

การแปลงรูปวอร์ฟดิสครีตฟูเรียร์
Warped Discrete-Fourier Transform



นายนราศักดิ์ บุญเทพ รหัส 45380062
นายณัฐพงษ์ จันตา รหัส 45380194

5080981.

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์	
วันที่รับ.....	13 พ.ย. 2549
เลขทะเบียน.....	4900138
เลขเรียกหนังสือ.....	๗5
มหาวิทยาลัยนเรศวร	๗๕๔๑

๒๕๔๘

ปริญญาานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
ปีการศึกษา 2548

หัวข้อโครงการ	การแปลงฟูร์ฟิดิสคริตฟูเรียร์
ผู้ดำเนินโครงการ	นายนราศักดิ์ บุญเทพ รหัส 45380062 นายณัฐพงษ์ จันทา รหัส 45380194
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ แย้มเม่น
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2548

บทคัดย่อ

โครงการนี้ ได้ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีการแปลงฟูร์ฟิดิสคริตฟูเรียร์ (Warped Discrete-Fourier Transform: WDFT) และนำ WDFT ไปประยุกต์ในการแยกสองสัญญาณคลื่นไซน์ (sine wave) ที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกัน

จากการทดลอง การแยกสองสัญญาณคลื่นไซน์ (sine wave) ที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกัน พบว่าวิธี WDFT จะใช้จำนวนข้อมูลน้อยกว่า วิธี Discrete-Fourier Transform (DFT) ถึง 4 เท่า ซึ่งมีผลทำให้การประมวลผลโดยวิธี WDFT เร็วกว่าวิธี DFT

Project title Warped Discrete-Fourier Transform
Name Mr.Narasak Boonthep ID. 45380062
Mr.Nuttapong Chunta ID. 45380194
Project advisor Assistant Professor Suchart Yammen, Ph.D.
Major Computer Engineering
Department Electrical and Computer Engineering
Academic year 2005

Abstract

This project studies about a theory of WDFT and applies WDFT analysis for separating the two-sine wave whose frequency has very closed value.

In case of the separated two-sine wave experiment, the number of WDFT points is used less than that of DFT points as four times. Therefore, the processing time of the WDFT method is more quickly and efficiently than that of DFT method.

กิตติกรรมประกาศ

การจัดทำโครงการในครั้งนี้ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ เข้มมนต์ ที่กรุณาสละเวลา ความคิด ประสบการณ์ และคำปรึกษาอันมีค่า ทำให้คณะผู้จัดทำได้รับประสบการณ์ การทำงานอันมีค่าอย่างยิ่ง

ขอบพระคุณ ดร.พนมขวัญ ธิยะมงคล และอาจารย์ศิริพร เดชะศิริรักษ์ ที่ได้เสียสละเวลาเพื่อทำการตรวจสอบการทำงานและชี้แนวทางในการแก้ไขปัญหาโครงการนี้

ขอกราบขอบพระคุณเบิดา มารดา ญาติพี่น้อง ที่ช่วยดูแล เป็นกำลังใจ และให้ความรักความอบอุ่น ตลอดเวลา



นายนราศักดิ์ บุญเทพ
นายณัฐพงษ์ จันตา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญรูป	ช

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงการ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ	1
1.3 ขอบข่ายของโครงการ	1
1.4 ขั้นตอนการดำเนินโครงการ	2
1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ	2
1.6 งบประมาณที่ใช้	2

บทที่ 2 ทฤษฎีเบื้องต้น

2.1 Discrete Fourier Transform (DFT).....	3
2.1.1 นิยามของ DFT และ Inverse DFT.....	3
2.1.2 ตัวอย่างการคำนวณ DFT.....	3
2.2 Warped Discrete-Fourier Transform (WDFT)	4
2.2.1 นิยามของ WDFT.....	4
2.2.2 คุณสมบัติของ WDFT.....	5
2.3 การแปลงฟูเรียร์โดยใช้เมทริกซ์.....	11
2.4 spectrums.....	13

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 3	วิธีการดำเนินโครงการ	14
บทที่ 4	ผลการทดลอง	
4.1	กราฟขนาดสเปกตรัมของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N=16$	16
4.2	กราฟขนาดมุมเฟสของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N=16$	17
4.3	กราฟขนาดสเปกตรัมของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N=32$	18
4.4	กราฟขนาดมุมเฟสของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N=32$	19
4.5	กราฟขนาดสเปกตรัมของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N=64$	20
4.6	กราฟขนาดมุมเฟสของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N=64$	21
4.7	เปรียบเทียบผลการทดลอง.....	22
บทที่ 5	บทสรุป	
5.1	สรุปผลการทดลอง.....	23
5.2	ปัญหาที่พบ.....	23
5.3	ข้อเสนอแนะ.....	23
เอกสารอ้างอิง.....		24
ประวัติผู้เขียนโครงการ.....		25

สารบัญตาราง

ตารางที่

หน้า

2.1 ฟังก์ชัน FFT และรูปแบบการใช้งานฟังก์ชัน FFT.....12



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 แสดงค่า Magnitude spectrum for N point DFT.....	4
2.2 Frequency mapping for some value of a.....	6
2.3 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a=0$ และ $N=16$	7
2.4 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a=-0.5$ และ $N=16$	8
2.5 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a = 0.5$ และ $N=16$	9
2.6 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a = 0.3$ และ $N=16$	10
2.7 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a = 0.8$ และ $N=16$	11
4.1 Magnitude spectrum for 16 point DFT and WDFT.....	16
4.2 Phase spectrum for 16 point DFT and WDFT.....	17
4.3 Magnitude spectrum for 32 point DFT and WDFT.....	18
4.4 Phase spectrum for 32 point DFT and WDFT.....	19
4.5 Magnitude spectrum for 64 point DFT and WDFT.....	20
4.6 Phase spectrum for 64 point DFT and WDFT.....	21
4.7 Magnitude spectrum for 64 point DFT and 16 point WDFT.....	22

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ปัญหาและที่มาของโครงการงาน

ในการแยกสองสัญญาณคลื่นไซน์ (sine wave) ที่มีความถี่ใกล้เคียงกัน ซึ่งมักใช้ Discrete-Fourier Transform (DFT) เข้ามาช่วยวิเคราะห์แยกสัญญาณ แต่ที่ต้องใช้จำนวนข้อมูลมากถึงจะสามารถแยกสัญญาณคลื่นไซน์ได้ ถ้าใช้จำนวนข้อมูลน้อยจะไม่สามารถแยกสัญญาณได้

ในโครงการนี้จึงได้นำ Warped Discrete-Fourier Transform (WDFT) เข้ามาช่วยวิเคราะห์แยกสองสัญญาณคลื่นไซน์ ซึ่งจะมีคุณสมบัติในการแยกสัญญาณได้ดีกว่าวิธี DFT เมื่อใช้จำนวนข้อมูลน้อย

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการงาน

- 1.2.1 เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีและหลักการของ WDFT
- 1.2.2 เพื่อศึกษาการใช้ WDFT แยกสองสัญญาณคลื่นไซน์
- 1.2.3 เพื่อประยุกต์ WDFT แยกสองสัญญาณคลื่นไซน์ เปรียบเทียบกับวิธี DFT

1.3 ขอบเขตของโครงการงาน

- 1.3.1 สัญญาณทดสอบใช้ WDFT คือผลรวมสองสัญญาณคลื่นไซน์
- 1.3.2 จำนวนข้อมูลที่ใช้ในการทดสอบ WDFT มี 3 กรณี คือ 16, 32 และ 64

1.4 ขั้นตอนการดำเนินโครงการ

กิจกรรม	2547				2548																											
	พ.ย.		ธ.ค.		ม.ค.		ก.พ.		มี.ค.		เม.ย.		พ.ค.		มิ.ย.		ก.ค.		ส.ค.		ก.ย.		ต.ค.									
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
1. เขียนโครงการทำงาน																																
2. ศึกษาข้อมูลและทฤษฎีของ WDFT																																
3. ศึกษาและทดลองใช้ไลบรารีต่างๆ																																
4. ทำการสร้างและพัฒนาซอฟต์แวร์																																
5. ปรับปรุงแก้ไขซอฟต์แวร์																																
6. จัดทำเอกสารและรายงาน																																

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.2 เกิดความรู้และความเข้าใจในคุณสมบัติของ WDFT

1.5.3 เพิ่มความรู้และทักษะในการเขียน โปรแกรมแม่ทแล็บ

1.6 งบประมาณ

1.6.1 ค่าวัสดุสำนักงาน	200	บาท
1.6.2 ค่าวัสดุคอมพิวเตอร์	400	บาท
1.6.3 ค่าวัสดุไฟฟ้าและวิทยุ	200	บาท
1.6.4 ค่าถ่ายเอกสาร	800	บาท
1.6.5 ค่าวัสดุอื่น ๆ	400	บาท
รวมค่าใช้จ่าย	2,000	บาท (สองพันบาทถ้วน)
(ถ้วนเฉลี่ยทุกรายการ)		

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

2.1 Discrete Fourier Transform (DFT)

2.1.1 นิยามของ DFT และ Inverse DFT

การแปลงรูป DFT ของสัญญาณ $\{x[n]\}$ มีนิยามดังนี้

$$\{x[n]\} \rightarrow \boxed{\text{DFT}} \rightarrow \{X[k]\} \quad \text{โดยที่ } k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

โดยที่ $\{x[n]\}$ คือลำดับข้อมูล N ตัว ที่มีชุดข้อมูล $\{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$ และ $\{X[k]\}$ เป็น DFT ของลำดับข้อมูล $\{x[n]\}$ ซึ่งมีนิยามเป็น

$$X[k] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega_k n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

โดยที่ $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ สำหรับ $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$

