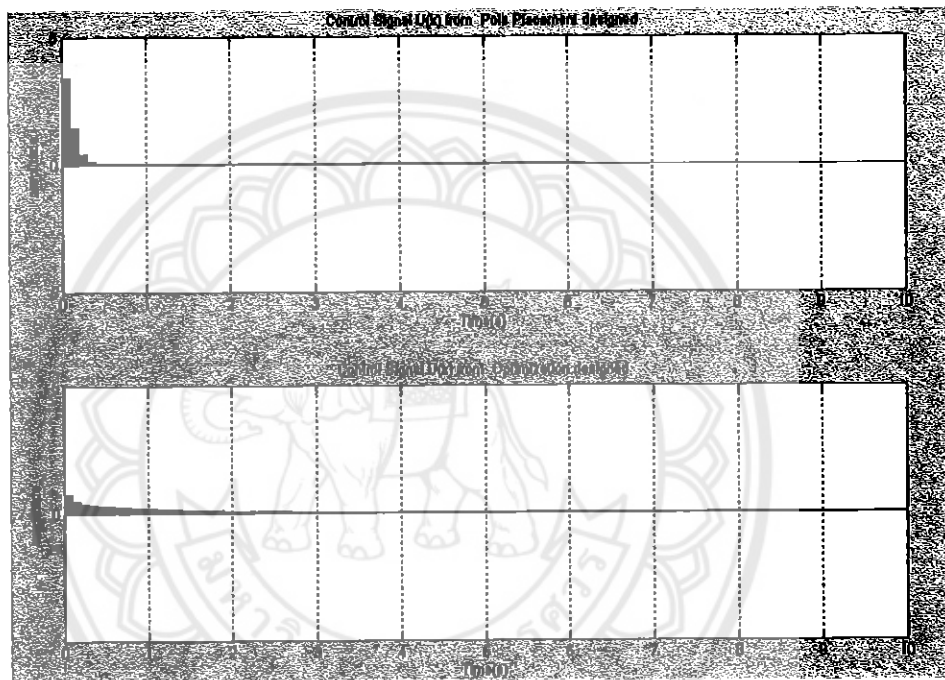
โดยในการวัดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมเราจะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

1. สภาวะเริ่มต้น(initial condition) ของตัวแปรสถานะทุกตัวเท่ากับ

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$$

2. ตำแหน่งขั้วของสถานะจริง x อยู่ที่ $e^{(-5.715 \pm j3.84)T}$, $e^{(-12 \pm j10)T}$ (ขั้วที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว)

จากการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด ขณะยังไม่ได้ทำการปรับตัวแปร Q, R ใดๆ สามารถพิจารณาเปรียบเทียบการใช้สัญญาณควบคุมดังนี้



รูปที่ 3.13 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อปรับ $R = [1]$ และ

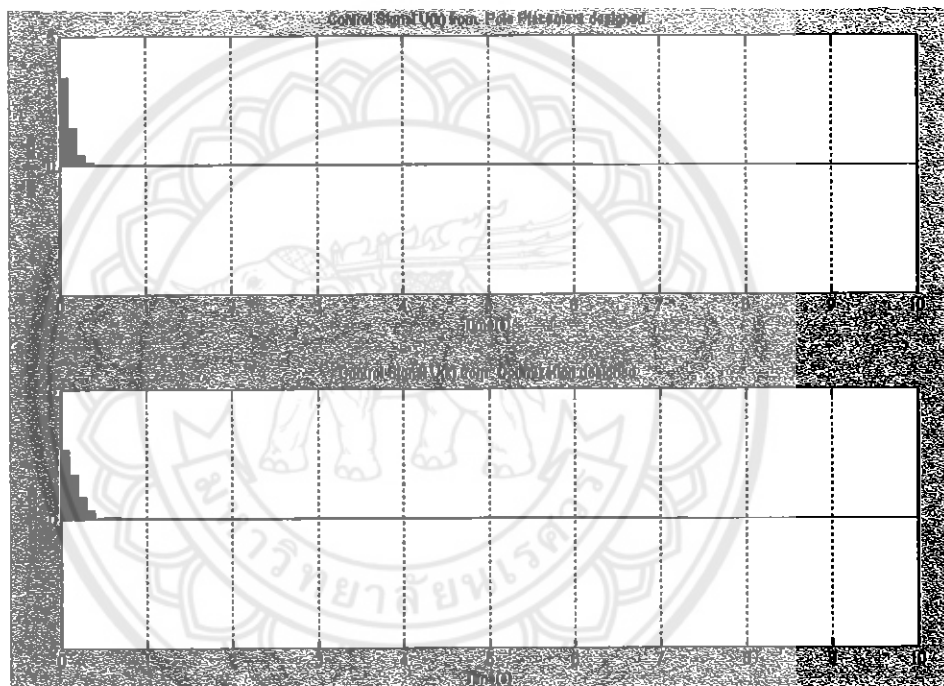
$$Q = [q_{11} = 1, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 1]$$

เมื่อพิจารณารูปจะสังเกตได้ว่าการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดมีปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมค่อนข้างน้อย

แต่เนื่องจากผู้ออกแบบต้องการผลตอบสนองของระบบที่ดีด้วยดังนั้นจึงได้ทำการปรับ Q ด้วยค่าที่ได้มาจากการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดที่พิจารณาจากพฤติกรรมของสถานะซึ่งก็

$$\text{คือ } Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.5 \end{bmatrix}, \text{ และจะเลือกปรับ } R = [1]$$

จะทำให้ได้ปริมาณสัญญาณควบคุมออกมาดังรูป

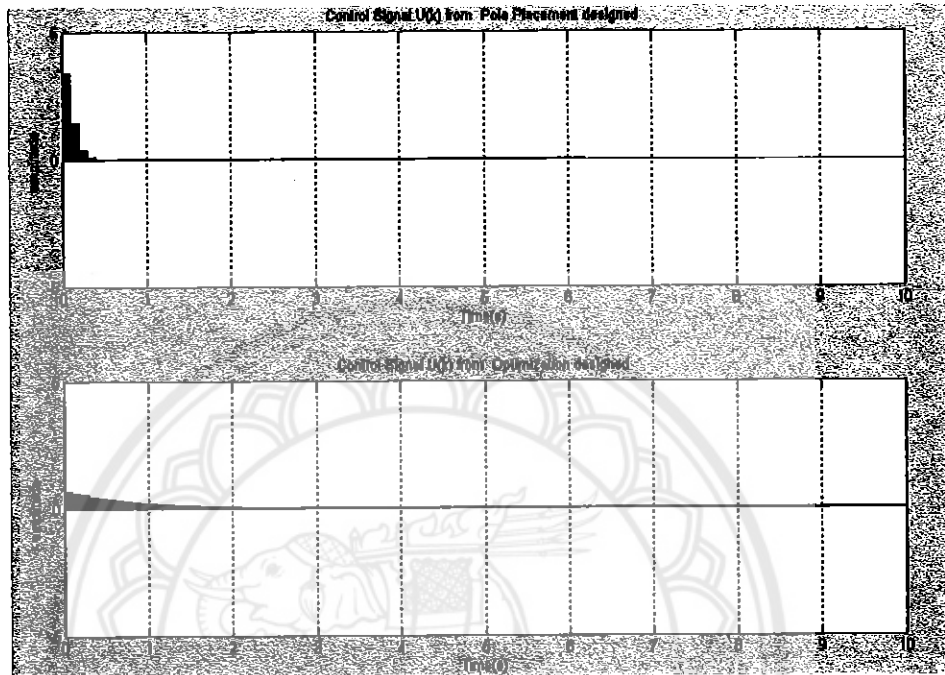


รูปที่ 3.14 แสดงปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อปรับ $R = [1]$ และ

