การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์การเงิน

Application of Numerical Method on Financial Analysis

นายดนัย วัฒน์ชรานนท์ รหัส 45380040
นายสุทธิพันธ์ สิทธิอักษร รหัส 45380139
นายศุภโชค ธรรมาธร รหัส 45380263

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2548

ใบรับรองโครงงานวิศวกรรม

หัวข้อโครงงาน	การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์การเงิน		
ผู้ดำเนินโครงงาน	นายดนัย	วัฒน์ชรานนท์	รหัส 45380040
	นายสุทธิพันธ์	สิทธิอักษร	รหัส 45380139
	นายศุภโชค	ธรรมาธร	รหัส 45380263
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ธนิต มาลากร		
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า		
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์		
ปีการศึกษา	2548		

....

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้โครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะกรรมการสอบโครงงานวิศวกรรม

....ประธานกรรมการ
(ผศ.ดร.ธนิต มาลากร)

....กรรมการ
(อ. ดร.พนมขวัญ ริยะมงคล)

....กรรมการ
(อ. ดร.อัครพันธ์ วงศ์กังแห)

....กรรมการ
(อ. ปิยดนัย ภาชนะพรรณ์)

หัวข้อโครงงาน	การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์การเงิน
ผู้ดำเนินโครงงาน	นายดนัย วัฒน์ชรานนท์ รหัส 45380040
	นายสุทธิพันธ์ สิทธิอักษร รหัส 45380139
	นายศุภโชค ธรรมาธร รหัส 45380263
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ธนิต มาลากร
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2548

บทคัดย่อ

โดยทั่วไป สินทรัพย์ที่ถูกซื้อขายในตลาด อันได้แก่ หุ้น ตราสารหนี้ สินค้า และเงินตราระหว่างประเทศมีมูลค่าขึ้นหรือลงไม่แน่นอน และสิ่งนี้เองได้เป็นสิ่งกระตุ้นให้นักทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ วิศวกรการเงินและนักคณิตศาสตร์หันมาทำวิจัยเพื่อที่จะลดปัญหาเหล่านี้ ตราสารอนุพันธ์ชนิดต่าง ๆ ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาอย่างรวดเร็วและนำไปประยุกต์ใช้อย่างมีประสิทธิภาพในตลาดเป็นเวลาหลายสิบปี

โครงงานวิจัยฉบับนี้มุ่งเน้นศึกษาทฤษฎีด้านเครื่องมือทางการเงินทั้งสินทรัพย์และตราสารอนุพันธ์อย่างง่าย เมื่อกำหนดสูตรของตราสารอนุพันธ์ ณ เวลาสิ้นสุดสัญญามาให้ มูลค่าของตราสารอนุพันธ์สามารถคำนวณมาจากคุณสมบัติของมาร์ตินเกล ที่ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ถูกนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการคำนวณหามูลค่าของตราสารอนุพันธ์อย่างง่าย

Project Title	Application of Numerical Method on Financial Analysis
Name	Mr. Danai Watchalanon ID. 45380040
	Mr. Sutthipan Sitthiaksorn ID. 45380139
	Mr. Suphachok Thammatorn ID. 45380263
Project Advisor	Assist. Prof. Tanit Malakorn, PhD
Major	Electrical Engineering
Department	Electrical and Computer Engineering
Academic Year	2005

ABSTRACT

In general, the assets traded in a market such as stocks, bonds, commodities and foreign currencies have degree of uncertainty. This motivates theoretic economists, financial engineers and mathematicians to conduct researches to overcome such behavior. Various kinds of derivative securities have been rapidly developed and effectively applied in the market for decades.

This project primarily studies a theoretical framework for financial instruments in both underlying assets and simple derivatives. Given the formula of such derivatives at the expiration date, the derivative value can be obtained by virtue of the martingale property which in turn is a solution of the so-called Black-Scholes PDE. Numerical method is also available as a tool for solving the value of simple derivatives.

กิตติกรรมประกาศ

ปราศจากการช่วยเหลือและแรงบันดาลใจจากอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ธนิต มาลากร แล้วโครงงานฉบับนี้จะไม่สามารถสำเร็จลงได้ด้วยดี ทุกครั้งที่มีปัญหาใด ๆ ท่านจะมีเวลาให้กับพวกเราเสมอ นอกจากจะให้คำสอนและคำชี้แนะที่มีประโยชน์แล้ว ท่านยังคงช่วยในการค้นหาข้อมูลต่าง ๆ รวมทั้งอธิบายชุดคำสั่งของ MATLAB® ให้ด้วย พวกเรารู้สึกซาบซึ้งในการที่ท่านให้คำแนะนำอยู่โดยตลอด รวมทั้งให้การสนับสนุนและช่วยเหลือตลอดการศึกษาที่มหาวิทยาลัยนเรศวร แม้ในขณะที่พวกเราไปฝึกงานกันอยู่ ท่านยังเสียสละเวลาแวะไปหาพวกเราเป็นระยะ ๆ

พวกเราใคร่ขอส่งผ่านคำขอบคุณอย่างจริงใจไปยัง อาจารย์ ดร.พนมขวัญ ริยะมงคล อาจารย์ ดร.อัครพันธ์ วงศ์กังแห และ อาจารย์ ปิยดนัย ภาชนะพรรณ์ ที่กรุณาสละเวลาอันมีค่าอ่านต้นฉบับของโครงงานฉบับนี้ รวมทั้งกรุณามาเป็นกรรมการในการสอบโครงงานแม้ว่าพวกท่านทั้งหลายจะมีตารางเวลาที่แน่นขนัด

คณาจารย์ทุกท่านรวมถึงคณาจารย์จากวิทยาเขตพะเยาที่ได้ถ่ายทอดความรู้ที่เป็นประโยชน์ต่อพวกเราทุกคนย่อมสมควรได้รับคำขอบคุณจากพวกเราด้วยเช่นกัน ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่ได้ส่งกำลังใจให้พวกเรา รวมทั้งให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น พี่เก๋และน้องแอนที่ให้ยืมรถจักรยานยนต์เพื่อใช้เป็นพาหนะในการเดินทางระหว่างที่ทำโครงงานนี้ช่วงภาคฤดูร้อน พี่ต้นที่ให้ที่พักพิงและกำลังใจอยู่ตลอด รวมทั้งนายสุวิทย์ที่คอยรับฟังปัญหาต่าง ๆ

สุดท้ายนี้ พวกเราใคร่ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ลุงป้าน้าอาและพี่น้องทุกคน สำหรับความรักอันบริสุทธิ์ที่มอบให้ การสนับสนุนอย่างเต็มที่และคำแนะนำที่ยอดเยี่ยม พวกเราจะไม่ขอลืมพระคุณของทุกท่านที่ได้กล่าวมาข้างต้นตลอดชั่วนิจนิรันดร์

คณะผู้จัดทำโครงงาน

18 พฤษภาคม 2549

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

ส่วนที่ 1

ทฤษฎีและเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับ

ตลาดการเงิน

บทที่ 1

บทนำ

(Introduction)

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

ตั้งแต่ในอดีตจนถึงปัจจุบันคณิตศาสตร์ได้เข้าไปมีบทบาทในการวิเคราะห์และแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ เป็นต้น ปัญหาทางการเงินการคลังและการซื้อขายสินทรัพย์เป็นตัวอย่างหนึ่งที่น่าสนใจที่สามารถนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ ใช้ในการแก้ปัญหา

ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่เข้าไปมีส่วนในการวิเคราะห์ปัญหาทางการเงินการคลังและการซื้อขายสินทรัพย์ คือ ทฤษฎีของกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม **(Stochastic Process)** เนื่องจากพฤติกรรมของราคาหุ้นหรือราคาสินทรัพย์มีการเปลี่ยนแปลงอยู่โดยตลอดไม่มีความแน่นอน โดยทั่วไปกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มที่สำคัญ ที่ถูกนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ความไม่แน่นอนของราคาสินทรัพย์คือ **กระบวนการของเวียนเนอร์ (Wiener Process)** ซึ่งเป็นการประยุกต์ใช้ **การเคลื่อนที่แบบบราวเนียน (Brownian motion)** ไปใช้ในการแก้ไขปัญหาทางการเงิน จากเอกสารที่น่าเชื่อถือได้กล่าวไว้ว่า บุคคลคนแรกที่ได้นำการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ตลาดหลักทรัพย์คือนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสที่ชื่อLouis Bachelier ในปี ค.ศ. 1900

ต่อมาในปี ค.ศ. 1973 นักเศรษฐศาสตร์สามคน ได้แก่ Fisher Black, Robert C.Merton และ Myron Scholes ได้นำเอาผลงานของ Bachelier มาพัฒนาสูตรคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิแบบใหม่ ซึ่งต่อมาสูตรดังกล่าวได้ถูกขนานนามว่า **สูตรของ Black-Scholes (Black-Scholes formula)** เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้คิดค้นทั้งสาม ซึ่งจากผลงานดังกล่าวทำให้ Scholes และ Merton ได้รับรางวัลโนเบลสาขาเศรษฐศาสตร์ซึ่งจัดขึ้นในวันที่ 14 ตุลาคม ค.ศ. 1997

ในโครงงานฉบับนี้จะมุ่งเน้นศึกษาหัวข้อที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์สินทรัพย์ทางการเงินโดยใช้รูปแบบเชิงคณิตศาสตร์มาอธิบาย ทั้งสินทรัพย์ในรูปแบบของหุ้น (Stock) ตราสารหนี้ (Bond) และหลักทรัพย์อนุพันธ์ (Derivative securities) นอกจากนี้ยังมุ่งเน้นศึกษาเชิงเปรียบเทียบระหว่างการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยมุ่งเน้นที่ **ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method)** แบบต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาของตราสารสิทธิที่สำคัญในตลาดอนุพันธ์

เนื้อหาในโครงงานฉบับนี้ประกอบด้วย 2 ส่วนด้วยกัน กล่าวคือ

ส่วนที่ 1 ทฤษฎีและเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับตลาดการเงิน

ส่วนที่ 2 การประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาทางการเงิน

ซึ่งเนื้อหาในแต่ละส่วนสามารถศึกษาแยกจากกันได้อย่างอิสระขึ้นอยู่กับความสนใจของผู้อ่าน

เนื้อหาของแต่ละบทโดยสังเขป

ส่วนที่ 1 ทฤษฎีและเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับตลาดการเงิน

บทที่ 2 กล่าวถึงนิยามของคำศัพท์พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับตลาดการเงิน ตลาดอนุพันธ์ และหลักการเบื้องต้นในการพิจารณาซื้อขายสัญญาตราสารสิทธิเพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจถึงตราสารสิทธิมากขึ้น

บทที่ 3 เป็นการศึกษาทฤษฎีทางด้านกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาวิยุต (Discrete-time Stochastic Process) ซึ่งต้องอาศัยแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาค (Binary Tree Model) มาเป็นแบบจำลองแทนกระบวนการดังกล่าว จากนั้นจึงนำทฤษฎีที่ได้มาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์มูลค่าของสัญญาหรือตราสารสิทธิ รวมถึงมูลค่าของหุ้นและสินทรัพย์ต่าง ๆ ในกรณีที่เวลาในการพิจารณาเป็นแบบเวลาวิยุต ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการพิจารณามูลค่าของสินทรัพย์ต่าง ๆ ในกรณีของเวลาต่อเนื่อง ซึ่งจะกล่าวในบทถัดไป

บทที่ 4 เป็นการนำทฤษฎีที่ได้ในบทที่ 3 มาประยุกต์เพื่อใช้ศึกษาถึงพฤติกรรมของหุ้น สินทรัพย์และมูลค่าของสัญญาหรือตราสารสิทธิ ซึ่งในกรณีนี้เวลาที่พิจารณาจะเป็นเวลาที่มีความต่อเนื่อง ดังนั้นในบทนี้จึงมุ่งเน้นไปที่กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาต่อเนื่อง (Continuous-time Stochastic Process) รวมถึงการนำทฤษฎีทั้งหมดที่ได้ มาวิเคราะห์ร่วมกับตลาดอนุพันธ์ ซึ่งความสัมพันธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes โดยทั่วไปแล้วการแก้สมการดังกล่าวไม่สามารถหาวิเคราะห์หาผลเฉลยในรูปทั่วไปได้ จึงจำเป็นที่จะต้องหาผลเฉลยจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวต่อไปในส่วนที่ 2

บทที่ 5 เป็นการวิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของราคาหุ้นที่ได้ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนกับราคาปิดตลาดของหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ที่มีการซื้อขายจริงและการเคลื่อนที่แบบเฉลี่ย (Moving average) โดยใช้การเขียนชุดคำสั่งใน MATLAB®

ส่วนที่ 2 การประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาทางการเงิน

บทที่ 6 กล่าวถึงระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่เรียกว่า **ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method)** ซึ่งจะอธิบายถึงพื้นฐานการคำนวณ และหลักการแบบคร่าว ๆ เพื่อให้ผู้อ่านได้ทราบถึงทฤษฎีพื้นฐานก่อนนำระเบียบวิธีดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในการเขียนชุดคำสั่งใน MATLAB®

บทที่ 7 จะศึกษามุ่งเน้นไปที่การนำเอาระเบียบวิธีผลต่างอันตะไปประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes โดยผลเฉลยที่ได้จะเป็นมูลค่าของสัญญาหรือตราสารสิทธิ ณ เวลาต่าง ๆ กัน โดยในโครงงานนี้จะทำการศึกษาเชิงเปรียบเทียบของระเบียบวิธีผลต่างอันตะ 2 วิธี ได้แก่ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยาย (Implicit Finite-difference Method), ระเบียบวิธีของ Crank-Nicolson (Crank-Nicolson Method)

บทที่ 8 แสดงผลการทดลองจากการคำนวณหามูลค่าของตราสารยุโรป โดยใช้วิธี Fully Implicit เปรียบเทียบกับวิธี Crank-Nicolson ด้วยเทคนิค LU โดยแสดงผลการทดลอง ในรูปแบบกราฟและแสดงค่าที่ได้จากการทดลองลงในตาราง

บทที่ 9 สรุปผลที่ได้จากชุดคำสั่งและวิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบ

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. เพื่อศึกษารูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของหุ้นและตลาดอนุพันธ์
2. เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบต่างๆ ที่ใช้ในการประมาณค่าในสูตรของ Black-Scholes
3. เพื่อเป็นการนำคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic process) มาประยุกต์ใช้กับทฤษฎีทางด้านตลาดอนุพันธ์

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

เน้นศึกษาด้านตลาดอนุพันธ์ โดยเฉพาะตราสารสิทธิเรียกซื้อสินทรัพย์ (Call Option) ตราสารสิทธิให้ขายสินทรัพย์ (Put Option) สัญญาซื้อขายล่วงหน้า (Forward Contract) เมื่อได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบ Black-Scholes ของสินทรัพย์ประเภทต่าง ๆ แล้ว นำมาจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบของสมการการแพร่ (Diffusion equation) แล้วใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาคำนวณหามูลค่าสินทรัพย์ในเวลาต่าง ๆ ที่กำหนด

1.4 ขั้นตอนของการดำเนินงานและแผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัย

รายละเอียด	ปี 2548				ปี 2549			
	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย
1. รวบรวมและเก็บข้อมูล	↔	↔						
2. ศึกษาบทความที่เกี่ยวข้องในอดีต			↔	↔	↔	↔		
3. เขียนโปรแกรม MATLAB® ที่ใช้ในการคำนวณหามูลค่าของสินทรัพย์						↔	↔	↔
4. จัดทำรายงานและสรุปผลการทำงาน								↔

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงงาน

1. สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาทางการเงินการคลังและการซื้อขายสินทรัพย์
2. เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาพฤติกรรมของความไม่แน่นอนในตลาดหลักทรัพย์ และตลาดอนุพันธ์ได้อย่างเป็นระบบ
3. เพื่อแสดงให้เห็นถึงความสำคัญในการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

1.6 งบประมาณ

1. ค่าถ่ายเอกสารและค่าเข้าเล่ม 1,500 บาท
2. ค่าพิมพ์เอกสาร 1,000 บาท
3. ค่าวัสดุสำนักงาน 500 บาท

รวมเป็นเงิน 3,000 บาท (สามพันบาทถ้วน)

(หมายเหตุ ถัวเฉลี่ยทุกรายการ)

บทที่ 2

นิยามและหลักการเบื้องต้น

(Definitions and Basic Principles)

กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic Process) ได้ถูกนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการดูแนวโน้มของราคาหุ้นว่าจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางใดโดยข้อมูลที่นำมาใช้คำนวณได้แก่ ราคาสูงสุด, ราคาต่ำสุด และ ราคาปิดตลาดของหุ้น เป็นต้น โดยทั่วไปแล้วถ้าราคาของหุ้นมีแนวโน้มที่จะสูงขึ้นต่อไปราคาปิดของหุ้นนั้นจะอยู่ใกล้กับราคาสูงสุดของวัน แต่ถ้าราคาของหุ้นมีแนวโน้มที่จะลดลง ราคาปิดของหุ้นจะอยู่ใกล้ราคาต่ำสุดของวัน

นอกจากราคาของหุ้นแล้ว กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม สามารถนำมาประยุกต์ได้กับการพิจารณาอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ ราคาทองคำ ราคาน้ำมัน เป็นต้น เนื่องจากราคาของสินค้าต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้อยู่โดยตลอดและมีความไม่แน่นอนของราคาซึ่งจะขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการ ในบางครั้งผู้ลงทุนมักมีความประสงค์ที่จะลดความเสี่ยงอันเกิดจากความไม่แน่นอนของราคาสินทรัพย์ต่าง ๆ ดังนั้นจึงได้มีการคิดค้นกระบวนการต่าง ๆ ที่ใช้ลดความเสี่ยงดังกล่าวอันได้แก่ การทำสัญญาซื้อขายล่วงหน้า (Forward Contract) การทำตราสารสิทธิ เป็นต้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามต่างๆ รวมทั้งหลักการเบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ปัญหาทางการเงินและการซื้อขายสินทรัพย์เพื่อเป็นพื้นฐานให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจเนื้อหาในบทถัดไป

ตลาด (Market) คือ ศูนย์กลางที่จัดให้มีขึ้นเพื่อทำหน้าที่ให้บริการเป็นศูนย์ซื้อขายสินค้า หรือสินทรัพย์ เช่นทองคำ น้ำมัน ตราสารหนี้ ที่ดิน เป็นต้น รวมทั้งมีการจัดระบบและวิธีการซื้อขาย อีกทั้งมีการประกอบธุรกิจที่เกี่ยวข้องได้แก่ สำนักหักบัญชี ศูนย์รับฝากสินทรัพย์ นายทะเบียน และการให้บริการข้อมูลเกี่ยวกับสินทรัพย์ ตลาดสามารถจำแนกได้ออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ

1. **ตลาดหลัก (Primary Market)** หมายถึง ตลาดที่มีการซื้อขายสินค้าหรือสินทรัพย์ประเภทต่าง ๆ อาทิ เช่น หุ้น ตราสารหนี้ ทองคำ เงินตราต่างประเทศ เป็นต้น โดยที่มีการส่งมอบสินค้าหรือสินทรัพย์นั้น โดยทันทีหรือภายหลังจากการตกลงซื้อขายในเวลาไม่นาน การจ่ายเงินมักจะกระทำโดยทันทีหลังการตกลงซื้อขาย แม้ว่าบางครั้งอาจจะมีการหักเครดิตล่วงหน้าได้ ตัวอย่างของตลาดหลัก ได้แก่

   1.1. ตลาดเงิน (Money Market) คือ ตลาดที่ทำหน้าที่บริการให้กับผู้ขอกู้เงินและผู้ให้กู้เงินระยะสั้น ปกติไม่เกิน 1 ปีโดยมีการตกลงกู้เงินกันในลักษณะที่จะเป็นนายหน้านำเอกสารการรับรอง

ว่าเป็นหนี้ของผู้ขอกู้มาขายให้ผู้ให้กู้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ตลาดเงิน คือ ตลาดนายหน้าการกู้เงินระยะสั้น

1.2. **ตลาดทุน (Capital Market)** คือ ตลาดที่ทำหน้าที่บริการให้กับผู้ขอกู้เงินและผู้ให้กู้เงินระยะยาว ปกติเกิน 1 ปี โดยมีการตกลงกู้เงินกันในลักษณะที่จะเป็นนายหน้านำเอกสารการรับรองว่าเป็นหนี้ของผู้ขอกู้มาขายให้ผู้ให้กู้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ตลาดทุน คือ ตลาดนายหน้าการกู้เงินระยะยาว

1.3. **ตลาดการเงิน (Financial Market)** เป็นสถานที่ให้กู้เงิน หรือ ซื้อขายสินทรัพย์ได้แก่ที่ดิน อาคาร สิทธิบัตร เครื่องหมายการค้า เป็นต้น

1.4. **ตลาดหุ้น (Stock Market)** คือ สถานที่ซื้อและขายหุ้นของบริษัทที่จดทะเบียนเป็นบริษัทมหาชน

1.5. **ตลาดตราสารหนี้ (Bond Market)** หมายถึง สถานที่ที่มีการซื้อขายพันธบัตรหรือสัญญาแสดงความเป็นหนี้ (ตราสารหนี้) ระหว่างผู้ออกสัญญาและผู้ลงทุน ตราสารหนี้ต้องมีกำหนดอายุและอัตราดอกเบี้ยหรือผลประโยชน์อื่นใดเป็นจำนวนที่แน่นอน โดยระบุวันที่ชำระดอกเบี้ยและเงินต้นล่วงหน้าตั้งแต่เมื่อออกตราสารนั้น และในระหว่างที่ยังไม่ครบกำหนดอายุ หรือวันไถ่ถอน สามารถซื้อขาย โอนเปลี่ยนมือกันได้

2. **ตลาดรอง (Secondary Market)** หรืออาจเรียกอีกอย่างว่า ตลาดอนุพันธ์ (Derivative market) คือ ตลาดที่ทำหน้าที่ลดความเสี่ยงอันเกิดจากความแปรปรวนของราคาสินทรัพย์ โดยมุ่งเน้นไปยังผู้ซื้อและ/หรือผู้ขายของสินทรัพย์อนุพันธ์[1]เป็นหลัก และทำหน้าที่ดูแลการชำระราคาการซื้อขายอนุพันธ์ให้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ โดยอนุพันธ์ที่สำคัญได้แก่

2.1. **สัญญา (Contracts)** หมายถึง ข้อผูกมัดที่กำหนดให้คู่สัญญาต้องซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงให้กับอีกฝ่ายหนึ่ง ณ เวลาใดเวลาหนึ่งในอนาคต ตามจำนวนและราคาตามที่กำหนดไว้ในสัญญา ข้อผูกพันนี้จะอยู่ไปจนครบอายุสัญญา หรือจนกว่าจะมีการหักล้างสัญญาเกิดขึ้น สัญญาที่สำคัญได้แก่

2.1.1. <u>สัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward (Forward Contract)</u> เป็นผลิตภัณฑ์อนุพันธ์ที่ง่ายที่สุด เป็นสัญญาระหว่างคู่กรณี 2 ฝ่าย คือ ฝ่ายผู้ซื้อและฝ่ายผู้ขายที่ทำสัญญาว่าจะชำระเงินและส่งมอบสินค้าหรือหลักทรัพย์กัน ณ เวลาใดเวลาหนึ่งในอนาคต โดยที่ราคาและจำนวนสินค้าที่จะส่งมอบได้ถูกกำหนดไว้อย่างแน่นอนในสัญญา สินค้าที่ว่านี้ส่วนใหญ่จะเป็นเงินตราต่างประเทศและอัตราดอกเบี้ย เนื่องจากเป็นการตกลงกันตามความพอใจของคู่กรณี ทำให้สัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward มีความเป็นลักษณะเฉพาะไม่ซ้ำ

---

[1] อนุพันธ์ (Derivatives) คือ ตราสาร หรือสัญญา ที่มีลักษณะสำคัญสามประการคือ มีมูลค่าขึ้นอยู่กับสิ่งที่อนุพันธ์นั้นอ้างอิงอยู่ มีอายุจำกัด และใช้เงินลงทุนน้อยซึ่งทำให้การลงทุนให้อัตราผลตอบแทนที่สูงทั้งด้านลบและด้านบวก

กับใคร ระยะเวลาและเงื่อนไขของสัญญาจึงแตกต่างกันจากคู่สัญญาคู่อื่นเนื่องจากการทำสัญญาประเภทนี้ขึ้นอยู่กับการเจรจาระหว่างคู่สัญญา ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีมาตรฐานในการทำสัญญาประเภทนี้ ดังนั้นผลกำไรหรือขาดทุนจากการทำสัญญาแบบ Forward จึงขึ้นอยู่กับราคาของสินค้าตามสัญญานั้นว่าจะมีราคาเป็นอย่างไรในวันที่ตกลงซื้อขายล่วงหน้าที่กำหนดไว้ในสัญญา นั่นก็คือ อัตราแลกเปลี่ยนเปลี่ยนไปหรือไม่อย่างไร อัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนไปหรือไม่อย่างไร เมื่อฝ่ายหนึ่งกำไรอีกฝ่ายหนึ่งก็จะขาดทุนในอัตราที่เท่ากัน

2.1.2. <u>สัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Future (Future Contract)</u> คือการตกลงทำสัญญาซื้อหรือขายสินค้าหรือสินทรัพย์ในราคาตลาดหลักกับธนาคารพาณิชย์ โดยในสัญญาจะระบุรายละเอียดเกี่ยวกับจำนวน อัตราแลกเปลี่ยน และระยะเวลาเอาไว้แน่นอนเพื่อป้องกันการผันผวนของตลาด ความจริงแล้วสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Future นั้นถูกพัฒนามาจากสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward ซึ่งมีจุดอ่อนที่ว่า การทำสัญญาแบบ Forward ไม่สะดวกที่จะซื้อขายต่อกันไปเป็นทอด ๆ ได้ เนื่องจากสัญญาแบบ Forward ขาดมาตรฐานไม่สามารถสร้างตลาดรองที่มีสภาพคล่องสูงได้

2.2. ตราสารสิทธิ (Options) หมายถึง สัญญาที่ให้สิทธิแก่คู่สัญญาฝ่ายหนึ่งที่จะเรียกให้คู่สัญญาอีกฝ่ายซื้อหรือขายสินค้า ณ เวลาใดเวลาหนึ่งในอนาคต ตามจำนวนและราคาตามที่กำหนดไว้ในสัญญา ซึ่งผู้ได้สิทธินี้จะใช้สิทธิหรือไม่ก็ได้ โดยสามารถแบ่งตามสิทธิสัญญาที่ได้ตกลงกันไว้ดังนี้

- <u>ตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call Option)</u> เป็นตราสารที่ให้สิทธิผู้ถือสามารถซื้อสินทรัพย์ได้ภายในระยะเวลาที่กำหนด ตามราคาที่ได้กำหนดไว้
- <u>ตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (Put Options)</u> เป็นตราสารที่ให้สิทธิผู้ถือสามารถขายสินทรัพย์ได้ภายในระยะเวลาที่กำหนด ตามราคาที่ได้กำหนดไว้

นอกจากนี้ตราสารสิทธิยังสามารถจำแนกตามระยะเวลา ได้เป็น

- <u>ตราสารสิทธิแบบอเมริกัน (American Options)</u> เป็นตราสารสิทธิประเภทสามารถใช้สิทธิเมื่อใดก็ได้ ตราบใดที่ตราสารยังไม่หมดอายุ
- <u>ตราสารสิทธิแบบยุโรป (European Options)</u> เป็นตราสารสิทธิประเภทให้ใช้สิทธิได้ก็ต่อเมื่อถึงวันครบกำหนดตามสัญญาแล้วเท่านั้น อย่างไรก็ตาม ผู้ถือสามารถขายตราสารสิทธิที่ตนเองยึดครองอยู่ให้กับบุคคลอื่นได้ โดยที่บุคคลนั้นต้องปฏิบัติตามเงื่อนไขเดิมที่ระบุไว้ในตราสารสิทธินั้นๆ

สินค้าที่สามารถซื้อขายในตลาดอนุพันธ์ ได้แก่

1 หุ้นสามัญ และดัชนีกลุ่มหลักทรัพย์

2 อัตราดอกเบี้ย พันธบัตร และหุ้นกู้

3 อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ

4 ทองคำ น้ำมันดิบ หรือดัชนีทางการเงินอื่นๆ

ตราสารหนี้(Bond: B_t) หมายถึงหลักทรัพย์ที่ภาครัฐบาลหรือองค์การรัฐบาลรวมไปถึงรัฐวิสาหกิจเป็นผู้ออกซึ่งอาจมีรัฐบาลเป็นผู้ค้ำประกัน เป็นหลักทรัพย์ประเภทหนี้ระยะยาวซึ่งผู้ออกมีข้อผูกพันตามกฎหมายที่จะชำระดอกเบี้ยและเงินต้นที่แน่นอนแก่ผู้ซื้อตามเวลาที่กำหนด เป็นหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงน้อยที่สุด ซึ่งโดยทั่วไปรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของตราสารหนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$B_t = B_{t_0} e^{r(t-t_0)} \tag{2.1}$$

โดยที่

B_{t_0} คือ มูลค่าตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น

B_t คือ มูลค่าตราสารหนี้ที่เวลาสิ้นสุด

r คือ อัตราดอกเบี้ย

t_0 คือ เวลาเริ่มต้น

t คือ เวลาสิ้นสุด

หุ้น (Stock: S_t) คือ เป็นหลักทรัพย์ที่ภาคเอกชนออกเพื่อระดมเงินทุนไปใช้ลงทุนในกิจการโดยตรง ซึ่งลักษณะของหุ้นที่สำคัญ ได้แก่

1. **หุ้นสามัญ (Ordinary Shares)** เป็นหลักทรัพย์ที่ผู้ถือมีส่วนร่วมของการเป็นเจ้าของกิจการ ผลตอบแทนของหุ้นสามัญประกอบด้วยผลกำไรจากการขายหุ้น สิทธิในการจองหุ้นใหม่ และเงินปันผลซึ่งอาจอยู่ในรูปเงินสดหรือหุ้นปันผลก็ได้ โดยที่ผลตอบแทนจะสูงหรือต่ำอยู่ที่ผลการดำเนินงานของบริษัทที่ออกหุ้นนั้นๆ
2. **หุ้นบุริมสิทธิ (Preference Shares)** เป็นตราสารกึ่งทุนกึ่งหนี้ (Hybrid) กล่าวคือ ผู้ถือหุ้นบุริมสิทธิมีฐานะอยู่กึ่งกลางระหว่างความเป็นเจ้าหนี้กับความเป็นเจ้าของกิจการ ลักษณะสำคัญของหุ้นบุริมสิทธิคือ ไม่มีกำหนดระยะเวลาไถ่ถอน ซึ่งลักษณะที่กล่าวมานี้เหมือนกับหุ้นสามัญ กล่าวคือคือ ผู้ถือหุ้นบุริมสิทธิ ไม่สามารถเรียกร้องให้บริษัทจ่ายเงินคืนทุนให้แก่ตนได้ ในกรณีต้องการเงินคืนสามารถทำได้โดยการนำหุ้นไปขายต่อในตลาดเช่นเดียวกับผู้ถือหุ้นสามัญ แต่อย่างไรก็ตาม ผู้ถือหุ้นประเภทนี้ไม่มีสิทธิออกเสียงในการบริหารงานเว้นแต่จะมีการระบุไว้เป็นเงื่อนไขหรือข้อบังคับในการออกหุ้นเฉพาะกรณีไป แต่ผู้ถือหุ้นบุริมสิทธินี้มีสิทธิที่เหนือกว่าผู้ถือหุ้นสามัญ คือ การได้รับเงินปันผลก่อนผู้ถือหุ้นสามัญ

3. **หุ้นกู้ (Corporate Debentures)** เป็นตราสารที่บริษัทเอกชนออกมาเพื่อกู้เงินระยะยาวเกินกว่า 1 ปี จากนักลงทุน ผู้ถือหุ้นจะมีฐานะเป็นเจ้าหนี้ของกิจการ บริษัทจะต้องจ่ายผลตอบแทนเป็นดอกเบี้ยให้แก่ผู้ถือตามระยะเวลา และอัตราที่กำหนด ดอกเบี้ยจะสูงหรือต่ำนั้นขึ้นอยู่กับฐานะและชื่อเสียงของบริษัทผู้ออกหุ้น

เนื่องจาก มูลค่าของหุ้นสามัญนั้นไม่ทราบค่าล่วงหน้าที่แน่นอน การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายพฤติกรรมของหุ้นประเภทนี้ ต้องอาศัยหลักการของความน่าจะเป็น (Probability principle) มาเป็นองค์ประกอบหลัก ในทางทฤษฎี รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของหุ้นนี้มีอยู่หลายประเภท แต่ที่ถูกนำมาใช้ในโครงงานฉบับนี้เป็นรูปแบบที่เรียกว่า **การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต (Geometric Brownian Motion)** กล่าวคือ

$$S_t = S_{t_0} e^{\mathbf{X}_t} \qquad (2.2)$$

โดยที่

S_{t_0} คือ ราคาหุ้นที่เวลาปัจจุบัน

S_t คือ ราคาหุ้นที่เวลาในอนาคต

$\mathbf{X}$ คือ กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic Process)