การแปลงรูปกลับ DFT (IDFT) ของสัญญาณ นิยามดังนี้

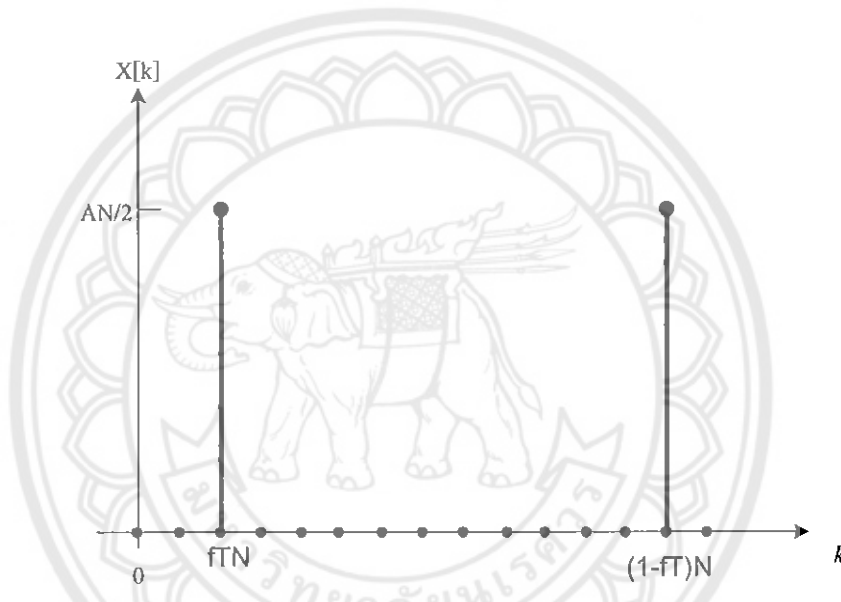
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\omega_k n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.2)$$

2.1.2 ตัวอย่างการคำนวณ DFT

เมื่อให้สัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นไซน์มีค่าเป็น $x[n] = A \sin(2\pi f n T)$ สามารถคำนวณหาค่าขนาด A และความถี่ f ของสัญญาณโดยใช้ DFT ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 x[n] &= A \sin(2\pi f n T) \\
 x[n] &= A \left(\frac{e^{j2\pi f n T} - e^{-j2\pi f n T}}{2j} \right) \\
 &= \frac{A}{2j} e^{j2\pi f n T} + \left(-\frac{A}{2j} \right) e^{-2j\pi f n T} \\
 &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{AN}{2j} e^{j\frac{2\pi f}{N} TN} + \left(-\frac{AN}{2j} \right) e^{-j\frac{2\pi f}{N} TN} \right\} \\
 &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{AN}{2j} e^{j\frac{2\pi f}{N} (fTN)} + \left(-\frac{AN}{2j} \right) e^{j\frac{2\pi f}{N} (1-f)N} \right\}
 \end{aligned}$$

เทียบกับการแปลงรูปกลับ IDFT ดังแสดงไว้ในสมการ (2.2) จะได้ขนาดของ $|X[k]| = \frac{AN}{2}$
 ณ ตำแหน่งที่ $k = (fTN)$ และ $(1-f)N$ ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงค่า Magnitude spectrum for N point DFT

2.2 Warped Discrete-Fourier Transform (WDFT)

2.2.1 นิยามของ WDFT

การแปลงรูป WDFT ของสัญญาณ $\{x[n]\}$ สำหรับ $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ มีนิยาม ดังนี้

$$\{x[n]\} \rightarrow \boxed{\text{WDFT}} \rightarrow \{\hat{X}[k]\}$$

$\hat{X}[k]$ คือ WDFT ของลำดับข้อมูล $\{x[n]\}$ สำหรับ $n = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ ซึ่ง มีนิยามเป็น

$$\hat{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\hat{\omega}_k n} \text{ สำหรับทุกค่า } k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \quad (2.3)$$

โดยที่ $\hat{\omega}_k$ คือ ความถี่เชิงมุมที่สามารถหาค่าได้ตามสมการที่ (2.8)

2.2.2 คุณสมบัติของ WDF

จากคุณสมบัติของตัวกรอง First-Order allpass จะได้ว่า

$$A(\hat{z}) = -a + \hat{z}^{-1}$$

แทน $A(\hat{z}) = z^{-1}(1 - a\hat{z}^{-1})$ จะได้

$$z^{-1} = \frac{-a + \hat{z}^{-1}}{1 - a\hat{z}^{-1}}$$

โดยที่ $|a| \leq 1$ แทนค่า $z = e^{j\omega}$ และ $\hat{z} = e^{j\hat{\omega}}$ จะพบว่า

$$\begin{aligned} e^{-j\omega} &= \frac{-a + e^{-j\hat{\omega}}}{1 - ae^{-j\hat{\omega}}} \times \frac{(1 - ae^{-j\hat{\omega}})}{(1 - ae^{-j\hat{\omega}})} \\ &= \frac{-a + a^2 e^{j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}} - a}{|1 - ae^{-j\hat{\omega}}|^2} \\ &= \frac{a^2 e^{j\hat{\omega}} - 2a + e^{-j\hat{\omega}}}{|1 - ae^{-j\hat{\omega}}|^2} \\ &= \frac{\left(e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}}\right)^2 - 2e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}} \cdot ae^{j\frac{\hat{\omega}}{2}} + \left(e^{j\frac{\hat{\omega}}{2}}\right)^2}{|1 - ae^{-j\hat{\omega}}|^2} \\ &= \frac{\left(e^{-j\hat{\omega}/2} - ae^{j\hat{\omega}/2}\right)^2}{|1 - ae^{j\hat{\omega}}|^2} \\ e^{-j\omega/2} &= \frac{e^{-j\hat{\omega}/2} - ae^{j\hat{\omega}/2}}{|1 - ae^{j\hat{\omega}}|} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\omega}{2} - j \sin \frac{\omega}{2} = \frac{\left[\cos \frac{\hat{\omega}}{2} - j \sin \frac{\hat{\omega}}{2} \right] - a \left[\cos \frac{\hat{\omega}}{2} + j \sin \frac{\hat{\omega}}{2} \right]}{|1 - ae^{-j\hat{\omega}}|}$$

โดยการเปรียบเทียบส่วนจริงและส่วนจินตภาพ จะพบว่า

$$\cos \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{\hat{\omega}}{2} - a \cos \frac{\hat{\omega}}{2}}{|1 - ae^{j\hat{\omega}}|} \quad (2.4)$$

และส่วนจินตภาพ

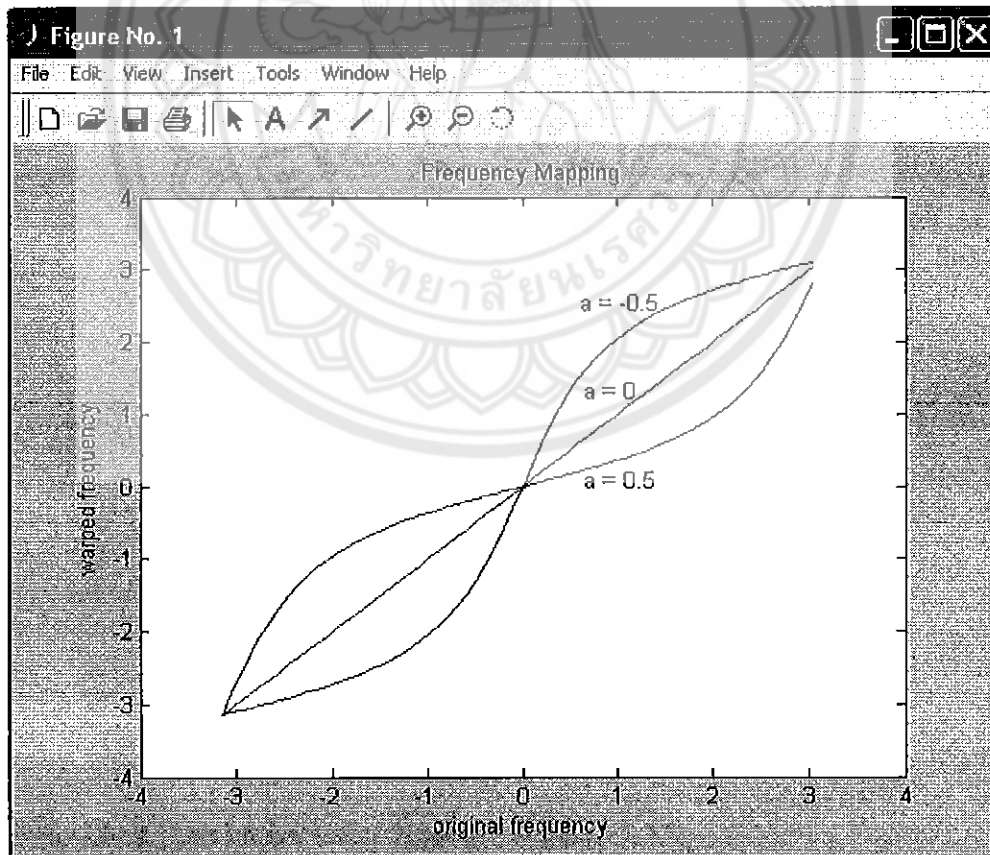
$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\sin \frac{\hat{\omega}}{2} + a \sin \frac{\hat{\omega}}{2}}{|1 - ae^{j\hat{\omega}}|} \quad (2.5)$$

นำสมการ (2.4) กับสมการ (2.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}} &= \frac{\left(\sin \frac{\hat{\omega}}{2}\right)(1+a)}{\left(\cos \frac{\hat{\omega}}{2}\right)(1-a)} \\ \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \left(\frac{1+a}{1-a}\right) \tan\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