$$Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5]$$

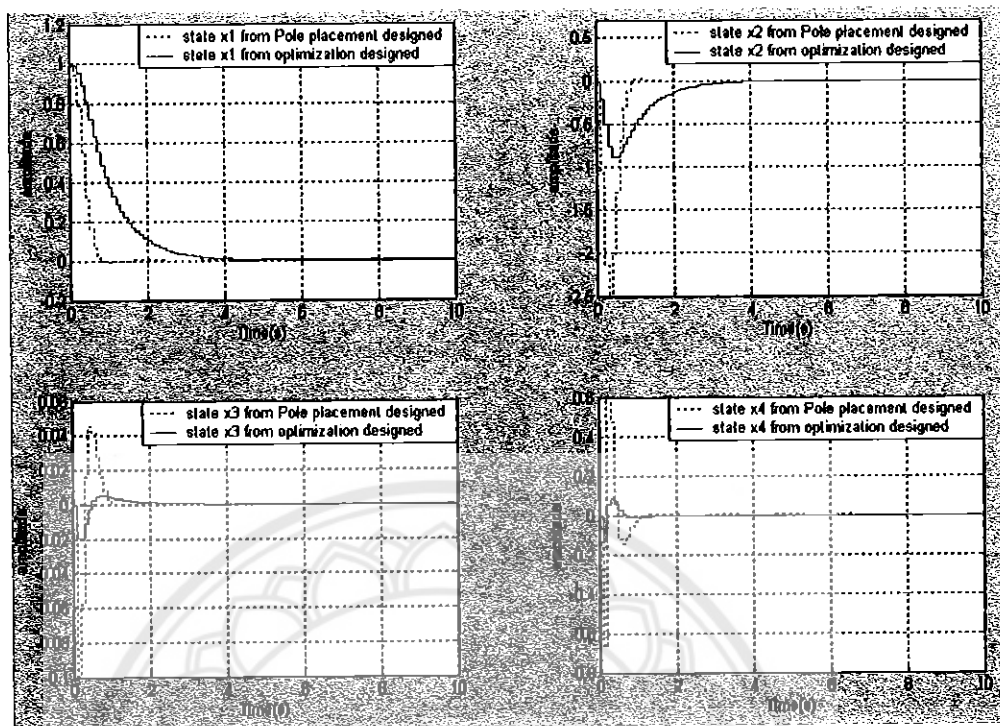
พิจารณารูปที่ 3.14 รูปบนจะเป็นสัญญาณควบคุม $u(k)$ ของระบบที่ได้มาจากการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว ส่วนรูปล่างจะเป็นสัญญาณควบคุม $u(k)$ ของระบบที่ได้มาจากการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดซึ่งปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมก็คือพื้นที่ใต้กราฟจะเห็นได้ว่าเมื่อทำการปรับระบบให้มีผลตอบสนองที่ดีขึ้นจำเป็นที่จะต้องใช้สัญญาณควบคุมมากขึ้นตามไปด้วยและเพื่อต้องการที่จะลดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมให้น้อยลงผู้ออกแบบจึงจะต้องทำการปรับ R ให้มีค่ามากขึ้นดังนี้

เมื่อปรับ $Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.5 \end{bmatrix}$ $R = [100]$ ทำให้ได้ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมดังรูป



รูปที่ 3.15 รูปปริมาณสัญญาณควบคุมเมื่อปรับ $R = [100]$ และ

$$Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5]$$



รูปที่ 3.16 แสดงสถานะของระบบควบคุมเมื่อปรับ $R = [100]$ และ

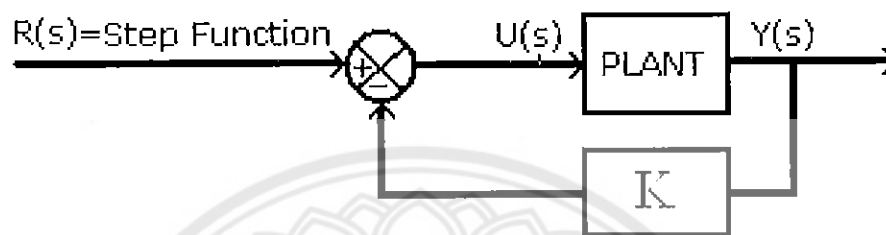
$$Q = [q_{11} = 50, q_{22} = 1, q_{33} = 1, q_{44} = 24.5]$$

เมื่อดูจากรูป 3.15 เมื่อปรับ $R = 100$ จะเห็นว่าปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมก็จะน้อยลง เนื่องมาจากในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะ (minimize performance index) ถ้าเราปรับ R มากกว่า เป้าหมายในการลดค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะก็จะเน้นไปที่สัญญาณควบคุมมากกว่าตัวสถานะ ซึ่งตรงตามหลักการของวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดแต่เมื่อพิจารณารูปที่ 3.16 พฤติกรรมของสถานะเมื่อปรับ $R = 100$ ก็จะทำให้เห็นว่า พฤติกรรมของสถานะเปลี่ยนไปด้วย ซึ่งจะทำให้เกิดความยุ่งยากในการปรับ Q และ R เนื่องจากทั้ง Q และ R ล้วนแต่มีผลต่อค่าตัวบ่งชี้สมรรถนะและเพื่อเป็นการกำจัดปัญหาที่ผู้ออกแบบจะปรับ Q ให้มีค่าคงที่ค่าหนึ่ง โดยเราจะให้ $R = 1$ เนื่องจากปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม $u(k)$ ในตอนที่ไม่มี การปรับ R มีค่าที่ค่อนข้างต่ำอยู่แล้ว

กล่าวโดยสรุป จะเห็นว่านอกจากในคุณสมบัติที่ได้จากการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดในเรื่องของพฤติกรรมของสถานะที่ดีแล้วยังมีข้อดีในเรื่องของปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม (control signal) ที่เราสามารถกำหนดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมโดยการปรับค่า R ได้อีกด้วย

3.3.3 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย(Step response)

ในการพิจารณาผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยนั้น จะเป็นการตรวจสอบผลตอบสนองชั่วคราว (transient response) และผลตอบสนองในสภาวะคงที่(steady-state response) รวมถึงจะตรวจสอบ ตำแหน่งขั้วและศูนย์ของระบบที่ได้จากการออกแบบ โดยในโครงการนี้จะมีขั้นตอนการตรวจสอบผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ ดังนี้



รูปที่ 3.17 แผนผังกล่องผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ

ในกระบวนการสังเคราะห์ระบบเพื่อที่จะสามารถหาผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยจะมีวิธีการดังนี้ การหาตัวควบคุมจะสามารถทำได้เช่นเดียวกับการหาผลตอบสนองในหัวข้อที่กล่าวมาแล้ว

$$\text{โดยจะทำการปรับ } Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.5 \end{bmatrix}, R = [1]$$

ซึ่งจากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม MATLAB จะทำให้ได้ค่า K

$$K = [2.6655 \quad 0.5432 \quad 5.4593 \quad -0.0337]$$

$$\text{และจาก } u(k) = -Kx(k) + r(k)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) - HKx(k) + Hr(k) \\ &= (G - HK)x(k) + Hr(k) \end{aligned}$$

เราจะสามารถสังเคราะห์ฟังก์ชันถ่ายโอนได้คือ

$$\frac{Y}{R} = C(zI - G + HK)^{-1} H$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถณะ

$$\frac{Y}{R} = \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.572z^{-1} + 0.9516z^{-2} - 0.2166z^{-3} + 0.001014z^{-4}}$$

ป้อนสัญญาณเข้าแบบหนึ่งหน่วย $R = \frac{1}{1-z^{-1}}$ เข้าไปทำให้เขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

$$\frac{Y}{R} = \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.572z^{-1} + 0.9516z^{-2} - 0.2166z^{-3} + 0.001014z^{-4}} \times \frac{1}{1-z^{-1}}$$