สำหรับเหตุผลที่ใช้การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิตมาเป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้วิเคราะห์พฤติกรรมของหุ้นสามัญนี้ ได้ถูกอธิบายไว้ในบทที่ 4

การขายชอร์ต (Selling Short หรือ Short Selling) หมายถึง การขายหุ้นโดยที่ผู้ขายได้ยืมหุ้นนั้นมาจากบริษัทหลักทรัพย์หรือจากสถาบันที่ให้บริการยืมหุ้น ผู้ขายชอร์ตจะต้องวางเงินประกัน (Margin) ไว้กับบริษัทผู้ให้ยืมหุ้นในจำนวนไม่ต่ำกว่าอัตราที่ตลาดหลักทรัพย์กำหนดและเงินจากการขายหุ้นดังกล่าวก็ต้องเก็บรักษาไว้ที่บริษัทนายหน้าเพื่อเป็นหลักประกันด้วย ทั้งนี้จนกว่าผู้ขายชอร์ตจะส่งคืนหุ้นจำนวนที่ยืมไปนั้น ซึ่งจะส่งคืนหุ้น ณ วันที่ถึงกำหนดส่งคืนหุ้นหรือส่งคืนก่อนวันครบกำหนดก็ได้ ในระหว่างที่ยังไม่ส่งคืนหุ้น หากหุ้นนั้นได้รับสิทธิประโยชน์ใด ๆ จากบริษัทผู้ออกหุ้น ผู้ขายชอร์ตจะต้องส่งมอบสิทธิต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นนั้นแก่บริษัทนายหน้าของตน เพื่อส่งมอบต่อให้แก่เจ้าของหุ้นที่ให้ยืมอีกทอดหนึ่ง สิทธิต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้น เช่น การจ่ายเงินปันผล การให้สิทธิจองซื้อหุ้นเพิ่มทุน เป็นต้น

หลักทรัพย์ในครอบครอง (Portfolio) เป็นหลักทรัพย์ทั้งหมดในความครอบครองของผู้ลงทุนรายใดรายหนึ่ง ทั้งนี้ จะต้องประกอบด้วยกลุ่มหลักทรัพย์จำนวนตั้งแต่ 2 ชนิด หรือ 2 บริษัทขึ้นไป จุดประสงค์ในการสร้าง Portfolio ของผู้ลงทุน ก็เพื่อลดความเสี่ยงในการลงทุน ด้วยการกระจายการลงทุนในหลักทรัพย์ของหลายกิจการ หรือหลักทรัพย์หลายประเภท ในทางคณิตศาสตร์แล้ว หลักทรัพย์ในครอบครอง (Portfolio) หมายถึง ปริมาณ (φ_t, ψ_t) ที่ซึ่ง φ_t และ ψ_t เป็นจำนวนของสินทรัพย์ (หุ้น) และ

จำนวนของตราสารหนี้ที่ซึ่งผู้ลงทุนได้ถือครองไว้ ณ เวลา t ตามลำดับ โดยที่ปริมาณ φ_t และ ψ_t นั้นสามารถมีค่าเป็นบวกหรือมีค่าเป็นลบก็ได้[2] และปริมาณ φ_t นั้นจะเป็นฟังก์ชันของข้อมูลต่าง ๆ ที่ทราบค่าตั้งแต่เริ่มต้นของการลงทุนจนถึงเวลา t ใด ๆ

กลยุทธ์การรักษาสมดุลทางการเงิน (Self-financing Strategy) หลักทรัพย์ในครอบครอง (Portfolio) ถูกกล่าวว่าสามารถรักษาสมดุลทางการเงินได้ ก็ต่อเมื่อ มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองจะเปลี่ยนแปลงไปขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของมูลค่าสินทรัพย์เท่านั้น โดยที่ปริมาณของหลักทรัพย์ในครอบครอง (φ_t,ψ_t) มีค่าคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง หากพิจารณาในเชิงคณิตศาสตร์ เมื่อกำหนดให้ (φ_t,ψ_t) เป็นหลักทรัพย์ในครอบครองโดยที่ S_t และ B_t แทนมูลค่าของหุ้น และมูลค่าของตราสารหนี้ตามลำดับแล้ว

$$(\varphi_t,\psi_t) \text{ รักษาสมดุลทางการเงิน ก็ต่อเมื่อ } \Delta V_t = \varphi_t \Delta S_t + \psi_t \Delta B_t$$

โดยที่ $\Delta \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t-1}$

การทำกำไรจากผลต่างของราคาใน 2 ตลาด (Arbitrage) คือ การซื้อสินค้าในตลาดที่ราคาถูกและขณะเดียวกันก็สั่งขายสินค้านั้น (หรือสินค้าประเภทเดียวกันนั้น) ในจำนวนเดียวกันในอีกตลาดที่ราคาสูงกว่า เพื่อรับผลกำไรจากส่วนต่างของราคาใน 2 ตลาด การทำกำไรประเภทนี้จะทำได้เฉพาะกับสินค้าที่มีการซื้อขายมากกว่าหนึ่งตลาด เช่น ซื้อขายในตลาดปกติที่ส่งมอบทันทีซื้อขายในตลาดล่วงหน้า และซื้อขายในตลาดตราสารสิทธิ เป็นต้น สินค้าประเภทนี้ ได้แก่ ข้าวโพด ทองคำ เงินตราต่างประเทศ หุ้น ดัชนีราคาหุ้น พันธบัตรรัฐบาล อัตราดอกเบี้ย เป็นต้น เมื่อมีการทำกำไรจากผลต่างของราคาใน 2 ตลาด จะผลักดันให้ราคาที่แตกต่างกันอย่างผิดปกติในสองตลาดนั้นกลับคืนสู่ภาวะสมดุลตามปัจจัยพื้นฐานได้เร็วขึ้น ตลาดที่ราคาแพงราคาก็จะกลับต่ำลงเพราะมีแรงขายเพิ่มขึ้น และตลาดที่ราคาถูก ราคาจะสูงขึ้นเพราะมีแรงซื้อเพิ่มขึ้น

ดัชนีตัวเลข (INDEX NUMBER) เป็นเครื่องมือทางสถิติเพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต่าง ๆ เช่น ประสิทธิภาพการผลิต ต้นทุนการผลิต ราคา เป็นต้น โดยมีการเลือกปีฐานให้เท่ากับ 100 และคำนวณความเคลื่อนไหวเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทางเศรษฐกิจของปีต่างๆ ได้
สำหรับดัชนีที่บ่งชี้การเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ คือ ตัวเลขที่บอกให้ทราบว่า ราคาของสินทรัพย์ที่ซื้อขายกันในตลาดหลักมีการขึ้นลงราคากันอย่างไร โดยปกติดัชนีที่ตลาดหลักมีการประกาศออกมานั้น จะเป็นการเฉลี่ยราคาสินทรัพย์ของหลายบริษัท ดัชนีราคาหุ้นที่สำคัญในประเทศไทยได้แก่

---

[2] ปริมาณมีค่าติดลบ หมายถึง เกิดการขายชอร์ตขึ้น

1. **ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET INDEX)** เป็นดัชนีราคาหุ้นที่คำนวณถัวเฉลี่ยราคาหุ้นสามัญแบบถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนหุ้นจดทะเบียน โดยใช้หุ้นสามัญจดทะเบียนทุกตัวในตลาดหลักทรัพย์ โดยมีสูตรการคำนวณ ดังนี้

   ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์ (SET Index) มีค่าเท่ากับ ค่าเฉลี่ย (ถ่วงน้ำหนัก) ของราคาหุ้นสามัญทุกตัวในตลาดหลักทรัพย์ ณ วันปัจจุบัน x 100 / ค่าเฉลี่ย (ถ่วงน้ำหนัก) ของราคาหุ้นสามัญทุกตัวข้างต้น ณ 30 เมษายน 2518 ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ มูลค่าตลาดโดยรวมของหุ้นสามัญจดทะเบียนทุกตัว ณ วันปัจจุบัน (Current Market Value) x 100 / มูลค่าตลาดโดยรวมของหุ้นสามัญข้างต้น ณ 30 เมษายน 2518 (Based Market Value)
2. **ดัชนีเซท 50 (SET 50 INDEX)** คือ เป็นดัชนีราคาหุ้นที่ตลาดหลักทรัพย์จัดทำขึ้นอีกตัวหนึ่ง เพื่อใช้แสดงระดับและความเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ 50 ตัวที่มีมูลค่าตลาดสูงและการซื้อขายมีสภาพคล่องสูงอย่างสม่ำเสมอ สูตรและวิธีการคำนวณเป็นเช่นเดียวกับการคำนวณ SET Index แต่ใช้วันที่ 16 สิงหาคม 2538 เป็นวันฐาน
3. **ตราสารสิทธิในดัชนีตลาดหลักทรัพย์ (Stock INDEX Option)** ในส่วนของตราสารสิทธิในดัชนีตลาดหลักทรัพย์ จะมีกลุ่มหลักทรัพย์ที่ดัชนีนั้นอ้างอิงถึงเป็นสินทรัพย์อ้างอิง แต่ผู้ออกตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call Option) ไม่ต้องส่งมอบกลุ่มหลักทรัพย์นั้นจริง ๆ และผู้ออกตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (Put Option) ก็ไม่ต้องรับซื้อกลุ่มหลักทรัพย์นั้น ๆ เช่นกัน ทั้งนี้ก็เพราะการส่งมอบกลุ่มหลักทรัพย์ที่ดัชนีอ้างอิงถึงทำได้ยากลำบาก การปฏิบัติตามเงื่อนไขของตราสารสิทธิจึงเป็นการชำระราคากันเป็นเงินสด (cash settlement) ซึ่งทำได้สะดวกกว่ามาก ผู้ออกตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินจะเป็นผู้รับผิดชอบในการจ่ายเงินให้กับผู้เป็นเจ้าของตราสารสิทธิซึ่งประสงค์ขอใช้สิทธิเป็นจำนวนเท่ากับส่วนต่างระหว่างราคาใช้สิทธิเป็นดัชนีที่กำหนดในตราสารสิทธิกับระดับดัชนีที่ใช้ในการชำระราคาในอนาคตเมื่อถึงกำหนด แล้วค่อยนำส่วนต่างไปคูณกับตัวคูณดัชนี ส่วนผู้ออกตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สินจะเป็นผู้รับผิดชอบในการจ่ายเงินให้กับผู้เป็นเจ้าของตราสารสิทธิซึ่งประสงค์จะใช้สิทธิเป็นจำนวนเท่ากับส่วนต่างระหว่างระดับดัชนีที่ใช้ในการชำระราคาในอนาคตเมื่อถึงกำหนดกับราคาใช้สิทธิเป็นดัชนีที่กำหนดในตราสารสิทธิคูณด้วยตัวคูณดัชนี

ประเภทของผู้ค้า (Types of Traders)

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น การค้าหรือการลงทุนในตลาดรอง หรือตลาดอนุพันธ์จะสามารถลดความเสี่ยงได้มากกว่าการค้าหรือการลงทุนในตลาดหลัก แม้ว่าผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับมีอัตราที่ต่ำกว่าการลงทุนในตลาดหลัก สำหรับผู้ค้าหรือผู้ลงทุนในตลาดอนุพันธ์นั้น สามารถจำแนกได้เป็น 3 ประเภท กล่าวคือ

1. **นักลงทุนที่ต้องการลดความเสี่ยง (Hedgers)** คือ ผู้ลงทุนที่มีความประสงค์ที่ต้องการลดความเสี่ยงที่อาจจะเกิดขึ้นในอนาคตให้น้อยที่สุด อันเนื่องมาจากความไม่แน่นอนในอนาคตและความผันผวนของราคา
2. **นักเก็งกำไร (Speculators)** คือ ผู้ลงทุนที่นิยมเล่นหุ้นระยะสั้นและต้องการเก็งกำไรโดยจะอาศัยข่าวต่าง ๆ ในการเก็งกำไรหุ้นแต่ละตัวเป็นหลัก โดยไม่คำนึงถึงปัจจัยพื้นฐานของหุ้นแต่ละตัวมากนัก ข้อดีของนักเก็งกำไร คือช่วยให้หุ้นมีสภาพคล่อง มีการเคลื่อนไหวของราคาหุ้น จึงทำให้ตลาดหุ้นมีความคึกคักมากขึ้น
3. **นักทำกำไรจากผลต่างของราคาใน 2 ตลาด (Arbitrageurs)** คือ ผู้ลงทุนที่ต้องการได้กำไรจากการซื้อสินค้าในตลาดที่ราคาถูกและในขณะเดียวกันก็สั่งขายสินค้านั้น (หรือสินค้าประเภทเดียวกันนั้น) ในจำนวนเดียวกันในอีกตลาดที่ราคาสูงกว่า เพื่อรับผลกำไรจากส่วนต่างของราคาใน 2 ตลาด การทำกำไรประเภทนี้ จะทำได้เฉพาะกับสินค้าที่มีการซื้อขายมากกว่าหนึ่งตลาด เช่น ซื้อขายในตลาดปกติที่ ส่งมอบทันที

ตัวอย่างของตลาดอนุพันธ์ที่สำคัญ ได้แก่

1. New York Cotton Exchange (NYCE)ของประเทศสหรัฐอเมริกา
2. New York Stock Exchange (NYSE)ของประเทศสหรัฐอเมริกา
3. Dalian Commodity Exchange (DCE)ของประเทศจีน
4. Thailand Futures Exchange (TFEX) ของประเทศไทย
5. Tokyo Stock Exchange (TSE)ของประเทศญี่ปุ่น
6. Korea Stock Exchange (KSE)ของประเทศเกาหลี
7. Malaysia Derivatives Exchange (MDEX) ของประเทศมาเลเซีย
8. Romanian Commodity Exchange(BRM) ของประเทศโรมาเนีย
9. Singapore Commodity Exchange (SICOM)ของประเทศสิงคโปร์
10. Eurex (Eurexchamge)ของประเทศสวิสเซอร์แลนด์

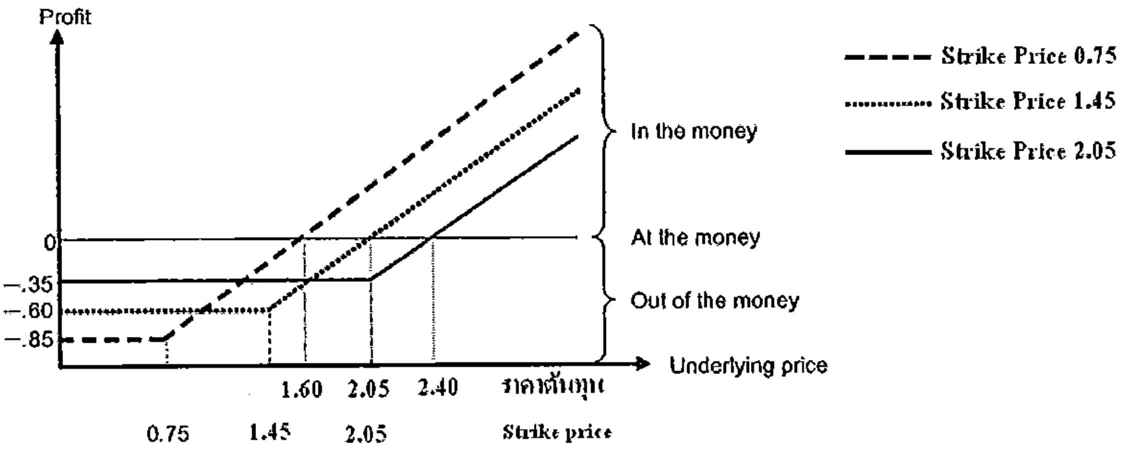
มูลค่าตราสารสิทธิ (Value of Option) เมื่อครบกำหนด

ในการคิดต้นทุนของการซื้อตราสารสิทธินั้น ต้องคิดรวมค่าทำตราสารสิทธิ (Premium) ซึ่งเป็นเสมือนค่าทำสัญญาเข้าไปด้วยเนื่องจากว่าค่าทำตราสารสิทธินั้นเป็นค่าหลักที่จะนำมาพิจารณาในการใช้สิทธินอกเหนือจากราคาในตลาด ยกตัวอย่าง เช่น ในกรณีของการซื้อขายตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call Option) หากราคาของสินทรัพย์ อาทิเช่น ราคาหุ้น มีแนวโน้มที่จะสูงขึ้นเรื่อยๆ ดังนั้นหากราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิ (Strike Price) มีราคาต่ำจะส่งผลให้ค่าทำตราสารสิทธิมีราคาสูงขึ้นเนื่องจากว่าผู้ซื้อตราสารสิทธิสามารถนำตราสารสิทธิที่ซื้อไว้ไปเก็บเพื่อรอเก็งกำไรในอนาคตได้ หรือในทางกลับกัน ถ้าหากราคาที่ตกลงกันไว้ในตราสารสิทธิมีค่าสูง จะส่งผลให้การกำหนดค่าทำตราสารสิทธิมีราคาต่ำลงเนื่องจากว่า ในเวลาที่ตราสารสิทธิหมดอายุ ผู้ถือตราสารสิทธิมีสิทธิที่จะซื้อสินทรัพย์ในราคาที่สูงและสินทรัพย์ดังกล่าวอาจจะมีมูลค่าใกล้เคียงกับมูลค่าของสินทรัพย์ในตลาดหลัก ณ เวลานั้น หากค่าทำตราสารสิทธิมีค่าสูงอาจส่งผลให้ไม่สามารถหาคู่ทำสัญญาได้ จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปไว้ในตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 2.1 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างราคาที่ตกลงในตราสารสิทธิและค่าทำสัญญา

	Strike Price	**Premium**
Call Option	ต่ำ	สูง
	ปานกลาง	ปานกลาง
	สูง	ต่ำ

ลักษณะทั่วไปของกราฟแสดงมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call Option) เมื่อสัญญาครบกำหนดแสดงได้ตามรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 มูลค่าตราสารสิทธิเมื่อครบในกรณีของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน[3]

จากรูปที่ 2.1 จะพบว่าราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิต่างกันจะมีค่าทำตราสารสิทธิที่ต่างกันด้วยแต่เมื่อพิจารณาถึงราคาต้นทุน (ผลรวมระหว่างค่าทำตราสารสิทธิและราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิ) แล้วจะพบว่าทั้งหมดมีราคาต้นทุนที่ต่างกันกล่าวคือ ที่ราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิ (Strike Price) 0.75, 1.45 และ 2.05 บาท/หน่วยจะมีราคาต้นทุน อยู่ที่ 1.60, 2.05 และ 2.40 บาท/หน่วยตามลำดับ ซึ่งเป็นการยากที่จะตอบได้ว่าควรที่จะซื้อตราสารสิทธินี้ที่ราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิเท่าใดถึงจะมีโอกาสได้กำไรมากกว่ากัน

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงแนวทางในการพิจารณาตัดสินใจซื้อตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน โดยทำการแยกพิจารณาออกเป็น 2 กรณี กล่าวคือ กรณีที่ไม่รวมค่าทำตราสารสิทธิและกรณีที่มีค่าทำตราสารสิทธิ เมื่อกำหนดให้ตราสารสิทธิมีราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิ (Strike price) อยู่สองราคาคือ 1.60 บาท/หน่วย และ 1.70 บาท/หน่วย หากราคาสินทรัพย์อ้างอิง ณ วันสิ้นสุดสัญญา (Underlying Price) มีค่าเป็น 1.65 บาท/หน่วย

1.<u>ไม่รวมค่าทำตราสารสิทธิ</u>

เมื่อไม่คิดค่าทำตราสารสิทธิรวมเข้าไปในต้นทุนจะพบว่า ผู้ลงทุนควรเลือกทำตราสารสิทธิที่มีราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิต่ำที่สุดเนื่องจากว่ามีโอกาสที่จะได้กำไรจากส่วนต่างของราคาสินทรัพย์อ้างอิง ณ วันสิ้นสุดสัญญา กับราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิมากที่สุด ดังนั้นแล้วในกรณีนี้ควรเลือกทำสัญญาที่ราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิเท่ากับ 1.60บาท/หน่วย เพราะเมื่อถึงเวลาที่ตราสารสิทธิหมดอายุ ผู้ถือครองตราสารสิทธิมีสิทธิที่จะเรียกซื้อสินทรัพย์ในราคา 1.60บาท/หน่วย แล้วนำไปขายในตลาดหลักในราคา 1.65บาท/หน่วย เพื่อได้กำไร 0.05 บาท/หน่วย แต่ในกรณีที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิง ณ วันสิ้นสุดสัญญา มีราคาต่ำกว่าราคาที่ตกลงไว้

[3] หมายเหตุ In the money คือการที่ผู้ถือสัญญาตราสารสิทธิได้กำไรจากการทำสัญญา
At the money คือการที่ผู้ถือสัญญาตราสารสิทธิเท่าทุนจากการทำสัญญา
Out of the money คือการที่ผู้ถือสัญญาตราสารสิทธิขาดทุนจากการทำสัญญา

ในตราสารสิทธิ ผู้ถือสัญญาก็มีสิทธิที่จะไม่ทำตามสัญญาโดยไม่ต้องเสียค่าทำตราสารสิทธิให้แก่ผู้ขายตราสารสิทธิเลย เพราะฉะนั้นในกรณีนี้ ผู้ลงทุนจะได้กำไรหรือเท่าทุนเสมอ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในทางปฏิบัติ

2.รวมค่าทำตราสารสิทธิ

เมื่อรวมค่าทำตราสารสิทธิเข้าไปในราคาต้นทุนจะพบว่า การตัดสินใจทำตราสารสิทธิไม่ได้ขึ้นอยู่กับราคาที่ตกลงไว้ในตราสารสิทธิเพียงอย่างเดียว แต่ต้องพิจารณาค่าทำตราสารสิทธิเข้าไปด้วย ซึ่งสามารถหาราคาต้นทุนที่ถูกที่สุดได้ดังตาราง

ตารางที่ 2.2 แสดงการเปรียบเทียบราคาต้นทุนเมื่อรวมค่าทำตราสารสิทธิ

Option	Strike Price	Premium	ราคาต้นทุน		ส่วนต่างจากราคาอ้างอิง
A	1.60	0.17	เมื่อใช้สิทธิ	1.60+0.17=1.77	1.65-1.77=-0.12
			เมื่อสละสิทธิ	1.65+0.17=1.82	1.65-1.82=-0.17
B	1.70	0.10	เมื่อใช้สิทธิ	1.70+0.10=1.80	1.65-1.80=-0.15
			เมื่อสละสิทธิ	1.65+0.10=1.75	***1.65-1.75=-0.10***

จากตารางที่ 2.2 หลักขวามือสุด หากเปรียบเทียบระหว่างตราสารสิทธิ A และ B พบว่าตราสารสิทธิ B มีราคาส่วนต่างจากราคาอ้างอิงเมื่อสละสิทธิการใช้สัญญาอยู่ที่ -0.10 บาท/หน่วย ซึ่งเป็นปริมาณขาดทุนน้อยที่สุด ดังนั้นเมื่อเปรียบเทียบกันแล้วจะพบว่าควรเลือกทำตราสารสิทธิ B

แต่อย่างไรก็ตามผู้ถือสัญญาก็มีสิทธิที่จะไม่ทำอะไรเลยโดยปล่อยให้สัญญานั้นครบกำหนดไป แต่จะทำให้ผู้ถือสัญญาต้องเสียค่าทำตราสารสิทธิให้แก่ผู้ขายตราสารสิทธิไปซึ่งในกรณีนี้จะพบว่า หากเลือกทำตราสารสิทธิ B จะเสียค่าทำตราสารสิทธิน้อยที่สุดคือ 0.10 บาท/หน่วย

หมายเหตุ ในกรณีของตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน ผู้อ่านสามารถใช้แนวทางในการวิเคราะห์เช่นเดียวกับกรณีของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินได้

บทที่ 3

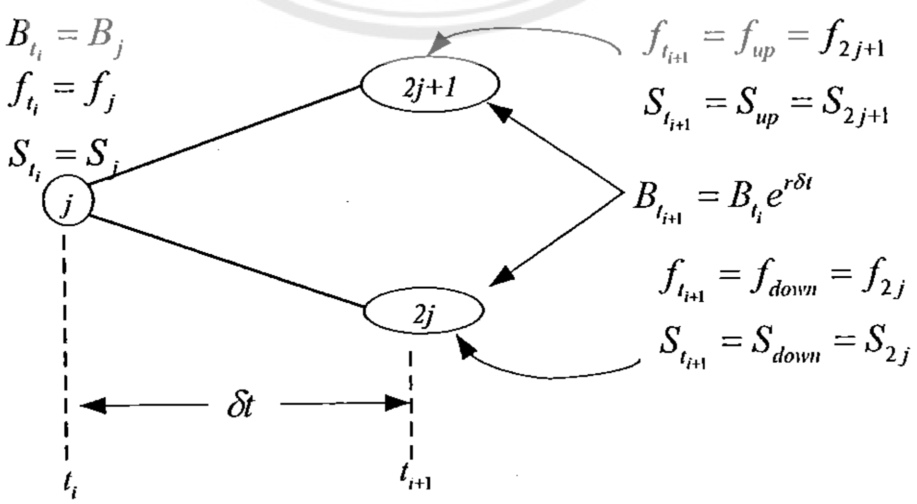
กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาวิยุต

(Discrete Time Stochastic Processes)

บทที่ผ่านมาศึกษาเกี่ยวกับเรื่องของนิยามและหลักการเบื้องต้นซึ่งเป็นพื้นฐานเบื้องต้นที่ผู้อ่านควรจะเข้าใจเป็นอันดับแรก ในส่วนของบทนี้จะกล่าวถึงการนำทฤษฎีทางด้านคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ร่วมกับตลาดอนุพันธ์โดยใช้ทฤษฎีแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาคในการวิเคราะห์ เนื่องจากว่าพฤติกรรมของหุ้นมีการเปลี่ยนแปลงราคาอยู่ตลอดเวลา กล่าวคือมีโอกาสที่มูลค่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไรก็ตาม หากพิจารณาเพียงความน่าจะเป็นของมูลค่าของหุ้นเพียงลำพัง อาจส่งผลให้ตลาดโดยรวมไม่เกิดปรากฏการณ์*การรักษาสมดุลทางการเงิน หรือ Self-financing* ได้ จึงจำเป็นจะต้องพิจารณาความน่าจะเป็นเสมือนตัวใหม่ ซึ่งคำนวณมาจากทั้งผลของราคาหุ้นและผลของราคาตราสารหนี้ร่วมกัน และภายใต้ความน่าจะเป็นเสมือนตัวใหม่นี้ จะส่งผลให้ตลาดโดยรวมเกิดปรากฏการณ์การรักษาสมดุลทางการเงินได้ และส่งผลให้ตลาดไม่เกิดการทำกำไร หรือ Arbitrage Opportunity หรือพูดอีกนัยหนึ่งได้ว่าเกิด*ตลาดสมบูรณ์ (Complete Market)* ขึ้น สำหรับรายละเอียดต่าง ๆ จะได้กล่าวในหัวข้อย่อยต่อไป สำหรับผู้อ่านที่สนใจในทฤษฎีต่าง ๆ ในบทนี้และบทถัดไป สามารถหาอ่านได้ใน [2] และหนังสืออ้างอิงต่าง ๆ ในหนังสือเล่มดังกล่าว

3.1 แผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาค (Binary Tree Model)

เป็นที่ทราบแล้วว่า พฤติกรรมของราคาหุ้นในห้วงเวลาถัดไป อาจจะมีมูลค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงได้ ซึ่งสามารถนำมาแสดงได้ดังรูปที่ 3.1



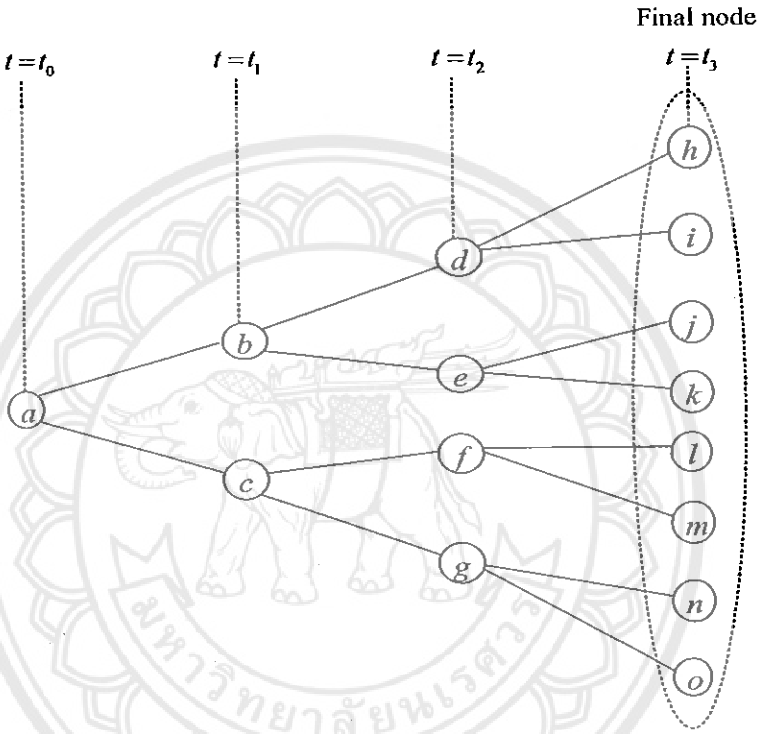
รูปที่ 3.1 แสดงแขนงของต้นไม้แบบทวิภาค

โดยที่ B_t คือ มูลค่าของตราสารหนี้ ที่เวลา t

S_t คือ มูลค่าของหุ้น ที่เวลา t

f_t คือ มูลค่าของตราสารสิทธิ ที่เวลา t

รูปข้างต้น เป็นลักษณะที่เรียกว่า แขนงของต้นไม้แบบทวิภาค ซึ่งหากรวมแขนงต่าง ๆ เข้าด้วยกันเป็นระบบจะก่อให้เกิดแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาค ดังแสดงได้ในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาค

ย้อนกลับมาพิจารณารูปที่ 3.1 อีกครั้งหนึ่ง จะพบว่าแขนงของต้นไม้แบบทวิภาคมีลักษณะของพฤติกรรมที่คล้ายกับมูลค่าหุ้น กล่าวคือมีโอกาสที่มูลค่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลง แต่เมื่อพิจารณาตราสารหนี้จะพบว่า มูลค่าของตราสารหนี้จะขึ้นอยู่กับอัตราดอกเบี้ย(r)และช่วงเวลา(δt) ทำให้สามารถทราบค่าในอนาคตได้อย่างแน่นอน ดังสมการ

$$B_{t_{i+1}} = B_{t_i} e^{r\delta t} \tag{3.1}$$

ดังนั้น พฤติกรรมของมูลค่าของหุ้นในเวลาต่าง ๆ กัน จัดเป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic process) ในขณะที่พฤติกรรมมูลค่าของตราสารหนี้ในเวลาต่าง ๆ กันจัดเป็นกระบวนการเชิงกำหนด (Deterministic process)

3.2 การคำนวณหามูลค่าของตราสารสิทธิ (Value of Option Calculation)

กำหนดให้ S_t เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มที่สอดคล้องกับแขนงของต้นไม้แบบทวิภาค ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3.1 โดยมีค่าที่ฐานของแขนงเป็น S_j ที่เวลา t_i และเมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_{i+1} กระบวนการ S_t จะมีค่าลดลงเป็น S_{2j} หรือมีค่าสูงขึ้นเป็น S_{2j+1} ดังนั้นการคาดหมาย (Expectation) ของกระบวนการ S_t ที่เวลา t_{i+1} จะมีค่าเป็น

$$\mathbf{E}^{p_j}\left[S_{t_{i+1}}\right] = p_j S_{2j+1} + \left(1 - p_j\right) S_{2j} \tag{3.2}$$

โดยที่ p_j คือความน่าจะเป็นที่หุ้นจะมีมูลค่าสูงขึ้น

หากสมมติว่า ผู้ลงทุนทราบมูลค่าของหุ้นตั้งแต่เวลาเริ่มต้นจนถึงเวลาที่ t_i หรือกล่าวในเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า ผู้ลงทุนทราบค่า Filtration $\Im_{t_i}$ (ดูนิยามในภาคผนวก ข) ดังนั้น สมการข้างต้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของการคาดหมายแบบมีเงื่อนไข (Conditional Expectation) ได้ว่า

$$\mathbf{E}^{p_j}\left[S_{t_{i+1}} \middle| \Im_{t_i}\right](\omega) \tag{3.3}$$

โดยที่ $\omega \in \Omega$ คือเหตุการณ์ทั้งหมดที่แทนมูลค่าของหุ้น ณ เวลา t_i

แต่เนื่องจากมูลค่าของตราสารหนี้ในเวลาต่าง ๆ กัน จะเป็นกระบวนการเชิงกำหนด ดังนั้น จะได้ว่า

$$B_{t_i} = B_j = e^{-r\delta t} B_{t_{i+1}} \tag{3.4}$$

สืบเนื่องจากที่มูลค่าของตราสารสิทธิเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับมูลค่าของหุ้นและเวลา ดังนั้น มูลค่าของตราสารสิทธิย่อมจัดว่าเป็นตัวแปรสุ่มเช่นเดียวกับมูลค่าของหุ้น ด้วยเหตุนี้ การคำนวณหามูลค่าของตราสารสิทธิที่เวลาใด ๆ จึงควรมีแนวทางการคำนวณเช่นเดียวกับการคำนวณหามูลค่าของหุ้น กล่าวคือ การคาดหมายของมูลค่าของตราสารสิทธิที่เวลา t_{i+1} คือ

$$\mathbf{E}^{p_j}\left[f_{t_{i+1}} \middle| \Im_{t_i}\right](\omega) = p_j f_{2j+1} + \left(1 - p_j\right) f_{2j} \tag{3.5}$$