โดยที่ a มีค่าอยู่ในช่วง $-1 < a < 1$

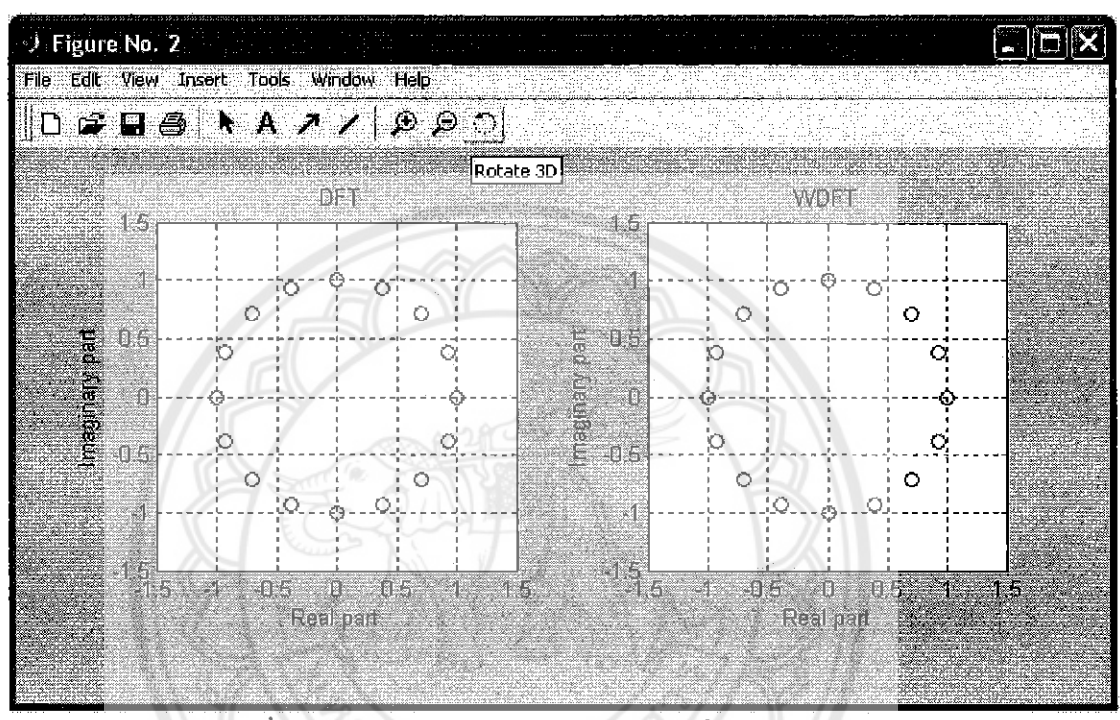
จากสมการที่ (2.8) นำไปพล็อตกราฟดังแสดงในรูปที่ 2.2 สำหรับบางค่าของ a



รูปที่ 2.2 Frequency mapping for some value of a

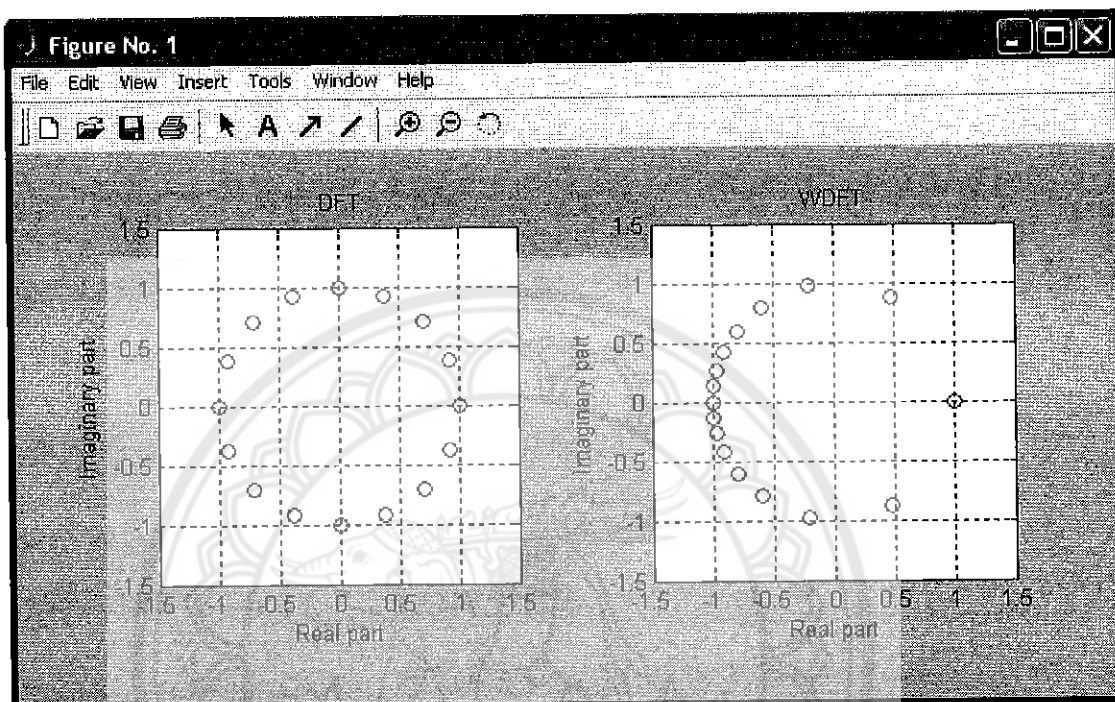
เมื่อทำการพล็อตค่า $z = e^{j\omega}$ และ $\hat{z} = e^{j\hat{\omega}}$ บนวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแสดงคุณสมบัติบางประการเมื่อค่า a เปลี่ยนค่า

เมื่อให้ค่า $a = 0$ กราฟของ WDFT มีลักษณะเหมือนกับกราฟของ DFT คือมีการกระจายตัวของแต่ละจุดเท่ากัน ทั้งนี้เนื่องจากสมการที่ (2.8) จะมีค่าเป็น $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \tan\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)$ ดังนั้นค่า ω และ $\hat{\omega}$ จึงเท่ากัน และทำให้ค่า $z = e^{j\omega}$ เท่ากับ $\hat{z} = e^{j\hat{\omega}}$ ดังแสดงในรูปที่ 2.3



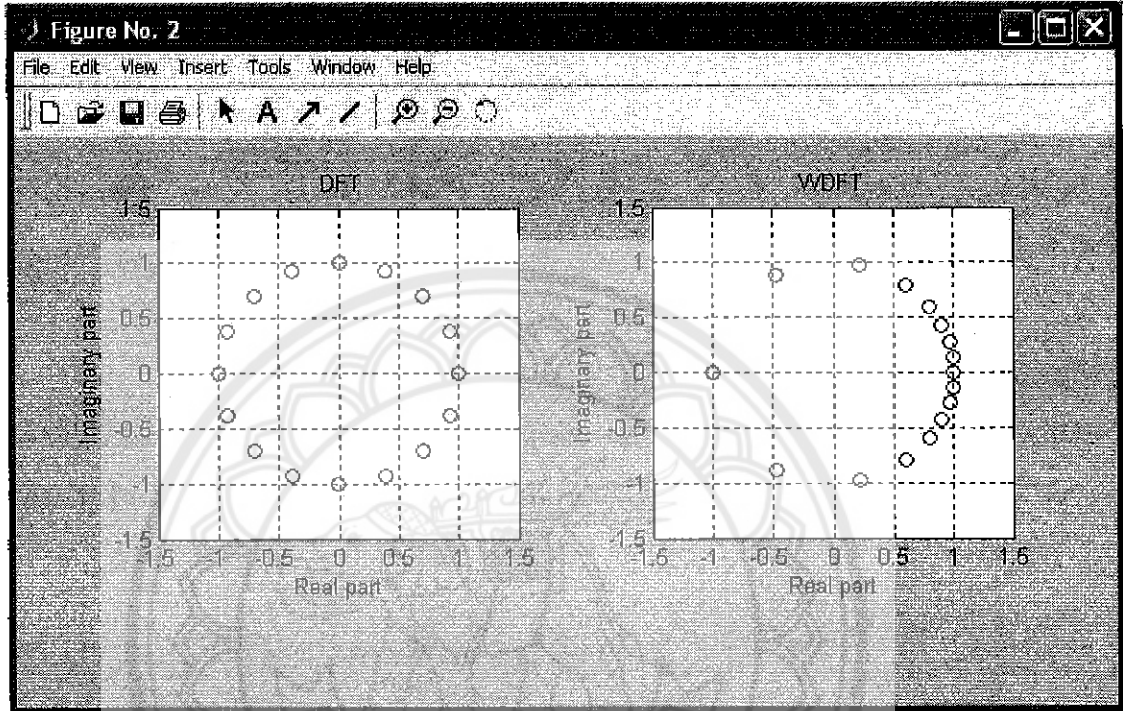
รูปที่ 2.3 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a=0$ และ $N=16$

เมื่อให้ค่า $a = -0.5$ กราฟของ WDFT มีลักษณะเป็นการกระจุกตัวของแต่ละจุดซึ่งจะกระจุกตัวทางแกนลบของ Real part และมีการกระจายตัวของแต่ละจุดทางด้านแกนบวกของ Real part ซึ่งมีการกระจายอย่างเบาบาง คุณสมบัติในข้อนี้สามารถนำไปวิเคราะห์แยกสัญญาณที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกันมากได้ โดยลักษณะสัญญาณที่ได้จะมีความกว้างมากขึ้นของสัญญาณที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.4