หาค่าความผิดพลาดในสภาวะคงที่ (error steady state ; e_{ss}) ของระบบได้ ดังนี้

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

$$E(z) = \frac{1 - 1.57749z^{-1} + 0.90942z^{-2} - 0.23052z^{-3} + 0.00105z^{-4}}{1 - 1.572z^{-1} + 0.9516z^{-2} - 0.2166z^{-3} + 0.001014z^{-4}} \times \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})E(z)$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \left(\frac{1 - 1.57749z^{-1} + 0.90942z^{-2} - 0.23052z^{-3} + 0.00105z^{-4}}{1 - 1.572z^{-1} + 0.9516z^{-2} - 0.2166z^{-3} + 0.001014z^{-4}} \right) \times \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$e_{ss} = \frac{0.1025}{0.1640} = 0.625$$

ต่อไปจะแสดงผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย (step response) ที่ได้มาจากการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดและวิธีการวางขั้ว ซึ่งผลตอบสนองที่ได้จะออกแบบค่า K_c เพื่อลดความผิดพลาดที่สภาวะคงตัวเรียบร้อยแล้ว ดังนี้

ค่าคงที่ของตำแหน่งในสภาวะคงที่ (static position error: K_p) จะหามาได้จาก

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.572z^{-1} + 0.9516z^{-2} - 0.2166z^{-3} + 0.001014z^{-4}}$$

$$K_p = \frac{0.06151}{0.16401} = 0.375$$

ทำให้ต้องออกแบบอัตราขยาย(gain) K_c เพื่อให้ความผิดพลาดในสภาวะคงที่เป็น 0 ได้จาก

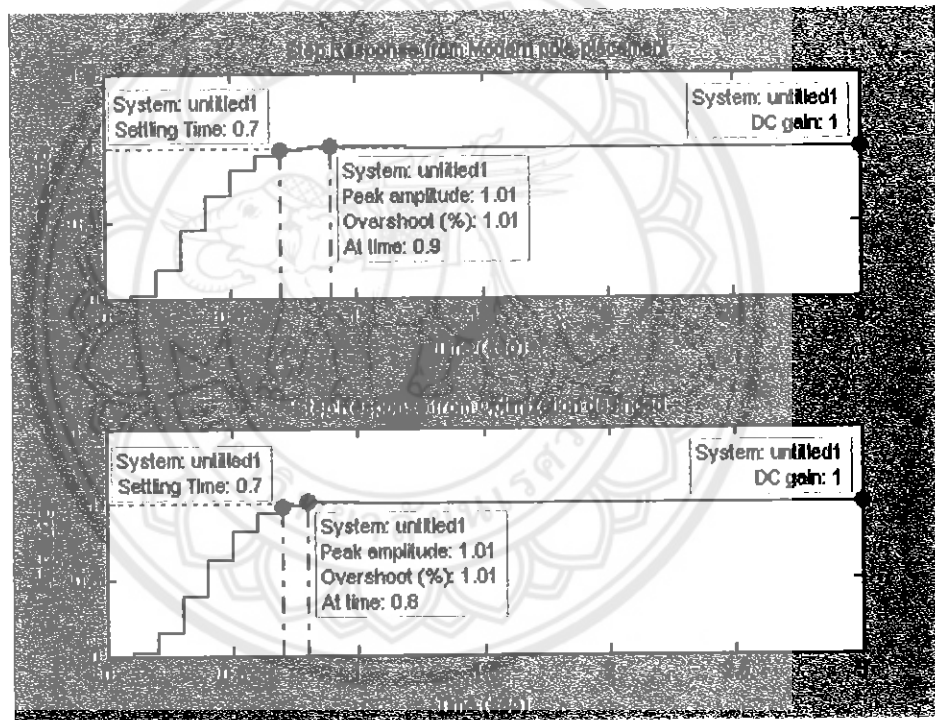
$$K_c = \frac{1}{K_p}$$

$$K_c = \frac{1}{0.375} = 2.666$$

จะสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ได้เป็น

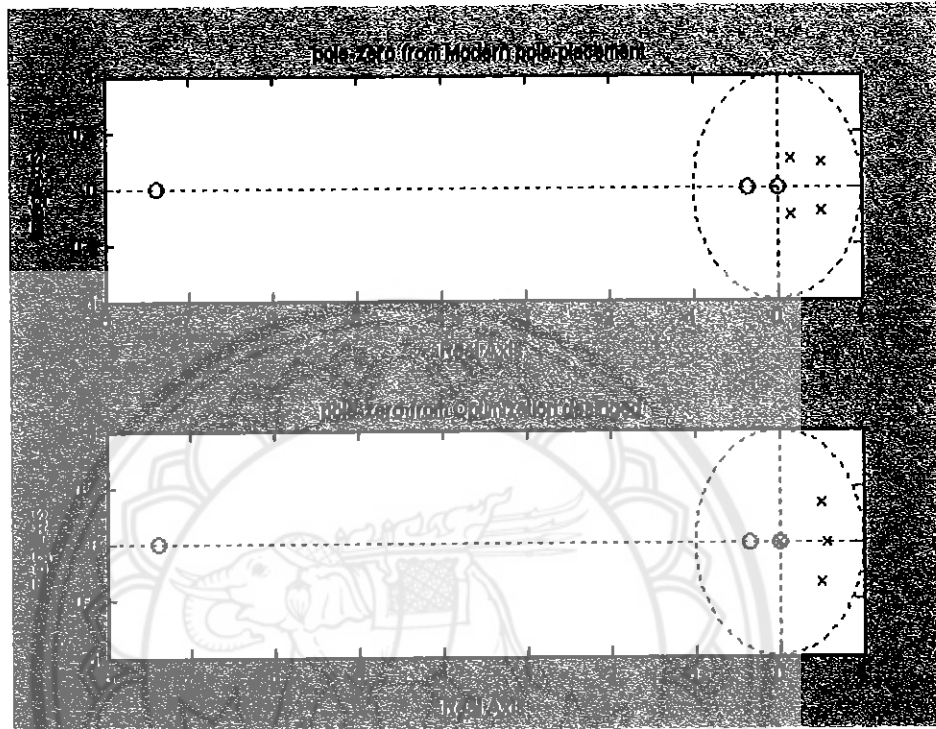
$$\frac{Y}{R} = \frac{0.005449z^{-1} + 0.04218z^{-2} + 0.01392z^{-3} - 0.0000371z^{-4}}{1 - 1.572z^{-1} + 0.9516z^{-2} - 0.2166z^{-3} + 0.001014z^{-4}} \times 2.666$$

ทำการตรวจสอบเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบหลังจากที่ได้ออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะและออกแบบค่า K_c เข้าไป จะทำให้ผลตอบสนองออกมา ดังนี้



รูปที่ 3.18 ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วย(step response) ระหว่างการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้วและวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด

จากรูปที่ 3.18 จะเห็นได้ว่าเมื่อเราปรับ Q และ R ที่เหมาะสมแล้วจะทำให้ผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยของการออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด มีผลตอบสนองชั่วคราว (transient response) และมีค่าพุ่งเกิน (overshoot) ที่ใกล้เคียงกับการออกแบบโดยใช้วิธีการวางขั้ว



รูปที่ 3.19 ตำแหน่งขั้ว-ศูนย์ (pole-zero) ของการออกแบบ โดยใช้วิธีการวางขั้วและวิธีการเหมาะสมที่สุด

กล่าวโดยสรุปจะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะของระบบที่ได้จากการออกแบบที่ผ่านมา การออกแบบโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization: LQR) จะให้ผลตอบสนองของระบบที่ดีเช่นเดียวกับการออกแบบโดยวิธีการวางขั้วทั้งในเรื่อง พฤติกรรมของสถานะ, ปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมรวมไปถึงผลตอบสนองแบบหนึ่งหน่วยดังที่ได้แสดงไว้แล้ว