หากพิจารณาให้มูลค่าของตราสารสิทธิมีค่าลดทอนตามเวลาดังเช่นกรณีของตราสารหนี้ ดังนั้น มูลค่าของตราสารสิทธิ ณ เวลา t_i จะคำนวณได้จากสูตร

$$f_{t_i}(\omega) = f_j = e^{-r\delta t}\, \mathbf{E}^{p_j}\left[f_{t_{i+1}} \middle| \Im_{t_i}\right](\omega) \tag{3.6}$$

แต่จะพบว่า การคำนวณหามูลค่าของตราสารสิทธิด้วยสูตรการคำนวณข้างต้นนี้ อาจส่งผลให้ตลาดโดยรวมเกิดการทำกำไรเกิดขึ้น ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

หากกำหนดให้ $\left(\varphi_{t_i}, \psi_{t_i}\right)$ เป็นหลักทรัพย์ในครอบครอง (Portfolio) ณ เวลา t_i มูลค่าของหลักทรัพย์ในครองครองนั้นจะมีค่าเท่ากับ

$$f_{t_i} = \varphi_{t_i} S_{t_i} + \psi_{t_i} B_{t_i} \tag{3.7}$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_{i+1} มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองจะกลายเป็น

$$f_{t_{i+1}} = \varphi_{t_{i+1}} S_{t_{i+1}} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_{i+1}} = \varphi_{t_{i+1}} S_{2j+1} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i} e^{r\delta t} = f_{2j+1} \quad \text{เมื่อหุ้นมีมูลค่าสูงขึ้น} \tag{3.8}$$

หรือ

$$f_{t_{i+1}} = \varphi_{t_{i+1}} S_{t_{i+1}} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_{i+1}} = \varphi_{t_{i+1}} S_{2j} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i} e^{r\delta t} = f_{2j} \quad \text{เมื่อหุ้นมีมูลค่าลดลง} \tag{3.9}$$

ผลต่างของสมการข้างต้น จะให้ค่าของ จำนวนของหุ้น $(\varphi_{t_{i+1}})$ ดังนี้

$$\varphi_{t_{i+1}} = \frac{f_{2j+1} - f_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} \tag{3.10}$$

และเมื่อแทน $\varphi_{t_{i+1}}$ ลงในสมการ (3.8) หรือ (3.9) (ในที่นี้ $\varphi_{t_{i+1}}$ ถูกแทนลงในสมการ (3.8)) จะได้ว่า

$$\psi_{t_{i+1}} = e^{-r\delta t} B_{t_i}^{-1} \left[f_{2j+1} - \varphi_{t_{i+1}} S_{2j+1} \right] = e^{-r\delta t} B_{t_i}^{-1} \left[f_{2j+1} - \frac{f_{2j+1} - f_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} S_{2j+1} \right] \tag{3.11}$$

จากผลการคำนวณข้างต้น สามารถอธิบายได้ว่า หากมูลค่าของตราสารสิทธิ ณ เวลา t_i มีค่าเป็น f_{t_i} แล้ว ถ้าในเวลาต่อมา หุ้นมีมูลค่าสูงขึ้น ($S_{t_{i+1}} = S_{2j+1}$) มูลค่าของตราสารสิทธิจะมีค่าเป็น f_{2j+1} แต่ถ้าหุ้นมีมูลค่าลดลง ($S_{t_{i+1}} = S_{2j}$) มูลค่าของตราสารสิทธิจะมีค่าเป็น f_{2j} พฤติกรรมเช่นนี้เอง สอดคล้องกับนิยามของ การรักษาสมดุลทางการเงิน หรือ Self-financing ที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 2

ดังนั้น เพื่อให้ตลาดเกิดคุณสมบัติของ การรักษาสมดุลทางการเงิน ขึ้น มูลค่าของตราสารสิทธิที่เวลา t_i จึงคำนวณจากสูตร

$$f_{t_i} = \varphi_{t_{i+1}} S_{t_i} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i} \tag{3.12}$$

เมื่อแทนค่า $\varphi_{t_{i+1}}$ และ $\psi_{t_{i+1}}$ จากสมการ (3.10) และ (3.11) ในข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{t_i} &= \varphi_{t_{i+1}} S_{t_i} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i} = \varphi_{t_{i+1}} S_j + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i} \\ &= \frac{f_{2j+1} - f_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} S_j + e^{-r\delta t} B_{t_i}^{-1} \left[f_{2j+1} - \frac{f_{2j+1} - f_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} S_{2j+1} \right] B_{t_i} \\ &= e^{-r\delta t} \left[\left(\frac{S_j e^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} \right) f_{2j+1} + \left(\frac{S_{2j+1} - S_j e^{r\delta t}}{S_{2j+1} - S_{2j}} \right) f_{2j} \right] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$f_{t_i} = e^{-r\delta t} \left[\left(\frac{S_j e^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} \right) f_{2j+1} + \left(1 - \frac{S_j e^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} \right) f_{2j} \right] \tag{3.13}$$

หากกำหนดให้ $q_j = \dfrac{S_j e^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}}$ ดังนั้น

$$f_j = e^{-r\delta t}\left[q_j f_{2j+1} + \left(1-q_j\right) f_{2j}\right] \tag{3.14}$$

ก่อนจะอธิบายในหัวข้อถัดไป จึงขอสรุปใจความสำคัญของคำอธิบายในหัวข้อนี้ไว้ดังนี้

1. หากคำนวณหามูลค่าของตราสารสิทธิ ณ เวลา t_i จากสูตร $f_j = e^{-r\delta t}\left[q_j f_{2j+1} + \left(1-q_j\right) f_{2j}\right]$ โดยที่ $q_j = \dfrac{S_j e^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}}$ และเมื่อแทนค่า q_j ลงไป แล้วคำนวณย้อนกลับ ดังสมการ (3.14) จะพบว่า $f_{t_i} = \varphi_{t_{i+1}} S_{t_i} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i}$
2. มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครอง ณ เวลา t_i ใด ๆ เมื่อกำหนดหลักทรัพย์ในครอบครอง $\left(\varphi_{t_i}, \psi_{t_i}\right)$ มาให้ จะมีค่าเท่ากับ $f_{t_i} = \varphi_{t_i} S_{t_i} + \psi_{t_i} B_{t_i}$
3. จากผลสรุปในข้อ 1. และข้อ 2. จะได้ว่า $\varphi_{t_i} S_{t_i} + \psi_{t_i} B_{t_i} = \varphi_{t_{i+1}} S_{t_i} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i}$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า $\Delta\varphi_t S_{t_i} + \Delta\psi_t B_{t_i} = 0$ นั่นคือ เกิดการรักษาสมดุลทางการเงิน
4. หากคำนวณหามูลค่าของตราสารสิทธิ ณ เวลา t_i จากสูตร $f_{t_i}(\omega) = e^{-r\delta t}\mathbf{E}^{p_j}\left[f_{t_{i+1}} \middle| \Im_{t_i}\right](\omega)$ ผลที่ได้ไม่สามารถรับประกันได้ว่า ตลาดโดยรวมมีการรักษาสมดุลทางการเงิน
5. q_j ที่คำนวณได้แท้จริงแล้วมีคุณสมบัติของความน่าจะเป็น (สำหรับการพิสูจน์นั้น อยู่นอกเหนือจากเนื้อหาของโครงงานฉบับนี้) ดังนั้น สูตรการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิที่ได้สามารถลดรูปได้เป็น $f_{t_i}(\omega) = e^{-r\delta t}\mathbf{E}^{q_j}\left[f_{t_{i+1}} \middle| \Im_{t_i}\right](\omega)$ โดยที่ q_j ถูกเรียกว่า ***ความน่าจะเป็นของตลาด (Market probability)***

ตัวอย่างถัดไปเป็นกรณีศึกษาเพื่อที่จะแสดงให้เห็นถึงกลยุทธ์ (Strategy) ที่แสดงให้เห็นว่า q มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ($0 < q < 1$) ซึ่งเป็นหนึ่งในคุณสมบัติของความน่าจะเป็น เนื่องจากถ้า q ไม่ได้อยู่ในย่านดังกล่าว อาจเกิดการทำกำไรในตลาดได้

กรณีที่ $q \le 0$

สมมติให้ ที่เวลา t_i ราคาของหุ้น A มีค่าเป็น S_{t_i} บาท ผู้ลงทุนมีความประสงค์ที่จะซื้อหุ้น A เป็นจำนวน 1 หุ้น ($\varphi = 1$) นั่นคือผู้ลงทุนจะต้องมีเงินอยู่เท่ากับ $1 \times S_{t_i} = S_{t_i}$ บาท ดังนั้นผู้ลงทุนจึงต้องไปกู้จากแหล่งเงินทุน (หรือทำการขายชอร์ตตราสารหนี้) เป็นจำนวน $\dfrac{S_{t_i}}{B_{t_i}}$ หน่วย ในราคาหน่วยละ B_{t_i} บาท นั่นคือ $\psi_{t_i} = -\dfrac{S_{t_i}}{B_{t_i}}$ ดังนั้น มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครอง ณ เวลา t_i จึงมีค่าเป็น

$$f_{t_i} = \varphi_{t_i} S_{t_i} + \psi_{t_i} B_{t_i} = 1 \times S_{t_i} + \left(-\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right) \times B_{t_i} = 0$$

เมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_{i+1} ตราสารหนี้จะมีมูลค่าเป็น $B_{t_{i+1}} = B_{t_i}e^{r\delta t}$ โดยที่ r และ δt คือ อัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้และผลต่างของเวลาตามลำดับ ดังนั้น เพื่อให้เกิดการรักษาสมดุลทางการเงิน หลักทรัพย์ในครอบครอง (φ_t, ψ_t) ที่ผู้ลงทุนถือครอบอยู่ในห้วงเวลาดังกล่าวจึงมีปริมาณเท่าเดิม ดังนั้น จะได้ว่า มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองมีค่าเป็น

$$f_{t_{i+1}} = \varphi_{t_{i+1}}S_{t_{i+1}} + \psi_{t_{i+1}}B_{t_{i+1}} = 1\times S_{t_{i+1}} + \left(-\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right)\times B_{t_i}e^{r\delta t} = S_{t_{i+1}} - S_{t_i}e^{r\delta t}$$

เนื่องจาก ราคาของหุ้น A อาจจะมีราคาสูงขึ้น หรือลดลงก็ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า $S_{2j+1} \geq S_{t_{i+1}} \geq S_{2j}$ (ดูรูปที่ 3.1 ประกอบ) ดังนั้น มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองจึงสอดคล้องความสัมพันธ์

$$S_{t_{i+1}} - S_{t_i}e^{r\delta t} \geq S_{2j} - S_{t_i}e^{r\delta t}$$

หาก $q = \dfrac{S_je^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} \leq 0$ นั่นคือ $S_{2j} \geq S_je^{r\delta t}$ ซึ่งจะได้ว่า $f_{t_{i+1}} = S_{t_{i+1}} - S_{t_i}e^{r\delta t} \geq S_{2j} - S_{t_i}e^{r\delta t} \geq 0$ ซึ่งถ้าหากเกิดสถานการณ์เช่นนี้ ย่อมแสดงว่าผู้ลงทุนรายนี้จะได้กำไรทุกครั้งของการลงทุน เนื่องจาก มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองของผู้ลงทุนในเวลาเริ่มต้นไม่มีมูลค่าใดเลย แต่เมื่อเวลาผ่านไปมูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองนั้นมีค่าเพิ่มขึ้น โดยปราศจากความเสี่ยงใด ๆ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในตลาดจริง กล่าวคือเกิดการทำกำไรในตลาด (Arbitrage Opportunity)

กรณีที่ $q \geq 1$

สมมติให้ ที่เวลา t_i ราคาของหุ้น A มีค่าเป็น S_{t_i} บาท ผู้ลงทุนมีความประสงค์ที่จะทำการขายชอร์ต หุ้น A เป็นจำนวน 1 หุ้น ($\varphi = -1$) นั่นคือผู้ลงทุนจะได้เงินมาเท่ากับ $1\times S_{t_i} = S_{t_i}$ บาท ผู้ลงทุนนำเงินที่ได้ไปซื้อตราสารหนี้เป็นจำนวน $\dfrac{S_{t_i}}{B_{t_i}}$ หน่วย ในราคาหน่วยละ B_{t_i} บาท นั่นคือ $\psi_{t_i} = \dfrac{S_{t_i}}{B_{t_i}}$ ดังนั้น มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครอง ณ เวลา t_i จึงมีค่าเป็น

$$f_{t_i} = \varphi_{t_i}S_{t_i} + \psi_{t_i}B_{t_i} = -1\times S_{t_i} + \left(\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right)\times B_{t_i} = 0$$

เมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_{i+1} ตราสารหนี้จะมีมูลค่าเป็น $B_{t_{i+1}} = B_{t_i}e^{r\delta t}$ เช่นเดียวกับกรณีข้างต้น เพื่อให้เกิดการรักษาสมดุลทางการเงิน หลักทรัพย์ในครอบครอง (φ_t, ψ_t) ที่ผู้ลงทุนถือครอบอยู่ในห้วงเวลาดังกล่าวจึงมีปริมาณเท่าเดิม ซึ่งจะได้ว่า มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองมีค่าเป็น

$$f_{t_{i+1}} = \varphi_{t_{i+1}}S_{t_{i+1}} + \psi_{t_{i+1}}B_{t_{i+1}} = -1\times S_{t_{i+1}} + \left(\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right)\times B_{t_i}e^{r\delta t} = S_{t_i}e^{r\delta t} - S_{t_{i+1}}$$

เนื่องจาก ราคาของหุ้น A อาจจะมีราคาสูงขึ้น หรือลดลงก็ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า $S_{2j+1} \geq S_{t_{i+1}} \geq S_{2j}$ (ดูรูปที่ 3.1 ประกอบ) ดังนั้น มูลค่าของหลักทรัพย์ในครอบครองจึงสอดคล้องความสัมพันธ์

$$S_{t_i}e^{r\delta t} - S_{2j+1} \leq S_{t_i}e^{r\delta t} - S_{t_{i+1}}$$

หาก $q = \dfrac{S_j e^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}} \geq 1$ นั่นคือ $S_j e^{r\delta t} \geq S_{2j+1}$ ซึ่งจะได้ว่า

$f_{t_{i+1}} = S_{t_i}e^{r\delta t} - S_{t_{i+1}} \geq S_{t_i}e^{r\delta t} - S_{2j+1} \geq 0$ ซึ่งถ้าหากเกิดสถานการณ์เช่นนี้ ย่อมแสดงว่าเกิดการทำกำไรในตลาดอีกเช่นกัน

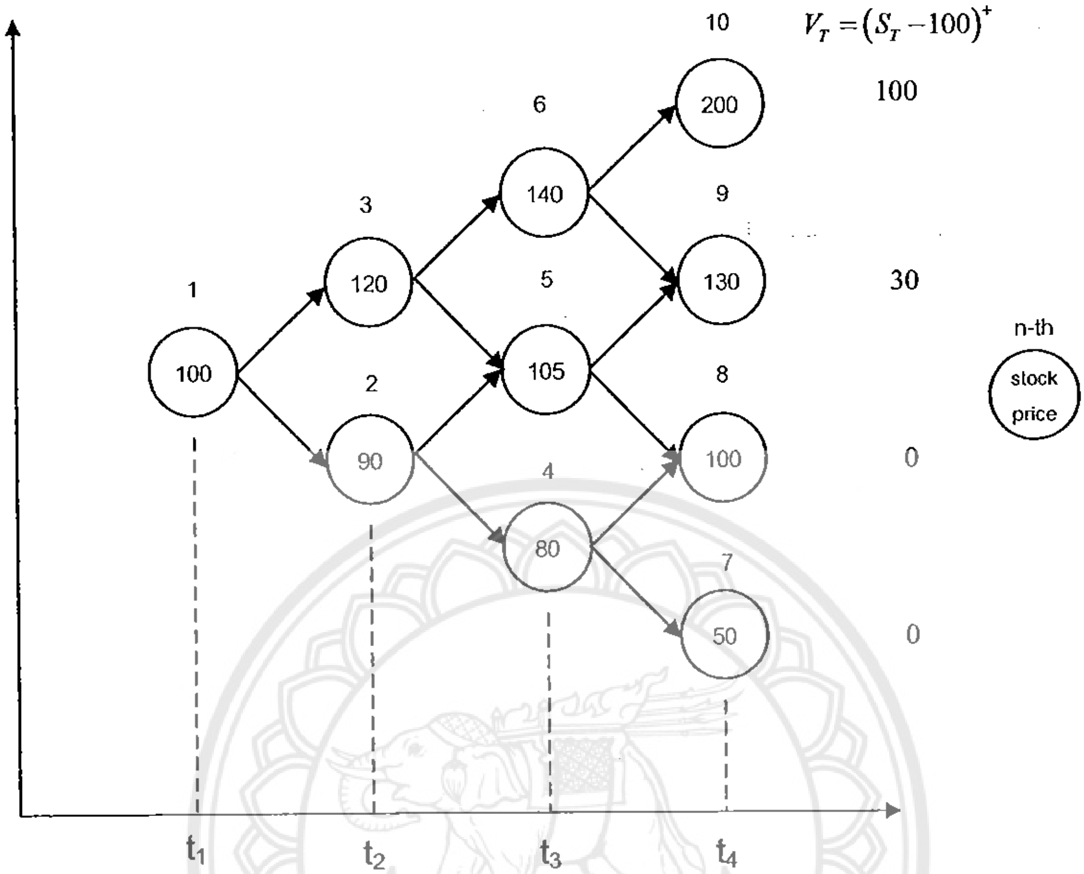
จากกรณีศึกษาข้างต้นจะพบว่าถ้าค่าของ q มีค่าน้อยกว่าศูนย์ หรือมีค่ามากกว่าหนึ่งแล้ว ผู้ลงทุนจะสามารถสร้างกลยุทธ์มาเพื่อทำให้ผู้ลงทุนสามารถทำกำไรได้ในตลาด ดังนั้นกรณีศึกษานี้จึงแสดงให้เห็นว่า q ควรมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ซึ่งสอดคล้องกับหนึ่งในคุณสมบัติของความน่าจะเป็น นอกจากนี้ผู้อ่านจะพบว่า ในกรณีที่ $0 < q < 1$ แล้วจะพบความสัมพันธ์ที่ว่า $S_{2j} < e^{r\delta t}S_j < S_{2j+1}$ ซึ่งความสัมพันธ์ที่ว่านี้ จะต้องเกิดขึ้นในทุก ๆ แขนงของแผนภาพต้นไม้แบบทวิภาคจึงจะไม่ทำให้ตลาดเกิดการทำกำไรขึ้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น จึงสามารถสรุปได้ดังนี้ คำกล่าวที่ว่า “การที่ตลาดไม่เกิดการทำกำไร (Arbitrage)” เสมือนกับคำกล่าวที่ว่า “จะเกิดความน่าจะเป็นเสมือน หรือความน่าจะเป็นของตลาด q ซึ่งทำให้ตลาดมีโครงสร้างแบบ มาร์ตินเกล (Martingale)” ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป แต่ก่อนอื่น ให้มาพิจารณาตัวอย่างการคำนวณมูลค่าตราสารสิทธิแบบง่าย ๆ ดังแสดงในหัวข้อ 3.3

3.3 ตัวอย่างการคำนวณมูลค่าตราสารสิทธิ

หัวข้อนี้แสดงตัวอย่างการคำนวณหามูลค่าสินทรัพย์โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ *กรณีที่ 1* ภายใต้เงื่อนไขของความน่าจะเป็นของตลาด q และ *กรณีที่ 2* ภายใต้เงื่อนไขของความน่าจะเป็น p

กำหนดให้มูลค่าของหุ้นและมูลค่าของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินแบบยุโรปแสดงได้ดังแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาค (Binary Tree Model) ในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ราคาหุ้นบนแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาค

กรณีที่ 1

เมื่อสมมุติให้ $r = 0$ และ $B_1 = 1$ แล้วทำการพิจารณาจะพบว่า ที่เวลา $t = t_4$ จะได้ $S_{10} = 200$, $S_9 = 130$ และ $S_6 = 140$ โดยที่บัพสุดท้ายในกรณีของตราสารสิทธิเรียก**ซื้อทรัพย์สิน** (Call Option) จะมีมูลค่าสินทรัพย์เป็น $\left(S_{t_4} - 100\right)^+$ ดังนั้นจะได้ $f_{10} = 100$ และ $f_9 = 30$

จากค่าความน่าจะเป็นของตลาด $q = \dfrac{S_j e^{r\delta t} - S_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}}$ จะได้ $q_6 = \dfrac{140-130}{200-130} = \dfrac{1}{7}$

แทนค่า q_6 ที่ได้ในสมการของมูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครอง $f_j = e^{-r\delta t}\left[q f_{2j+1} + (1-q) f_{2j}\right]$ จะได้

$$f_6 = \left[\frac{1}{7}(100) + \frac{6}{7}(30)\right] = 40$$

จากสมการของ $\varphi_{t_{i+1}} = \dfrac{f_{2j+1} - f_{2j}}{S_{2j+1} - S_{2j}}$ และ $\psi_{t_{i+1}} = e^{-r\delta t} B_{t_i}^{-1}\left(f_{2j+1} - \varphi_{t_{i+1}} S_{2j+1}\right)$ จะได้

$$\varphi_6 = \frac{100-30}{200-130} = 1 \text{ และ } \psi_6 = \left[100 - (1 \times 200)\right] = -100$$

และเมื่อทราบจำนวน φ_6 และ ψ_6 ทำให้สามารถหามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองได้จากสูตร $f_{t_{i+1}} = \varphi_{t_{i+1}} S_{t_{i+1}} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_{i+1}}$ ดังนั้นเมื่อแทนค่าที่ได้ทั้งหมดลงไปแล้วจะได้มูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองเป็น $f_6 = \left[(1\times140)+(-100\times1)\right] = 40$ ซึ่งปรากฏว่าผลลัพธ์ของ f_6 ที่ได้จากทั้งสองสูตรข้างต้นมีค่าเท่ากันคือ 40 นั่นแสดงว่าสถานการณ์เช่นนี้เกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า *การรักษาสมดุลทางการเงิน* ในทำนองเดียวกันการคำนวณที่บัพอื่นๆ สามารถทำได้เช่นเดียวกันกับการคำนวณที่บัพ 6 โดยวิธี Replica Portfolio ดังที่แสดงข้างต้น ซึ่งค่าที่ได้เป็นดังตาราง

ตารางที่ 3.1 มูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณจากค่าความน่าจะเป็นของตลาด q

บัพที่ i	q_i	f_i ที่คำนวณจาก q_i	φ_i	ψ_i	f_i ที่คำนวณจาก φ_i และ ψ_i
6	$\frac{1}{7}$	*40*	1	-100	*40*
5	$\frac{1}{6}$	*5*	1	-100	*5*
4	$\frac{3}{5}$	*0*	0	0	*0*
3	$\frac{3}{7}$	*20*	1	-100	*20*
2	$\frac{2}{5}$	*2*	0.2	-16	*2*
1	$\frac{1}{3}$	*8*	0.6	-52	*8*

จากตารางจะพบว่ามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณจากค่าความน่าจะเป็นของตลาดมีค่าเท่ากับมูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณจากจำนวนหุ้นและตราสารหนี้ (φ,ψ) จึงไม่ก่อให้เกิดการทำกำไรเกิดขึ้น

กรณีที่ 2

สมมติให้ $r = 0$ และ $B_1 = 1$ ดังเช่นในกรณีที่ 1 และสมมติให้ค่าความน่าจะเป็นในการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของราคาหุ้นเป็น $\frac{1}{2}$ เท่ากัน ซึ่งจะส่งผลให้ $f_{t_i} = p_{t_i} f_{2j+1} + \left(1-p_{t_i}\right) f_{2j} = \frac{1}{2} f_{2j+1} + \frac{1}{2} f_{2j}$ เมื่อคำนวณในทำนองเดียวกันกับการหามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณจากค่าความน่าจะเป็นของตลาดในข้างต้น โดยพิจารณาที่บัพ 6 เช่นเดียวกันจะพบว่า $f_6 = \left[\frac{1}{2}(100)+\frac{1}{2}(30)\right] = 65$ เมื่อเปรียบเทียบมูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณได้นี้กับมูลค่าสินทรัพย์ที่คำนวณจากจำนวน φ_{t_4} และ ψ_{t_4} แล้ว ซึ่งมีค่าเท่ากับ 40 ซึ่งปรากฏว่าผลที่ได้มีค่าไม่เท่ากัน กล่าวคือ เหตุการณ์นี้ไม่เกิดปรากฏการณ์ การรักษาสมดุลทางการเงิน ในส่วนของบัพอื่นๆนั้นสามารถคำนวนและแสดงค่าได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.2 มูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณจากค่าความน่าจะเป็นหุ้น p

บัพที่ i	p_i	f_i ที่คำนวณจาก p_i	φ_i	ψ_i	f_i ที่คำนวณจาก φ_i และ ψ_i
6	0.5	***65***	1	-100	***40***
5	0.5	***15***	1	-100	***5***
4	0.5	***0***	0	0	***0***
3	0.5	***40***	1.42857	-135	***36.42857***
2	0.5	***7.5***	0.6	-48	***6***
1	0.5	***23.75***	1.08333	-90	***10.83333***

จากตารางจะพบว่ามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณจากค่าความน่าจะเป็นมีค่าไม่เท่ากับมูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่คำนวณจากจำนวนหุ้นและตราสารหนี้ (φ,ψ) ซึ่งปรากฏการณ์เช่นนี้จะก่อให้เกิดการทำกำไรระหว่างผลต่างของราคาเกิดขึ้น

จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า การหามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองเมื่อคำนวณจากค่าความน่าจะเป็นของตลาดแล้ว จะส่งผลให้เกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า การรักษาสมดุลทางการเงินขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้ตลาดไม่เกิดการทำกำไรระหว่างส่วนต่างของราคาขึ้น แต่ในทางกลับกัน เมื่อคำนวณหามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองจากค่าความน่าจะเป็นแล้วจะพบว่า ค่าที่ได้ไม่ทำให้เกิดปรากฏการณ์การรักษาสมดุลทางการเงิน นั่นคือทำให้ตลาดเกิดการทำกำไรระหว่างส่วนต่างของราคาในตลาดขึ้น

3.4 การมีอยู่ของหลักทรัพย์ในครอบครอง (The Existence of (φ,ψ))

จากหัวข้อที่ผ่านมาทำให้ทราบว่า การที่ตลาดไม่เกิดการทำกำไร (Arbitrage) คือการที่เกิดความน่าจะเป็นเสมือน หรือความน่าจะเป็นของตลาด q ซึ่งทำให้ตลาดมีโครงสร้างแบบ มาร์ตินเกล (Martingale)

พิจารณามูลค่าของตราสารสิทธิจากสูตร $f_{t_i}(\omega)=e^{-r\delta t}\mathbf{E}^q\left[f_{t_{i+1}}\middle|\Im_{t_i}\right](\omega)$ แต่เนื่องจาก $B_{t_{i+1}}=e^{r\delta t}B_{t_i}$ ดังนั้น จะได้ว่า $f_{t_i}(\omega)=\dfrac{B_{t_i}}{B_{t_{i+1}}}\mathbf{E}^q\left[f_{t_{i+1}}\middle|\Im_{t_i}\right](\omega)$ และเนื่องจากว่า $B_{t_{i+1}}$ เป็น $\Im_{t_i}$-dependent จึงสามารถจัดรูปได้ใหม่ ดังนี้

$$\frac{f_{t_i}}{B_{t_i}}(\omega) = \mathbf{E}^q\left[\left.\frac{f_{t_{i+1}}}{B_{t_{i+1}}}\right|\mathfrak{I}_{t_i}\right](\omega) \tag{3.15}$$

ในกรณีของการคำนวณหามูลค่าหุ้น สามารถพิสูจน์โดยอาศัยนิยามของ q ได้ว่า

$$\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}(\omega) = \mathbf{E}^q\left[\left.\frac{S_{t_{i+1}}}{B_{t_{i+1}}}\right|\mathfrak{I}_{t_i}\right](\omega) \tag{3.16}$$

จากสูตรข้างต้น จะพบว่าทั้ง $\frac{f_{t_i}}{B_{t_i}}$ และ $\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}$ มีคุณสมบัติของมาร์ตินเกล เมื่อเทียบกับเมเชอร์ q

ดังนั้น สำหรับการคำนวณหามูลค่าของตราสารสิทธิทั้งหมดในแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาคเพื่อไม่ก่อให้เกิดการทำกำไรได้ สามารถสรุปขั้นตอนการทำไว้ดังนี้

1. หาความน่าจะเป็น q ที่ทำให้ $\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}$ มีคุณสมบัติเป็นมาร์ตินเกล เมื่อเทียบกับ q
2. นำ q ที่ได้มาคำนวณหามูลค่าของตราสารสิทธิ นั่นคือ คำนวณหาค่าของ $\frac{f_{t_i}}{B_{t_i}}$ ที่เป็นมาร์ตินเกลภายใต้ q แล้วแทนค่า B_{t_i} เพื่อคำนวณหาค่า f_{t_i} ออกมา

เมื่อคำนวณหา f_{t_i} ออกมาได้แล้ว คำถามที่น่าสนใจคือ การคำนวณหาปริมาณหลักทรัพย์ในครอบครองว่า ควรมีปริมาณของหุ้นเท่าไรและมีปริมาณของตราสารหนี้เท่าไร หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า (φ,ψ) มีค่าเท่าไร

เพื่อที่จะตอบคำถามข้างต้น ให้พิจารณาทฤษฎีบทที่สำคัญที่มีผลต่อการมีอยู่ของหลักทรัพย์ในครอบครองเป็นอันดับแรก

ทฤษฎีการแทนแบบทวิภาค (Binomial Representation Theorem)

กำหนดให้ q เป็นเมเชอร์ที่ทำให้กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มของราคา M_t เกิดมาร์ตินเกล ถ้าให้ N_t เป็นมาร์ตินเกลใด ๆ ภายใต้เมเชอร์ q แล้วจะเกิดกระบวนการ φ_t ที่สอดคล้องกับสมการ

$$N_{t_i} = N_{t_0} + \sum_{k=1}^{t_i}\varphi_{t_k}\Delta M_{t_k}$$

โดยที่ $\Delta M_{t_i} \triangleq M_{t_i} - M_{t_{i-1}}$ คือการเปลี่ยนแปลงของ M_t จากเวลา t_{i-1} มายังเวลา t_i

ผู้อ่านสามารถพิสูจน์ได้ว่า สมการข้างต้นสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta N_{t_i} = \varphi_{t_i}\Delta M_{t_i} \tag{3.17}$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ $M_t = \frac{S_t}{B_t}$ และ $N_t = \frac{f_t}{B_t}$ จะพบว่าทั้ง M_t และ N_t ที่นิยามไว้นี้มีลักษณะเป็นมาร์ตินเกลภายใต้เมเชอร์ q (ดูตามสมการ (3.15) และ สมการ (3.16) และจากทฤษฎีการ

แทนแบบทวิภาค(Binomial Representation Theorem) สามารถสรุปได้ว่า ปริมาณ φ_t ต้องเกิดขึ้นได้จริงและสอดคล้องกับสมการ $\Delta N_{t_i} = \varphi_{t_i} \Delta M_{t_i}$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า หากมีกระบวนการสองกระบวนการ (ในที่นี้แทนด้วย M_t และ N_t) ที่เป็นมาร์ตินเกลแล้ว จะเกิดกระบวนการที่สามารถทำนายหรือทราบค่าได้ φ_t ที่สอดคล้องกับสมการ $\Delta N_{t_i} = \varphi_{t_i} \Delta M_{t_i}$ ซึ่งต่อไป ผู้อ่านจะพบว่า สมการดังกล่าวนี้เป็นคุณสมบัติที่สำคัญอันหนึ่งที่ทำให้ตลาดเกิด *การรักษาสมดุลทางการเงิน (Self-financing)*

จากนิยามของ การรักษาสมดุลทางการเงิน จะได้ว่า $f_{t_i} = \varphi_k S_{t_i} + \psi_k B_{t_i}$ โดยที่ k อาจจะเป็นได้ทั้ง t_i หรือ t_{i+1} ก็ได้ นั่นคือ

$$f_{t_i} = \varphi_{t_i} S_{t_i} + \psi_{t_i} B_{t_i} \text{ หรือ } f_{t_i} = \varphi_{t_{i+1}} S_{t_i} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i} \tag{3.18}$$