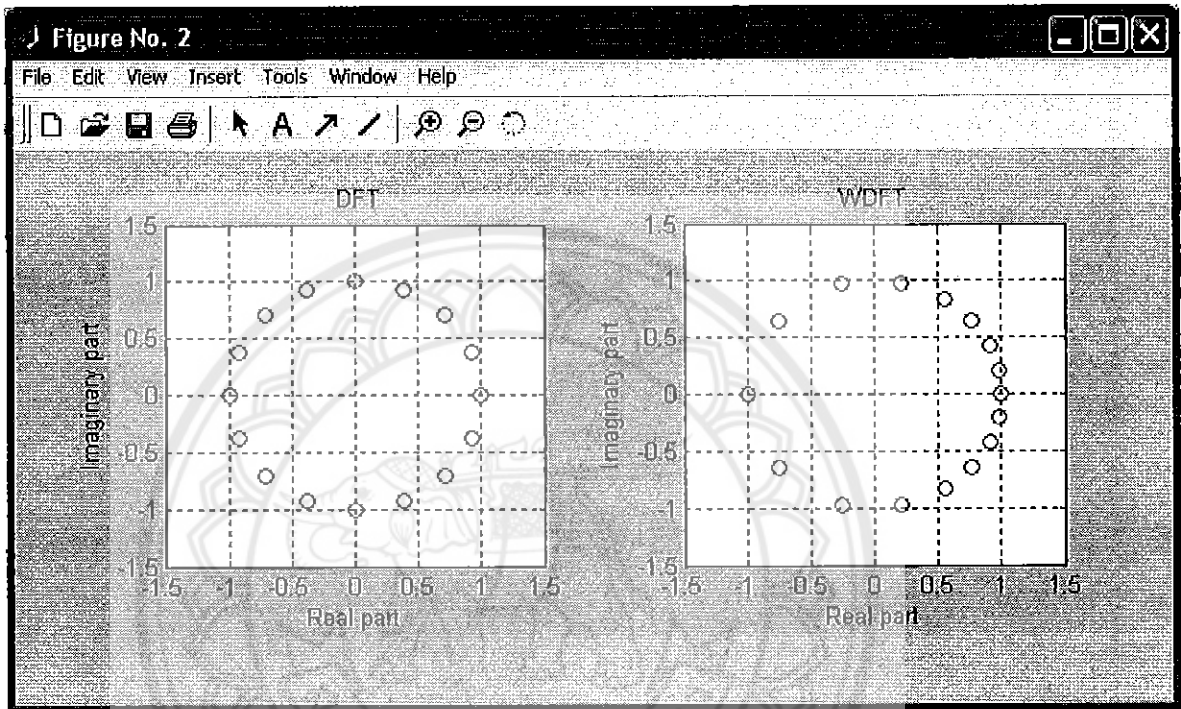
รูปที่ 2.4 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a=-0.5$ และ $N=16$

เมื่อให้ค่า $a = 0.5$ กราฟของ WDFT มีลักษณะเป็นการกระจุกตัวของแต่ละจุดซึ่งจะกระจุกตัวทางแกนบวกของ Real part และมีการกระจายตัวของแต่ละจุดทางด้านแกนลบของ Real part ซึ่งมีการกระจายอย่างเบาบาง คุณสมบัติในลักษณะนี้ไม่สามารถนำไปวิเคราะห์แยกสัญญาณที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกันมากได้ โดยลักษณะสัญญาณที่ได้จะมีความถี่เพิ่มขึ้นกว่าสัญญาณที่ใช้แยกแบบ DFT ดังแสดงในรูปที่ 2.5



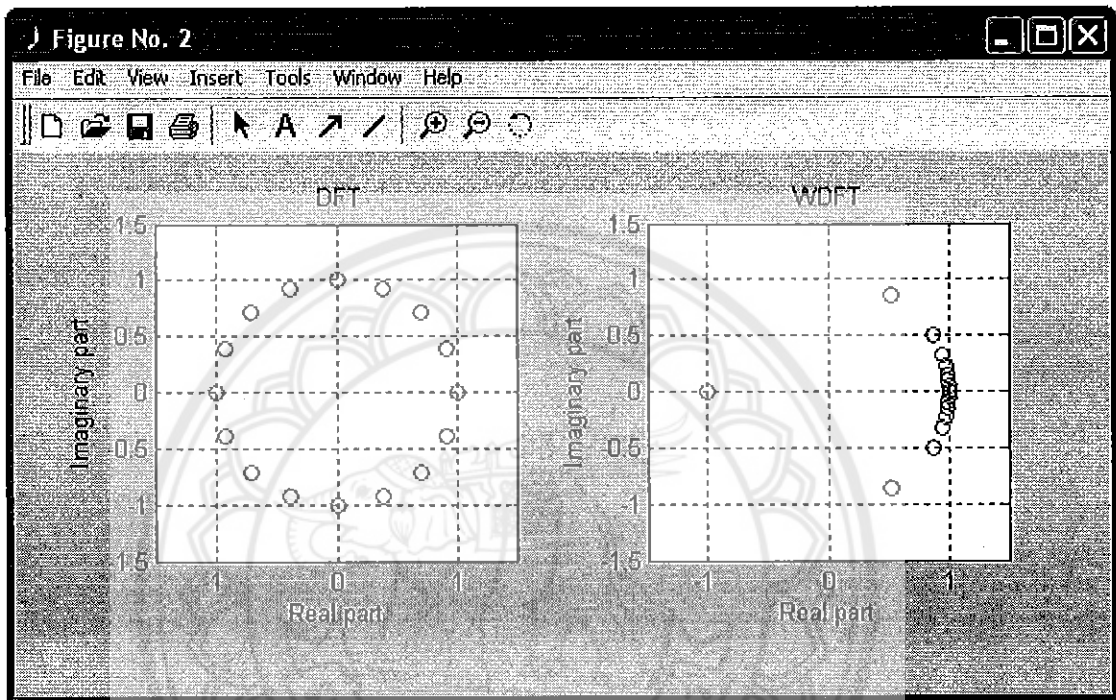
รูปที่ 2.5 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a = 0.5$ และ $N = 16$

เมื่อให้ค่า $a = 0.3$ กราฟของ WDFT มีลักษณะเป็นการกระจุกตัวของแต่ละจุดซึ่งจะกระจุกตัวทางแกนบวกของ Real part และมีการกระจายตัวของแต่ละจุดทางด้านแกนลบของ Real part ซึ่งมีการกระจายอย่างเบาบางแต่ก็ยังคงมากกว่าที่ใช้ $a = 0.5$ คุณสมบัติในลักษณะนี้ไม่สามารถนำไปวิเคราะห์แยกสัญญาณที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกันมากได้ โดยลักษณะสัญญาณที่ได้จะมีความถี่เพิ่มขึ้นกว่าสัญญาณที่ใช้แยกแบบ DFT ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{-j\omega}$ เมื่อ $a = 0.3$ และ $N=16$

เมื่อให้ค่า $a = 0.8$ กราฟของ WDFT มีลักษณะเป็นการกระจุกตัวของแต่ละจุด โดยมีความถี่มากกว่าที่ใช้ค่า $a = 0.3$ และ 0.5 ซึ่งจะกระจุกตัวทางแกนบวกของ Real part และมีการกระจายตัวของแต่ละจุดอย่างเบาบางทางด้านลบของ Real part คุณสมบัติในลักษณะนี้ไม่สามารถนำไปวิเคราะห์แยกสัญญาณที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกันมากได้ โดยลักษณะสัญญาณที่ได้จะมีความถี่เพิ่มขึ้นกว่าสัญญาณที่ใช้แยกแบบ DFT ดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ตำแหน่งของราก $e^{j\omega}$ และ $e^{j\hat{\omega}}$ เมื่อ $a = 0.8$ และ $N=16$

สรุป ยิ่งค่า a มีค่าเพิ่มขึ้นระยะห่างระหว่างรากด้านบวกยิ่งชิดมากขึ้น และเมื่อค่า $a=0$ ระยะห่างระหว่างรากจะเท่ากัน แต่เมื่อค่า a มีค่าลดลงระยะห่างระหว่างรากด้านลบจะชิดกัน จากการทดลองสุ่มค่า a ที่เหมาะสมกับการวิเคราะห์สัญญาณคลื่นไซน์คือ $a = -0.5$

2.3 การแปลงฟูรีเยร์โดยใช้แมทแกลป์

การแปลงฟูรีเยร์เต็มหน่วยหรือในตำราบางเล่มใช้คำว่า การแปลงฟูรีเยร์ไม่ต่อเนื่อง (Discrete Fourier Transform) ได้พัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้ในการแปลงสัญญาณดิจิทัลซึ่งอยู่ในโดเมนเวลาไปเป็นสัญญาณที่อยู่ในโดเมนความถี่ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการแปลงฟูรีเยร์เต็มหน่วยเป็นการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนความถี่ การแปลงฟูรีเยร์เต็มหน่วยนี้มีวิธีการในการคำนวณที่ซับซ้อนมีจำนวนครั้งในการคำนวณมากและใช้เวลานานในการคำนวณมาก ต่อมาเพื่อลดปัญหาดังกล่าวจึงได้พัฒนาวิธีการเปลี่ยนแปลงให้เร็วขึ้น ซึ่งเรียกว่า การแปลงฟูรีเยร์แบบเร็ว (Fast Fourier

Transform)) ซึ่งจะทำให้การคำนวณ DFT ใช้การคูณจำนวนเชิงซ้อนเพียง $N \log_2 N$ ครั้งเท่านั้นหรือทำให้จำนวนครั้งในการคูณตัวเลขลดลงไปถึง $N/(\log_2 N)$ เท่า การแปลงฟูเรียร์แบบเร็วนี้จะมีการคำนวณคล้ายกับการแปลงฟูเรียร์เต็มหน่วยแต่การแปลงฟูเรียร์แบบเร็วจะมีวิธีการในการจัดแบ่งข้อมูลแล้วทำการคำนวณซึ่งจำนวนข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณจะต้องเป็นค่า 2 ยกกำลัง n หรือ (2^n) โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นจึงทำให้การแปลงฟูเรียร์แบบเร็วลดเวลาในการคำนวณลง โปรแกรมเม็ทแล็บได้มีฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการคำนวณหาค่าการแปลงฟูเรียร์เต็มหน่วยและการแปลงฟูเรียร์แบบเร็วซึ่งมีฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการหาค่าการแปลงฟูเรียร์เต็มหน่วยคือฟังก์ชัน FFT รูปแบบการใช้งานฟังก์ชัน FFT เป็นดังนี้