3.3.4 ปัญหาการกำจัดสัญญาณรบกวน (Disturbance rejection problem)

ในการออกแบบระบบควบคุมดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นนี้เป็นการออกแบบทั่วไปที่ผู้ออกแบบได้ให้ความสนใจกับเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ โดยมุ่งเน้นที่ผลตอบสนองของระบบเท่านั้น แต่ในหัวข้อนี้ผู้ออกแบบจะทำการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะที่สามารถกำจัดสัญญาณรบกวนในรูปความถี่ต่ำ (disturbance) ได้ เนื่องจากในการใช้งานจริงระบบก็มีโอกาสที่จะต้องพบกับปัญหานี้ อันจะทำให้ระบบขาดเสถียรภาพได้ ซึ่งการออกแบบระบบควบคุมแบบนี้เราจะต้องออกแบบโดยมีการขยายระบบ (augment) ดังนี้

จากหัวข้อที่ 2.4.4 สมการระบบเวลาวิฤตแบบไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k + Ew_k$$

$$y_k = Cx_k$$

โดยที่ w_k คือสัญญาณรบกวน

สมมติว่าเราทราบรูปแบบของสัญญาณรบกวน

$$z_{k+1} = G_d z_k$$

$$w_k = C_d z_k$$

จากความสัมพันธ์เราสามารถขยายให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & EC_d \\ 0 & G_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกกำหนดให้ $\xi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$, $G_a = \begin{bmatrix} G & EC_d \\ 0 & G_d \end{bmatrix}$, $H_a = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$

จะสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\xi_{k+1} = G_a \xi_k + H_a u_k$$

$$y_k = C_a \xi_k$$

ในกรณีนี้เราได้สมมติว่าเราทราบลักษณะของสัญญาณรบกวน

$$\text{โดยกำหนดให้ } E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -39.4784 & 0 \end{bmatrix}, C_d = [1 \quad 0]$$

ซึ่งเมื่อทำการแปลงวิญจะให้เป็น

$$E = \begin{bmatrix} 0.0093 \\ 0.1821 \\ -0.0016 \\ -0.0317 \end{bmatrix}, G_d = \begin{bmatrix} 0.8090 & 0.0935 \\ -3.6932 & 0.8090 \end{bmatrix}, C_d = [0.9445 \quad 0.0322]$$

เราจึงสามารถที่จะสังเคราะห์ หาค่า G_a, H_a, C_a ได้ ซึ่งจากการที่ได้ทดลองใช้ระบบ(plant) จากตัวอย่างในหัวข้อที่ผ่านมา โดยการอาศัยโปรแกรม MATLAB คำนวณจึงได้ค่าดังนี้

$$G_a = \begin{bmatrix} 1 & 0.0910 & 0.4350 & -0.0158 & 0.0090 & 0.0003 \\ 0 & 0.8347 & 8.8697 & -0.1058 & 0.1699 & 0.0090 \\ 0 & -0.0158 & 0.2248 & 0.0125 & -0.0015 & -0.0000 \\ 0 & -0.1058 & -6.9991 & -0.1217 & -0.0298 & -0.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8090 & 0.0935 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.6932 & 0.8090 \end{bmatrix}, H_a = \begin{bmatrix} 0.0167 \\ 0.3073 \\ 0.0295 \\ 0.1971 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_a = [1 \quad 0 \quad -0.38 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

และจากค่าที่ได้เราจึงทำการหาตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ K ได้โดยกำหนดให้

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.3800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.38 & 0 & 0.1444 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 0.0316$$

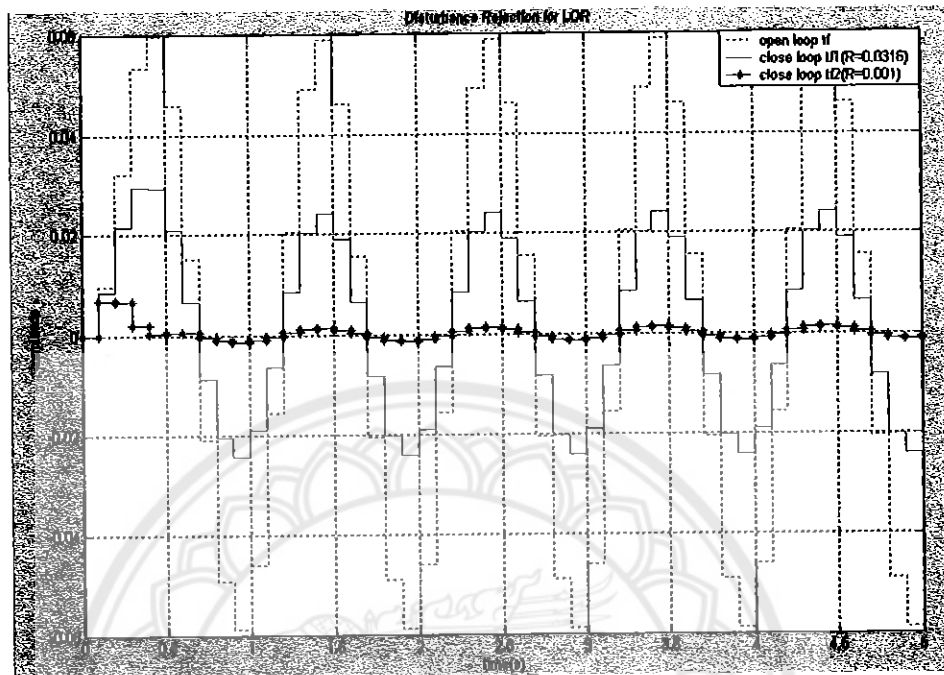
จะได้

$$K = [4.0351 \quad 0.8478 \quad 10.0378 \quad -0.0413 \quad 0.1940 \quad 0.0406]$$

และเมื่อ $R = 0.001$

$$K = [12.4059 \quad 2.2116 \quad 21.6171 \quad -0.2130 \quad 0.4849 \quad 0.0406]$$

ซึ่งหลังจากการออกแบบตัวควบคุมแล้วเราจึงทำการทดสอบผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะที่ได้ซึ่งจะมีผลดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 3.20 ผลตอบสนองของการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ โดยการกำจัดสัญญาณรบกวน(disturbance rejection)

จากรูปจะสังเกตเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบควบคุมที่ได้ออกแบบไว้สามารถที่จะกำจัดสัญญาณรบกวนที่เข้ามาในระบบได้ค่อนข้างมาก ซึ่งจะสามารถที่กำจัดได้มากขึ้นถ้าหาก R มีค่าลดลง เนื่องจากเมื่อพิจารณาสมการบังคับสมรรถนะ(สมการที่ 2.4.3) จะเห็นว่าเมื่อ R มีค่าลดลง ระบบจะมีปรับตัวเพื่อต้องการรักษาสภาพให้คงที่ ซึ่งจะส่งผลให้ตัวแปรสถานะ x มีค่าลดลง(เนื่องจาก Q มีค่าคงที่) ระบบจึงมีแนวโน้มที่จะสามารถลดสัญญาณรบกวนได้มากขึ้น

3.3.5 ปัญหาการตามสัญญาณ(Tracking problem)

การออกแบบระบบควบคุมในบางครั้งผู้ออกแบบต้องการที่จะให้สัญญาณที่ได้จากการควบคุม มีลักษณะที่เหมือนกับสัญญาณที่เข้าไปในระบบ ที่จะเรียกว่า “การตามสัญญาณ” ซึ่งหลังจากที่ได้ออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดมาแล้วในหัวข้อ 3.3.3 จะสามารถพิจารณาปัญหาการตามสัญญาณของระบบได้ดังนี้