เพราะฉะนั้น ผลต่างของสมการข้างต้น คือ

$$\begin{aligned} 0 = f_{t_i} - f_{t_i} &= \left(\varphi_{t_{i+1}} S_{t_i} + \psi_{t_{i+1}} B_{t_i}\right) - \left(\varphi_{t_i} S_{t_i} + \psi_{t_i} B_{t_i}\right) \\ &= \left(\Delta \varphi_{t_{i+1}}\right) S_{t_i} + \left(\Delta \psi_{t_{i+1}}\right) B_{t_i} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $B_{t_i} \neq 0$ จะได้ว่า

$$0 = \left(\Delta \varphi_{t_{i+1}}\right) \frac{S_{t_i}}{B_{t_i}} + \left(\Delta \psi_{t_{i+1}}\right) \tag{3.19}$$

พิจารณาสมการของมูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองที่เวลา t_i นั่นคือ

$$f_{t_i} = \varphi_{t_i} S_{t_i} + \psi_{t_i} B_{t_i} \text{ หรือ } \frac{f_{t_i}}{B_{t_i}} = \varphi_{t_i} \frac{S_{t_i}}{B_{t_i}} + \psi_{t_i}$$

จากสูตรของผลคูณวิยุต จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{f_{t_i}}{B_{t_i}}\right) &= \Delta\left(\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}} \varphi_{t_i}\right) + \Delta\left(1 \cdot \psi_{t_i}\right) \\ &= \left(\Delta \frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right) \varphi_{t_i} + \frac{S_{t_{i-1}}}{B_{t_{i-1}}}\left(\Delta \varphi_{t_i}\right) + (\Delta 1) \psi_{t_i} + 1\left(\Delta \psi_{t_i}\right) \\ &= \varphi_{t_i}\left(\Delta \frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right) + \left[\left(\Delta \varphi_{t_i}\right) \frac{S_{t_{i-1}}}{B_{t_{i-1}}} + \Delta \psi_{t_i}\right] \end{aligned}$$

แต่จากสมการ (3.19) ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $\Delta\left(\frac{f_{t_i}}{B_{t_i}}\right) = \varphi_{t_i} \Delta\left(\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right)$ ตามต้องการ

จากที่อธิบายมาข้างต้น สามารถสรุปใจความสำคัญได้ดังนี้

1. หาความน่าจะเป็น q ที่ทำให้ $\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}$ มีคุณสมบัติเป็นมาร์ตินเกล เมื่อเทียบกับ q
2. นำ q ที่ได้มาคำนวณหาค่าของ $\frac{f_{t_i}}{B_{t_i}}$ ที่เป็นมาร์ตินเกลภายใต้ q
3. คำนวณหา φ_{t_i} จากสูตร $\Delta\left(\frac{f_{t_i}}{B_{t_i}}\right) = \varphi_{t_i}\Delta\left(\frac{S_{t_i}}{B_{t_i}}\right)$
4. คำนวณหา ψ_{t_i} จากสมการ $f_{t_i} = \varphi_{t_i}S_{t_i} + \psi_{t_i}B_{t_i}$

ซึ่งผลที่ได้จากการคำนวณนั้น จะเป็นมูลค่าของตราสารสิทธิที่เหมาะสม กล่าวคือ ไม่ทำให้เกิดการทำกำไรในตลาดนั่นเอง

จากที่ได้ศึกษามาทั้งหมดในบทที่ 3 นี้ จะนำมาใช้เป็นพื้นฐานในการพิจารณามูลค่าตราสารสิทธิรวมทั้งสินทรัพย์ต่าง ๆ ในกรณีของกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาต่อเนื่อง ซึ่งจะอธิบายในบทถัดไป

บทที่ 4
กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาต่อเนื่อง
(Continuous-time Stochastic Processes)

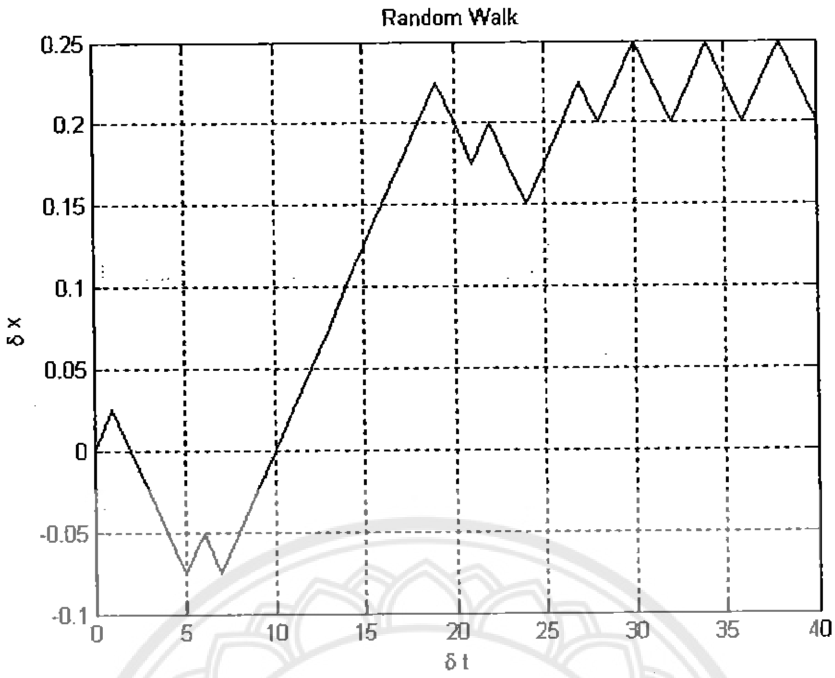
จากบทที่ 3 ได้ศึกษาถึงการวิเคราะห์มูลค่าของตราสารสิทธิในกรณีที่เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาวิยุต (Discrete-time Stochastic Proccsses) โดยอาศัยแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาค (Binary Tree Model) มาเป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ และได้แสดงให้เห็นถึงปรากฏการณ์ที่เรียกว่า การรักษาสมดุลทางการเงิน อันนำไปสู่การเกิด ตลาดสมบูรณ์

ในบทนี้ จะมุ่งเน้นศึกษากระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาต่อเนื่อง (Continuous-time Stochastic Processes) ซึ่งใช้อธิบายพฤติกรรมของหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ เนื่องจากการเคลื่อนไหวของมูลค่าของหุ้นในแต่ละช่วงเวลามีการเคลื่อนที่แบบสุ่ม กล่าวคือมีการเคลื่อนไหวขึ้นหรือลงอยู่โดยตลอด ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้ว จะพบว่า รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมในการนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ของหุ้นนี้ คือ *การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต (Geometric Brownian Motion)*

เมื่อได้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมแล้ว จะทำการหาเงื่อนไขต่าง ๆ เพื่อทำให้ตลาดที่มีอยู่เป็น ตลาดสมบูรณ์ ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง อาทิ เช่น ทฤษฎีเมเชอร์และความน่าจะเป็น (Measure Theory and Probability) การวิเคราะห์ระบบจำนวนจริง (Real Analysis) การวิเคราะห์ฟังก์ชันนัล (Functional Analysis) สมการอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic Differential Equation) เป็นต้น สำหรับเนื้อหาเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ผู้อ่านที่สนใจสามารถหาอ่านได้ในภาคผนวก

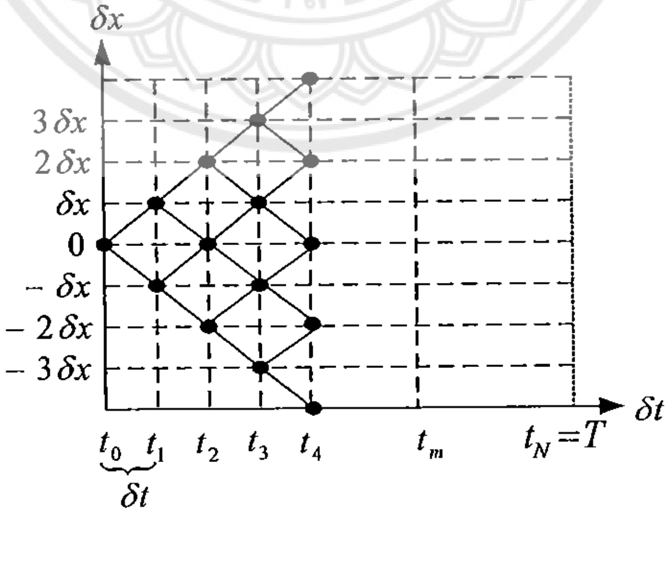
4.1 การเดินสุ่ม (Random walk)

การเดินสุ่ม คือ ผลรวมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าเริ่มต้นจากศูนย์และมีโอกาสความน่าจะเป็นในการเพิ่มค่าขึ้นเป็น p หรือมีโอกาสความน่าจะเป็นในการลดลงมีค่าเป็น $1-p$ ก็ได้เมื่อเวลาผ่านไป ดังนั้นแล้วเมื่อให้เวลาลู่เข้าสู่อนันต์ลักษณะกราฟของการเดินสุ่มจึงมีลักษณะคล้ายกับกราฟการเคลื่อนที่ของมูลค่าหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ กล่าวคือเส้นทางเดินของกราฟไม่มีความแน่นอนเกิดการแกว่งตัวของทางเดินกราฟอยู่โดยตลอด ทำให้คาดการณ์ได้ยาก ดังแสดงได้ตามรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 การเดินสุ่ม (Random walk)

เมื่อทำการจำลองรูปแบบการเคลื่อนที่ของตัวแปรสุ่มในแต่ละช่วงเวลาโดยกำ**หนดให้** $\mathbf{X}_k$ **เป็น** **ลำดับของตัว**แปรสุ่มที่อิสระต่อกัน $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \ldots$ ซึ่งมีคุณสมบัติของการเดินสุ่มอย่าง**ง่ายแบบสมมาตร** (Symmetric simple random walk) คือมีโอกาสในการเพิ่มค่าขึ้นเป็น $\frac{1}{2}$ หรือมีโอกาสในการ**ลดค่าลงเป็น** $\frac{1}{2}$ (กล่าวคือ $p\left[\mathbf{X}_k = 1\right] = \frac{1}{2} = p\left[\mathbf{X}_k = -1\right]$) ดังแสดงได้ตามรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 การเดินสุ่ม (Random walk)

โดยที่ตัวแปรต่าง ๆในรูปที่ 4.2 มีความหมายดังนี้

δx เป็นระยะห่างในแนวแกนตั้ง

δt เป็นระยะห่างในแนวแกนนอน

T เป็นเวลาสุดท้าย

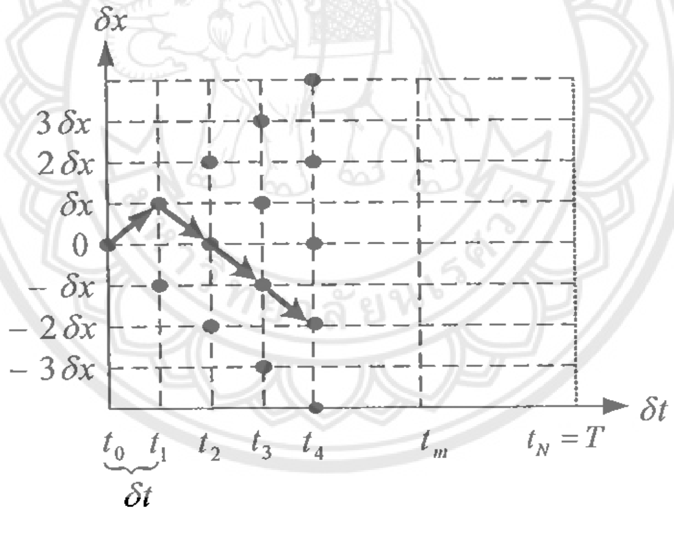
เนื่องจาก $T = t_N$ กล่าวคือแบ่งช่วงเวลาทั้งหมดออกเป็น N ช่วง โดยที่แต่ละช่วงดังกล่าวถูกแบ่งย่อยออกเป็น δt ดังนั้น $T = t_N = N\delta t$

และกำหนดให้ $W_{t_m}^{(n)} = \left(\sum_{k=1}^{m} \mathbf{X}_k\right)\delta x$ โดยที่ $W_t^{(n)}$ เป็นการเดินสุ่มของตัวแปรสุ่ม

หากกำหนดให้ $\delta t = \frac{1}{n}$ เมื่อ n มีค่ามาก ๆแล้ว $t_N = \frac{N}{n}$ และที่เวลา t_m ใด ๆ จะได้ว่า $t_m = m\delta t = \frac{m}{n}$

ดังนั้นแล้ว $m = nt_m$ ซึ่งจะทำให้เขียนสมการของการเดินสุ่ม $W_t^{(n)}$ ใหม่ได้เป็น

$$W_t^{(n)} = \left(\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{X}_k\right)\delta x \tag{4.1}$$



รูปที่ 4.3 ตัวอย่างเส้นทางการเดินสุ่ม

ยกตัวอย่างเช่น การเดินสุ่มที่เริ่มจากศูนย์ แล้วเคลื่อนที่ขึ้น-ลง-ลง-ลง ดังรูปที่ 4.3

ดังนั้น จากสมการที่ (4.1) จะได้

$$W_{t_4} = 1\delta x + 0\delta x + (-1)\delta x + (-2)\delta x = -2\delta x$$

จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า δx เป็นขนาดที่ยังไม่ทราบค่า ดังนั้นจึงต้องหาขนาดของ δx ที่เหมาะสมเพื่อส่งผลให้การเดินสุ่มดังกล่าวมีลักษณะการเคลื่อนที่เช่นเดียวกับพฤติกรรมของมูลค่าของหุ้น

<u>สมมติ</u> ให้ $\delta x = \delta t = \dfrac{1}{n}$ ซึ่งจากสมการที่ (4.1) จะได้ว่า

$$W_t^{(n)} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{X}_k\right) \tag{4.2}$$

เมื่อให้ n ลู่เข้าสู่อนันต์ $(n \to \infty)$ แล้วจะพบว่า

$$W_t = \lim_{n\to\infty} W_t^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{X}_k\right) \tag{4.3}$$

จากทฤษฎีบทของ Kolmogolov's Strong Law (ดูภาคผนวก ก) จะพบว่าแท้จริงแล้ว W_t ในสมการที่ (4.3) จะมีค่าเท่ากับค่ามัชฌิม (m) ของตัวแปรสุ่ม $\mathbf{X}_k$

แต่เนื่องจากข้อสมมติฐานที่ว่า การเคลื่อนที่ของตัวแปรสุ่มเป็นการเดินสุ่มอย่างง่ายแบบสมมาตร ดังนั้น

$$m = \mathrm{E}[\mathbf{X}_k] = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

จากสมการ (4.3) จะได้ว่า

$$W_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{X}_k\right) = m = 0 \tag{4.4}$$

ดังนั้นแล้วอาจกล่าวได้ว่า เส้นทางของการเดินสุ่มจะกลับลงมาสู่ค่าศูนย์ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ1 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การกำหนดให้ $\delta x = \dfrac{1}{n}$ ไม่สามารถใช้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมูลค่าหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ได้

<u>สมมติ</u> $\delta x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ แทนค่าในสมการที่ (4.1) จะได้

$$W_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{X}_k\right) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{nt}}\left(\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{X}_k\right) \tag{4.5}$$

ให้ n ลู่เข้าสู่อนันต์ $(n \to \infty)$ แล้วจะพบว่า

$$W_t = \lim_{n\to\infty} W_t^{(n)} = \sqrt{t}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{X}_k\right) \tag{4.6}$$

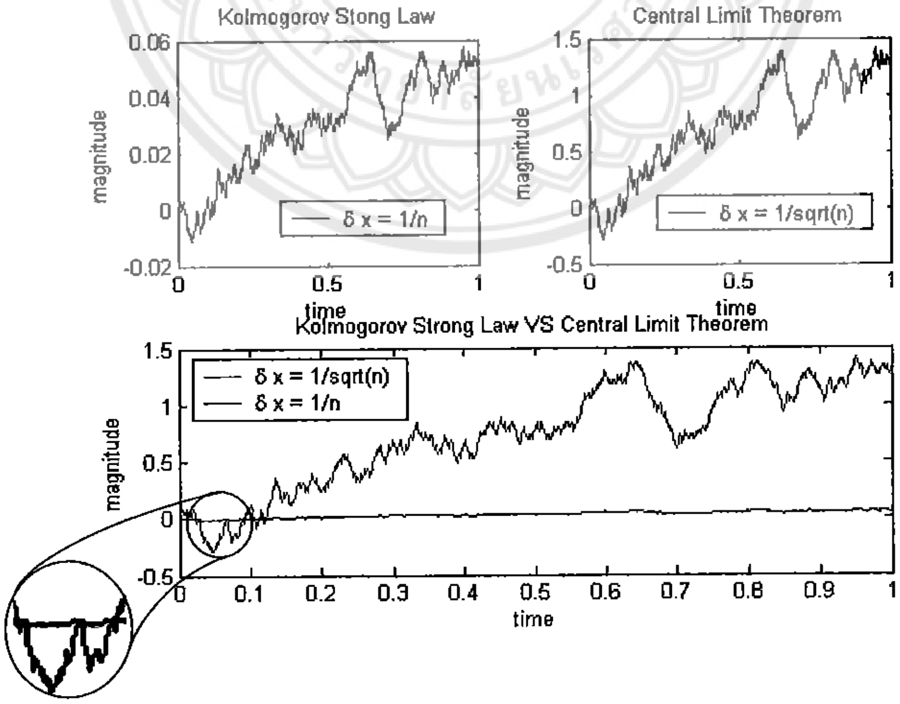
โดยจะพบว่า ค่าในวงเล็บจะมีการแจกแจงตัวแบบปกติ กล่าวคือ มีค่ามัชฌิมเป็นศูนย์ และมีค่าความแปรปรวนเป็นหนึ่ง โดยอาศัยทฤษฎีแนวโน้มเข้าสู่ศูนย์กลาง (ดูภาคผนวก ก) นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}\sum_{k=1}^{nt}\mathbf{X}_k\right)\triangleq N(0,1) \tag{4.7}$$

ดังนั้น W_t จึงมีการแจกแจงตัวเป็นแบบ $\sqrt{t}N(0,1)=N(0,t)$ นั่นคือ มีค่ามัชฌิมเป็นศูนย์ $(\mu=0)$ และมีค่าความแปรปรวนเป็น t $(\sigma^2=t)$

เมื่อนำกราฟการเดินสุ่มที่ได้จากทั้งสองกรณีมาพิจารณาร่วมกันจะพบว่า ลักษณะกราฟทั้งสองจะมีลักษณะคล้ายคลึงกัน ต่างกันตรงแกนตั้งซึ่งเป็นขนาดของการเดินสุ่ม โดยจะพบว่าในกรณีที่ $\delta x=\frac{1}{n}$ (ดูรูปที่ 4.4 บนซ้ายประกอบ) เมื่อ n ลู่เข้าสู่อนันต์แล้ว ขนาดของ δx จะมีค่าน้อยมาก ซึ่งแตกต่างจากในกรณีของ $\delta x=\frac{1}{\sqrt{n}}$ เมื่อ n ลู่เข้าสู่อนันต์แล้วจะพบว่า ขนาดจะมีมากกว่า (ดูรูปที่ 4.4 บนขวาประกอบ) และทางเดินกราฟยังมีการแกว่งไกวเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อันเนื่องมาจากค่าความแปรปรวนมีค่ามากขึ้นตามเวลาที่เพิ่มขึ้น ซึ่งลักษณะดังกล่าวคล้ายคลึงกับการเคลื่อนไหวของหุ้น

แต่อย่างไรก็ดี หากพิจารณากราฟในช่วงแรก (รูป 4.4 ล่างในวงกลม) จะพบว่ามีช่วงของกราฟบางช่วงมีขนาดติดลบ ซึ่งไม่สามารถเกิดขึ้นได้จริงในตลาดหลักทรัพย์ เนื่องจากมูลค่าของหุ้นจะมีค่าเป็นบวกเสมอดังนั้นจึงทำการปรับแต่งโดยใช้ฟังก์ชันเลขยกกำลัง ซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไป



รูปที่ 4.4 เส้นทางการเดินสุ่มเมื่อ $\delta x=\frac{1}{n}$ และ $\delta x=\frac{1}{\sqrt{n}}$

เนื่องจากว่า W_t ที่ได้จากทฤษฎีแนวโน้มเข้าสู่ศูนย์กลางเป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic processes) ซึ่งแท้ที่จริงแล้ว $W_t, 0 \le t \le T$ จัดว่าเป็น***การเคลื่อนที่แบบบราวเนียน (Brownian motion)*** เนื่องจาก W_t สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $W_0(\omega) = 0$
2. $W_t(\omega)$ มีความต่อเนื่องที่ $t \in [0,T]$ เกือบทุกๆค่า $\omega \in \Omega$
3. เมื่อกำหนดให้ $0 \le s \le t \le T$ แล้ว $W_t - W_s$ มีการกระจายตัวแบบปกติ $N(0,t-s)$ และ $W_t - W_s$ อิสระจาก W_u เมื่อ $u \le s$

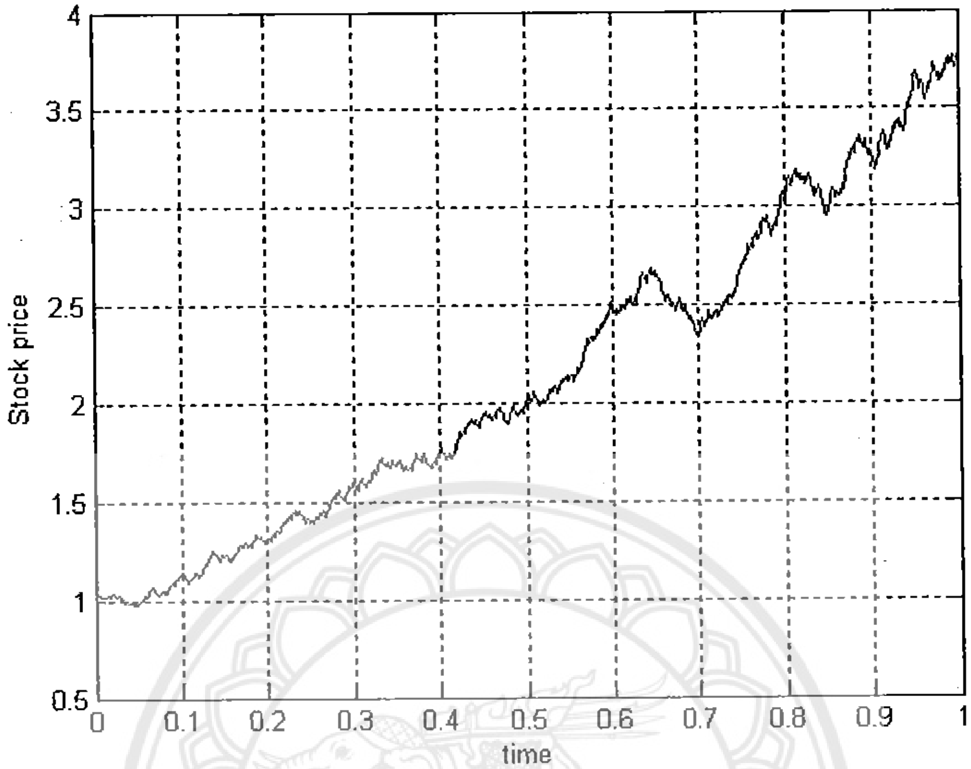
หรืออาจกล่าวโดยนัยได้ว่าการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนจะเริ่มต้นที่ศูนย์และผลต่างระหว่าง $W_t - W_s$ จะต้องอิสระต่อ W_u ทุกๆจุดโดยที่ $W_t - W_s \triangleq N(0,t-s)$

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่าตัวแปรสุ่มที่กำหนดให้มีลักษณะของการเคลื่อนที่เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน แต่ทว่ายังไม่สามารถใช้เป็นแบบจำลองในการพิจารณาได้ เนื่องจากว่า กราฟที่ได้จากแบบจำลองนั้นมีค่าติดลบเกิดขึ้น ซึ่งแตกต่างจากมูลค่าของหุ้นในความเป็นจริง ดังนั้นแล้วจึงต้องปรับเปลี่ยนเงื่อนไขบางประการเพื่อทำให้แบบจำลองที่ได้ไม่มีค่าติดลบเกิดขึ้น

จากบทที่ 3 ได้ทราบแล้วว่าตัวแปรที่ส่งผลให้มูลค่าของตราสารหนี้มีการเปลี่ยนแปลงนั้นมีเพียงอัตราดอกเบี้ยเท่านั้น ซึ่งมีความสัมพันธ์เป็น $B_t = B_0 e^{r\delta t}$ แต่ในกรณีของหุ้นซึ่งเป็นลักษณะของตัวแปรสุ่ม $(\mathbf{X})$ นั้น เมื่อพิจารณาแล้วจะพบว่ามีปัจจัยที่ส่งผลให้มูลค่าของหุ้นมีการเปลี่ยนแปลง เช่น อัตราเงินเฟ้อ ซึ่งส่งผลให้ต้องมีการปรับแต่งกราฟของ W_t ให้ยกค่าสูงขึ้น (หรือลดลง) เพื่อให้มีลักษณะคล้ายมูลค่าของหุ้นจริงในตลาดหลักทรัพย์ ซึ่งในทางคณิตศาสตร์จะเขียนแทนปัจจัยเหล่านี้ด้วย อัตราการเลื่อน (Drift: μ) ซึ่งอาจเป็นค่าคงที่หรือเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลาก็ได้ และยังพบอีกว่าบางครั้งสภาพของมูลค่าของหุ้นมีการแกว่งตัวอย่างรุนแรงหรือลดลงเมื่อเทียบกับกราฟของ W_t ที่ได้ ดังนั้นจึงต้องมีการปรับแต่งกราฟของ W_t เพื่อให้มีการแกว่งตัวคล้ายกับสภาพของหุ้นให้มากที่สุด กล่าวคือมีการเพิ่มค่าความแปรปรวน (Volatility: σ) เข้าไป ดังนั้น รูปแบบทางคณิตศาสตร์ของหุ้นหลังจากที่มีการปรับแต่งแล้ว สามารถเขียนใหม่ได้ว่า $S_t = \mu t + \sigma W_t$ แต่เนื่องจากว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน จึงมีโอกาสที่มูลค่าของหุ้นจะออกมาเป็นค่าลบได้ ดังนั้นจึงแก้ปัญหาดังกล่าวโดยการนำคุณสมบัติของเลขชี้กำลัง (Exponential) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ที่นิยามโดย $f(x) = e^x$ มาใช้ นั่นคือ

$$S_t = e^{\mu t + \sigma W_t} \tag{4.8}$$

จากสมการข้างต้นถือเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมูลค่าของหุ้น โดยยังคงคุณสมบัติของการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน และยังพบว่าลักษณะของกราฟมีการแกว่งไกวสูงขึ้นอยู่ตลอด ซึ่งเป็นผลมาจากค่าความแปรปรวนที่ขึ้นอยู่กับเวลา $N(0,t)$ ซึ่งลักษณะเช่นนี้ถูกเรียกว่า ***การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต (Geometric Brownian motion)*** โดยมีลักษณะของกราฟดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต

แต่อย่างไรก็ดี หากมูลค่าของหุ้นที่เวลา t_0 มีค่าเป็น $S_0(\neq 1)$ แบบจำลองที่เหมาะสมสำหรับมูลค่าของหุ้น คือ

$$S_t = S_0 e^{\mu t+\sigma W_t} \tag{4.9}$$

4.2 ความน่าจะเป็นของตลาด (เมเชอร์ q)

สืบเนื่องจากบทที่ผ่านมาในกรณีของกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาวิยุต (Discrete-time Stochastic processes) ได้ทราบว่า การสร้างค่าความน่าจะเป็นของตลาด q ขึ้นมา โดยที่ $0<q<1$ จะส่งผลให้ตลาดไม่เกิดการทำกำไรจากส่วนต่าง (Arbitrage opportunity) กล่าวคือเกิดตลาดที่สมบูรณ์ (Complete market) ดังนั้นในกรณีของกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาต่อเนื่อง (Continuous-time Stochastic processes) ย่อมต้องอาศัยหลักการเดียวกันเพื่อให้เกิดตลาดที่สมบูรณ์ แต่เนื่องจากว่ามูลค่าของหุ้นในกรณีที่เวลาต่อเนื่องเป็นตัวแปรสุ่มที่มีลักษณะการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ p ดังนั้นจึงต้องมีการปรับเปลี่ยนเงื่อนไขบางประการเพื่อให้การเคลื่อนที่ของตัวแปรสุ่มเป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ q

จากสมการมูลค่าของหุ้น $S_t = e^{\mu t+\sigma W_t}$ และมูลค่าตราสารหนี้ $B_t = B_0 e^{rt}$ จะได้ว่า

$$Z_t = \frac{S_t}{B_t} = \frac{S_0}{B_0} e^{(\mu-r)t+\sigma W_t} \tag{4.10}$$

อนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่มของสมการ (4.10) คือ

$$dZ_t = Z_t\left[\sigma W_t + \left(\left(\mu - r\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt\right] \tag{4.11}$$

เมื่อกำหนดให้ $\gamma = \frac{1}{\sigma}\left(\left(\mu - r\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ จะได้

$$dZ_t = Z_t\left(\sigma dW_t + \sigma\gamma dt\right) = \sigma Z_t\left(dW_t + \gamma dt\right) \tag{4.12}$$

ให้ $\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$ ซึ่งมีอนุพันธ์เป็น $d\tilde{W}_t = dW_t + \gamma dt$
ดังนั้นสมการ (4.12) จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{W}_t \tag{4.13}$$

หากสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\tilde{W}_t$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนแล้ว สมการ (4.13) มีลักษณะที่บ่งบอกว่า Z_t จะเป็นมาร์ตินเกล

ในการพิสูจน์ว่า $\tilde{W}_t$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ q ให้พิจารณากรณีทั่วไปดังนี้ให้ $\mathbf{X}$ เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ $\mathbf{X} \triangleq N\left(m, \sigma^2\right)$ ภายใต้เมเชอร์ p ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability density function) ของ $\mathbf{X}$ ภายใต้ p คือ

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left[\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]} \tag{4.14}$$

สมมติว่า ภายใต้เมเชอร์ q $\mathbf{X} \triangleq N\left(\tilde{m}, \sigma^2\right)$ ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability density function) ของ $\mathbf{X}$ ภายใต้ q คือ

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left[\frac{-(x-\tilde{m})^2}{2\sigma^2}\right]} \tag{4.15}$$

กำหนดให้ $\zeta = z(\mathbf{X})$ โดยที่ $$z(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-m)^2-(x-\tilde{m})^2\right]}$$

ดังนั้น เมื่อพิจารณาค่าคาดหมายจะได้

$$\mathbf{E}^p\left[f(\mathbf{X})\zeta\right]=\mathbf{E}^p\left[f(\mathbf{X})z(\mathbf{X})\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p(x)z(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)q(x)dx$$
$$=\mathbf{E}^q\left[f(x)\right]$$

หากกำหนดให้ $m=0$ และ $\sigma^2=t$ ดังนั้น $\mathbf{X}\triangleq N(0,t)$ ซึ่งก็คือการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน W_t ภายใต้เมเชอร์ p
หากต้องการให้ $W_t\triangleq N(-\gamma t,t)$ ภายใต้เมเชอร์ q ซึ่งนั่นย่อมหมายความว่า $\tilde{W}_t=W_t+\gamma t\triangleq N(0,t)$ จึงจำเป็นต้องคำนวณหา ζ ที่เหมาะสม

เนื่องจาก
$$\zeta=\frac{q(x)}{p(x)}=e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-m)^2-(x-\tilde{m})^2\right]} \tag{4.16}$$

เมื่อแทน $m=0,\tilde{m}=-\gamma t,\sigma^2=t$ ลงในสมการข้างต้น จะพบว่า

$$\zeta=e^{-\gamma W_t-\frac{1}{2}\gamma^2 t} \tag{4.17}$$

แม้ว่าการเปลี่ยนจากเมเชอร์ p มายังเมเชอร์ q โดยอาศัย ζ ดังสมการที่ (4.17) ซึ่งจะทำให้ $\tilde{W}_t\triangleq N(0,t)$ ภายใต้ q แล้ว เรายังไม่สามารถจะสรุปได้ทันทีว่า $\tilde{W}_t$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ q แต่โดยอาศัยทฤษฎีบทของ ***Carmeron-Martin-Girsanov Change of measure (C-M-G)*** จะพบว่าแท้ที่จริงแล้ว $\tilde{W}_t$ คือการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ q

ทฤษฎีการเปลี่ยนเมเชอร์ของ C-M-G (Carmeron-Martin-Girsanov Change of measure: C-M-G)

กำหนดให้ W_t เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ p และ γ_t เป็นกระบวนการที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\mathbf{E}^p\left[\mathbf{exp}\left(\frac{1}{2}\int_0^T\gamma_t^2dt\right)\right]<\infty$ *แล้วจะสามารถหาเมเชอร์ q ที่ซึ่ง*

1. *เมเชอร์ q สมมูลกับเมเชอร์ p*
2. $\frac{dq}{dp}=\mathbf{exp}\left(-\int_0^T\gamma_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T\gamma_t^2dt\right)$
3. $\tilde{W}_t=W_t+\int_0^T\gamma_s ds$ *เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ q*

แต่เนื่องจากว่า γ ที่ได้ในกรณีที่พิจารณาเป็นค่าคงที่ ดังนั้นจากข้อ 3. ของทฤษฎีบท C-M-G จะได้ว่า $\tilde{W}_t=W_t+\gamma t$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ q