ตารางที่ 2.1 ฟังก์ชัน FFT และรูปแบบการใช้งานฟังก์ชัน FFT

คำสั่ง	รายละเอียด
FFT (A)	การหาค่าการแปลงฟูเรียร์เต็มหน่วย (DFT) ของเวกเตอร์ A เมื่อ A คือเวกเตอร์ที่แทนจุดของสัญญาณในโดเมนเวลา โดยมีเงื่อนไขว่าถ้าความยาวของเวกเตอร์ A มีความยาวเท่ากับ 2^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โปรแกรม MATLAB จะใช้กระบวนการแปลงฟูเรียร์แบบเร็วถ้าความยาวของเวกเตอร์ A มีความยาวไม่เท่ากับ 2^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โปรแกรม MATLAB จะใช้กระบวนการแปลงฟูเรียร์เต็มหน่วยซึ่งช้ากว่าการแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว
FFT (A,N)	การหาค่าการแปลงฟูเรียร์เต็มหน่วย (DFT) ของเวกเตอร์ A ที่ให้ค่าผลลัพธ์จากการแปลงมีความยาวเท่ากับ N เมื่อ A คือเวกเตอร์ที่แทนจุดของสัญญาณในโดเมนเวลา และ N คือจุดของแฮทพุทที่ต้องการโดยถ้าเวกเตอร์ A มีจุดสัญญาณน้อยกว่า N ก็จะทำให้การเพิ่มค่าศูนย์ให้กับเวกเตอร์ A จนมีจำนวนจุดสัญญาณเท่ากับ N ถ้าเวกเตอร์ A มีจุดสัญญาณมากกว่า N ก็จะทำให้การตัดค่าของเวกเตอร์ A ให้มีจุดสัญญาณเท่ากับเวกเตอร์ N

ผลของ Fast Fourier Transform (FFT) ทำให้ได้ช่วงสัญญาณที่ใช้ในการวิเคราะห์ที่คงที่ ในรูป linear scale เป็นขั้นตอนการคำนวณสัญญาณแบบ Discrete Fourier Transform (DFT) DFT เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง มีขอบเขตการประมาณถึง Fourier Transform เป็นตัวแปลงสัญญาณในรูปคลื่น (waveform) ให้อยู่ในรูป ความถี่และแอมพลิจูด ตามปกติแล้วเครื่องมือวัดแบบ FFT จะสามารถปรับความคมชัดของการวัด (resolution) และสามารถขยายสัญญาณเพื่อดูค่าสัญญาณในช่วงที่ต้องการได้

2.4 Spectrum

สเปกตรัม คือการแสดงของสมาชิกความถี่ที่แสดงในสัญญาณ ความสำคัญของสมาชิกความถี่ในสัญญาณเป็นการแสดงของขนาดของสเปกตรัมที่ความถี่นั้นๆ สเปกตรัมเป็นการพล็อตขนาดเทียบกับความถี่ เมื่อเป็นเช่นนั้นขอบเขตความถี่ (*frequency domain*) จึงเป็นการให้ข้อมูลของสัญญาณ บ่อยครั้งที่คำนวณโดยใช้ FFT (fast Fourier transform) สัญญาณความถี่ต่ำจะคงที่หรือเปลี่ยนแปลงช้ามากเมื่อเทียบกับเวลา ซึ่งปรากฏที่ฝั่งซ้ายสุดของสเปกตรัม สัญญาณความถี่สูงจะตรงกันข้าม คือ เปลี่ยนแปลงเร็วมากกับเวลา ซึ่งปรากฏทางฝั่งขวาของสเปกตรัม

ความหมายของสเปกตรัมก็คือการเกี่ยวข้องกับขอบเขตของความถี่ ในส่วนของขอบเขตของความถี่ต่างๆ สัญญาณดิจิทัลจะมีเครื่องหมายลักษณะเฉพาะของมันตัวอย่างเช่น

A sine wave จะมีแค่ความถี่เดียว แต่ถ้าเป็น *white noise* จะมีสมาชิกเป็นทุกความถี่ ถ้าสัญญาณ เป็นแบบราบเรียบแสดงว่าเป็นส่วนประกอบของความถี่ต่ำ ถ้ารูปร่างเป็นเส้นและเปลี่ยนแปลงรวดเร็ว แสดงว่าเป็นองค์ประกอบของความถี่สูง

สเปกตรัมของสัญญาณ คือการที่อธิบายถึงว่าสัญญาณนั้นมีองค์ประกอบความถี่อะไรบ้าง อยู่ ตัวอย่างเช่น สำหรับ Square wave สเปกตรัมจะแสดงยอดที่แบ่งแยกออกของ sine wave ที่รวมกัน โดยข้อมูลนี้เป็นข้อมูลที่มีความสำคัญมาก

สเปกตรัมของสัญญาณจะมีอยู่ 2 ส่วน คือ สเปกตรัมขนาดและสเปกตรัมเฟส *Magnitude spectrum* ความเกี่ยวข้องกับขนาดหรือแอมพลิจูดขององค์ประกอบของความถี่ *Phase spectrum* จะให้ความสัมพันธ์ของเฟสกับองค์ประกอบความถี่ที่แตกต่างกัน

บทที่ 3

วิธีการดำเนินโครงการ

การดำเนินงานเพื่อศึกษา WDFT ที่ใช้ความถี่ $\hat{\omega}$ ผ่านทางตัวกรองทุกความถี่อันดับหนึ่งมีขั้นตอนดังนี้

- 3.1 ทำการศึกษาถึงทฤษฎีและคุณสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับ WDFT
- 3.2 ทำการศึกษาถึงทฤษฎีและคุณสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับ DFT
- 3.3 ศึกษาฟังก์ชันของตัวกรองทุกความถี่ อันดับหนึ่ง และหาความสัมพันธ์จากสมการ

$$A(\hat{z}) = -a + \hat{z}^{-1} \quad (3.1)$$

- 3.4 หาค่า จากความสัมพันธ์จากฟังก์ชันของตัวกรองทุกความถี่อันดับหนึ่งคือ

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left(\frac{1+a}{1-a}\right) \tan\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) \quad (3.2)$$

โดยที่ $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ สำหรับ $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$

- 3.5 ทำการพล็อตค่าราคา และ บนวงกลมหนึ่งหน่วย ในระนาบเชิงซ้อนเพื่อหาค่า a ที่เหมาะสมที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณชายน์ โดยการสุ่มค่า a ซึ่งมีค่าระหว่าง -1 ถึง 1

- 3.6 ทำการสร้างผลรวมของสัญญาณชายน์ที่มีแอมพลิจูด A และความถี่ f_1 กับ f_2 เป็น

$$x[n] = A \sin(2\pi f_1 nT) + A \sin(2\pi f_2 nT) \quad (3.3)$$

โดยที่ T คือ ช่วงเวลาการสุ่มตัวอย่างมีค่าเท่ากับ $1/2000$ Sec.

$$A = 10$$

$$f_1 = 50 \text{ Hz.}$$

$$f_2 = 55 \text{ Hz.}$$

- 3.7 เขียนโปรแกรมแม่ทแล็บ สำหรับการวิเคราะห์สัญญาณ

- 3.7.1 สร้างสัญญาณ $x[n]$

- 3.7.2 แยกพิจารณาในการวิเคราะห์เป็น 3 กรณี คือ $N = 16, 32, 64$

- 3.7.3 หาค่า ω_k และ $\hat{\omega}_k$

3.7.4 ทำการวิเคราะห์สัญญาณด้วย DFT และ WDFT

3.7.5 วาดเส้น โต้ค่า magnitude spectrum และ phase spectrum

3.7.6 ทำการเปรียบเทียบค่าขนาด magnitude และขนาดมุม phase ของ DFT กับค่าขนาด magnitude และขนาดมุม phase ของ WDFT

3.8 ทำการเปรียบเทียบลักษณะของสัญญาณที่ได้จาก โปรแกรมของ DFT และ WDFT เมื่อจำนวน N มีค่าเท่ากัน และจำนวน N ที่มีค่าต่างกัน