จากสมการระบบเวลาวิฤตแบบไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาคือ

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k$$

$$y_k = Cx_k$$

เมื่อกำหนดให้สัญญาณเข้า $r_{k+1} = Gr_k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{k+1} - r_{k+1} &= Gx_k + Hu_k - Gr_k \\ &= G(x_k - r_k) + Hu_k \end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ $\xi_k = x_k - r_k$ โดยที่ r_k มีระบบพลวัตเหมือนกับ x_k และเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\xi_{k+1} = G\xi_k + Hu_k$$

โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการบ่งชี้สมรรถนะดังนี้คือ

$$J = \xi_N^* S \xi_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\xi_k^* Q \xi_k + u_k^* R u_k)$$

และมีสมการสัญญาณควบคุมตามรูปที่ 2.7 คือ

$$\begin{aligned} u_k &= -K(x_k - r_k) \\ &= -K\xi_k \end{aligned}$$

โดยที่ $G = \begin{bmatrix} 1 & 0.0910 & 0.4350 & -0.0158 \\ 0 & 0.8347 & 8.8697 & -0.1058 \\ 0 & -0.0158 & 0.2248 & 0.0125 \\ 0 & -0.1058 & -6.9991 & -0.1217 \end{bmatrix}$

$$H = \begin{bmatrix} 0.0167 \\ 0.3073 \\ 0.0295 \\ 0.1971 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad -0.3800 \quad 0], D = [0]$$

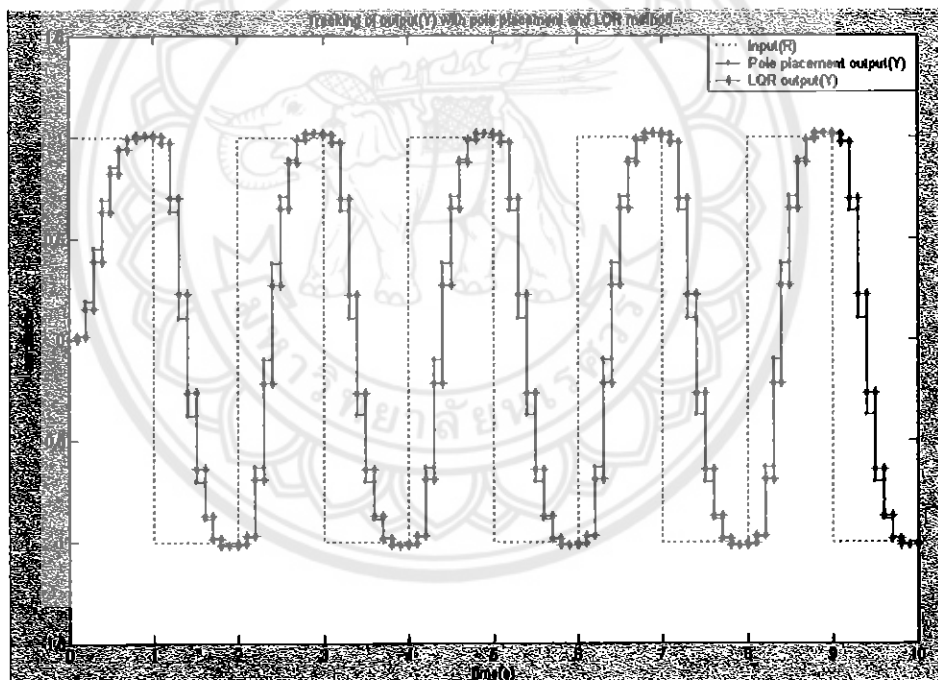
และจากค่าที่ได้เราจึงทำการหาตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ K ได้
โดยปรับให้

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.5 \end{bmatrix}, R = [1]$$

ด้วยการอาศัยโปรแกรม MATLAB คำนวณจะได้

$$K = [2.6655 \quad 0.5432 \quad 5.4593 \quad -0.0337]$$

ในหัวข้อนี้ผู้ออกแบบจึงจะแสดงผลของการออกแบบระบบควบคุมด้วยปัญหาการตามสัญญาณ ซึ่งสังเกตผลตอบสนองของระบบได้ดังรูป



รูปที่ 3.21 ผลตอบสนองของการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับสถานะในปัญหา
การตามสัญญาณ(tracking problem)

จากรูปแสดงผลตอบสนองของระบบระหว่างการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการวางขั้วและวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด จะเห็นได้ว่าการออกแบบด้วยวิธีทั้งสองนอกจากระบบจะมีผลตอบสนองที่ดีแล้วระบบยังมีความสามารถในการตามสัญญาณได้อีกด้วย

บทที่ 4

บทสรุป

4.1 สรุปและวิเคราะห์ผล

หลังจากที่เราได้ทำการออกแบบและทดสอบผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบป้อนกลับแบบต่อเนื่อง โดยการวางขั้วและวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR) แล้วในบทที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่าการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะทั้งสองวิธีโดยภาพรวมแล้วล้วนส่งผลให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะตลอดจนผลตอบสนองที่ดีขึ้นกล่าวคือ จากเริ่มแรกที่ระบบค่อนข้างไร้เสถียรภาพ แต่หลังจากทำการออกแบบตัวควบคุมให้กับระบบแล้วทำให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะที่ดีดังจะเห็นได้จากค่าพุ่งเกิน(overshoot) มีค่าต่ำและมีเวลาเข้าสู่สถานะคงตัว(T_s) ที่เร็ว

ซึ่งจะสังเกตได้ว่าการออกแบบโดยวิธีการวางขั้วนั้นเราสามารถที่จะออกแบบให้ระบบมีผลตอบสนองที่ดีขึ้นได้ โดยการเลือกวางขั้วซึ่งขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ออกแบบเองว่าต้องการผลตอบสนองของระบบดีอย่างน้อยเพียงใด ส่วนในการออกแบบระบบควบคุมโดยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด(LQR) นั้นก็สามารถที่จะปรับผลตอบสนองของระบบให้ดีขึ้นได้โดยวิธีการเลือกปรับ(weight) Q, R ด้วยค่าที่เหมาะสมซึ่งหากจะทำการเปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบจากการออกแบบทั้งสองวิธีแล้ว นับว่าเป็นสิ่งที่ทำได้ค่อนข้างลำบาก เนื่องจากทั้งสองวิธีล้วนมีข้อดีและข้อเสียที่แตกต่างกัน แต่กระนั้นข้อดีที่เห็นได้ชัดของการออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะโดยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด ก็คือในเรื่องของปริมาณการใช้สัญญาณควบคุม u ซึ่งจะเห็นได้ว่าการออกแบบด้วยวิธีนี้ จะใช้ปริมาณสัญญาณควบคุมที่ค่อนข้างน้อยและสามารถกำหนดปริมาณการใช้สัญญาณควบคุมได้ อีกทั้งเรายังสามารถที่จะพิจารณาการกำจัดสัญญาณรบกวน(disruebance rejection) และปัญหาการตามสัญญาณ(tracking problem) รวมด้วยได้ดังจะเห็นว่าถ้าเราทำการปรับ(weight) ค่า R น้อยลงจะส่งผลให้ระบบสามารถที่จะกำจัดสัญญาณรบกวนได้มากขึ้นดังกราฟรูปที่ 3.21