เนื่องจาก $\tilde{W}_t$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนภายใต้เมเชอร์ q และ $Z_t = \dfrac{S_t}{B_t}$ เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มที่มี Volatility เป็น σ ซึ่งเป็นค่าคงที่ ดังนั้นเงื่อนไข $\mathbf{E}^q\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$ เป็นจริง โดยอาศัยทฤษฎี 2 บทข้างท้ายนี้ จะสามารถสรุปได้ว่า Z_t เป็นมาร์ตินเกลภายใต้ q เนื่องจาก $dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{W}_t$

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u>

ถ้า $\mathbf{X}$ เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มที่สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ โดยที่ σ_t สอดคล้องกับเงื่อนไข $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$ แล้ว เงื่อนไขจำเป็นและพอเพียงที่จะบอกว่า $\mathbf{X}$ เป็นมาร์ตินเกลคือ $\mathbf{X}$ ต้องไม่มีอัตราเลื่อน $(\mu_t = 0)$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u>

กำหนดให้ $d\mathbf{X}_t = \sigma_t \mathbf{X}_t dW_t$ ถ้า $\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 ds\right)\right] < \infty$ แล้ว $\mathbf{X}$ เป็นมาร์ตินเกล

4.3 การคำนวณหามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครอง

มูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองควรที่จะมีโครงสร้างแบบ การรักษาสมดุลทางการเงิน (Self-financing) เพื่อทำให้ตลาดมีความสมบูรณ์ กล่าวคือ ไม่เกิดการทำกำไรจากส่วนต่างเกิดขึ้น (Arbitrage) ซึ่งจากนิยามของ การรักษาสมดุลทางการเงินที่ว่า การที่มูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองจะมีการเปลี่ยนแปลงได้นั้น เนื่องมาจากเกิดการเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้นและตราสารหนี้ เมื่อพิจารณากระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาวิยุตจะได้ว่า ตลาดเกิดการรักษาสมดุลทางการเงินก็ต่อเมื่อ

$$\Delta f_t = \varphi_t \Delta S_t + \psi_t \Delta B_t \text{ หรือ } \Delta\left(\frac{f_t}{B_t}\right) = \varphi_t \Delta\left(\frac{S_t}{B_t}\right) \tag{4.18}$$

แต่ในกรณีกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาต่อเนื่อง จะพิจารณามูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองจากสมการข้างต้นเป็น สมการอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic Differential Equation) ดังนั้นตลาดจะเกิดการรักษาสมดุลทางการเงินก็ต่อเมื่อ

$$df_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t \text{ หรือ } d\left(\frac{f_t}{B_t}\right) = \varphi_t d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) \tag{4.19}$$

<u>พิสูจน์</u>

กำหนดให้ $Z_t = \frac{S_t}{B_t}$ และ $E_t = \frac{f_t}{B_t}$

เมื่อพิจารณา $f_t = B_t E_t$ จะพบว่ามีอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่มเป็น

$$df_t = d\left(B_t E_t\right) = B_t dE_t + E_t dB_t + \left(dB_t\right)\left(dE_t\right) \tag{4.20}$$

แต่เนื่องจาก $B_t = B_0 e^{rt}$ ซึ่งมีอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่มเป็น $dB_t = rB_0 e^{rt} dt = rB_t dt$ และ $\left(dB_t\right)\left(dE_t\right) = \left(rB_t dt\right)\left(dE_t\right) = 0$ ดังนั้นสมการ (4.20) จะเขียนได้ว่า

$$df_t = B_t dE_t + E_t dB_t \tag{4.21}$$

และในทำนองเดียวกัน $S_t = B_t Z_t$ ซึ่งมีอนุพันธ์เป็น

$$dS_t = B_t dZ_t + Z_t dB_t \tag{4.22}$$

แต่เนื่องจากว่า $f_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $\frac{f_t}{B_t} = \varphi_t \frac{S_t}{B_t} + \psi_t$ หรือ

$$E_t = \varphi_t Z_t + \psi_t \tag{4.23}$$

จากคุณสมบัติของการรักษาสมดุลทางการเงิน $df_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t$ (ดูสมการ 4.19) แทนค่าที่ได้จากสมการ (4.21) และ (4.22) สำหรับ df_t และ dS_t ตามลำดับจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B_t dE_t + E_t dB_t &= \varphi_t \left(B_t dZ_t + Z_t dB_t\right) + \psi_t dB_t \\ &= \varphi_t B_t dZ_t + \left(\varphi_t Z_t + \psi_t\right) dB_t \end{aligned}$$

แต่จากสมการ (4.23) จะได้ว่า

$$B_t dE_t = \varphi_t B_t dZ_t$$

แต่เนื่องจากว่า $B_t \neq 0$ จะได้ว่า

$$dE_t = \varphi_t dZ_t \tag{4.24}$$

นั่นคือ $d\frac{f_t}{B_t} = \varphi_t d\frac{S_t}{B_t}$ ตามต้องการ แต่เนื่องจากว่า Z_t เป็นมาร์ตินเกลและ φ_t เป็นกระบวนการที่สามารถทำนายค่าได้ ดังนั้น E_t ย่อมเป็นมาร์ตินเกลด้วย

<u>ตัวอย่างของการหาหลักทรัพย์ในครอบครอง</u>

สมมติให้ราคาหุ้น (S_t) เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน (W_t) นั่นคือ $S_t = W_t$ และให้มูลค่าตราสารหนี้เป็น $B_t = 1$ สำหรับทุกค่า t มูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองควรมีค่าเป็นเท่าไรเพื่อที่ทำให้เกิดการรักษาสมดุลทางการเงิน

1. สมมติให้ $\varphi_t = \psi_t = 1$ สำหรับทุกค่า t ถ้าผู้ถือตราสารสิทธิถือหลักทรัพย์ (φ_t, ψ_t) ไว้โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงจำนวน อาจส่งผลให้ให้มูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครอง $f_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t = W_t$ มีการเปลี่ยนแปลง $(f_t = W_t + 1)$ เนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้น ซึ่งเหตุการณ์ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเกิดการรักษาสมดุลทางการเงิน โดยสามารถตรวจสอบได้ ดังนี้

   เดิมมีมูลค่าหลักทรัพย์ในครอบครองเป็น $f_t = W_t + 1$ จะได้ว่า $df_t = dW_t$ ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับ $df_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t$ เนื่องจาก $dB_t = 0$ ทุกค่า t

2. สมมติให้หลักทรัพย์ในครอบครอง $(\varphi_t, \psi_t) = (2W_t, -t - W_t^2)$ ดังนั้นมูลค่าของหลักทรัพย์มีค่าเป็น

$$f_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t = (2W_t)(W_t) + (-t - W_t^2)(1) = W_t^2 - t$$

   จากสูตรของ Ito

$$df_t = 2W_t dW_t + dt - dt = 2W_t dW_t$$

   ซึ่งสอดคล้องกับ

$$df_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t \quad (\text{เนื่องจาก } dB_t = 0 \text{ ทุกค่า} t)$$

4.4 มูลค่าตราสารสิทธิ (Value of Options)

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่มโดยบทตั้งของ Ito นั้น หากให้ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นฟังก์ชันของมูลค่าสินทรัพย์ อาทิเช่น มูลค่าของหุ้น มูลค่าของตราสารหนี้ มูลค่าของตราสารสิทธิแล้ว สมการที่ได้เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes (Black-Scholes partial differential equation: BS-PDE)** ซึ่งผลเฉลยของสมการนี้สามารถคำนวณหาได้ทั้งในทางวิเคราะห์และในทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

จากสมการของ Ito เมื่อกำหนดให้ $f(S,t)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับมูลค่าสินทรัพย์ S_t และเวลา t และสอดคล้องกับบทตั้งของ Ito แล้ว

$$df_t = \left(\mu_t S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\sigma_t S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} \right) dW_t \tag{4.25}$$

เมื่อพิจารณามูลค่าตราสารสิทธิในกรณี ***สัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward (Forward contract)*** ซึ่งมีสมการของสัญญาที่เวลาสิ้นสุดสัญญา$(t=T)$เป็น $f_T = S_T - K$ แต่เมื่อพิจารณาที่เวลาใด ๆ $(t<T)$ จะพบว่ามูลค่าของสัญญาจะเพิ่มสูงขึ้นตามสมการ $f_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$ โดยสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ $E_t = \dfrac{f_t}{B_t}$ และ $Z_t = \dfrac{S_t}{B_t}$ แต่เนื่องจาก E_t และ Z_t เป็นมาร์ตินเกลภายใต้เมเชอร์ q ดังนั้นจะได้ว่า

$$E_t = \mathbf{E}^q\left[E_t|\Im_t\right] = \mathbf{E}^q\left[\frac{f_T}{B_T}|\Im_t\right]$$

$$= B_t\,\mathbf{E}^q\left[\frac{S_T-K}{B_T}|\Im_t\right] = \mathbf{E}^q\left[Z_T|\Im_t\right] - \mathbf{E}^q\left[\frac{K}{B_T}|\Im_t\right]$$

นั่นคือ

$$E_t = Z_T - \frac{K}{B_T} \tag{4.26}$$

แต่ $E_t = \dfrac{f_t}{B_t}$ และ $Z_t = \dfrac{S_t}{B_t}$ เพราะฉะนั้นสมการ (4.26) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{f_t}{B_t} = \frac{S_t}{B_t} - \frac{K}{B_t} \tag{4.27}$$

แต่เนื่องจากว่า $B_t = B_{t_0}e^{r(t-t_0)}$ และ $B_T = B_{t_0}e^{r(T-t_0)}$ ดังนั้น $\dfrac{B_t}{B_T} = \dfrac{B_{t_0}e^{r(t-t_0)}}{B_{t_0}e^{r(T-t_0)}} = e^{-r(T-t)}$

เพราะฉะนั้น มูลค่าของสัญญาที่เวลา t ใด ๆ จะมีค่าเป็น $f_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$ ตามต้องการ

เมื่อพิจารณา ***ตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call option)*** ซึ่งมีสมการของตราสารสิทธิที่เวลาสิ้นสุดสัญญา$(t=T)$เป็น $f_T = (S_T-K)^+ = \mathbf{max}\{S_T-K,0\}$ ดังนั้นที่เวลา $t<T$ มูลค่าของตราสารสิทธิคือ

$$V(s,\tau) = s\Phi\left[\frac{\mathbf{log}\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] - ke^{-r\tau}\Phi\left[\frac{\mathbf{log}\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] \tag{4.28}$$

$$= sf(s,\tau) + b(s,\tau)$$

โดยที่ $s = S_t$ และ $\tau = T-t$

ข้อสังเกต สมการข้างต้นเรียกว่า ***สูตรของแบล็คโชว์ (Black-Scholes formula)***

อย่างไรก็ดี หากเมื่อต้องการทราบ ***มูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (Put option)*** สามารถหาได้จาก ***Put-Call parity*** กล่าวคือ มูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สินเกิดจากผลต่างของมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินและสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward ดังสมการ

$$f_T^{\,F} = f_T^{\,C} - f_T^{\,P} \tag{4.29}$$

ดังนั้นแล้วมูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (Put option) มีสมการเป็น

$$f_T^{\,P} = f_T^{\,C} - f_T^{\,F} = \left(S_T - K\right)^- = \left(S_T - K\right)^+ - \left(S_T - K\right) \tag{4.30}$$

4.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes และสมการการแพร่

โดยทั่วไปแล้ว มูลค่าตราสารสิทธิเมื่อครบกำหนด (Expiration date) จะมีมูลค่าเป็น $V_T = f\left(S_T\right)$ ดังนั้น จึงเกิดข้อสงสัยว่า จะคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิที่เวลา $t < T$ ได้อย่างไรในกรณีของสัญญาอื่น ๆ นอกเหนือจาก Vanilla options

เนื่องจาก E_t เป็นมาร์ตินเกลภายใต้เมเชอร์ q จะได้ว่า

$$E_t = \mathbf{E}^q\left[E_T \middle| \Im_t\right]$$

หรือ

$$\frac{V_t}{B_t} = \mathbf{E}^q\left[\frac{V_T}{B_T} \middle| \Im_t\right]$$

$$V_t = B_t \mathbf{E}^q\left[\frac{V_T}{B_T} \middle| \Im_t\right] = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^q\left[f_T \middle| \Im_t\right]$$

กำหนดให้ $$U\left(s,\tau\right) = U\left(S_t, T-t\right) = \mathbf{E}^q\left[f\left(S_T\right) \middle| \Im_t\right]$$

ดังนั้นจะพบว่า $$V\left(s,\tau\right) = e^{-r\tau}U\left(s,\tau\right) \tag{4.31}$$

ที่เวลา $t = T$ จะได้

$$U\left(S_T, 0\right) = \mathbf{E}^q\left[f\left(S_T\right) \middle| \Im_T\right] = f\left(S_T\right)$$

ซึ่งจะได้ว่า $$U\left(s,0\right) = f\left(s\right) \tag{4.32}$$

เมื่อพิจารณามูลค่าของหุ้นภายใต้เมเชอร์ q จะพบว่า

$$S_t = S_0 e^{\mu t+\sigma W_t} = S_0 e^{\mu t+\sigma(\tilde{W}_t - \gamma t)} \text{ เมื่อ } \gamma = \frac{1}{\sigma}\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad (4.33)$$

ดังนั้นจะได้ว่า $S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\tilde{W}_t}$

และสมการอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม $dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t + rS_t dt$

ดังนั้น $dU(S_t,T-t) = U_s(S_t,T-t)dS_t - U_\tau(S_t,T-t)dt + \frac{1}{2}U_{ss}(S_t,T-t)(dS_t)^2$

จะได้ว่า $dU(S_t,T-t) = \sigma S_t U_s d\tilde{W}_t + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 U_{ss} - U_\tau + rS_t U_s\right)dt$

กำหนดให้ $A = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 U_{ss} - U_\tau + rS_t + U_s$

ดังนั้นจะได้ว่า $U(S_t,T-t)$ เป็นมาร์ตินเกลภายใต้เมเชอร์ q ก็ต่อเมื่อ $A=0$ ดังนั้น

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s,\tau) + rs\frac{\partial U}{\partial s}(s,\tau) - \frac{\partial U}{\partial \tau}(s,\tau) = 0 \text{ สำหรับทุกค่า } \tau, s > 0 \quad (4.34)$$

จากสมการ (4.31) $V(s,\tau) = e^{-r\tau}U(s,\tau)$

จะได้ว่า $U(s,\tau) = e^{r\tau}V(s,\tau)$

ดังนั้น

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s,\tau) = e^{r\tau}\frac{\partial V}{\partial s}(s,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s,\tau) = e^{r\tau}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(s,\tau)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(s,\tau) = re^{r\tau}V(s,\tau) + e^{r\tau}\frac{\partial V}{\partial \tau}(s,\tau)$$

จากสมการที่ (4.32) จะได้ $U(s,0) = f(s) = e^0 V(s,0)$

ดังนั้นจะได้ $V(s,0) = f(s)$

หรือกล่าวอีกนัยได้ว่า $V_T = V(S_T,0) = f(S_T)$

แทนค่า $\frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ และ $\frac{\partial U}{\partial \tau}$ ลงไปในสมการ (4.34) จะได้

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(s,\tau) + rs\frac{\partial V}{\partial s}(s,\tau) - \frac{\partial V}{\partial \tau}(s,\tau) - rV(s,\tau) = 0 \text{ สำหรับทุกค่า } s,\tau > 0 \quad (4.35)$$

ซึ่งสมการดังกล่าวเรียกว่า ***สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของBlack-Scholes (Black-Scholes partial differential equation: BS-PDE)***

จากตัวอย่างในหัวข้อ 4.4 จะพบว่ามูลค่าของสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward ที่เวลา $t < T$ จะมีค่าเป็นดังที่ได้แสดงในสมการต่อไปนี้

$$V(s,\tau) = s - ke^{-r\tau} \tag{4.36}$$

จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้สอดคล้องกับสมการ BS-PDE เพราะ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(s,\tau) + rs\frac{\partial V}{\partial s}(s,\tau) - \frac{\partial V}{\partial \tau}(s,\tau) - rV(s,\tau) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 (0) + rs(1) - \left(rke^{-r\tau}\right) - r\left(s - ke^{-r\tau}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ผู้อ่านสามารถตรวจสอบได้เองโดยไม่ยากว่า สูตรของ Black-Scholes ซึ่งเป็นมูลค่าของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน ที่เวลา $t < T$ ย่อมสอดคล้องกับสมการ BS-PDE ด้วยเช่นกัน

เนื่องจากสมการ BS-PDE มีสัมประสิทธิ์บางตัวไม่ใช่ค่าคงที่ ซึ่งทำให้การแก้สมการเป็นไปได้ยาก ดังนั้นจึงทำการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ดังนี้

กำหนดให้ตัวแปร $s = E_1 e^x$ และ $\tau_0 = (T - t) = \dfrac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ โดยที่ E_1 คือค่าคงที่ค่าบวกใดๆ

ดังนั้น $V(s,\tau_0) = V\left(s(x),\tau_0(\tau)\right) = V(x,\tau)$ และสมการที่ (4.36) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right) - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}V\right] = 0 \tag{4.37}$$

เนื่องจากปริมาณ $\dfrac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ เป็นค่าคงที่ จึงกำหนดให้ปริมาณดังกล่าวมีค่าเป็น K (นั่นคือ $K = \dfrac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$)

เพราะฉะนั้นสมการที่ (4.37) เขียนได้เป็น

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (K-1)\frac{\partial V}{\partial x} - KV - \frac{\partial V}{\partial \tau}\right] \tag{4.38}$$

จะพบว่าสมการนี้ยังไม่อยู่ในรูปสมการความร้อน จึงต้องทำการเปลี่ยนตัวแปรใหม่อีกครั้งโดยกำหนดให้ $V(x,\tau) = E_2 e^{\alpha x + \beta\tau} U(x,\tau)$ โดย E_2 คือค่าคงที่ค่าบวกใดๆ ซึ่งจะพบว่า

$$\frac{\partial V}{\partial x}=E_2e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha U+\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=E_2e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha^2 U+2\alpha\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$$
$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=E_2e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta U+\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)$$

เมื่อแทน $\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ ลงในสมการที่ (4.38) จะได้

$$\frac{1}{2}\sigma^2E_2e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left(K-1+2\alpha\right)\frac{\partial U}{\partial x}+\left(K\left(\alpha-1\right)+\alpha^2-\alpha-\beta\right)U-\frac{\partial U}{\partial \tau}\right]=0 \qquad (4.39)$$

เนื่องจาก α และ β เป็นตัวแปรอิสระ ดังนั้นหากกำหนดให้

$$\alpha=-\frac{1}{2}\left(K-1\right) \text{ และ } \beta=-\frac{1}{4}\left(K+1\right)^2$$

และสมการที่ (4.39) จะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U-\frac{\partial}{\partial \tau}U=0 \qquad (4.40)$$

ซึ่งเป็นสมการความร้อนตามต้องการ

จากสมการความร้อนที่ได้ เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นมาให้ จะสามารถคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) $U\left(x,\tau\right)$ ออกมาได้ และผลเฉลยของ BS-PDE จะคำนวณได้จาก $V\left(x,\tau\right)=E_2e^{\alpha x+\beta\tau}U\left(x,\tau\right)$

บทที่ 5

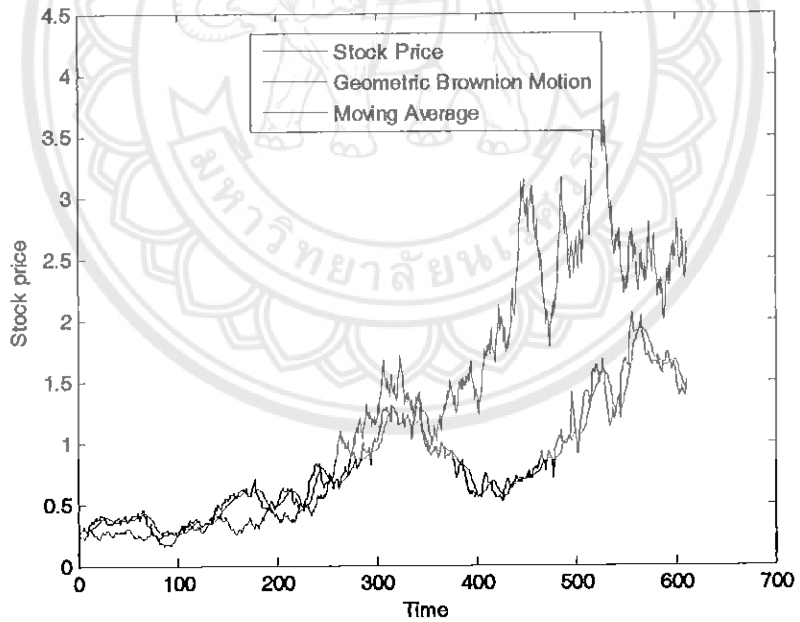
วิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบและสรุปใจความสำคัญ

(Comparative Analysis and Conclusion)

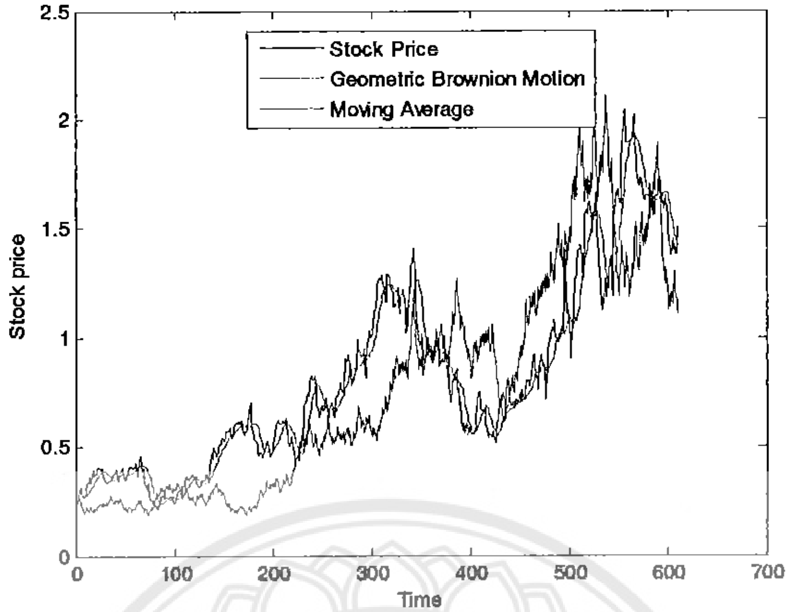
5.1 วิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบ (Comparative Analysis)

หัวข้อนี้จะเป็นการวิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิตกับราคาหุ้นจริงที่ได้จากตลาดหลักทรัพย์โดยในโครงงานฉบับนี้ได้นำราคาปิดตลาดของบริษัท Silverstarenergy (OBB: SVSE) มาวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MATLAB®

จากข้อมูลราคาปิดตลาดของหุ้น(ข้อมูลและสูตรการคำนวณผู้อ่านสามารถหาอ่านได้จากภาคผนวก ค) เมื่อนำมาหาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน จะได้ว่า $\mu = 2.7533$ และ $\sigma = 1.4177$ **รูปที่ 5.1 แสดง**การเปรียบเทียบระหว่างมูลค่าของราคาปิดตลาด การเคลื่อนที่แบบบราว**เนียนเชิงเรขาคณิต** (Geometric Brownian Motion:GBM) และการเคลื่อนที่แบบเฉลี่ย (Moving Average:MA)



รูปที่ 5.1 (ก) แสดงมูลค่าราคาปิดตลาด, GBM และ MA โดยการประมวลผลครั้งที่ 1

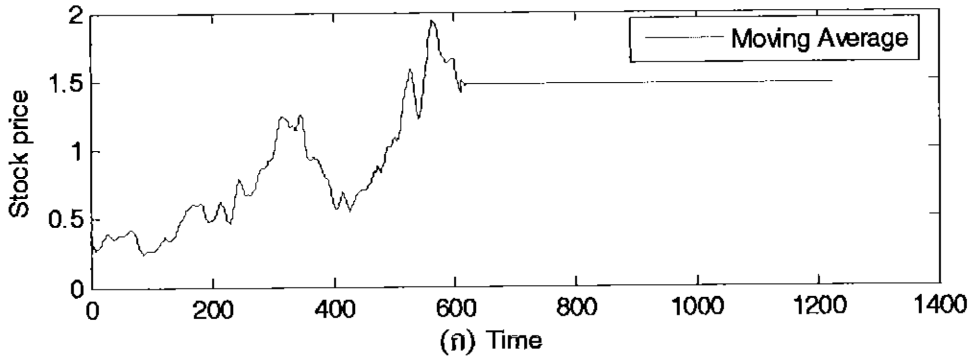


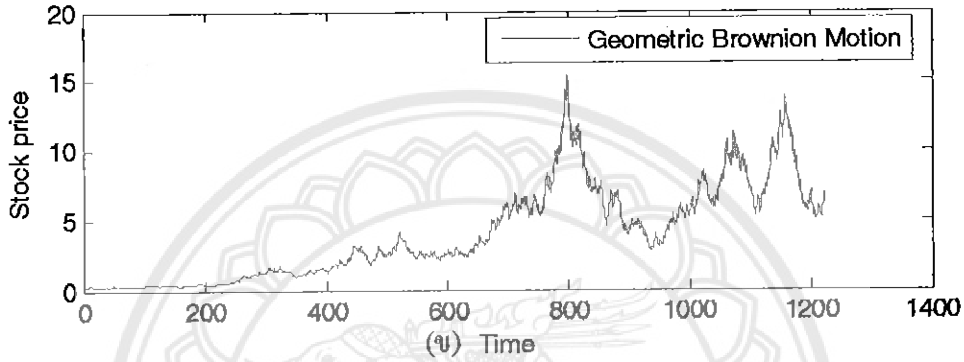
รูปที่ 5.1 (ข) แสดงมูลค่าราคาปิดตลาด, GBM และ MA โดยการประมวลผล**ครั้งที่ 2**

จากรูปที่ 5.1 (ก) จะพบว่า GBM ในช่วงเวลาแรก ๆ มีความใกล้เคียงกับราคา**ปิดตลาด แต่เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น**ไประยะหนึ่ง GBM จะเริ่มมีการแกว่งไกวมากขึ้นจนออกห่างจากราคาปิด**ตลาด ทั้งนี้เป็นผล**มาจากค่าความแปรปรวน ซึ่งมีค่าเพิ่มมากขึ้นตามเวลาและนั่นส่งผลให้ GBM มีความแกว่งไกวมากขึ้น**เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น**ด้วย ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับ MA แล้วจะพบว่า MA จะเคลื่อนที่ได้ใกล้เคียงกับราคาปิดตลาดมากกว่า GBM ทั้งนี้เป็นเพราะว่า MA เป็นการเคลื่อนที่โดยนำราคาปิดตลาดแต่ละ**วันมาหาค่าเฉลี่ย**

เป็นที่ทราบแล้วว่า GBM เป็นการเคลื่อนที่แบบสุ่มที่ดังนั้นในการประมวลผล**ของข้อมูลแต่ละครั้งอจะทำให้** GBM มีการเคลื่อนที่ ที่ไม่ซ้ำแบบเดิมซึ่งการประมวลผลบางครั้งอาจได้ **GBM ที่ใกล้เคียงกับราคาปิดตล**าดดังรูปที่ 5.1 (ข)

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการวิเคราะห์ GBM และ MA โดยใช้ราคาปิดตลาด**เป็นข้อมูล แต่ถ้านักวิเคราะห์ต้องการทำนายการเคลื่อนไหวของราคาปิดตลาดในอนาคตจะพบว่า** MA **ไม่สามารถกระทำได้ในทางตรงข้าม GBM มีลักษณะการเคลื่อนที่ ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาคล้ายกับข้อมูลของราคาปิดตลาดในช่วงแรก**





รูปที่ 5.2 แสดงการทำนายราคาปิดตลาดโดยใช้ MA และ GBM

โดยทั่วไปแล้ว หากกำหนดให้

n คือ จำนวนข้อมูลจริงที่หาได้

p คือ ช่วงเวลาที่ทำการเฉลี่ย

M_k คือ ค่าเฉลี่ยครั้งที่ k^{th}

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\mathrm{M}_k = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{M}_{k-i} \quad \text{เมื่อ } k \geq n+p$$

ผู้อ่านอาจจะพิจารณาการเคลื่อนที่แบบเฉลี่ยนี้เป็นลำดับ (sequence) $\{\mathrm{M}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าลำดับดังกล่าวนี้เป็นลำดับของโคชี (Cauchy Sequence) เนื่องจาก

$$\lim_{k\to\infty}\left|\mathrm{M}_{k+1} - \mathrm{M}_k\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\left|\mathrm{M}_k - \mathrm{M}_{k-p}\right| = 0$$

จากวิชา *การวิเคราะห์ระบบจำนวนจริง (Real Analysis)* ทำให้ทราบว่าลำดับของการเคลื่อนที่แบบเฉลี่ยนี้จะลู่เข้าสู่ค่า ๆ หนึ่ง (นั่นคือ $\lim_{k\to\infty}\left|\mathrm{M}_k\right| = c < \infty$) เนื่องจาก $\mathbb{R}$ เป็นเซตกระชับ (Compact Set) ซึ่งผลที่ได้นี้แสดงได้ในกราฟของ MA ในรูปที่ 5.2 ด้านบน ซึ่งมีค่าคงที่ ดังนั้นการเคลื่อนที่แบบเฉลี่ย MA จึงไม่สามารถนำมาทำนายราคาปิดตลาดของมูลค่าหลักทรัพย์ในอนาคตได้

5.2 สรุปใจความสำคัญ (Conclusion)

ในบทที่ 3 เป็นการศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มเวลาวิยุตโดยอาศัยแผนภูมิต้นไม้แบบทวิภาคเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และเมื่อพิจารณามูลค่าของตราสารสิทธิจากแบบจำลองดังกล่าวพบว่า การพิจารณามูลค่าตราสารสิทธิภายใต้เงื่อนไขความน่าจะเป็น p นั้นไม่สามารถรับประกันได้ว่าในตลาดหุ้นจะไม่เกิดการทำกำไรจากส่วนต่างของราคา ดังนั้นจึงสร้างความน่าจะเป็นเสมือนหรือที่เรียกว่า *ความน่าจะเป็นของตลาด* q ซึ่งผลที่ได้จากการพิจารณามูลค่าตราสารสิทธิภายใต้เงื่อนไขของ q พบว่า มูลค่าตราสารสิทธิดังกล่าวมีพฤติกรรมเป็นมาร์ตินเกล ซึ่งส่งผลให้สามารถสร้างกลยุทธ์ *การรักษาสมดุลทางการเงิน*ออกมาได้ โดยผลที่ได้คือ ตลาดไม่เกิดการทำกำไรรวมทั้งเกิดเป็นตลาดที่สมบูรณ์

เนื้อหาในบทที่ 4 ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิตซึ่งถูกนำมาใช้เป็นแบบจำลองการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นและนำมาใช้ในการคำนวณหาสมการมูลค่าของตราสารสิทธิแบบต่าง ๆ โดยพิจารณาบนเมเชอร์ q แต่เนื่องจากมูลค่าตราสารสิทธิอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม ดังนั้นในการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวจำเป็นต้องอาศัยบทตั้งของ Ito และพบว่าสมการที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของ *สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes* โดยสามารถหาผลเฉลยซึ่งเป็นมูลค่าตราสารสิทธิได้ทั้งในทางวิเคราะห์และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

5.3 บทวิจารณ์ (Critics)

1. เนื่องจากเนื้อหาในส่วนแรกนี้จำเป็นต้องนำทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ชั้นสูงมาประยุกต์ใช้ แต่ผู้จัดทำโครงงานมีเวลาในการศึกษาค่อนข้างจำกัดจึงอาจจะเป็นผลให้การอธิบายเนื้อหาบางส่วนไม่ชัดเจน

2. เนื่องจากราคาหุ้นที่ใช้เป็นข้อมูลนั้นมีความผันผวนค่อนข้างสูง ซึ่งสังเกตได้จากช่วงระหว่างวันที่19/08/2004 ถึงวันที่16/12/2004 ซึ่งเป็นช่วงที่ข้อมูลราคาหุ้นเกิดตกอย่างรุนแรงทำให้ผลการคำนวณค่า μ และ σ ที่ได้มีความผิดพลาดซึ่งสามารถสังเกตได้จากกราฟของสมการ GBM

3. ในการวิเคราะห์ข้อมูลนั้นหากใช้ข้อมูลปริมาณน้อยจะส่งผลให้ค่า μ และ σ ที่คำนวณได้อาจจะมีข้อผิดพลาดค่อนข้างสูง

5.4 ข้อเสนอแนะและแนวทางการพัฒนา (Suggestions and Future Works)

1. เนื่องจากค่า μ และ σ ที่ใช้ในการวิเคราะห์เป็นค่าคงที่เพื่อง่ายในการคำนวณ แต่ในทางปฏิบัติแล้ว μ และ σ อาจเป็น ฟังก์ชันขึ้นกับเวลา และ/หรือ ตัวแปรสุ่ม และ/หรือ กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มก็ได้ ซึ่งส่งผลให้การคำนวณมีความยุ่งยากเพิ่มมากขึ้น ผู้ที่สนใจสามารถนำข้อเสนอแนะนี้ไปใช้ในงานวิจัยขั้นต่อไป