3.9 วิเคราะห์และเปรียบเทียบความสามารถในการแยกสัญญาณแบบ DFT และ WDFT

3.10 สรุปผลการทดลอง

3.11 จัดทำเอกสารและทำรูปเล่มโครงการ

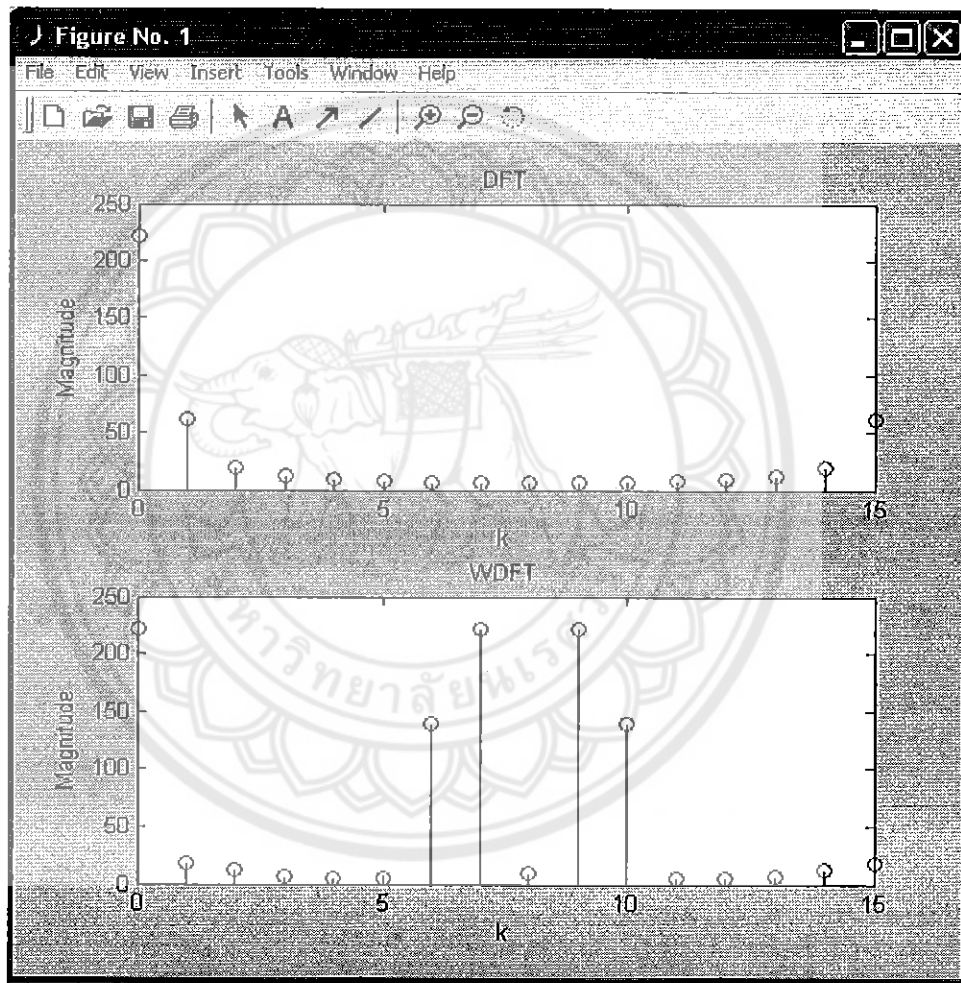


บทที่ 4

ผลการทดลอง

เป็นผลการทดลองจากสัญญาณคลื่นไซน์ 2 สัญญาณอินพุต โดยความถี่ใกล้เคียงกันคือ 50Hz. และ 55 Hz. ซึ่งกำหนดให้ค่า $N = 16, 32$ และ 64

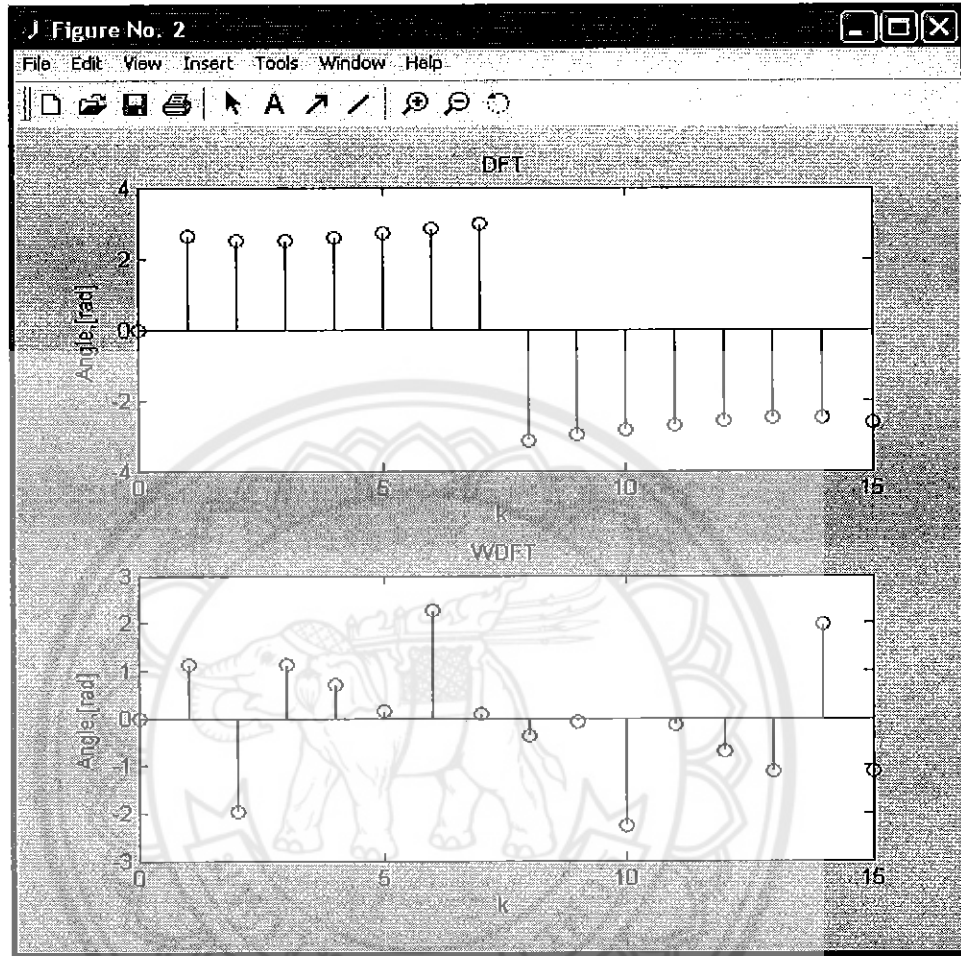
4.1 กราฟขนาดสเปกตรัมของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N = 16$



รูปที่ 4.1 Magnitude spectrum for 16 point DFT and WDFT

จากรูปที่ 4.1 DFT มีค่า magnitude เพียงค่าเดียว ส่วน WDFT มีค่า magnitude 2 ค่าซึ่งสามารถสังเกตได้

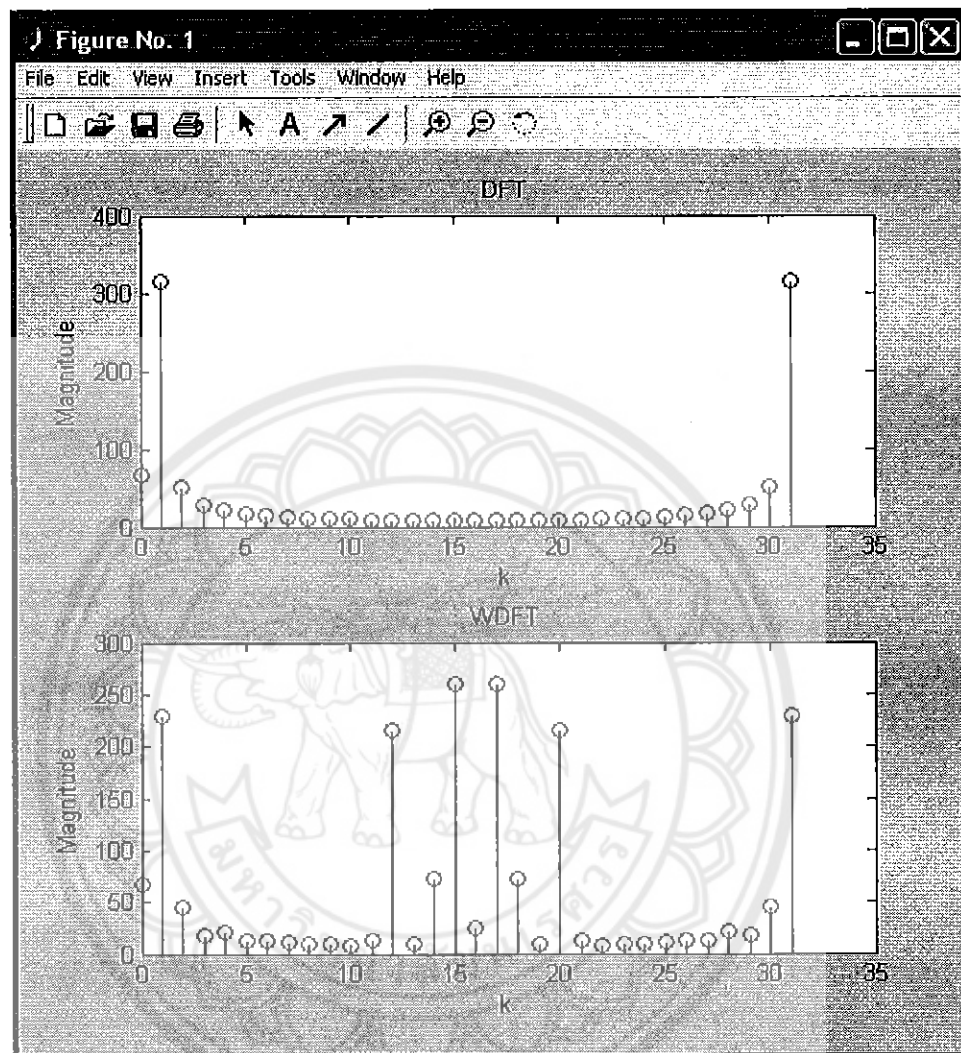
4.2 กราฟขนาดมุมเฟสของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N = 16$



รูปที่ 4.2 Phase spectrum for 16 point DFT and WDFT

จากรูปที่ 4.2 ค่ามุมเฟสของ DFT จะค่อยๆ เพิ่มขึ้นและเมื่อเกินครึ่งแล้วค่ามุมเฟสจะติดลบแล้วค่อยๆ เพิ่ม ส่วน WDFT นั้นค่ามุมเฟสจะกระจายคือมีทั้งลบและบวกสลับกันไปและไม่แน่นอน