4.2 ข้อเสนอแนะ

1. ควรจะมีการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการออกแบบระบบควบคุมย้อนกลับสถานะในระบบเวลาต่อเนื่อง(continuous-time system) กับระบบเวลาวิฤต(discrete-time system)
2. เนื่องจากในการทำโครงการนี้ได้นำเสนอการออกแบบระบบควบคุมที่เป็นไปในทางทฤษฎี ซึ่งผลของการออกแบบนั้นถ้าหากนำเอาตัวควบคุมที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับระบบจริง ผลตอบสนองของระบบที่ได้อาจจะไม่เป็นไปอย่างที่คุณออกแบบต้องการก็ได้ ดังนั้นจึงควรจะมีการนำเอาการออกแบบนี้ไปใช้กับระบบจริงๆ เพื่อจะได้ทราบข้อบกพร่องและทำการแก้ไขได้ถูกต้อง
3. ในการคำนวณสมการที่ 2.4.18 หน้า 28 ควรจะมีการพิสูจน์ว่าเป็นจริง
4. ควรมีการพิสูจน์หาผลเฉลยทั่วไปของสมการที่ 2.4.2 โดยที่มีสมการระบบเวลาวิฤตแบบไม่ต่อเนื่องเปลี่ยนแปลงตามเวลาดังนี้ $x_{k+1} = Gx_k + Hu_k + Ew_k$ และมีผลเฉลยทั่วไปดังนี้ $J_{opt}(x_N, N) = x_N^* Q x_N + 2b_N^* x_N + c_N$ เพื่อที่จะหาค่าของสัญญาณควบคุมที่ได้รับผลมาจากสัญญาณรบกวน



เอกสารอ้างอิง

- [1] K. Ogata. **Discrete-time control systems**. International Edition: Prentice Hall International Inc. 1987
- [2] K. Ogata. **Modern Control Engineering**. 4th Edition: Prentice Hall. New Jersey. USA. 2000
- [3] P. Dorato and C. Abdallah and V. Cerome. **Linear-Quadratic Control**: Prentice Hall. New Jersey. USA. 1995
- [4] R. T. Stefani and C. J. Sarant. Jr and B. Shahian and G. H. Hostetter. **Design of Feedback Controls System**: Harcourt Brace College Publishers. New Jersey. USA. 1994
- [5] D. Bunjerdpongchai. **A Case study of Robust Control Experiment on One-Link Flexible Robot Arm**
- [6] W.T. Baumann. **Lecture Note in Multivariable Control System**. Dept of Electrical and Computer Engineering. Virginia Polytechnic Institution and State University (VPI & SU)
- [7] รศ. ดร. มนัส สัจจวรศิลป์. วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณ์ กรุงเทพมหานคร. ประเทศไทย: สำนักพิมพ์ อิน โฟเพรส. 2543

ภาคผนวก

โปรแกรมคอมพิวเตอร์

MATLAB Program 1: state_traject	Description: State Trajectory Plot
<pre> %%%%%%%%%% % title: State Trajectory Plot % % File Name: state_traject % % Written by: Mr. Teerapon Pawadee 44362267 % % Mr. Yuttana Panyagaew 44362358 % %%%%%%%%%% clc clear all %State space plant A=[0 1 0 0;0 -4.22 0 -13.81;0 0 0 1;0 -13.81 -559.78 -45.21]; B=[0;7.85;0;25.71]; C=[1 0 -0.38 0]; D=[0]; T=0.1; %sampling time [G,H]=c2d(A,B,T); %discretization %Design by pole placement method pole1=exp((-5.715-3.84i)*T); %pole1 for state feedback pole2=exp((-5.715+3.84i)*T); %pole2 for state feedback pole3=exp((-12-10i)*T); %pole3 for state feedback pole4=exp((-12+10i)*T); %pole4 for state feedback pole_place=[pole1 pole2 pole3 pole4]; K_pole=acker(G,H,pole_place); %Gain K Gaug_pole=[G-H*K_pole]; %augment G Haug=zeros(size(1:4)); %augment H Caug=eye(4); %augment C Daug=zeros(size(1:4)); %augment D X0=[1 0 0 0]; %initial condition of State X(0) </pre>	

```

SYS_Xpole= ss(Gaug_pole,Haug,Caug,Daug,T);
t=0:T:10;
[Y_pole,T_pole,X_pole] = initial(SYS_Xpole,X0,t);
X1_pole=X_pole(:,1);           %state X1 pole placement
X2_pole=X_pole(:,2);           %state X2 pole placement
X3_pole=X_pole(:,3);           %state X3 pole placement
X4_pole=X_pole(:,4);           %state X4 pole placement

%linear Quadratic
%Designed System By Optimization
q11=input('Choose Weighting Function q11 ='); %Weighting q11
q22=input('Choose Weighting Function q22 ='); %Weighting q22
q33=input('Choose Weighting Function q33 ='); %Weighting q33
q44=input('Choose Weighting Function q44 ='); %Weighting q44
Q=diag([q11 q22 q33 q44]); %Matrix Q
R = input('Choose Weighting Function for R = '); %Weighting R
[K_opt,P,E] = DLQR(G,H,Q,R); %Optimal Regulator
Gaug_opt=[G-H*K_opt];
SYS_Xopt=ss(Gaug_opt,Haug,Caug,Daug,T);
[Y_opt,T_opt,X_opt] = initial(SYS_Xopt,X0,t);

X1_opt=X_opt(:,1); %state X1 LQR
X2_opt=X_opt(:,2); %state X2 LQR
X3_opt=X_opt(:,3); %state X3 LQR
X4_opt=X_opt(:,4); %state X4 LQR

%Performance Index
J=[X1_opt(1) X2_opt(1) X3_opt(1) X4_opt(1)]*P*[X1_opt(1) X2_opt(1) X3_opt(1) X4_opt(1)];
disp('Performance index(J) is ');disp(J)

[Td_pole,Xd1_pole]=stairs(T_pole,X1_pole);
[Td_pole,Xd2_pole]=stairs(T_pole,X2_pole);

```

```
[Td_pole,Xd3_pole]=stairs(T_pole,X3_pole);
[Td_pole,Xd4_pole]=stairs(T_pole,X4_pole);
[Td_opt,Xd1_opt]=stairs(T_opt,X1_opt);
[Td_opt,Xd2_opt]=stairs(T_opt,X2_opt);
[Td_opt,Xd3_opt]=stairs(T_opt,X3_opt);
[Td_opt,Xd4_opt]=stairs(T_opt,X4_opt);

figure(1);
subplot(2,2,1),plot(Td_pole,Xd1_pole,'-',Td_opt,Xd1_opt);xlabel('Time(s)');ylabel('amplitude');
legend('state x1 from Pole placement designed','state x1 from optimization designed',0);grid
subplot(2,2,2),plot(Td_pole,Xd2_pole,'-',Td_opt,Xd2_opt);xlabel('Time(s)');ylabel('amplitude');
legend('state x2 from Pole placement designed','state x2 from optimization designed',0);grid
subplot(2,2,3),plot(Td_pole,Xd3_pole,'-',Td_opt,Xd3_opt);xlabel('Time(s)');ylabel('amplitude');
legend('state x3 from Pole placement designed','state x3 from optimization designed',0);grid
subplot(2,2,4),plot(Td_pole,Xd4_pole,'-',Td_opt,Xd4_opt);xlabel('Time(s)');ylabel('amplitude');
legend('state x4 from Pole placement designed','state x4 from optimization designed',0);grid
```