2. ในโครงงานฉบับนี้ได้ศึกษาตราสารสิทธิแบบยุโรปทั้งตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call Option) ตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (Put Option) และสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward (Forward Contract) ซึ่งเป็นตราสารสิทธิที่นิยมถูกเรียกว่า Vanilla option ประเภทหนึ่ง แต่ในความเป็นจริงแล้วตราสารสิทธินั้นมีหลายแบบ โดยอาจมีความแตกต่างกันตรงเงื่อนไขของการใช้สิทธิในสัญญา เช่น ตราสารสิทธิแบบอเมริกัน (American Options) ที่สามารถใช้สิทธิก่อนวันครบกำหนดในสัญญาได้ หรือตราสารสิทธิแบบมองย้อนหลัง (Lookback Option) เป็นต้น ซึ่งผู้ที่สนใจสามารถนำข้อเสนอแนะนี้ไปใช้ในงานวิจัยขั้นต่อไป

ส่วนที่ 2

การประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาทางการเงิน

บทที่ 6

หลักการของระเบียบวิธีผลต่างอันตะ

(Principle of Finite-difference Method)

6.1 การประมาณค่าผลต่างอันตะ (Finite-difference Approximations)

พื้นฐานความคิดของระเบียบวิธีผลต่างอันตะ คือ การแทนที่อนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ที่เกิดขึ้นในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) โดยอาศัยการกระจายอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) ของฟังก์ชันรอบ ๆ จุดที่พิจารณา ยกตัวอย่าง เช่น

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)=\lim_{\delta\tau\to 0}\frac{u(x,\tau+\delta\tau)-u(x,\tau)}{\delta\tau} \tag{6.1}$$

สมการที่ (6.1) สามารถประมาณได้เป็น

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)\approx\frac{u(x,\tau+\delta\tau)-u(x,\tau)}{\delta\tau}+O(\delta\tau) \tag{6.2}$$

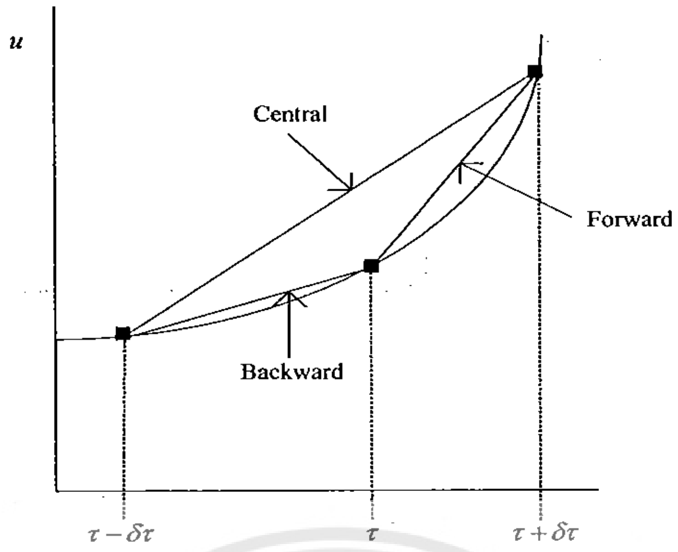
วิธีนี้เรียกว่า *การประมาณค่าผลต่างอันตะ (finite-difference approximations)* ของ $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ และในการประมาณค่าผลต่างอันตะแบบสมการที่ (6.2) จะเรียกว่า ผลต่างแบบไปข้างหน้า (forward difference) นอกจากจะประมาณ โดยการหาผลต่างแบบไปข้างหน้าแล้ว อนุพันธ์ย่อยสามารถประมาณด้วย*ผลต่างแบบย้อนกลับ (backward difference)* ดังสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)\approx\frac{u(x,\tau)-u(x,\tau-\delta\tau)}{\delta\tau}+O(\delta\tau) \tag{6.3}$$

จากการประมาณค่าผลต่างอันตะจะได้ผลต่างแบบไปข้างหน้าสมการที่ (6.2) และผลต่างแบบย้อนกลับสมการที่ (6.3) อนุพันธ์ย่อยสามารถถูกประมาณค่าโดยอาศัย *ผลต่างแบบตรงกลาง (central difference)* ได้ โดยการหาค่าเฉลี่ยจากผลต่างแบบไปข้างหน้ากับผลต่างแบบย้อนกลับดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)\approx\frac{u(x,\tau+\delta\tau)+u(x,\tau-\delta\tau)}{2\delta\tau}+O\left((\delta\tau)^2\right) \tag{6.4}$$

การประมาณค่าผลต่างแบบไปข้างหน้า, แบบย้อนกลับ และแบบตรงกลางมีความสัมพันธ์กัน ดังรูป



รูปที่ 6.1 แสดงความสัมพันธ์ของการประมาณค่าแบบไปข้างหน้า,
แบบย้อนกลับ และแบบตรงกลาง

เมื่อประยุกต์การประมาณค่าแบบไปข้างหน้าและแบบย้อนกลับไปใช้ในสมการการแพร่ การประมาณค่าทั้งสองวิธีนี้จะนำไปสู่ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดเจน (Explicit Finite-difference Method) และระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยาย (Fully Implicit Finite-difference Method) ตามลำดับ ส่วนการประมาณค่าแบบตรงกลางสมการที่ (6.4) จะนำไปสู่ผลเฉลยที่ไม่เถียร ดังนั้นระเบียบวิธีแคลง-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) จึงใช้การประมาณค่าแบบตรงกลางสำหรับ $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ ที่อยู่ในรูปของ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) \approx \frac{u(x,\tau+\delta\tau/2)-u(x,\tau-\delta\tau/2)}{\delta\tau}+O\left((\delta\tau)^2\right) \tag{6.5}$$

จากการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ ในข้างต้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ โดยใช้การประมาณค่าผลต่างอันตะแบบตรงกลาง (Central Finite-difference approximations) ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau) \approx \frac{u(x+\delta x,\tau)-u(x-\delta x,\tau)}{2\delta x}+O\left((\delta x)^2\right) \tag{6.6}$$

และอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ x สามารถประมาณได้ ดังนี้

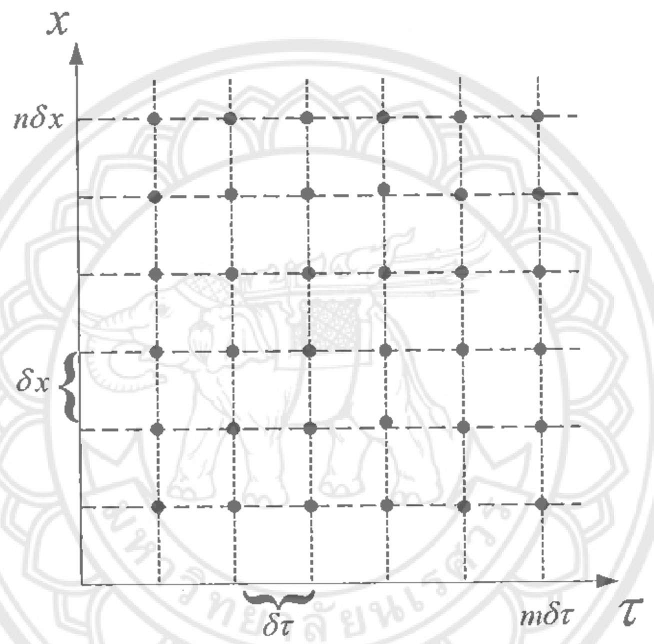
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) \approx \frac{u(x+\delta x,\tau)-2u(x,\tau)+u(x-\delta x,\tau)}{(\delta x)^2}+O\left((\delta x)^2\right) \tag{6.7}$$

การประมาณค่าในสมการที่ (6.7) เรียกว่า การประมาณค่าผลต่างแบบตรงกลางที่สมมาตร (Symmetric– difference approximations)

6.2 ตาข่ายอันตะ (The Finite-difference mesh)

ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะในสมการการแพร่ ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าจริงใน 2 ตัวแปร x และ τ ดังนั้นทั้งแกน x และแกน τ จำเป็นต้องถูกแบ่งให้เป็นช่องเล็ก ๆ ในที่นี้จะกำหนดให้ δx และ $\delta\tau$ เป็นระยะห่างที่เท่า ๆ กันในแกน x และแกน τ ตามลำดับ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 6.2 ดังนั้น ที่จุด $(n\delta x, m\delta\tau)$ ใด ๆ บนระนาบตาข่าย ค่าฟังก์ชันของจุดนั้นมีค่าเป็น $u(n\delta x, m\delta\tau)$ ซึ่งในที่นี้จะเขียนแทนด้วย

$$u_n^m = u(n\delta x, m\delta\tau) \tag{6.8}$$



รูปที่ 6.2 แสดงตาข่ายของการประมาณค่าผลต่างอันตะ

6.3 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดเจน (Explicit Finite-difference Method: EFD)

จากส่วนที่ 1 ผู้อ่านจะพบว่าสมการ BS-PDE (Black-Scholes Partial Differential Equation) สามารถจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการการแพร่

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.9}$$

ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบเขตเป็น

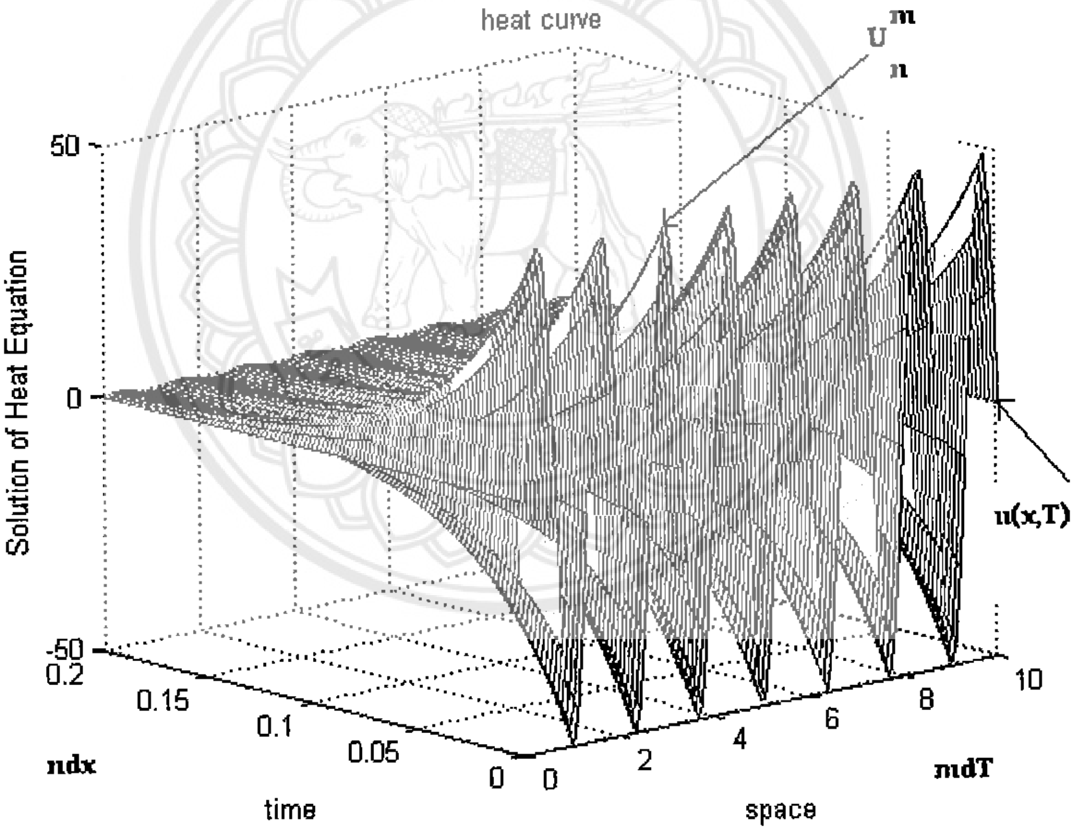
$$u(x,\tau) \sim u_{-\infty}(x,\tau),\ \ u(x,\tau) \sim u_{\infty}(x,\tau) \text{ เมื่อ } x \to \pm\infty \text{ และ } u(x,0) = u_0(x)$$

ในการหาผลเฉลยของสมการการแพร่ สามารถทำได้ทั้งการวิเคราะห์โดยตรงหรือประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข แต่โดยทั่วไปการหาผลเฉลยโดยการวิเคราะห์โดยตรงนั้นทำได้ยาก นอกจากกรณีที่มีเงื่อนไขขอบเขตอย่างง่าย ยกตัวอย่าง เช่น

สมการความร้อน $\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le 10$, $\tau > 0$ โดยมีเงื่อนไขขอบเขต $u(0,\tau)=0$ และ $u(10,\tau)=0$, $\tau \ge 0$ และ $u(x,0)=50\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$, $0 \le x \le 10$ ผู้อ่านสามารถพิสูจน์ได้ว่า สมการความร้อนดังกล่าวข้างต้นมีผลเฉลย คือ

$$u(x,\tau)=50\sin\frac{3\pi x}{2}e^{-2.25\pi^2\tau} \tag{6.10}$$

ซึ่งมีกราฟของผลเฉลยแสดงได้ดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 แสดงผลเฉลยของสมการความร้อน

ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการแพร่ $u(x,\tau)$ โดยระเบียบวิธีนี้ จะประมาณอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ ด้วยผลต่างแบบไปข้างหน้าตามสมการที่ (6.2) และ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ด้วยผลต่างตรงกลางแบบสมมาตรตามสมการที่ (6.7) นั่นคือ

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}+O(\delta\tau)=\frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\delta x)^2}+O\left((\delta x)^2\right) \tag{6.11}$$

เนื่องจากเทอมของ $O(\delta\tau)$ และ $O\left((\delta x)^2\right)$ มีค่าน้อยมาก ๆ ดังสมการที่ (6.11) สามารถเขียนได้ดังนี้

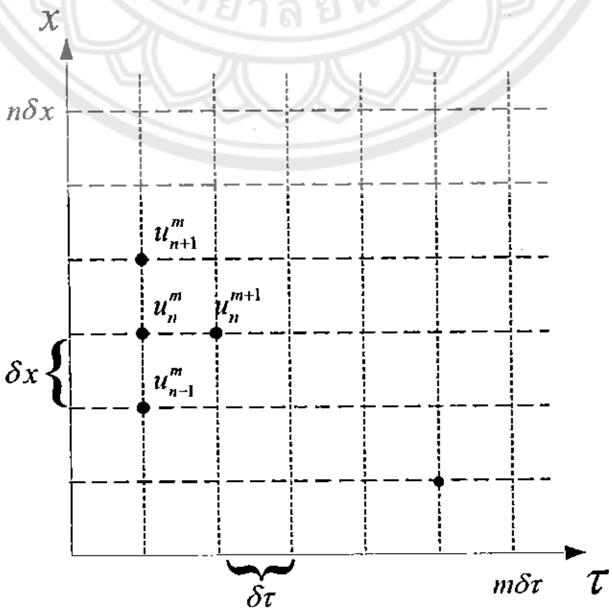
$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}=\frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\delta x)^2}$$

หรือจะได้ว่า

$$u_n^{m+1}=\alpha u_{n+1}^m+(1-2\alpha)u_n^m+\alpha u_{n-1}^m \tag{6.12}$$

โดยที่ $\alpha=\dfrac{\delta\tau}{(\delta x)^2}$

จากสมการข้างต้นจะพบว่าค่า u_n^{m+1} เป็นฟังก์ชันขึ้นกับ u_{n+1}^m, u_n^m และ u_{n-1}^m ดังนั้นค่า u_n^{m+1} จึงสามารถคำนวณค่าได้ทุกค่า n เมื่อทราบ u_{n+1}^m, u_n^m และ u_{n-1}^m นั่นจึงเป็นที่มาของชื่อของระเบียบ**วิธีนี้**



รูปที่ 6.4 ตาข่ายอันตะสำหรับระเบียบวิธี EFD

หากทำการหามูลค่าตราสารสิทธิด้วยระเบียบวิธีอันตะแบบชัดเจน มูลค่าตราสารสิทธิจะไม่เสถียรเมื่อค่า α มากกว่า 0.5 อันเนื่องมาจากการประมาณค่า ดังนั้นจึงทำการดัดแปลงการประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อย ซึ่งผลที่ได้จะเรียกว่าระเบียบวิธีแคลง- นิโคลสัน ซึ่งจะแก้ไขปัญหาของเสถียรภาพลงได้

6.4 ระเบียบวิธีของ แคลง-นิโคลสัน (The Crank-Nicolson Method: CN)

จากระเบียบวิธีอันตะแบบชัดเจนที่ไม่เสถียรเมื่อค่า α มากกว่า 0.5 จึงได้มีการนำระเบียบวิธีของแคลง- นิโคลสันมาใช้เพื่อมูลค่าตราสารสิทธิได้ในทุก ๆ ค่าของ α
ระเบียบวิธีของแคลง-นิโคลสัน เป็นระเบียบวิธีที่เฉลี่ยระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดเจนสมการที่ (6.11) และระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยายสมการที่ (6.28) กล่าวคือ ถ้าใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะที่แบบชัดเจนในการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ จะได้

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}+O(\delta\tau)=\frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\delta x)^2}+O\left((\delta x)^2\right) \tag{6.13}$$

และถ้าใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยายในการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ จะได้

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}+O(\delta\tau)=\frac{u_{n+1}^{m+1}-2u_n^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2}+O\left((\delta x)^2\right) \tag{6.14}$$

ทำการเฉลี่ยทั้งสองวิธีจะได้สมการดังนี้

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}+O(\delta\tau)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\delta x)^2}+\frac{u_{n+1}^{m+1}-2u_n^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2}\right)+O\left((\delta x)^2\right) \tag{6.15}$$

เมื่อกำหนดให้ $\alpha=\frac{\delta\tau}{(\delta x)^2}$ สมการที่(6.15) สามารถเขียนได้เป็น

$$u_n^{m+1}-\frac{1}{2}\alpha\left(u_{n-1}^{m+1}-2u_n^{m+1}+u_{n+1}^{m+1}\right)=u_n^m+\frac{1}{2}\alpha\left(u_{n-1}^m-2u_n^m+u_{n+1}^m\right) \tag{6.16}$$

เพื่อช่วยในการคำนวณหาค่าของ u^{m+1} ในสมการที่ (6.16) นั้น จึงกำหนดตัวแปรใหม่ Z_n^m ดังนี้

$$Z_n^m=(1-\alpha)u_n^m+\frac{1}{2}\alpha\left(u_{n-1}^m+u_{n+1}^m\right)$$

เมื่อคำนวณหาค่าของ Z_n^m ได้แล้ว จึงนำค่าที่ได้มาคำนวณหา u^{m+1} จากสมการ

$$Z_n^m=(1+\alpha)u_n^{m+1}-\frac{1}{2}\alpha\left(u_{n-1}^{m+1}+u_{n+1}^{m+1}\right)$$

จากตาข่ายอนันต์ในส่วนก่อนหน้านี้สามารถทำให้มีขนาดเล็กลงเพื่อนำมาแก้ปัญหาของมูลค่าตราสารสิทธิยุโรปโดยสมมติให้ $x = N^{-}\delta x$, $N^{+}\delta x$ และกำหนดให้ N^{-} และ N^{+} มีค่าใหญ่มาก ๆ กำหนด $m \geq 0$ และ $N^{-} < n < N^{+}$

จัดสมการที่ (6.16) ให้อยู่ในรูป

$$Cu^{m+1} = b^{m} \tag{6.17}$$

หรือ $$u^{m+1} = C^{-1}b^{m}$$

เมื่อ C คือ

$$C = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

และ $$u^{m+1} = \begin{pmatrix} u^{m+1}_{N^{-}+1} \\ \vdots \\ u^{m+1}_{0} \\ \vdots \\ u^{m+1}_{N^{+}-1} \end{pmatrix}, b^{m} = \begin{pmatrix} Z^{m}_{N^{-}+1} \\ \vdots \\ Z^{m+1}_{0} \\ \vdots \\ Z^{m}_{N^{+}-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} u^{m+1}_{N^{-}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u^{m+1}_{N^{+}} \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

ข้อสังเกต เมทริกซ์ C สามารถหาตัวผกผันได้ เนื่องจาก C เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่เป็นเอกฐาน (ผู้อ่านสามารถพิสูจน์ได้ ในทำนองเดียวกับตัวอย่างใน ภาคผนวก ง)

โดยทั่วไปแล้ว การคำนวณหาตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ใด ๆ ทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจำเป็นต้องอาศัยทั้ง time consuming และ memory resource อย่างมาก ดังนั้น เพื่อช่วยลดความยุ่งยากเหล่านี้ จึงจำเป็นจะต้องศึกษาหาแนวทางอื่น ๆ มาเพื่อช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย u^{m+1} ซึ่งในที่นี้จะนำเสนอเทคนิค 2 วิธี คือ

1) การแยกแบบ LU (LU decomposition)

2) Successive Over-Relaxation หรือ SOR

6.4.1 การแยกแบบแอลยู (LU decomposition)

ระเบียบวิธีแอลยูจะทำการแยกเมทริกซ์ออกเป็นสองเมทริกซ์ โดยที่เมทริกซ์ตัวแรกจะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง และเมทริกซ์ตัวที่สองจะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน กล่าวคือ สมมติให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ b เป็นเวกเตอร์ขนาด $n \times 1$ ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการ

$$Ax = b \tag{6.20}$$

แล้วทำการแยกแอลยูของ A จะได้ว่า $A = LU$ โดยที่

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_{12} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ L_{1n} & L_{2n} & L_{3n} & \cdots & L_{n-1,n} & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{21} & \cdots & U_{n1} \\ 0 & U_{22} & & U_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการที่ (6.20) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$LUx = b \tag{6.21}$$

สมมติให้

$$y = Ux \tag{6.22}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$Ly = b \tag{6.23}$$

ขั้นตอนที่สอง แก้ระบบสมการที่ (6.23) เพื่อหาเวกเตอร์ y

ขั้นที่สาม เมื่อทราบเวกเตอร์ y ก็สามารถแก้สมการเพื่อหาค่าเวกเตอร์ x ได้ดังสมการที่ (6.22)

ฟังก์ชันใน MATLAB® ที่ใช้สำหรับคำนวณหาค่า LU คือฟังก์ชัน lu ซึ่งมีการใช้คำสั่ง ดังนี้

$$[L, U] = lu(A) \tag{6.24}$$

6.4.2 ระเบียบวิธีเอสโออาร์ (The SOR Method)

ระเบียบวิธีแอลยูก่อนหน้านี้เป็นวิธีที่ทำการแก้สมการที่ (6.17) โดยตรง ซึ่งยังมีอีกวิธีที่สามารถแก้สมการทั้งสองนี้ได้ คือวิธีการทำซ้ำ วิธีการทำซ้ำแตกต่างจากวิธีการ โดยตรงก็คือต้องทำการสมมติค่าคำตอบขึ้นมาค่าหนึ่ง และทำการปรับปรุงค่าคำตอบนั้นอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งคำตอบที่ได้ลู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง

ซึ่งวิธีการทำซ้ำก็คือวิธีคำนวณของระเบียบวิธีSOR (Successive Over-Relaxation) มีขั้นตอน การแก้สมการดังนี้

จากสมการที่ (6.16), (6.17), (6.18) และ (6.19) สามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$u_n^{m+1} = \frac{1}{1+2\alpha}\left(b_n^m + \alpha\left(u_{n-1}^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}\right)\right) \qquad (6.25)$$

สมมติให้ $u_n^{m+1,k}$ เมื่อ k คือจำนวนครั้งที่ทำซ้ำของ u_n^{m+1} ดังนั้นค่าคำตอบเริ่มต้นที่สมมติขึ้นก็คือ $u_n^{m+1,0}$ และจะทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนค่า k เข้าสู่ ∞ จะทำให้คำตอบ $u_n^{m+1,k}$ ลู่เข้าใกล้ u_n^{m+1} ดังนั้นรูปทั่วไปของสมการที่ (6.25) คือ

$$u_n^{m+1,k+1} = \frac{1}{1+2\alpha}\left(b_n^m + \alpha\left(u_{n-1}^{m+1,k} + u_{n+1}^{m+1,k}\right)\right) \text{เมื่อ } N^- < n < N^+ \qquad (6.26)$$

กระบวนการทำซ้ำนี้จะสมบูรณ์เมื่อทำซ้ำจนกระทั่งค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยมาก ดังสมการ

$$\left\|u^{m+1,k+1} - u^{m+1,k}\right\|^2 = \sum_n \left(u_n^{m+1,k+1} - u_n^{m+1,k}\right)^2 < \varepsilon \qquad (6.27)$$

สำหรับ $\varepsilon << 1$

6.5 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยาย (Fully Implicit Method: FI)

ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยายใช้การประมาณค่าผลต่างแบบย้อนกลับสำหรับอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ และใช้การประมาณค่าผลต่างอันตะแบบตรงกลางที่สมมาตรสำหรับ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ดังนั้นสมการการแพร่ สมการที่ (6.9) จึงเขียนแทนได้ด้วย

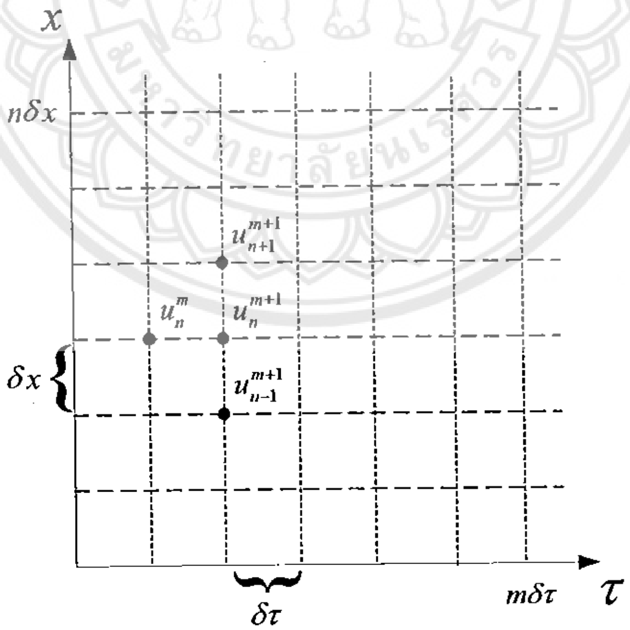
$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}+O(\delta\tau)=\frac{u_{n+1}^{m+1}-2u_n^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2}+O\left((\delta x)^2\right) \tag{6.28}$$

ซึ่งเมื่อจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$-\alpha u_{n-1}^{m+1}+(1+2\alpha)u_n^{m+1}-\alpha u_{n+1}^{m+1}=u_n^m \tag{6.29}$$

โดยที่ $\alpha=\dfrac{\delta\tau}{(\delta x)^2}$

ในสมการผลต่างอันตะแบบปริยายค่า u_n^{m+1}, u_{n-1}^{m+1} และ u_{n+1}^{m+1} ขึ้นอยู่กับ u_n^m ดังนั้นการคำนวณค่าใหม่ไม่สามารถแก้สมการที่ (6.29) ในพจน์ของค่าเก่า ดังเช่นในกรณีของ ระเบียบวิธีอันตะแบบชัดเจน นั่นคือเหตุผลของที่มาของชื่อระเบียบวิธีแบบนี้



รูปที่ 6.5 ตาข่ายอันตะสำหรับระเบียบวิธี FI

ตาม สมการที่ (6.29) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{array}{llcll} u^m_{N^-+1} = & 0 & + & (1+2\alpha)u^{m+1}_{N^-+1} & - \ \alpha u^{m+1}_{N^-+2} \\ \vdots & & & & \\ u^m_{N^-+j} = & -\alpha u^{m+1}_{N^-+(j-1)} & + & (1+2\alpha)u^{m+1}_{N^-+j} & - \ \alpha u^{m+1}_{N^-+(j+1)} \\ \vdots & & & & \\ u^m_{N^-+N} = & -\alpha u^{m+1}_{N^-+(N-1)} & + & (1+2\alpha)u^{m+1}_{N^-+N} & - \ 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & \vdots \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^{m+1}_{N^-+1} \\ \vdots \\ u^{m+1}_0 \\ \vdots \\ u^{m+1}_{N^+-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^m_{N^-+1} \\ \vdots \\ u^m_0 \\ \vdots \\ u^m_{N^+-1} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u^{m+1}_{N^-} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u^{m+1}_{N^+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^m_{N^-+1} \\ \vdots \\ b^m_0 \\ \vdots \\ b^m_{N^+-1} \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

เมื่อกำหนดให้

$$M = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & \vdots \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

และ

$$u^{m+1} = \begin{pmatrix} u^{m+1}_{N^-+1} \\ \vdots \\ u^{m+1}_0 \\ \vdots \\ u^{m+1}_{N^+-1} \end{pmatrix}, \ b^m = \begin{pmatrix} b^m_{N^-+1} \\ \vdots \\ b^m_0 \\ \vdots \\ b^m_{N^+-1} \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

โดยที่ $N = N^+ - N^- - 1$ คือขนาดของเวกเตอร์ u^{m+1}
จากสมการที่ (6.30) สามารถลดรูปได้เป็น $Mu^{m+1} = b^m$
ดังนั้น

$$u^{m+1} = M^{-1}b^m \quad (6.33)$$

เมทริกซ์ M สามารถหาตัวผกผันได้ เนื่องจาก M เป็น เมทริกซ์ซึ่งไม่เป็นเอกฐาน (nonsingular matrix) (ดูภาคผนวก ง)

บทที่ 7

การประยุกต์ระเบียบผลต่างอันตะกับสมการ BS-PDE

(Application of Finite-difference Method in BS-PDE)

7.1 การหาผลเฉลยของสมการ BS-PDE โดยตรง

สืบเนื่องจากบทที่ 6 ได้ศึกษาทฤษฎีของระเบียบวิธีผลต่างอันตะมาแล้ว ในบทที่ 7 นี้จะนำทฤษฎีดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับสมการ BS-PDE ดังนี้

จากสมการ BS-PDE $\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+rs\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial \tau_0}-rv=0$ เมื่อ $s>0,\tau_0>0$

กำหนดให้ $s=n\delta s\,,\tau_0=m\delta\tau$ ในทำนองเดียวกับในบทที่ 6 และให้

$$v_n^m=v(s,\tau_0)=v(n\delta s,m\delta\tau)$$

เลือกการประมาณค่าผลต่างอันตะเพื่อใช้ในสมการ BS-PDE ดังต่อไปนี้

1. **ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดเจน**

ในกรณีนี้ ให้พิจารณาที่จุด $s=s_n$ และ $\tau_0=\tau_{0,m}$ บนตาข่ายอันตะ ดังนั้น ณ จุดดังกล่าว มูลค่าของ v จึงมีค่าเท่ากับ $v(n\delta s,m\delta\tau_0)=v_n^m$ และใช้การประมาณค่าผลต่างอันตะแบบไปข้างหน้ากับอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial\tau_0}$ ได้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial\tau_0}=\frac{v(s,\tau_0+\delta\tau_0)-v(s,\tau_0)}{\delta\tau_0}=\frac{v_n^{m+1}-v_n^m}{\delta\tau_0} \tag{7.1}$$

ส่วนอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial s}$ และอนุพันธ์อันดับสอง $\frac{\partial^2 v(s,\tau_0)}{\partial s^2}$ จะใช้การประมาณค่าผลต่างแบบตรงกลางที่สมมาตรได้ดังนี้

$$\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial s}=\frac{v(s+\delta s,\tau_0)-v(s-\delta s,\tau_0)}{2\delta s}=\frac{v_{n+1}^m-v_{n-1}^m}{2\delta s} \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial^2 v(s,\tau_0)}{\partial s^2}=\frac{v(s+\delta s,\tau_0)-2v(s,\tau_0)+v(s-\delta s,\tau_0)}{(\delta s)^2}=\frac{v_{n+1}^m-2v_n^m+v_{n-1}^m}{(\delta s)^2} \tag{7.3}$$

2. ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยาย

ในกรณีนี้ ให้พิจารณาที่จุด $s = s_n$ และ $\tau_0 = \tau_{0,m+1}$ บนตาข่ายอันตะ ดังนั้น ณ จุดดังกล่าว มูลค่าของ v จึงมีค่าเท่ากับ $v\left(n\delta s,(m+1)\delta\tau_0\right) = v_n^{m+1}$ และใช้การประมาณค่าผลต่างอันตะแบบย้อนกลับกับอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial \tau_0}$ ได้สมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial \tau_0} &= \frac{v(s,\tau_0) - v(s,\tau_0 - \delta\tau_0)}{\delta\tau_0} \\ &= \frac{v\left(n\delta s,(m+1)\delta\tau_0\right) - v\left(n\delta s,(m+1)\delta\tau_0 - \delta\tau_0\right)}{\delta\tau_0} \\ &= \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\delta\tau_0}\end{aligned} \tag{7.4}$$