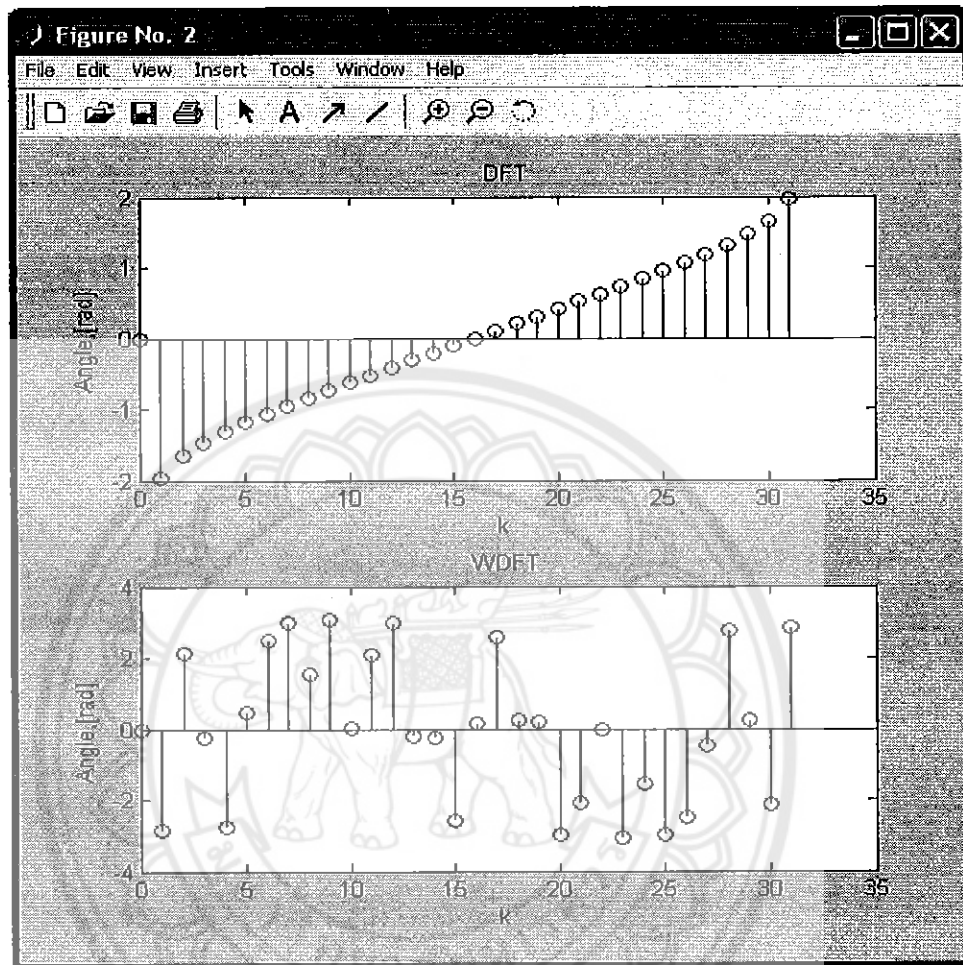
4.3 กราฟขนาดสเปกตรัมของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N = 32$



รูปที่ 4.3 Magnitude spectrum for 32 point DFT and WDFT

จากรูปที่ 4.3 เมื่อ $N = 32$ DFT มีค่า magnitude เพียงค่าเดียวส่วน WDFT มีค่า magnitude 2 ค่าซึ่งสามารถสังเกตได้

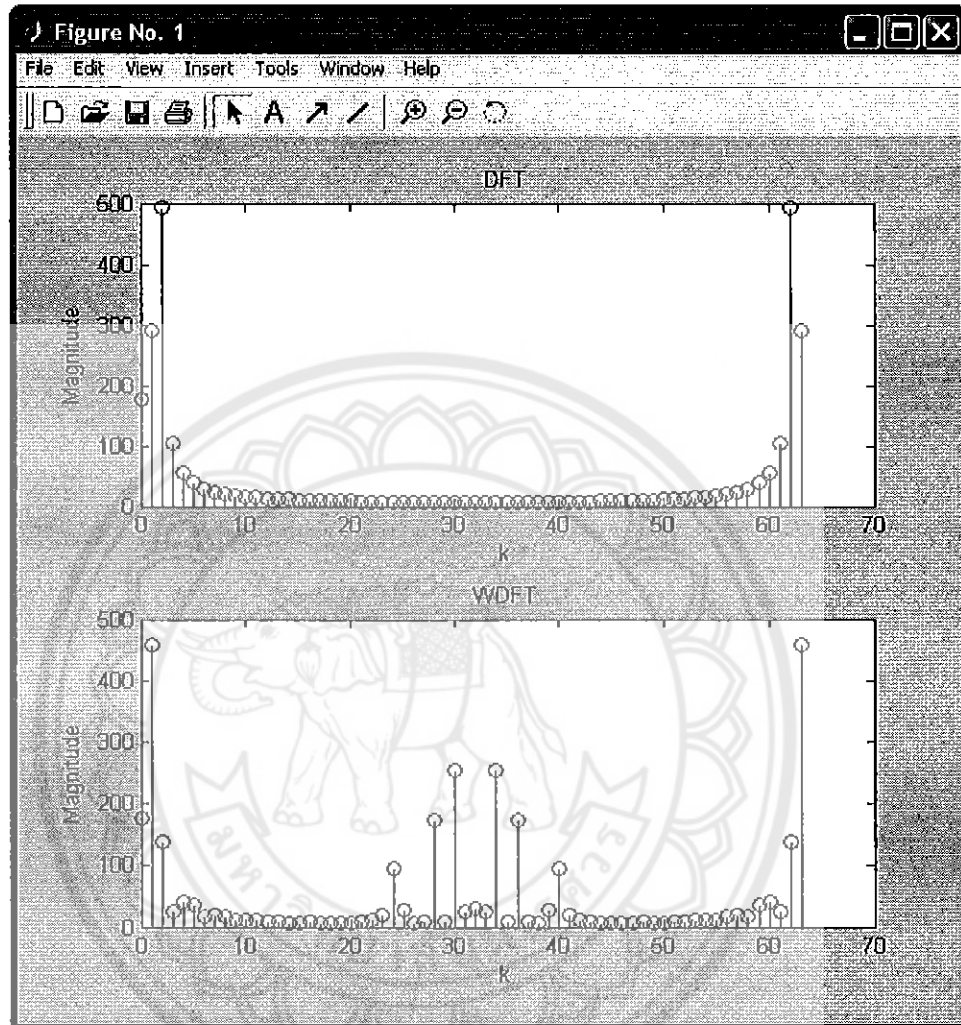
4.4 กราฟขนาดมุมเฟสของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N = 32$



รูปที่ 4.4 Phase spectrum for 32 point DFT and WDFT

จากรูปที่ 4.4 ค่ามุมเฟสของ DFT จะเริ่มจากศูนย์แล้วเข้าสู่ฝั่งลบแล้วค่อยๆ เพิ่มจนเข้าสู่ฝั่งบวก ส่วน WDFT นั้นค่ามุมเฟสจะกระจายคือมีทั้งลบและบวกสลับกันไปและไม่แน่นอน

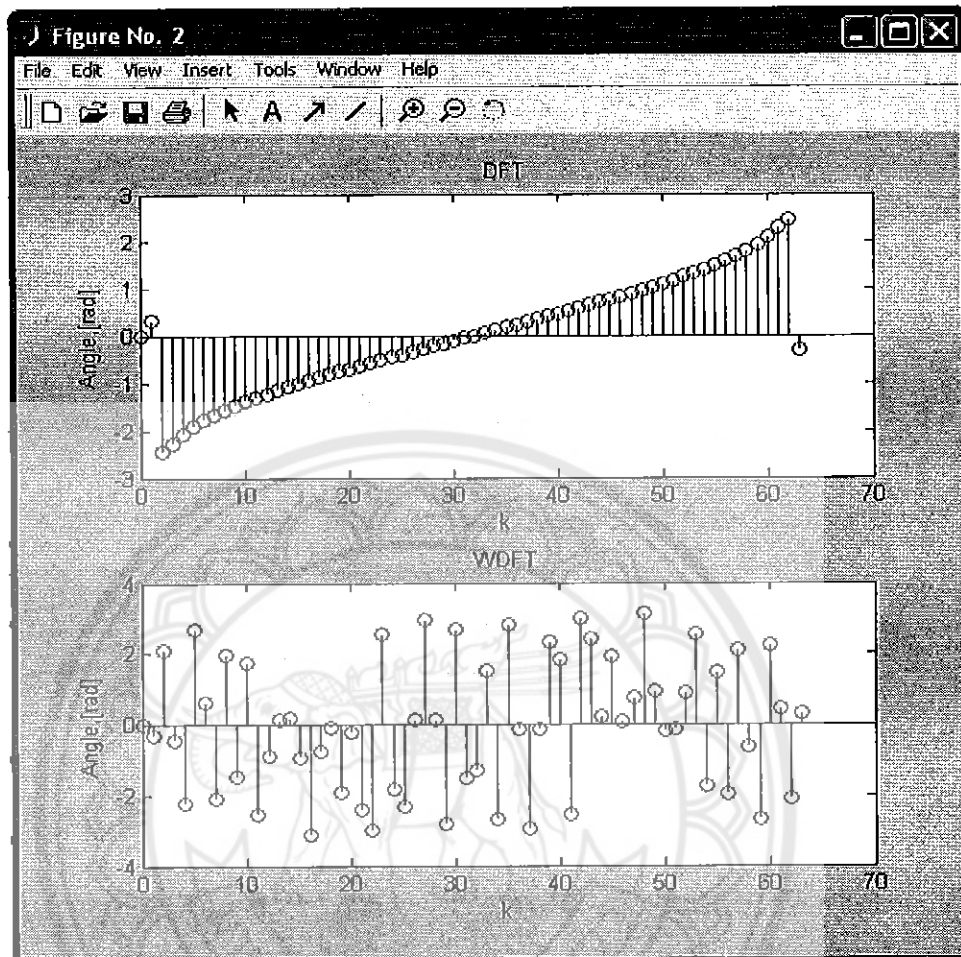
4.5 กราฟขนาดสเปกตรัมของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N = 64$