MATLAB Program 2: step_response	Description: Step Response Plot
<pre> %%%%%%%%%% % title: Step Response Plot % % File Name: step_response % % Written by: Mr. Teerapon Pawadee 44362267 % % Mr. Yuttana Panyagaew 44362358 % %%%%%%%%%% clc clear all %State space plant A=[0 1 0 0;0 -4.22 0 -13.81;0 0 0 1;0 -13.81 -559.78 -45.21]; B=[0;7.85;0;25.71]; C=[1 0 -0.38 0]; D=[0]; T=0.1; %sampling time [G,H]=c2d(A,B,T); %discretization %Design by pole placement method pole1=exp((-5.715-3.84i)*T); %pole1 for state feedback pole2=exp((-5.715+3.84i)*T); %pole2 for state feedback pole3=exp((-12-10i)*T); %pole3 for state feedback pole4=exp((-12+10i)*T); %pole4 for state feedback pole_place=[pole1 pole2 pole3 pole4]; K_pole=acker(G,H,pole_place); %Gain K Gclose_pole=[G-H*K_pole]; %close loop [num_pole,den_pole] = ss2tf(Gclose_pole,H,C,D); tf_pole=fitf(num_pole,den_pole,T); %transfer function of pole placement kc_pole=sum(den_pole)/sum(num_pole); sys_pole=tf_pole*kc_pole; %transfer function of pole placement with K %linear Quadratic %Designed System By Optimization </pre>	


```

q11=input('Choose Weighting Function q11 ='); %Weighting q11
q22=input('Choose Weighting Function q22 ='); %Weighting q22
q33=input('Choose Weighting Function q33 ='); %Weighting q33
q44=input('Choose Weighting Function q44 ='); %Weighting q44
Q=diag([q11 q22 q33 q44]); %Matrix Q
R = input('Choose Weighting Function for R = '); %Weighting R
[K_opt,P,E] = DLQR(G,H,Q,R); %Optimal Regulator
GG_opt=[G-H*K_opt];
[num_opt,den_opt] = ss2tf(GG_opt,H,C,D);
tf_opt=filt(num_opt,den_opt,T); %transfer function of LQR
kc_opt=sum(den_opt)/sum(num_opt);
sys_opt=tf_opt*kc_opt; %transfer function of LQR with K

figure(1)
subplot(2,1,1);step(sys_pole,3),title('Step Response from Modern pole-placement')
subplot(2,1,2);step(sys_opt,3),title('Step Response from Optimization desinged')

figure(2)
subplot(2,1,1);pzmap(tf_pole),title('pole-zero from Modern pole-placement')
subplot(2,1,2);pzmap(tf_opt),title('pole-zero from Optimization desinged')

```

MATLAB Program 3: control_sign_u	Description: Control Signal U Plot
<pre> %%%%%%%%%% % title: Control signal U Plot % % File Name: control_sign_u % % Written by: Mr. Teerapon Pawadee 44362267 % % Mr. Yuttana Panyagaew 44362358 % %%%%%%%%%% clc clear all %State space plant A=[0 1 0 0;0 -4.22 0 -13.81;0 0 0 1;0 -13.81 -559.78 -45.21]; B=[0;7.85;0;25.71]; C=[1 0 -0.38 0]; D=[0]; T=0.1; %sampling time [G,H]=c2d(A,B,T); %discretization %Design by pole placement method pole1=exp((-5.715-3.84i)*T); %pole1 for state feedback pole2=exp((-5.715+3.84i)*T); %pole2 for state feedback pole3=exp((-12-10i)*T); %pole3 for state feedback pole4=exp((-12+10i)*T); %pole4 for state feedback pole_place=[pole1 pole2 pole3 pole4]; K_pole=acker(G,H,pole_place); %Gain K Gaug_pole=[G-H*K_pole]; %augment G Haug=zeros(size(1:4))'; %augment H Caug=eye(4); %augment C Daug=zeros(size(1:4))'; %augment D X0=[1 0 0 0]'; %initial condition of State X(0) SYS_Xpole= ss(Gaug_pole,Haug,Caug,Daug,T); t=0:T:10; </pre>	

```

[Y_pole,T_pole,X_pole] = initial(SYS_Xpole,X0,t);

X1_pole=X_pole(:,1);           %state X1 pole placement
X2_pole=X_pole(:,2);           %state X2 pole placement
X3_pole=X_pole(:,3);           %state X3 pole placement
X4_pole=X_pole(:,4);           %state X4 pole placement

%linear Quadratic
%Designed System By Optimization
q11=input('Choose Weighting Function q11 ='); %Weighting q11
q22=input('Choose Weighting Function q22 ='); %Weighting q22
q33=input('Choose Weighting Function q33 ='); %Weighting q33
q44=input('Choose Weighting Function q44 ='); %Weighting q44
Q=diag([q11 q22 q33 q44]); %Matrix Q
R = input('Choose Weighting Function for R = '); %Weighting R
[K_opt,P,E] = DLQR(G,H,Q,R); %Optimal Regulator
Gaug_opt=[G-H*K_opt];
SYS_Xopt=ss(Gaug_opt,Haug,Caug,Daug,T);
[Y_opt,T_opt,X_opt] = initial(SYS_Xopt,X0,t);

X1_opt=X_opt(:,1); %state X1 LQR
X2_opt=X_opt(:,2); %state X2 LQR
X3_opt=X_opt(:,3); %state X3 LQR
X4_opt=X_opt(:,4); %state X4 LQR

%Performance Index
J=[X1_opt(1) X2_opt(1) X3_opt(1) X4_opt(1)]*P*[X1_opt(1) X2_opt(1) X3_opt(1) X4_opt(1)];
disp('Performance index(J) is ');disp(J)

%Plot U
U_pole=abs(-([K_pole]*[X1_pole X2_pole X3_pole X4_pole])); %U from Pole placement
U_opt=abs(-([K_opt]*[X1_opt X2_opt X3_opt X4_opt])); %U from Optimization

```

```
%Check Rank of Observability Matrix
%Check Rank of Observability Matrix
disp('Maximum Energy Of Control Signal U(k) form Modern Pole Placement designed is');
disp(max(U_pole));
disp('Maximum Energy Of Control Signal U(k) form optimization designed is');
disp(max(U_opt));
disp('Total Energy Of Control Signal U(k) form Modern Pole Placement designed is');
disp(sum(U_pole*T));
disp('Total Energy Of Control Signal U(k) form optimization designed is');
disp(sum(U_opt*T));

[x_pole,y_pole]=stairs(T_pole,U_pole);
[x_opt,y_opt]=stairs(T_opt,U_opt);
figure(1);SUBPLOT(2,1,1),area(x_pole,y_pole),grid,axis([0 10 -5 5]),XLABEL('Time(s)');
    YLABEL('amplitude'),title('Control Signal U(k) from Pole Placement designed')
SUBPLOT(2,1,2),area(x_opt,y_opt),grid,axis([0 10 -5 5]),XLABEL('Time(s)');
    YLABEL('amplitude'),title('Control Signal U(k) from Optimization designed')
```