ส่วนอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial s}$ จะใช้การประมาณค่าผลต่างแบบตรงกลางที่สมมาตรได้สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial s} &= \frac{v(s+\delta s,\tau_0) - v(s-\delta s,\tau_0)}{2\delta s} \\ &= \frac{v\left(n\delta s+\delta s,(m+1)\delta\tau_0\right) - v\left(n\delta s-\delta s,(m+1)\delta\tau_0\right)}{2\delta s} \\ &= \frac{v_{n+1}^{m+1} - v_{n-1}^{m+1}}{2\delta s}\end{aligned} \tag{7.5}$$

และสมการอนุพันธ์อันดับสองของ $v(s,\tau_0)$ จะเป็นดังนี้

$$\frac{\partial^2 v(s,\tau_0)}{\partial s^2} = \frac{v(s+\delta s,\tau_0) - 2v(s,\tau_0) + v(s-\delta s,\tau_0)}{(\delta s)^2} = \frac{v_{n+1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n-1}^{m+1}}{(\delta s)^2} \tag{7.6}$$

3. ระเบียบวิธีแคลง-นิโคลสัน

พิจารณาที่จุด $s = s_n$ และ $\tau_0 = \tau_{0,m+\frac{1}{2}}$ บนตาข่ายอันตะ ดังนั้น ณ จุดดังกล่าว มูลค่าของ v จึงมีค่าเท่ากับ $v\left(n\delta s,\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\delta\tau_0\right) = v_n^{m+\frac{1}{2}}$ และใช้การประมาณค่าผลต่างอันตะแบบตรงกลางดังสมการที่ (6.5) นั่นคือ

$$\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial \tau_0}=\frac{v\left(s,\tau_0+\frac{1}{2}\delta\tau_0\right)-v\left(s,\tau_0-\frac{1}{2}\delta\tau_0\right)}{\delta\tau_0}$$

$$=\frac{v\left(n\delta s,\left(m+\frac{1}{2}\right)\delta\tau_0+\frac{1}{2}\delta\tau_0\right)-v\left(n\delta s,\left(m+\frac{1}{2}\right)\delta\tau_0-\frac{1}{2}\delta\tau_0\right)}{\delta\tau_0} \tag{7.7}$$

$$=\frac{v_n^{m+1}-v_n^m}{\delta\tau_0}$$

ในการคำนวณหาอนุพันธ์ย่อยของ v เมื่อเทียบกับตัวแปร s จะนิยมประมาณค่าเพื่อความสะดวก ดังนี้

$$v\left(s_n,\tau_m+\frac{1}{2}\delta\tau_0\right)\approx\frac{1}{2}\left(v\left(s_n,\tau_{m+1}\right)+v\left(s_n,\tau_m\right)\right) \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}v\left(s_n,\tau_m+\frac{1}{2}\delta\tau_0\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s}v\left(s_n,\tau_{m+1}\right)+\frac{\partial}{\partial s}v\left(s_n,\tau_m\right)\right) \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}v\left(s_n,\tau_m+\frac{1}{2}\delta\tau_0\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v\left(s_n,\tau_{m+1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial s^2}v\left(s_n,\tau_m\right)\right) \tag{7.10}$$

การแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขตและเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ดังนั้นในการหาผลเฉลยของสมการ BS-PDE จึงต้องกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขตและเงื่อน ไขค่าเริ่มต้นดังนี้

จากสมการ BS-PDE เมื่อ $s_a \le s \le s_b, \tau_0 > 0$ โดยมีเงื่อนไขค่าขอบเขตเป็น $v(s_a,\tau_0)$ และ $v(s_b,\tau_0)$ และมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $v(s,0)$ มาให้

<u>การประมาณเงื่อนไขค่าขอบเขตล่าง</u>

เนื่องจากมูลค่าของหลักทรัพย์มีค่าต่ำกว่าศูนย์ไม่ได้ ดังนั้น ขอบเขตล่างสุดที่เป็นไปได้ คือเมื่อ $s_a \approx 0$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า $s=0$ ลงในสมการ BS-PDE จะได้ว่า

$$-\frac{\partial v(0,\tau_0)}{\partial \tau_0}-rv(0,\tau_0)=0 \tag{7.11}$$

หากกำหนดให้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ $v(0,0)=v_0(0)$ ดังนั้นผลเฉลยของสมการที่ (7.11) คือ

$$v(0,\tau_0)=e^{-r\tau}v_0(0) \tag{7.12}$$

หากต้องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการที่ (7.11) จะพบว่า

1. ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดเจน $\dfrac{v_0^{m+1}-v_0^m}{\delta\tau_0}=-rv_0^m$ (7.13)

2. ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยาย $\dfrac{v_0^{m+1}-v_0^m}{\delta\tau_0}=-rv_0^{m+1}$ (7.14)

3. ระเบียบวิธีแคลง-นิโคลสัน $\dfrac{v_0^{m+1}-v_0^m}{\delta\tau_0}=-\dfrac{r}{2}\left[v_0^{m+1}+v_0^m\right]$ (7.15)

<u>การประมาณเงื่อนไขค่าขอบเขตบน</u>

การประมาณค่า $v(s,\tau_0)$ เมื่อ s มีค่ามาก ๆ $(s_b=\infty)$ ซึ่งจะสามารถประมาณได้เป็น

$$v(s,\tau_0)\approx C_1s+C_2e^{-r\tau_0} \tag{7.16}$$

จากสมการที่ (7.16) จะสามารถหาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 v(s,\tau_0)}{\partial s^2}\approx\frac{\partial^2\left(C_1s+C_2e^{-r\tau_0}\right)}{\partial s^2}=0$$

จากตาข่ายอันตะที่มีขอบเขต $s=N\delta s$ และ $\tau_0=m\delta\tau$ จึงทำการประมาณค่า $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}$ ได้ดังนี้

ระเบียบวิธีอันตะแบบชัดเจน $\dfrac{\partial^2 v(s,\tau_0)}{\partial s^2}=\dfrac{v_{N+1}^m-2v_N^m+v_{N-1}^m}{(\delta s)^2}=0$ ดังนั้น

$$v_{N+1}^m=2v_N^m-v_{N-1}^m \tag{7.17}$$

ระเบียบวิธีอันตะแบบปริยาย $\dfrac{\partial^2 v(s,\tau_0)}{\partial s^2}=\dfrac{v_{N+1}^{m+1}-2v_N^{m+1}+v_{N-1}^{m+1}}{(\delta s)^2}=0$ ดังนั้น

$$v_{N+1}^{m+1}=2v_N^{m+1}-v_{N-1}^{m+1} \tag{7.18}$$

ระเบียบวิธีแคลง-นิโคลสัน $\dfrac{\partial^2 v(s,\tau_0)}{\partial s^2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{v_{N+1}^{m+1}-2v_N^{m+1}+v_{N-1}^{m+1}}{(\delta s)^2}+\dfrac{v_{N+1}^m-2v_N^m+v_{N-1}^m}{(\delta s)^2}\right]=0$ ดังนั้น

$$v_{N+1}^{m+1}-2v_N^{m+1}+v_{N-1}^{m+1}=-\left(v_{N+1}^m-2v_N^m+v_{N-1}^m\right) \tag{7.19}$$

7.2 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยปริยาย (Fully Implicit Method: FI)

การหามูลค่าตราสารสิทธิจากสมการ Black-Scholes PDE เมื่อ $s > 0$, $\tau_0 > 0$ และ

กำหนดให้ $\delta s = \dfrac{s_b - s_a}{N+1}$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s,\tau_0) + rs\frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial s} - \frac{\partial v(s,\tau_0)}{\partial \tau_0} - rv(s,\tau_0) = 0 \tag{7.20}$$

นำสมการที่ (7.4), (7.5) และ (7.6) ไปแทนค่าในสมการ Black-Scholes PDE ในสมการที่ (7.20) จะได้สมการดังนี้

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\left[\frac{v_{n+1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n-1}^{m+1}}{\delta s^2}\right] + rs\left[\frac{v_{n+1}^{m+1} - v_{n-1}^{m+1}}{2\delta s}\right] - \left[\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\delta \tau_0}\right] - rv_n^{m+1} = 0 \tag{7.21}$$

กำหนดให้ค่า $\alpha = \dfrac{\delta\tau_0}{(\delta s)^2}$ และ $\beta = \dfrac{\delta\tau_0}{\delta s}$ เมื่อแทนค่าดังกล่าวลงในสมการที่ (7.21) แล้วนำไปจัดรูปใหม่ได้สมการดังนี้

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\alpha\left[v_{n+1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n-1}^{m+1}\right] + \frac{1}{2}rs\beta\left[v_{n+1}^{m+1} - v_{n-1}^{m+1}\right] - v_n^{m+1} + v_n^m - r\delta\tau_0 v_n^{m+1} = 0 \tag{7.22}$$

$$v_n^m = -\frac{1}{2}v_{n-1}^{m+1}\left[\sigma^2 s^2\alpha - rs\beta\right] + v_n^{m+1}\left[1 + \left(\sigma^2 s^2\alpha + r\delta\tau_0\right)\right] - \frac{1}{2}v_{n+1}^{m+1}\left[\sigma^2 s^2\alpha + rs\beta\right] \tag{7.23}$$

กำหนดให้

$$A_n = \frac{1}{2}\left[\sigma^2 s^2\alpha - rs\beta\right] \tag{7.24}$$

$$B_n = \left[\sigma^2 s^2\alpha + r\delta\tau_0\right] \tag{7.25}$$

และ

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\sigma^2 s^2\alpha + rs\beta\right] \tag{7.26}$$

นำสมการที่ (7.24), (7.25) และ (7.26) ไปแทนในสมการที่ (7.23) จะได้รูปสมการอย่างง่ายต่อการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการคำนวณหามูลค่าของ v กล่าวคือ

เมื่อ $1 \le n \le N$

$$v_n^m = -A_n v_{n-1}^{m+1} + (1+B_n)v_n^{m+1} - C_n v_{n+1}^{m+1} \tag{7.27}$$

ในกรณีที่ $n = 0$ ซึ่งเป็นบริเวณขอบเขตล่าง จากสมการที่ (7.14) จะได้

$$\frac{v_0^{m+1}-v_0^m}{\delta\tau_0}=-rv_0^{m+1}\Rightarrow\left(1+r\delta\tau_0\right)v_0^{m+1}=v_0^m$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$v_0^m=\left(1+B_0\right)v_0^{m+1} \tag{7.28}$$

ในกรณีที่ $n=N+1$ จะได้ว่า

$$v_{N+1}^m=-A_{N+1}v_N^{m+1}+\left(1+B_{N+1}\right)v_{N+1}^{m+1}-C_{N+1}v_{N+2}^{m+1} \tag{7.29}$$

โดยอาศัยเงื่อนไขของขอบเขตบนในสมการที่ (7.18) ดังนั้นสมการที่ (7.29) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}v_{N+1}^m&=-A_{N+1}v_N^{m+1}+\left(1+B_{N+1}\right)v_{N+1}^{m+1}-C_{N+1}\left(2v_{N+1}^{m+1}-v_N^{m+1}\right)\\&=-\left(A_{N+1}-C_{N+1}\right)v_N^{m+1}+\left(1+B_{N+1}-2C_{N+1}\right)v_{N+1}^{m+1}\end{aligned} \tag{7.30}$$

เขียนความสัมพันธ์เป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}1+B_0 & -C_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -A_1 & 1+B_1 & -C_1 & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & -A_2 & 1+B_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & -A_N & 1+B_N & -C_N\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\left(A_{N+1}-C_{N+1}\right) & \left(1+B_{N+1}-2C_{N+1}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_0^{m+1}\\ v_1^{m+1}\\ \\ \vdots\\ \\ v_{N+1}^{m+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_0^m\\ v_1^m\\ \\ \vdots\\ \\ v_{N+1}^m\end{bmatrix} \tag{7.31}$$

ซึ่งจัดอยู่ในรูป

$$Mv^{m+1}=v^m \tag{7.32}$$

จากสมการที่ (7.32) สามารถใช้เทคนิคการแยกแบบแอลยูมาหาผลเฉลยต่อไป

7.3 ระเบียบวิธีแคลง-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method: CN)

การหามูลค่าตราสารสิทธิจากสมการBlack-Scholes PDE เมื่อ $s>0$, $\tau_0>0$ โดยระเบียบวิธีนี้จะใช้การประมาณตามสมการที่ (7.7) – (7.10) มาแทนในสมการที่ (7.20) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sigma^2s^2\alpha\left[v_{n+1}^{m+1}-2v_n^{m+1}+v_{n-1}^{m+1}+v_{n+1}^m-2v_n^m+v_{n-1}^m\right]\\&+\frac{1}{4}rs\beta\left[v_{n+1}^{m+1}-v_{n-1}^{m+1}+v_{n+1}^m-v_{n-1}^m\right]-v_n^{m+1}+v_n^m-\frac{1}{2}r\delta\tau_0\left(v_n^{m+1}+v_n^m\right)=0\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$v_{n-1}^{m+1}\left[\frac{1}{4}\sigma^2 s^2\alpha-\frac{1}{4}rs\beta\right]+v_n^{m+1}\left[-1-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\alpha-\frac{1}{2}r\delta\tau_0\right]+v_{n+1}^{m+1}\left[\frac{1}{4}\sigma^2 s^2\alpha+\frac{1}{4}rs\beta\right]$$
$$+v_{n-1}^{m}\left[\frac{1}{4}\sigma^2 s^2\alpha-\frac{1}{4}rs\beta\right]+v_n^{m}\left[1-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\alpha-\frac{1}{2}r\delta\tau_0\right]+v_{n+1}^{m}\left[\frac{1}{4}\sigma^2 s^2\alpha+\frac{1}{4}rs\beta\right]=0 \quad (7.34)$$

นำค่า A_n, B_n และ C_n ตามสมการที่ (7.24), (7.25), และ (7.26) ตามลำดับแทนในสมการที่ (7.34) ได้สมการ ดังนี้

เมื่อ $1 \le n \le N$

$$-\frac{1}{2}A_n v_{n-1}^{m+1}+\left(1+\frac{1}{2}B_n\right)v_n^{m+1}-\frac{1}{2}C_n v_{n+1}^{m+1}=\frac{1}{2}A_n v_{n-1}^{m}+\left(1-\frac{1}{2}B_n\right)v_n^{m}+\frac{1}{2}C_n v_{n+1}^{m} \quad (7.35)$$

ในกรณีที่ $n=0$ ซึ่งเป็นบริเวณขอบเขตล่าง จากสมการที่ (7.15) จะได้

$$\frac{v_0^{m+1}-v_0^m}{\delta\tau_0}=-\frac{r}{2}\left[v_0^{m+1}+v_0^m\right]\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{2}r\delta\tau_0\right)v_0^{m+1}=\left(1-\frac{1}{2}r\delta\tau_0\right)v_0^m$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left(1+B_0\right)v_0^{m+1}=\left(1-B_0\right)v_0^m \quad (7.36)$$

เมื่อ $n=N+1$ จะได้

$$-\frac{1}{2}A_{N+1}v_N^{m+1}+\left(1+\frac{1}{2}B_{N+1}\right)v_{N+1}^{m+1}-\frac{1}{2}C_{N+1}v_{N+2}^{m+1}=\frac{1}{2}A_{N+1}v_N^{m}+\left(1-\frac{1}{2}B_{N+1}\right)v_{N+1}^{m}+\frac{1}{2}C_{N+1}v_{N+2}^{m} \quad (7.37)$$

โดยอาศัยเงื่อนไขของขอบเขตบนในสมการที่ (7.17) – (7.19) ดังนั้นสมการที่ (7.37) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$-\frac{1}{2}A_{N+1}v_N^{m+1}+\left(1+\frac{1}{2}B_{N+1}\right)v_{N+1}^{m+1}-\frac{1}{2}C_{N+1}\left(2v_{N+1}^{m+1}-v_N^{m+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}A_{N+1}v_N^{m}+\left(1-\frac{1}{2}B_{N+1}\right)v_{N+1}^{m}+\frac{1}{2}C_{N+1}\left(2v_{N+1}^{m}-v_N^{m}\right) \quad (7.38)$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$-\frac{1}{2}\left(A_{N+1}-C_{N+1}\right)v_N^{m+1}+\left(1+\frac{1}{2}B_{N+1}-C_{N+1}\right)v_{N+1}^{m+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(A_{N+1}-C_{N+1}\right)v_N^{m}+\left(1-\frac{1}{2}B_{N+1}+C_{N+1}\right)v_{N+1}^{m} \quad (7.39)$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์-เมทริกซ์ได้ดังนี้

$$Mv_{.}^{m+1}=Nv_{.}^{m} \quad (7.40)$$

โดยที่

$$
M=\begin{bmatrix}
1+\frac{1}{2}B_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{2}A_1 & 1+\frac{1}{2}B_1 & -\frac{1}{2}C_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2}A_2 & 1+\frac{1}{2}B_2 & -\frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & -\frac{1}{2}A_N & 1+\frac{1}{2}B_N & -\frac{1}{2}C_N \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -\left(\frac{1}{2}A_{N+1}-C_{N+1}\right) & \left(1+\frac{1}{2}B_{N+1}-C_{N+1}\right)
\end{bmatrix}
$$

$$
N=\begin{bmatrix}
1-\frac{1}{2}B_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{1}{2}A_1 & 1-\frac{1}{2}B_1 & \frac{1}{2}C_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}A_2 & 1-\frac{1}{2}B_2 & \frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \frac{1}{2}A_N & 1-\frac{1}{2}B_N & \frac{1}{2}C_N \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \left(\frac{1}{2}A_{N+1}-C_{N+1}\right) & \left(1-\frac{1}{2}B_{N+1}+C_{N+1}\right)
\end{bmatrix}
$$

จากสมการที่ (7.40) สามารถใช้เทคนิคการแยกแบบแอลยูมาหาผลเฉลยได้

บทที่ 8

วิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบ

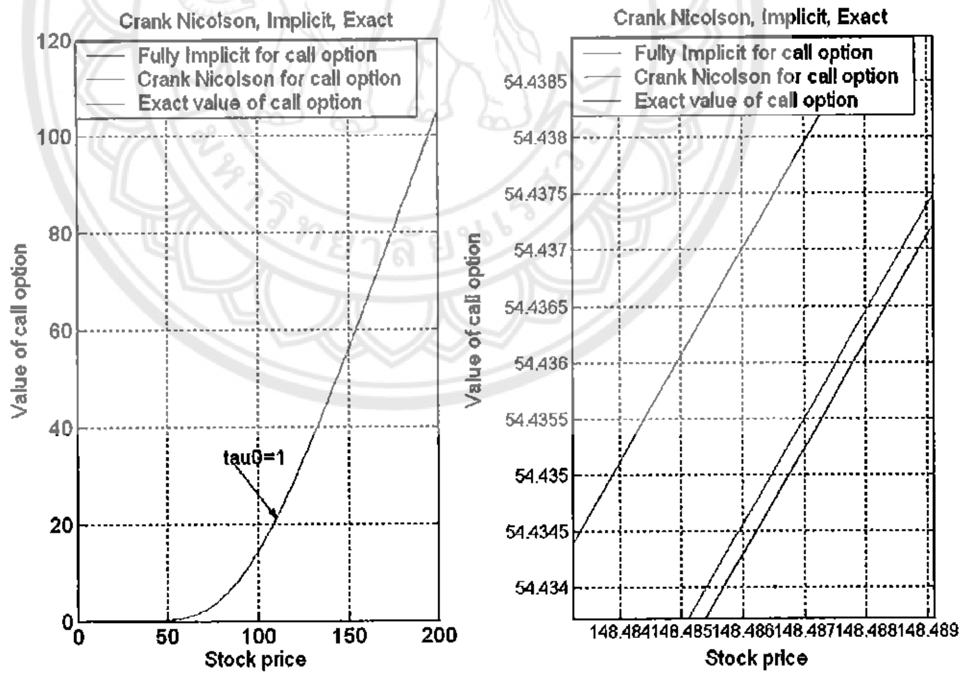
(Comparative Analysis)

8.1 วิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบ (Comparative Analysis)

ในหัวข้อนี้จะเลือกใช้ระเบียบวิธีอันตะแบบปริยาย(FI) และระเบียบวิธีของแคลง-นิโคลสัน (CN) มาเปรียบเทียบกับการคำนวณจากสมการ BS-PDE โดยตรง ซึ่งจะทำการศึกษาทั้ง สัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward (Forward Contract), ตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินแบบยุโรป (European Call option) และตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สินแบบยุโรป (European Put option)

8.1.1การวิเคราะห์มูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินแบบยุโรป โดยวิธี CN และ FI

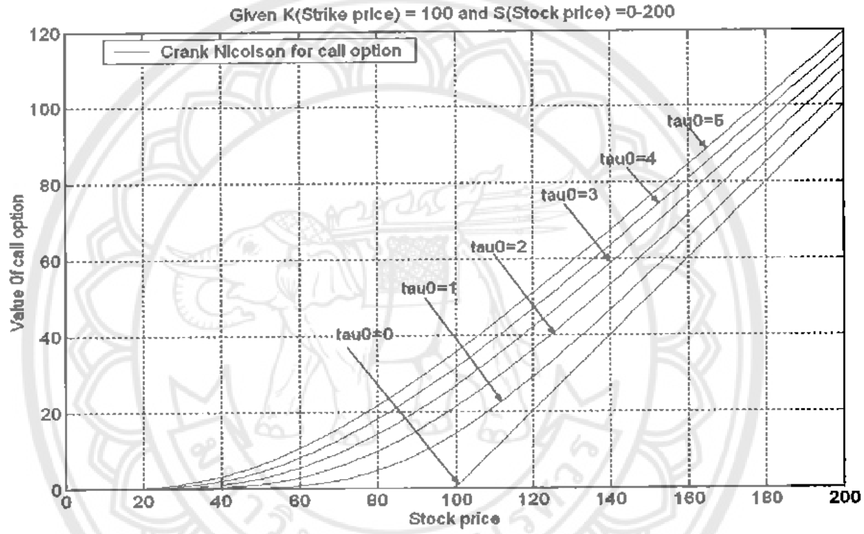
เมื่อกำหนดให้ มูลค่าหลักทรัพย์มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 200 บาท, ราคาที่ตกลงมีมูลค่าเป็น 100 บาทและ $\tau_0 = 1$ สำหรับตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call option) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



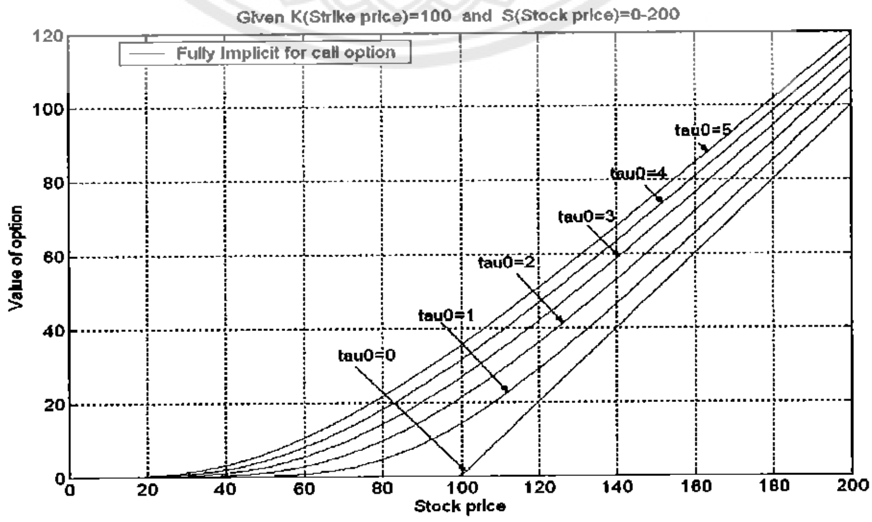
รูปที่ 8.1 แสดงการเปรียบเทียบการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน

จากรูปที่ 8.1 เส้นสีแดงคือมูลค่าตราสารสิทธิที่หาโดยวิธี FI เส้นสีน้ำเงินคือมูลค่าตราสารสิทธิที่หาโดยวิธี CN และเส้นสีเขียวคือมูลค่าตราสารสิทธิที่หาโดยสมการBS-PDE ภาพทางซ้ายมือคือภาพปกติของมูลค่าตราสารสิทธิที่หาโดยทั้งสามวิธีซึ่งไม่สามารถแยกความแตกต่างได้ได้ด้วยตาเปล่า แต่เมื่อทำการดึงภาพเข้าไปจะเป็นดังรูปทางขวามือซึ่งจะพบว่ามูลค่าตราสารสิทธิที่คำนวณจากวิธี FI และวิธี CN นั้นมีค่าใกล้เคียงกันมาก แม้ว่าจะห่างจากเส้นกราฟที่คำนวณจากสมการ BS-PDE แต่อยู่ในช่วงที่ยอมรับได้

เมื่อทำการทดลองเปลี่ยนช่วงเวลาของการพิจารณา กล่าวคือ τ_0 =0, 1, 2, 3, 4, 5 แล้วทำการเปรียบเทียบกราฟที่ได้ระหว่างวิธี CN กับ FI ในการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินจะได้กราฟดังรูปที่ 8.2 และ 8.3 ตามลำดับ



รูปที่ 8.2 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินโดยวิธี CN



รูปที่ 8.3 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินโดยวิธี FI

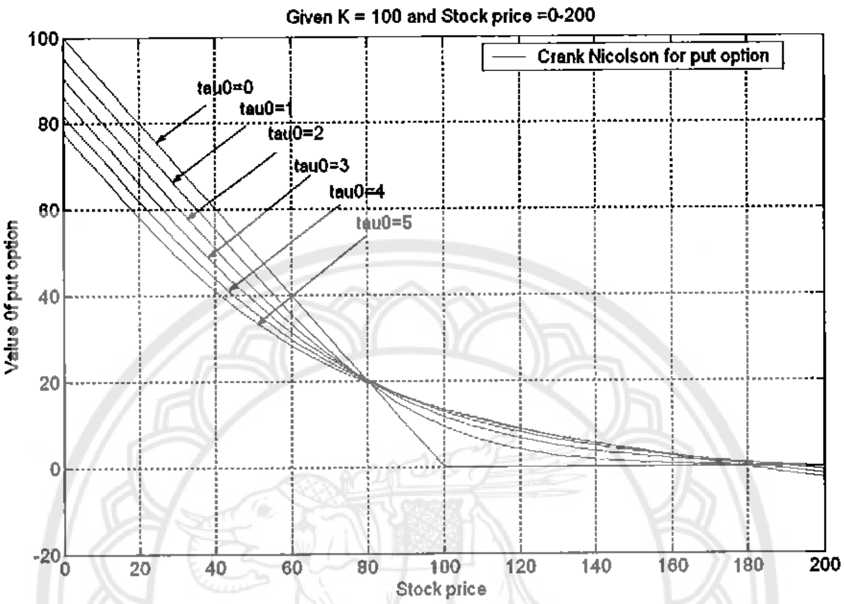
ตารางที่8.1 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อสินทรัพย์ (call option)

τ_0	Stock	CN	Im	Exact
$\tau_0=0$	100	0.0000000	0.0000000	0.0000000
	120	20.000000	20.000000	20.000000
	140	40.000000	40.000000	40.000000
	160	60.000000	60.000000	60.000000
$\tau_0=1$	100	14.231219	14.223118	14.231255
	120	28.881219	28.875321	28.880431
	140	46.480237	46.478756	46.480579
	160	65.487075	65.487607	65.495520
$\tau_0=2$	100	21.187399	21.174346	21.193735
	120	36.098892	36.085561	36.127708
	140	53.133210	53.122369	53.227580
	160	71.359770	71.351358	71.600499
$\tau_0=3$	100	26.742424	26.723307	26.805484
	120	41.937031	41.915727	42.124272
	140	58.740805	58.720690	59.176345
	160	76.465122	76.447707	77.320432
$\tau_0=4$	100	31.429805	31.404152	31.649110
	120	46.815791	46.787140	47.335489
	140	63.452435	63.424695	64.471400
	160	80.800044	80.775475	82.553088
$\tau_0=5$	100	35.469641	35.437775	35.957807
	120	50.971847	50.936907	51.979565
	140	67.465577	67.431712	69.245792
	160	84.517149	84.486875	87.341310

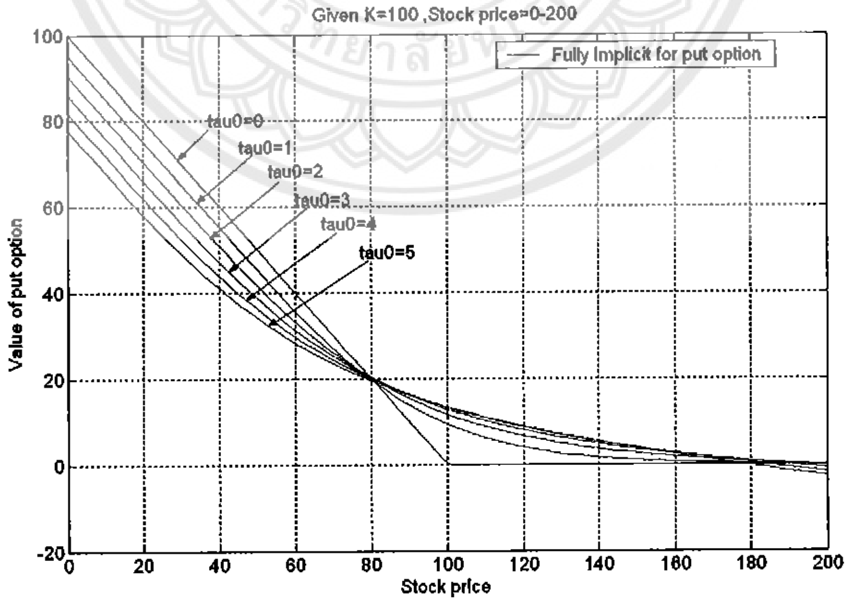
จากตารางจะพบว่า มูลค่าของตราสารสิทธิที่ได้จากการคำนวณ โดยวิธี CN กับ FI เมื่อเทียบกับการคำนวณสมการ BS-PDE โดยตรงนั้นมีมูลค่าใกล้เคียงกันมาก

8.1.2 การวิเคราะห์มูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สินแบบยุโรปโดยวิธี CN และ FI

เมื่อทำการทดลองเปรียบเทียบวิธี CN กับ FI ในการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สินเทียบกับค่าจริง โดยกำหนดให้ $\tau_0 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ และราคาที่ตกลงมีค่าเป็น100 บาท จะได้กราฟ ดังรูปที่ 8.4 และ 8.5 ตามลำดับ และมูลค่าของตราสารสิทธิที่คำนวณได้เมื่อกำหนดมูลค่าหลักทรัพย์มีค่าเป็น 40, 60, 80, และ100 บาท แสดงได้ในตารางที่8.2



รูปที่8.4 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน โดยวิธี CN



รูปที่8.5 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สินโดยวิธีFI

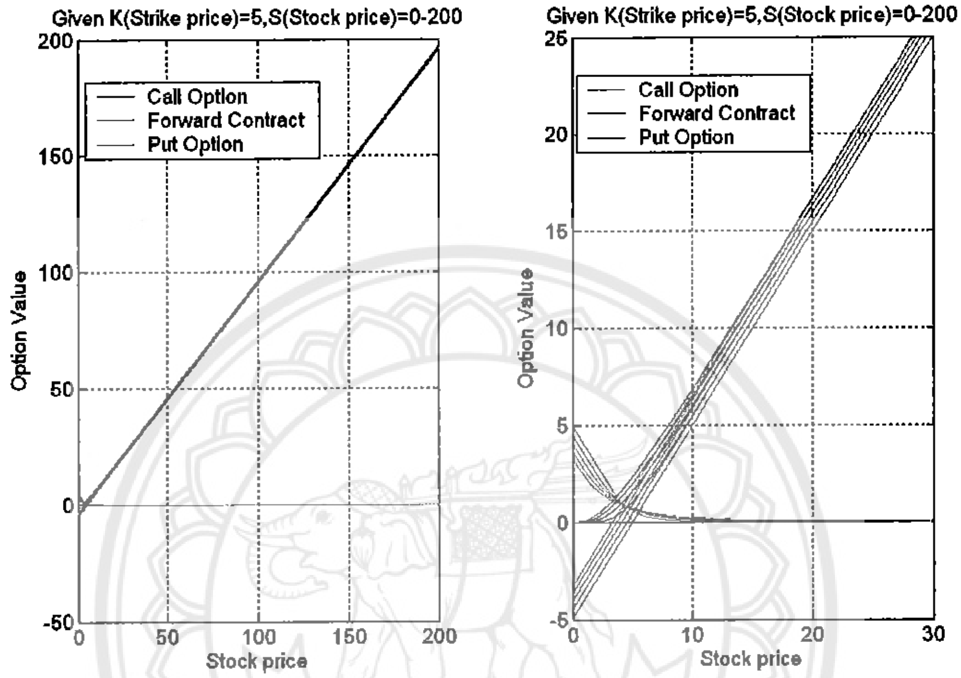
ตารางที่ 8.2 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (put option)