รูปที่ 4.5 Magnitude spectrum for 64 point DFT and WDFT

จากรูปที่ 4.5 ทั้ง DFT และ WDFT มีค่า magnitude 2 ค่าแต่ DFT ค่า magnitude มีระยะห่างที่ใกล้กัน ส่วน WDFT ค่า magnitude จะอยู่ห่างกัน

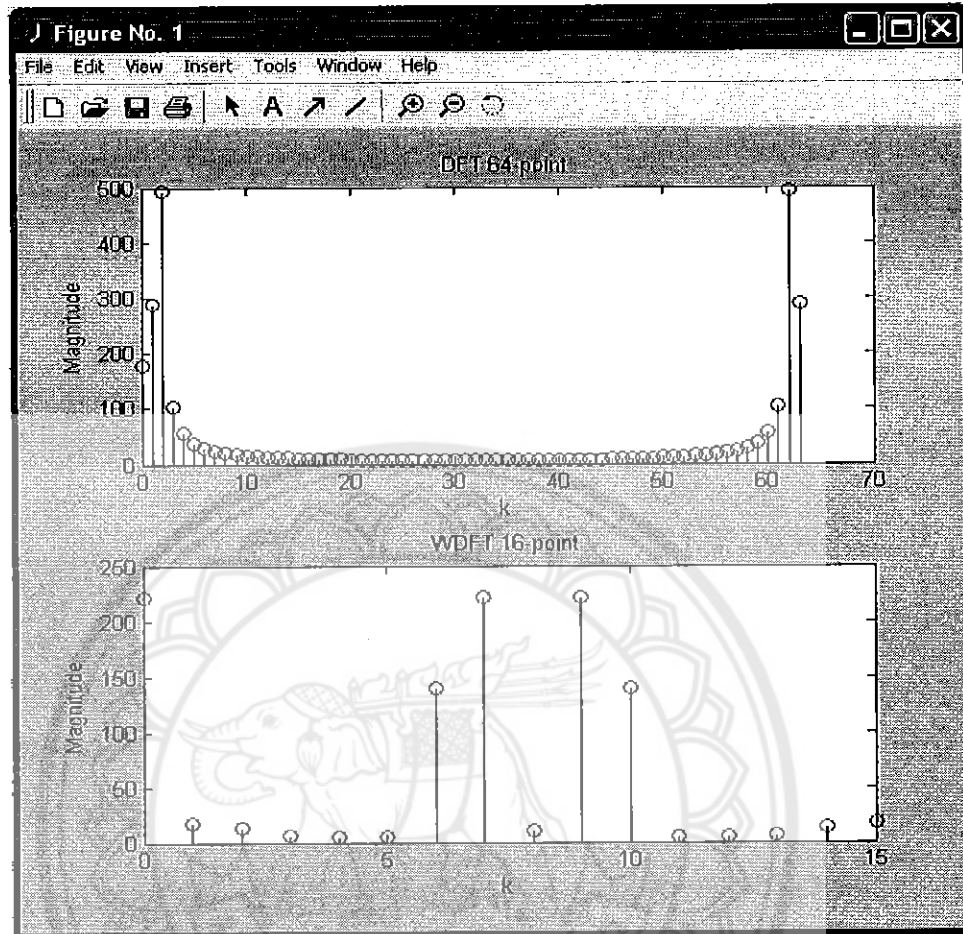
4.6 กราฟขนาดมุมเฟสของ DFT และ WDFT กำหนดให้ค่า $N = 64$



รูปที่ 4.6 Phase spectrum for 64 point DFT and WDFT

จากรูปที่ 4.6 ค่ามุมเฟสของ DFT และ WDFT จะคล้ายๆ กับรูปที่ 4.4 คือ จะเริ่มจากศูนย์ แล้วเข้าสู่ฝั่งลบแล้วค่อยๆ เพิ่มจนเข้าสู่ฝั่งบวก ส่วน WDFT นั้นค่ามุมเฟสจะกระจายคือมีทั้งลบและบวกสลับกันไปและไม่แน่นอน

4.7 เปรียบเทียบผลการทดลอง



รูปที่ 4.7 Magnitude spectrum for 64 point DFT and 16 point WDFT

จากรูปที่ 4.7 เป็นการเปรียบเทียบระหว่าง DFT ($N=64$) และ WDFT ($N=16$) ซึ่ง DFT ($N=64$) มีค่า magnitude 2ค่าคือ ที่ $k=2$ และ $k=3$ และ WDFT ($N=16$) มีค่า magnitude 2ค่าคือ ที่ $k=0$ และ $k=7$

บทที่ 5

บทสรุป

5.1 สรุปผลการทดลอง

จากผลการทดลองพบว่า เมื่อเรากำหนดสัญญาณอินพุตคลื่นไซน์ 2 สัญญาณที่มีความถี่ใกล้เคียงกัน แล้วใช้วิธี DFT วิเคราะห์สัญญาณ สำหรับข้อมูลที่มีจำนวนน้อย ($N = 16, 32$) เราจะเห็นค่า magnitude ของทั้ง 2 สัญญาณเป็นค่า magnitude เดียวกัน และเมื่อใช้กับจำนวนข้อมูลมากขึ้น ($N=64$) พบว่าระยะห่างระหว่างค่า magnitude ของทั้ง 2 สัญญาณใกล้เคียงกันมาก แต่เมื่อเราใช้วิธี WDFT วิเคราะห์สัญญาณคลื่นไซน์ซึ่งมีจำนวนข้อมูลน้อย ($N=16$) ระยะห่างระหว่างค่า magnitude ของทั้งสองสัญญาณจะอยู่ห่างกัน

ดังนั้นในการวิเคราะห์สัญญาณคลื่นไซน์ 2 สัญญาณที่มีความถี่ใกล้เคียงกันและมีจำนวนข้อมูลน้อยควรใช้วิธี WDFT ในการวิเคราะห์

5.2 ปัญหาที่พบ

1. เนื่องจาก WDFT เกิดจากการเปลี่ยนแปลงค่าของ $\hat{\omega}_k$ ซึ่งทำให้ DFT และ WDFT ต่างกันโดย DFT นั้นสามารถหาค่า ω_k จาก $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ โดยที่ $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ แต่ WDFT เราต้องหาค่า $\hat{\omega}_k$ ตามความสัมพันธ์ของเรื่องที่เราศึกษา

2. ในการแปลงฟูเรียร์ของ DFT เราสามารถใช้ฟังก์ชันในการหาค่าการแปลงฟูเรียร์โดยใช้ฟังก์ชัน FFT (Fast Fourier Transform) แต่สำหรับ WDFT ไม่มีฟังก์ชันให้ใช้งาน

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. ควรจัดสมการก่อนแล้วจึงหาความสัมพันธ์ในการหาค่า $\hat{\omega}_k$ ควรใช้โปรแกรมเมทแล็บในการคำนวณ แล้วพล็อตกราฟดูเพื่อความถูกต้อง

2. ในการแปลงฟูเรียร์ของ WDFT ผู้ใช้ควรศึกษาโปรแกรมเมทแล็บ ให้เข้าใจก่อนใช้งาน และควรศึกษาตัวอย่างการเขียนโปรแกรมให้มาก

เอกสารอ้างอิง

- [1] Anamitra Makur, Sanjit K. Mitra . **Warped Discrete-Fourier Transform: Theory and Applications**. IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS-I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, VOL. 48, NO. 9, SEPTEMBER 2001.
- [2] S. Bagchi and S. K. Mitra, Nonuniform. **Discrete Fourier Transform and its Signal Processing Applications**. Norwell, MA: Kluwer, 1999.
- [3] The Student Edition of MATLAB Version 5 : User's Guide, Prentice Hall, 1997.
- [4] N. I. Cho and S. K. Mitra. **Warped discrete cosine transform and its application in image compression**. IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol, vol. 10, pp. 1364–1373, Dec. 2000.
- [5] โศรฎา แจ้เงการ, กนัฒร ชานึประศาสน์. การใ้ MATLABลํ้าหรับงานทางวิศกรรม. พิมพ์ร้เงที่ 2. นครราชสีมา: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- [6] รศ.ดร.มนัส สั้เงวศึลป้. วรรัตน กัทรอมกุต. คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณั้. กรุงเทพมหานคร : อินโฟเพรส. 2543.



ประวัติผู้เขียนโครงการ

4900138

๒๕๐๘๐๖๘๑.



ชื่อ นายนราศักดิ์ บุญเทพ ๒๕,
ภูมิลำเนา 68 หมู่ 2 ต.ควรว อ.ปง จ.พะเยา ๗๖๕๓
ประวัติการศึกษา ๒๕๖๘.
๒-๒
- จบมัธยมศึกษาจาก โรงเรียนปงรัชดาภิเษก
- ปัจจุบัน กำลังศึกษาในระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4
สาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail : narasak.b@hotmail.com



ชื่อ นายณัฐพงษ์ จันตา
ภูมิลำเนา 53 หมู่ 1 ต.บ้านม่วง อ. เชียงม่วน จ.พะเยา
ประวัติการศึกษา
- จบมัธยมศึกษาจาก โรงเรียนศรีสวัสดิ์วิทยาการ
- ปัจจุบัน กำลังศึกษาในระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4
สาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail : boomerang@hotmail.com