MATLAB Program 4: disturb_reject	Description: Disturbance Reject Plot
<pre> %%%%%%%%%% % title: Disturbance Reject Plot % % File Name: disturb_reject % % Written by: Mr. Teerapon Pawadee 44362267 % % Mr. Yuttana Panyagaew 44362358 % %%%%%%%%%% clear all; clf; clc; %State space plant A=[0 1 0 0;0 -4.22 0 -13.81;0 0 0 1;0 -13.81 -559.78 -45.21]; B=[0;7.85;0;25.71]; C=[1 0 -0.38 0]; D=[0]; %state space disturbance E=[0 2 0 0]'; Ad=[0 1;-4*pi*pi 0]; Cd=[1 0]; %augment Aaug=[A E*Cd;zeros(2,4) Ad]; Baug=[B;zeros(2,1)]; Caug=[C zeros(1,2)]; Daug=D; T=0.1; %sampling time [G,H]=c2d(A,B,T); %discretization [Gaug,Haug]=c2d(Aaug,Baug,T); %discretization %close loop response in time domain Q=C'*C; %Matrix Q R1=10^-1.5; R2=10^-3; %Weighting R Qaug=[Q zeros(4,2);zeros(2,4) zeros(2,2)]; %Augment matrix Q [K1,P1]=dlqr(Gaug,Haug,Qaug,R1); %Optimal Regulator [K2,P2]=dlqr(Gaug,Haug,Qaug,R2); %Optimal Regulator %close loop part Gclose1=Gaug-Haug*K1; Hclose1=0*Haug; </pre>	

```

Cclose1=Caug; Dclose1=Daug;
Gclose2=Gaug-Haug*K2; Hclose2=0*Haug;
Cclose2=Caug; Dclose2=Daug;

%state space part
sys_open=ss(Gaug,Haug,Caug,Daug,T);           %state space open loop
sys_close1=ss(Gclose1,Hclose1,Cclose1,Dclose1,T); %state space close loop1
sys_close2=ss(Gclose2,Hclose2,Cclose2,Dclose2,T); %state space close loop2
t0=0:T:5;
u=zeros(1,length(t0));
init=[0 0 0 1 0]';
[y_op,t_op,x_op]=lsim(sys_open,u,t0,init);
[y_cl1,t_cl1,x_cl1]=lsim(sys_close1,u,t0,init);
[y_cl2,t_cl2,x_cl2]=lsim(sys_close2,u,t0,init);
[td_op,yd_op]=stairs(t_op,y_op);
[td_cl1,yd_cl1]=stairs(t_cl1,y_cl1);
[td_cl2,yd_cl2]=stairs(t_cl2,y_cl2);

figure(1);
plot(td_op,yd_op,'b:',td_cl1,yd_cl1,'g-',td_cl2,yd_cl2,'r*-');
grid;legend('open loop tf','close loop tf1(R=0.0316)','close loop tf2(R=0.001)')
xlabel('time(s)'),ylabel('amplitude');
title('Disturbance Rejection for LOR');
disp('eigen value of open loop is');disp(eig(G));
disp('eigen value of close loop1 is');disp(eig(Gclose1));
disp('eigen value of close loop2 is');disp(eig(Gclose2));

%We want to place poles of full-observer at -2 -2 -2 -2 -2 -2
p_obs=[exp(-2) exp(-2.1) exp(-1.95) exp(-2.14) exp(-1.90) exp(-2.18)];
Ke=acker(Gaug',Caug',p_obs)';
disp('eigen value of state estimator is '); disp(eig(Gaug-Ke*Caug));

```

```

%compute full state estimator
Gest1=[Gaug -Haug*K1;Ke*Caug Gaug-Haug*K1-Ke*Caug];
Gest2=[Gaug -Haug*K2;Ke*Caug Gaug-Haug*K2-Ke*Caug];
Hest=zeros(12,1);
Cest=[Caug zeros(1,6)];
Dest=Daug;
sys_est1=ss(Gest1,Hest,Cest,Dest,T);
sys_est2=ss(Gest2,Hest,Cest,Dest,T);
init=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0];
[y_est1,t_est1,x_est1]=lsim(sys_est1,u,t0,init);
[y_est2,t_est2,x_est2]=lsim(sys_est2,u,t0,init);

[td_est1,yd_est1]=stairs(t_est1,y_est1);
[td_est2,yd_est2]=stairs(t_est2,y_est2);
figure(2);
plot(td_est1,yd_est1,'c-.',td_est2,yd_est2,'m+.',td_op,yd_op,'b:',td_cl1,yd_cl1,
'g-',td_cl2,yd_cl2,'r*-');
grid;legend('close loop tf1 estimate(R=0.0316)','close loop tf2 estimate(R=0.001)',
'open loop tf','close loop tf1(R=0.0316)','close loop tf2(R=0.001)')
xlabel('time(s)'),ylabel('amplitude');title('Disturbance Rejection for LQR');

```

MATLAB Program 5: tracking	Description: Tracking Problem plot
<pre> %%%%%%%%%% % title: Tracking problem plot % % File Name: tracking % % Written by: Mr. Teerapon Pawadee 44362267 % % Mr. Yuttana Panyagaew 44362358 % %%%%%%%%%% clc,clf clear all %State space plant A=[0 1 0 0;0 -4.22 0 -13.81;0 0 0 1;0 -13.81 -559.78 -45.21]; B=[0;7.85;0;25.71]; C=[1 0 -0.38 0]; D=[0]; T=0.1; %sampling time [G,H]=c2d(A,B,T); %discretization %Design by pole placement method pole1=exp((-5.715-3.84i)*T); %pole1 for state feedback pole2=exp((-5.715+3.84i)*T); %pole2 for state feedback pole3=exp((-12-10i)*T); %pole3 for state feedback pole4=exp((-12+10i)*T); %pole4 for state feedback pole_place=[pole1 pole2 pole3 pole4]; K_pole=acker(G,H,pole_place); %Gain K Gclose_pole=[G-H*K_pole]; %close loop [num_pole,den_pole] = ss2tf(Gclose_pole,H,C,D); tf_pole=filt(num_pole,den_pole,T); %transfer function of pole placement kc_pole=sum(den_pole)/sum(num_pole); sys_pole=tf_pole*kc_pole; %transfer function of pole placement with K %Design by linear Quadratic method q11=input('Choose Weighting Function q11 ='); %Weighting q11 </pre>	


```

q22=input('Choose Weighting Function q22 ='); %Weighting q22
q33=input('Choose Weighting Function q33 ='); %Weighting q33
q44=input('Choose Weighting Function q44 ='); %Weighting q44
Q=diag([q11 q22 q33 q44]); %Matrix Q
R = input('Choose Weighting Function for R = '); %Weighting R
[K_opt,P,E] = DLQR(G,H,Q,R); %Optimal Regulator
Gclose_opt=[G-H*K_opt];
[num_opt,den_opt] = ss2tf(Gclose_opt,H,C,D);
tf_opt=filt(num_opt,den_opt,T); %transfer function of LQR
kc_opt=sum(den_opt)/sum(num_opt);
sys_opt=tf_opt*kc_opt; %transfer function of LQR with K
t=0:T:10;
n=square(pi*t);
[t_input,y_input]=stairs(t,n);
[t_pole,y_pole]=stairs(t,lsim(sys_pole,n,t));
[t_opt,y_opt]=stairs(t,lsim(sys_opt,n,t));

figure(1)
plot(t_input,y_input,'-',t_pole,y_pole,'*-',t_opt,y_opt,'-'),axis([0 10 -1.5 1.5])
legend('Input(R)', 'Pole placement output(Y)', 'LQR output(Y)');
xlabel('time(s));ylabel('amplitude');
title('Tracking of output(Y) with pole placement and LOR method');

```

ประวัติผู้ทำโครงการ



ชื่อ: นายธีระพล ภาวดี

รหัส: 44362267

ภูมิลำเนา: 314 ม. 11 ต. ชารทอง อ. พาน จ. เชียงราย 57250

ประวัติการศึกษา:

ระดับประถมศึกษา: โรงเรียนนิคมแม่ลาว จ. เชียงราย

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น: โรงเรียนดงมะคะวิทยาคม จ. เชียงราย

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย: โรงเรียนสามัคคีวิทยาคม จ. เชียงราย

ปัจจุบันกำลังศึกษาระดับปริญญาตรี: ชั้นปีที่ 4 สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
จ. พิษณุโลก

E-mail: N_Cross@hotmail.com



ชื่อ: นายยุทธนา ปัญญาแก้ว

รหัส: 44362358

ภูมิลำเนา: 113 ม. 1 ต. ดงมะคะ อ. แม่ลาว จ. เชียงราย 57250

ประวัติการศึกษา:

ระดับประถมศึกษา: โรงเรียนอนุบาลแม่ลาว จ. เชียงราย

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น: โรงเรียนดงมะคะวิทยาคม จ. เชียงราย

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย: โรงเรียนดำรงราษฎร์สงเคราะห์ จ. เชียงราย

ปัจจุบันกำลังศึกษาระดับปริญญาตรี: ชั้นปีที่ 4 สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
จ. พิษณุโลก

E-mail: P_yuttana@hotmail.com