τ_0	Stock	CN	Im	Exact
$\tau_0=0$	40	0.0000000	0.0000000	0.0000000
	60	20.000000	20.000000	20.000000
	80	40.000000	40.000000	40.000000
	100	60.000000	60.000000	60.000000
$\tau_0=1$	40	9.354161	9.346655	9.354197
	60	19.676392	19.675261	19.676162
	80	35.731067	35.735695	35.729406
	100	55.133746	55.134994	55.133301
$\tau_0=2$	40	11.671140	11.660349	11.677477
	60	20.150273	20.146128	20.151317
	80	33.210893	33.216839	33.210394
	100	50.745348	50.751938	50.744171
$\tau_0=3$	40	12.813221	12.798944	12.876281
	60	20.206398	20.199872	20.221157
	80	31.353666	31.359266	31.355435
	100	46.995253	47.006904	46.994402
$\tau_0=4$	40	13.302879	13.285409	13.522185
	60	19.967841	19.958996	20.036998
	80	29.761177	29.766033	29.774537
	100	43.765431	43.780837	43.765891
$\tau_0=5$	40	13.349717	13.330013	13.837885
	60	19.506383	19.495595	19.692351
	80	28.295120	28.299107	28.342305
	100	40.924376	40.942542	40.929486

จากตารางจะพบว่า มูลค่าของตราสารสิทธิที่ได้จากการคำนวณโดยวิธี CN กับ FI เมื่อเทียบกับการคำนวณสมการ BS-PDE โดยตรงนั้นมีมูลค่าใกล้เคียงกันมาก

8.2 การวิเคราะห์มูลค่าตราสารสิทธิแบบยุโรปเมื่อราคาที่ตกลงมีการเปลี่ยนแปลง

เมื่อกำหนดให้มูลค่าหลักทรัพย์มีค่ามาก ๆ และให้ราคาที่ตกลงมีค่าน้อยมาก จะมีผลทำให้ลักษณะกราฟของมูลค่าของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (Call option) ลู่เข้าสู่มูลค่าสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward (Forward contract) ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 8.6



รูปที่ 8.6 แสดงมูลค่าของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน เมื่อราคาที่ตกลงมีค่าน้อย

รูปที่ 8.6 สอดคล้องกับทฤษฎีที่ได้จากส่วนที่ 1 กล่าวคือ จากสูตรของ Black-Scholes

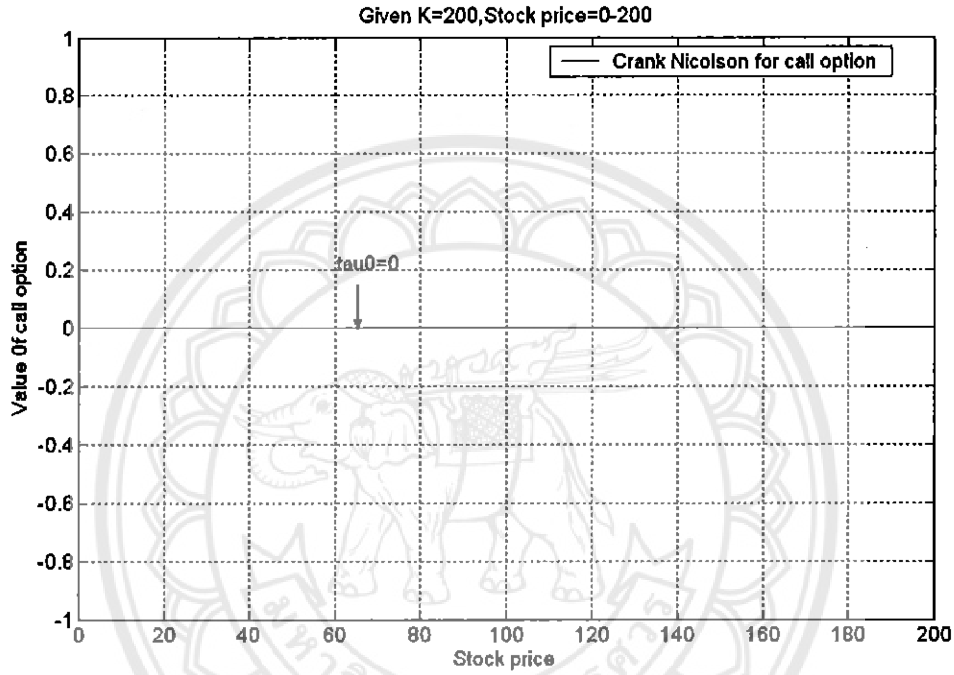
$$V(s,\tau)=s\Phi\left[\frac{\log\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]-ke^{-r\tau}\Phi\left[\frac{\log\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของมูลค่าของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินแบบยุโรป จะพบว่าเมื่อ $s \gg k$ ทำให้ค่าของ $\log\left(\frac{s}{k}\right)=\infty$ จึงมีผลให้ $\Phi(\cdot)=1$ ดังนั้น สมการข้างต้นสามารถเขียนได้เป็น $s-ke^{-r\tau}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของมูลค่าสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward

รูปที่ 8.6 ทางซ้ายแสดงให้เห็นถึงการเปรียบเทียบกันระหว่างมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน, มูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน และมูลค่าสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward เมื่อรูป

ทางขวาคือรูปที่มีการดึงภาพของรูปทางซ้ายเข้ามาใกล้บริเวณราคาที่ตกลงกันจะพบว่ากราฟของมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินลู่เข้าสู่มูลค่าสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแบบ Forward (Forward contract) ส่วนมูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (Put option) จะลู่เข้าสู่ศูนย์เพราะมูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สินมีค่าเท่ากับมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินลบด้วยมูลค่าสัญญาซื้อขาย (Put –Call Parity)

ในทำนองกลับกัน เมื่อกำหนดให้ราคาที่ตกลงมีค่ามาก ๆ เมื่อเทียบกับมูลค่าของหลักทรัพย์จะทำให้มูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินที่เวลาใด ๆ มีค่าเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 8.7



รูปที่ 8.7 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินเมื่อราคาที่ตกลงมีค่ามาก

จากรูปที่ 8.7 เมื่อมูลค่าหลักทรัพย์มีค่าน้อยกว่าราคาที่ตกลงในตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน (call option) จะทำให้มูลค่าตราสารเป็นศูนย์ตลอด เนื่องจาก เมื่อประมาณค่า $s \ll k$ มูลค่าของตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินจะมีค่าประมาณศูนย์ โดยดูได้จากสมการของ Black-Scholes ดังนี้

$$V(s,\tau)=s\Phi\left[\frac{\log\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]-ke^{-r\tau}\Phi\left[\frac{\log\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

เมื่อ $s \ll k$ จะทำให้ $\log\left(\frac{s}{k}\right)=-\infty$ จึงมีผลให้ $\Phi(\bullet)=0$ จึงส่งผลให้มูลค่าตราสารสิทธิเป็นศูนย์ทั้งหมด

8.3 การทดลองเปรียบเทียบมูลค่าตราสารสิทธิที่คำนวณโดยสมการความร้อนเทียบกับที่คำนวณโดยสมการ BS-PDE โดยระเบียบวิธีCrank Nicolson

ในส่วนที่ 1 ผู้อ่านจะพบว่าสมการ BS-PDE สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของสมการการแพร่ หรือสมการความร้อนได้ เพื่อให้เกิดความง่ายในการคำนวณ และในบทที่ 6 ได้ทำการศึกษาถึงการใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะในการประมาณค่าเพื่อคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขจากสมการความร้อนดังกล่าว ซึ่งผลเฉลยที่ได้ เมื่อคำนวณย้อนกลับไป จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ BS-PDE

สำหรับในบทที่ 7 นั้น เป็นการประยุกต์การใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะในการประมาณค่าเพื่อคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ BS-PDE โดยตรง ดังนั้น ในหัวข้อนี้ จะเป็นการทดลองเชิงเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณหาผลเฉลยจาก BS-PDE โดยตรงและการคำนวณหาผลเฉลยผ่านทางสมการความร้อน

เพื่อเป็นการเปรียบเทียบ จึงพิจารณามูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินแบบยุโรป โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังนี้

1. อัตราการเลื่อน $r = 0.05$
2. ค่า volatility $\sigma = 0.3$
3. มูลค่าหลักทรัพย์อยู่ระหว่าง 1 ถึง 200
4. ราคาที่ตกลงในตราสารสิทธิ $k = 100$

จากข้อกำหนดข้างต้น จะพบว่า $K = \dfrac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} = 1.11$ ดังนั้น

$$\alpha = -\frac{1}{2}(K-1) = 0.0051 \text{ และ } \beta = -\frac{1}{4}(K+1)^2 = 0.0101$$

กำหนดให้ $E_1 = 1 = E_2$

มูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินที่เปรียบเทียบกันแสดงไว้ในแสดงในตารางที่ 8.3

ตารางที่ 8.3 แสดงมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินที่คำนวณสมการความร้อน เทียบกับคำนวณจากสมการ Black-Scholes PDE

τ_0	Stock	Heat equation		CN	Exact
		u	v	v	v
$\tau_0=0$	100	1.453681	1.125532	0.0000000	0.0000000
	120	23.936056	18.346048	20.000000	20.000000
	140	50.676419	38.510272	40.000000	40.000000
	160	82.445959	62.189672	60.000000	60.000000
$\tau_0=1$	100	20.285483	14.938232	14.231219	14.231255
	120	37.740182	27.511792	28.881219	28.880431
	140	62.399063	45.099704	46.480237	46.480579
	160	94.258994	67.623345	65.487075	65.495520
$\tau_0=2$	100	31.350480	21.957505	21.187399	21.193735
	120	50.125680	34.753626	36.098892	36.127708
	140	75.384828	51.820849	53.133210	53.227580
	160	107.688594	73.479892	71.359770	71.600499
$\tau_0=3$	100	41.389712	27.571232	26.742424	26.805484
	120	61.623608	40.636091	41.937031	42.124272
	140	88.048223	57.566010	58.740805	59.176345
	160	78.770870	121.378532	76.465122	77.320432
$\tau_0=4$	100	51.056798	32.347617	31.429805	31.649110
	120	72.768533	45.638712	46.815791	47.335489
	140	100.574064	62.539800	63.452435	64.471400
	160	135.282346	83.500648	80.800044	82.553088

ตารางที่ 8.3 แสดงการหามูลค่าตราสารสิทธิที่หาโดยสมการความร้อนเทียบกับที่หาโดยระเบียบผลต่างอันตะดังแสดงในตาราง พบว่ามูลค่าตราสารสิทธิที่หาได้ทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกันมาก

บทที่ 9

วิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบและแนวทางการพัฒนา

(Comparative Analysis and Future Works)

9.1 วิเคราะห์ผลเชิงเปรียบเทียบ (Comparative Analysis)

จากการที่นำเอาระเบียบวิธี FI และวิธี CN มาคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของมูลค่าตราสารสิทธิแบบยุโรป จะพบว่าผลเฉลยที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันมาก ทั้งมูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินและตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน และเมื่อทำการลดค่าของราคาที่ตกลงกันลง จนมีค่าน้อยกว่าราคาของหลักทรัพย์มาก ๆ จะส่งผลให้ มูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สิน จะมีค่าลู่เข้าสู่ มูลค่าของสัญญาซื้อขายแบบ Forward นอกจากนี้เมื่อกำหนดให้ ราคาที่ตกลงกันมีค่ามากกว่าราคาหลักทรัพย์มาก ๆ จะพบว่า มูลค่าตราสารสิทธิเรียกซื้อทรัพย์สินมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎี

เมื่อทำการประมวลชุดคำสั่งเพื่อคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิ โดยอาศัยสมการความร้อนจะพบว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิที่หาโดยตรงจากสมการ BS-PDE

9.2 บทวิจารณ์ (Critics)

1. ปัญหาที่เกิดขึ้นในการประมวลชุดคำสั่ง คือ ในการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิให้ขายทรัพย์สิน (put option) พบว่ามีบางช่วงของเส้นกราฟที่มูลค่าของตราสารสิทธิมีค่าต่ำกว่าศูนย์ ซึ่งเป็นความผิดพลาดเพียงเล็กน้อยอันเกิดมาจาก การแบ่งระนาบตาข่ายอันตะที่มีความละเอียดไม่มากนัก

2. เนื่องจากผู้จัดทำมีเวลาจำกัดในการศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข กอปรกับ ผู้จัดทำขาดประสบการณ์ในการเขียนชุดคำสั่ง โดยเฉพาะชุดคำสั่งของ MATLAB® จึงทำให้การเขียนชุดคำสั่งที่ได้ไม่สมบูรณ์เท่าที่ควร

9.3 ข้อเสนอแนะและแนวทางการพัฒนา (Suggestions and Future Works)

1. ส่วนที่ 2 นี้ได้ศึกษาการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะในการหามูลค่าตราสารสิทธิแบบยุโรป ผู้สนใจสามารถนำผลที่ได้ไปศึกษาต่อเพื่อคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิแบบอื่น ๆ อาทิ เช่น ตราสารสิทธิแบบอเมริกา หรือมูลค่าตราสารสิทธิแบบเอเชีย เป็นต้น

2. ในโครงงานฉบับนี้ ได้เลือกเทคนิค LU ในการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิ ผู้สนใจสามารถใช้เทคนิคอื่นในการคำนวณ อาทิ เช่น SOR ซึ่งผู้จัดทำได้นำเสนอเนื้อหาไว้เพียง

บางส่วน นอกจากนี้ ผู้สนใจยังสามารถหาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณได้เช่นกัน

3. การประมวลผลเชิงตัวเลขในโครงงานฉบับนี้ใช้ชุดคำสั่งMATLAB®มาใช้ในการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิ ผู้สนใจสามารถใช้ชุดคำสั่งอื่นเช่น Mathematica® หรือ Maple® มาคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิแทนได้เช่นกัน

บรรณานุกรม

[1] วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ, **คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้าขั้นสูง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, พิมพ์ครั้งที่ 1, 2546.

[2] Baxter, M. and Rennie, A., **Financial Calculus: An introduction to derivative pricing,** Cambridge University Press, United Kingdom, 1996.

[3] Day, M., **Lecture Note in MATH5415-6: Topics in Mathematical Finance,** Department of Mathematics, Virginia Polytechnic Institution and State University (VPI & SU), 2000.

[4] MathWork, Inc., **The Student Edition of MATLAB,** Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[5] Mortensen, R.E., **Random Signals and Systems,** John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 1987.

[6] Royden, H.L., **Real Analysis,** Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.

[7] Wilmott, P., Howison, S., and Dewynne, J., **The Mathematics of Financial Derivatives,** Cambridge University Press, United Kingdom, 1995.

[8] ราชบัณฑิตยสถาน. "ศัพท์บัญญัติราชบัณฑิตยสถาน." [Online]. Available : http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php

[9] SilverStar Energy. "Stock History OBB : SVSE." [Online]. Available : http://www.silverstarenergy.com

[10] PlanetMath. "PlanetMath Encyclopedia." [Online]. Available : http://planetmath.org/encyclopedia

[11] WIKIPEDIA. "Mathematical finance." [Online]. Available : http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_finance

ภาคผนวก ก

ทฤษฎีความน่าจะเป็นขั้นพื้นฐาน

(Fundamental of Probability Theory)

ก.1 การทดลองสุ่ม (Random experiment) เป็นการทดลองที่ไม่สามารถคาดการณ์ได้ล่วงหน้าว่าผลลัพธ์จะออกมาในรูปแบบใด ซึ่งเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่มเรียกว่า *ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space)* โดยทั่วไปนิยมให้สัญลักษณ์ Ω แทนปริภูมิตัวอย่าง ถ้าปริภูมิตัวอย่าง Ω เป็น*เซตจำกัด (Finite Set)* หรือ*เซตอนันต์ที่นับได้ (Countably Infinite Set)* ปริภูมิดังกล่าวจะถูกเรียกว่า ***ปริภูมิตัวอย่างวิยุต (discrete sample space)*** แต่ถ้าปริภูมิตัวอย่าง Ω เป็น *เซตนับไม่ได้(Uncountable Set)* ปริภูมิตัวอย่างนั้นจะถูกกล่าวว่าเป็น*ปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง (Continuous Sample Space)* ถ้า $\Im$ เป็นพีชคณิตซิกมาบนปริภูมิตัวอย่าง Ω แล้วสมาชิกของ $\Im$ จะถูกกล่าวว่าเป็น *เหตุการณ์ (event)* โดยที่พีชคณิตซิกมา มีนิยามดังต่อไปนี้

ให้ Ω เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง *พีชคณิตซิกมา(σ-algebra)* บน Ω คือวงศ์ *(Family)* (ที่ไม่ใช่เซตว่าง) ของเซตย่อยของ Ω ซึ่งมีคุณสมบัติการปิดภายใต้การเติมเต็ม (Complement) และยูเนียน (Union) นับได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า $\Im \neq \varnothing$ เป็นพีชคณิตซิกมาก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $A \in \Im$ จะได้ว่า $A' \in \Im$
2. ถ้า $A_n \in \Im$ สำหรับทุกค่า $n = 1,2,3,...$ และให้ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ จะได้ว่า $A \in \Im$

จากนิยามของพีชคณิตซิกมาจะเห็นได้ว่า ถ้า $\Im$ เป็นพีชคณิตซิกมาบน Ω แล้ว จะได้ว่า

1. $\varnothing \in \Im$ และ $\Omega \in \Im$ เนื่องจากถ้า $A \in \Im$ จะได้ว่า $\varnothing = A \cap A'$ และ $\Omega = A \cup A'$
2. ถ้า $A_n \in \Im$ สำหรับทุกค่า $n = 1,2,3,...$ และให้ $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ จะได้ว่า $B \in \Im$ นั่นคือ $\Im$ มี

คุณสมบัติการปิดภายใต้อินเตอร์เซกชันนับได้ (Countable intersection)

ถ้า $A, B \in \Im$ เป็นเหตุการณ์จะได้ว่า $A \cup B, A \cap B$ และ A' เป็นเหตุการณ์ด้วยกล่าวคือ

$A \cup B$ คือเหตุการณ์ A *หรือ* เหตุการณ์ B เกิดขึ้น

$A \cap B$ คือเหตุการณ์ A *และ* เหตุการณ์ B เกิดขึ้น

A' คือเหตุการณ์ A *ไม่* เกิดขึ้น

นอกจากนี้ถ้า $A \cap B = \varnothing$ ซึ่งจะกล่าวได้ว่า A และ B เป็น *เหตุการณ์ไม่เกิดร่วม (Mutually exclusive events)*

ก.2 ความน่าจะเป็น (Probability) กำหนดให้ $(\Omega, \Im)$ เป็นปริภูมิเมเชอร์และให้ P เป็นเมเชอร์ที่ถูกนิยามบน $(\Omega, \Im)$ ซึ่ง P จะถูกกล่าวว่าเป็นความน่าจะเป็น (probability) บน $(\Omega, \Im)$ ถ้า $0 \le P(A) \le 1$ สำหรับเซต $A \in \Im$ และ $(\Omega, \Im, P)$ จะถูกกล่าวว่าเป็น ปริภูมิความน่าจะ (probability space)

เมเชอร์ความน่าจะเป็น P และ Q ถูกกล่าวว่ามีความสมมูลกัน (Equivalence) ถ้า $P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$ โดยที่ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในพีชคณิตซิกมา $\Im$

ก.3 ตัวแปรสุ่ม(Random variable) คือฟังก์ชันหาเมเชอร์ได้ $X : \Omega \to \mathbb{R}$
ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มจะได้ว่า

เซต $\{\omega : X(\omega) < a\}$ เป็นเหตุการณ์ สำหรับทุกค่า $a \in \mathbb{R}$

ก.3.1 ตัวแปรสุ่มวิยุต (Discrete Random Variable) คือตัวแปรสุ่ม X ที่มีโดเมนเป็นเซตที่สามารถนับได้ (Countable Set) $S = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ ที่ซึ่ง

$$\sum_{a_i \in S} P(\{\omega : X(\omega) = a_i\}) = 1$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มวิยุต เราจะเรียกฟังก์ชัน $f_x : \mathbb{R} \to [0,1]$ ที่นิยามโดย

$$f_X(a) = P(\{\omega : X(\omega) = a\})$$

ว่า ***ฟังก์ชันมวลของความน่าจะเป็น (Probability Mass Function)*** หรือ ***ฟังก์ชันการแจกแจงของความน่าจะเป็น (Probability Distribution Function)*** ของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่างของ ตัวแปรสุ่มวิยุต

1) Y = จำนวนคนที่เข้าฝากเงินในธนาคารแห่งหนึ่ง
2) P = จำนวนคนที่ใช้โทรศัพท์ที่ห้องประชุมแห่งหนึ่ง
3) R = จำนวนสินค้าเสียที่เครื่องจักรของโรงงานแห่งหนึ่งผลิตได้ในเดือนที่ผ่านมา

ก.3.2 ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง(Continuous Random Variable) เราจะกล่าวว่าตัวแปรสุ่ม X เป็นต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) ถ้ามีฟังก์ชัน $f_X(x) \ge 0$ ซึ่ง

$$P(A) = \int_A f_X(x)\,dx, \forall A \in \Im$$

เราจะเรียกฟังก์ชัน f_X นี้ว่า ***ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density Function)***

ตัวอย่างของ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

1) *ตัวแปรสุ่มเอกรูป (Uniform Random Variable)* คือตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & if\ a\le x\le b\\ 0 & other\end{cases}$$

2) *ตัวแปรสุ่มปรกติ (Normal Random Variable)* คือตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

เมื่อ μ และ σ^2 เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงปรกติ

3) *ตัวแปรสุ่มแบบเลขชี้กำลัง (Exponential random Variable)* คือตัวแปรสุ่ม X ที่ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & if\ x\ge 0\\ 0 & if\ x<0\end{cases}$$

เมื่อ $\lambda>0$ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

4) *ตัวแปรสุ่มแกมมา(Gamma Random Variable)* คือตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}x^{\alpha-1} & if\ x\ge 0\\ 0 & if\ x<0\end{cases}$$

เมื่อ $\alpha,\lambda>0$ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา และ

$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\alpha-1}dx$ คือฟังก์ชัน*แกมมา(Gamma function)*

นิยามให้ $(\Omega,\Im,P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น ให้ $A,B\in\Im$ เป็นเหตุการณ์และ $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ เป็นตัวแปรสุ่มแล้ว

1. เหตุการณ์ A และ B จะถูกกล่าวว่าเป็น *เหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน (Independent Events)* ก็ต่อเมื่อ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
2. ตัวแปรสุ่ม X และ Y จะเป็น ตัวแปรสุ่มที่อิสระต่อกัน (*Independent Variable*) ก็ต่อเมื่อ $P\big(X(A)\in\alpha,Y(A)\in\beta\big)=P\big(X(A)\in\alpha\big)P\big(Y(A)\in\beta\big),\forall\alpha,\beta\subset\mathbb{R}$

ทำนองเดียวกัน ถ้าตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีจำนวน n จะเป็นตัวแปรสุ่มอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า $P\left(X(A)\in\alpha_1,\ldots,X_n(A)\in\alpha_n\right)=\prod_{k=1}^{n}P\left(X_k(A)\in\alpha_k\right)$ และจะกล่าวว่าลำดับของตัวแปรสุ่ม $\{X_n\}$ เป็นอิสระต่อกันถ้าทุกลำดับย่อยจำจัด $\left\{X_{n_1},\ldots,X_{n_k}\right\}$ เป็น อิสระต่อกัน

ก.4 ค่าคาดหมายและความแปรปรวน (Expected Value and Variance) ให้ $(\Omega,\Im,P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น และ $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ เป็นตัวแปรสุ่ม

ก.4.1 ค่าคาดหมาย (Expected Value) หรือค่ามัชฌิม (Mean)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มวิยุตซึ่งประกอบด้วยค่า $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ และ $f_X(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มวิยุต ที่ซึ่ง $f_X(x)=P(X=x)$ ดังนั้นค่าคาดหมายของ X หรือ ค่ามัชฌิมของ X คือ

$$\mu_X=\mathbf{E}[X]=\sum_{i=1}^{n}x_iP(x_i)$$

ในเชิงนามธรรมแล้ว ค่าคาดหมายหรือค่ามัชฌิมของตัวแปรสุ่ม X คือปริพันธ์เลอเบก

$$\mathbf{E}[X]=\int_{\Omega}XdP$$

ก.4.2 ความแปรปรวน (Variance) σ_X^2 ***หรือ*** $\mathbf{var}(X)$ ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$\sigma_X^2=\mathbf{var}(X)=\mathbf{E}\left[\left(X-\mathbf{E}(X)\right)^2\right]$$

ในทางปฏิบัติ การวัดการกระจายของข้อมูลตัวแปรสุ่ม บางครั้งจะนิยมวัดโดยใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation: S.D.) ซึ่งเป็นรากที่สองของความแปรปรวน

$$\text{S.D.}=\sigma^2=\sqrt{\mathbf{var}(X)}$$

ก.5 ความเป็นอิสระต่อกันและการคาดหมายแบบมีเงื่อนไข (Independence and Conditional Expectation)

ก.5.1 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability) ให้ $(\Omega,\Im,P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็นและกำหนดให้ A และ B เป็นสมาชิกใน $\Im$ ถ้า P เป็นเมเชอร์ความน่าจะเป็นที่ซึ่ง

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

แล้วเหตุการณ์ A และ B ถูกกล่าวว่าเป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน

ถ้า $P(B) \neq 0$ แล้ว จะสามารถนิยามความน่าจะเป็นอีกประเภทหนึ่งได้ โดยการคำนวณจากอัตราส่วน ดังนี้

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

โดยที่ $P(A|B)$ คือความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข *(Conditional probability)* ของ A เมื่อกำหนด B มาให้ ดังนั้น ถ้าเหตุการณ์ A และ B จะอิสระต่อกัน จะพบว่า

$$P(A|B) = P(A)$$

นั่นคือ ไม่ว่าจะกำหนดข้อมูลของเหตุการณ์ B มาให้หรือไม่ ย่อมไม่มีผลต่อการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เนื่องจากความเป็นอิสระต่อกันนั่นเอง

ก.5.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Density Function) สมมติว่า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่ถูกนิยามบนปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega, \Im, P)$ โดยที่ทั้ง X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (Continuous random variable) และให้ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y คือ $f_{XY}(x,y)$ แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรสุ่มแต่ละตัว (ซึ่งนิยมใช้สัญลักษณ์ว่า $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$) ถูกเรียกว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นตามขอบ (Marginal density functions) ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จาก

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

และ

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

ตัวแปรสุ่ม X และ Y ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f_{XY}(x,y)$ ถูกกล่าวว่าอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

ในทำนองเดียวกับความน่าจะเป็น อัตราส่วนระหว่าง ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม ต่อ ฟังก์ชันความหนาแน่นตามขอบ จะถูกเรียกว่าเป็น *ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไข (Conditional density function)* นั่นคือ

$$\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = f_{X|Y}(x|y)$$

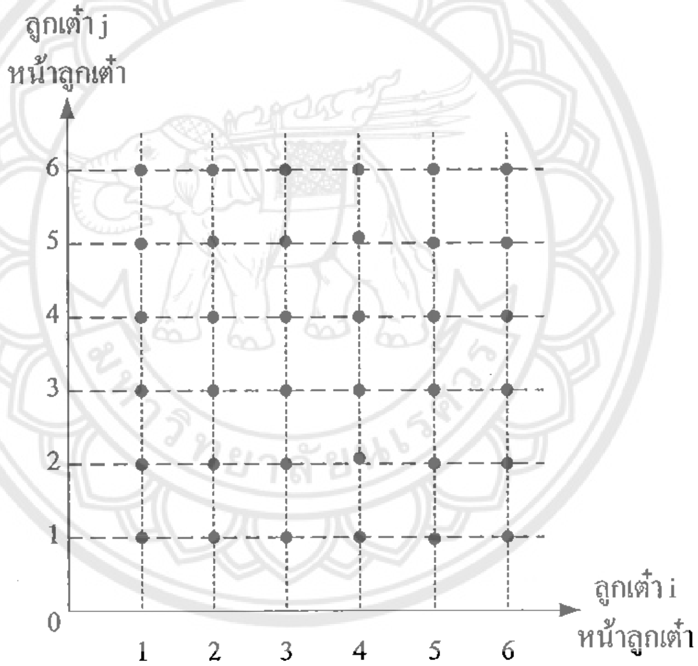
ก.5.3 การคาดหมายแบบมีเงื่อนไข (Conditional Expectation) ให้ $(\Omega, \Im, P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็นและกำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มเวลาต่อเนื่อง และ $\Im_t \in \Im$ ดังนั้นการคาดหมายของ X ภายใต้เงื่อนไขหรือเหตุการณ์ใด ๆ $\Im_t$ จะมีค่าเป็น

$$\mathbf{E}\left[X \middle| \Im_t\right] = \int_{-\infty}^{\infty} xf\left(x \middle| \Im_t\right) dx$$

ในทำนองเดียวถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มเวลาวิยุตจะคำนวณหาค่าคาดหมายได้ดังนี้

$$\mathbf{E}\left[X \middle| \Im_t\right] = \sum_i x_i P\left(X = x_i \middle| \Im_t\right)$$

<u>ตัวอย่าง</u> ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ที่จะเกิดขึ้นมีทั้งหมด 36 เหตุการณ์ ดังแสดงได้ตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ ก.1 แสดงหน้าของการโยนลูกเต๋า 2 ลูก

กำหนดให้ $Z(\omega)$ และ $W(\omega)$ เป็นตัวแปรสุ่มของเหตุการณ์ $\omega = (i, j) \in \Im$ โดยถูกนิยามไว้ดังนี้

$$Z(\omega) = (i, j) = i + j \text{ และ } W(\omega) = W(i, j) = i - j$$

ยกตัวอย่างเช่น เหตุการณ์ที่สอดคล้องกับตัวแปรสุ่ม $Z(\omega) = 9$ คือเซต

$$\left\{(i, j) \middle| i + j = 9\right\} = \left\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\right\} \qquad (*)$$

ซึ่งมีทั้งหมด 4 เหตุการณ์จากเหตุการณ์ทั้งหมด 36 เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ในปริภูมิความน่าจะเป็น ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่ทำให้ $Z(\omega)=9$ คือ $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ แต่เนื่องจากเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ในปริภูมิความน่าจะเป็นมีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากับ $\frac{1}{36}$ ดังนั้น เหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น ดังสมการ(*) จึงมีโอกาสของความน่าจะเป็น คือ

$$\left\{\left(\frac{1}{36}\right),\left(\frac{1}{36}\right),\left(\frac{1}{36}\right),\left(\frac{1}{36}\right)\right\}$$ ซึ่งสามารถเขียนแยกตัวประกอบมาได้เป็น

$$\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$$ โดยที่ $\frac{1}{9}$ คือ $P(Z(\omega)=9)$

พิจารณาเฉพาะเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในสมการ (*) จะพบว่าค่าของตัวแปรสุ่ม W จะมีค่าเป็น $W(\omega)=\{-3,-1,1,3\}$ ดังนั้น โอกาสของความน่าจะเป็นที่ $W(\omega)=-3$ ภายใต้เหตุการณ์ในสมการ (*) จึงมีค่าเป็น $\frac{1}{4}$ นั่นคือ $P\left[W(\omega)=1\middle|Z(\omega)=9\right]=\frac{1}{4}$ (ในขณะที่โอกาสของความน่าจะเป็นที่ $W(\omega)=-3$ ภายใต้เหตุการณ์ทั้งหมดในปริภูมิความน่าจะเป็นคือ $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ นั่นคือ $P\left[W(\omega)=1\middle|\Omega\right]=P\left[W(\omega)=1\right]=\frac{1}{12}$) ในกรณีนี้ เหตุการณ์ที่ทำให้ $W(\omega)=-3$ ภายใต้เหตุการณ์ที่ทำให้ $Z(\omega)=9$ คือเหตุการณ์ $\omega=(3,6)$ ซึ่งมีเพียงเหตุการณ์เดียวในปริภูมิความน่าจะเป็นทั้งหมด 36 เหตุการณ์ นั่นคือ $P\left((W(\omega)=-3)\cap(Z(\omega)=9)\right)=\frac{1}{36}$ ซึ่งจากตัวอย่างที่ยกมานี้ จะสอดคล้องกับนิยามของ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข *(Conditional probability)* นั่นคือ

$$\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}}=\frac{P(W\cap Z)}{P(Z)}=P(W|Z)=\frac{1}{4}$$

ก.6 Kolmogorov's Strong Law of Large Numbers

ให้ $\{X_k\}_1^\infty$ *เป็นลำดับของตัวแปรสุ่ม* L_2 *ที่มีค่าเฉลี่ย* $\{\mu_k\}$ *ความแปรปรวน* $\{\sigma_k^2\}$ *และเป็นอิสระต่อกันแล้ว ถ้า* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty$ *จะได้ว่า* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu_k)\to 0$ *(เกือบทุกแห่ง)*

ก.7 Central Limit Theory (C.L.T)

ให้ $X_1,X_2,...,X_N$ *เป็นตัวแปรสุ่มอิสระซึ่งเป็นสมาชิกในเซต* N *ที่มีการแจกแจงของความน่าจะเป็น* $P(x_1,...,x_N)$ *ที่เหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (Independent and identically distributed random variable) ด้วยค่าเฉลี่ย* (μ) *และค่าความแปรปรวน* (σ^2) *ดังนั้นตัวแปรสุ่ม* X *จะมีการแจกแจงเป็นแบบปรกติ (normal distribution)*

$$X_{norm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2}}$$

ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density Function) อยู่ในรูป

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < X < \infty \text{ เมื่อ } \sigma > 0, -\infty < \mu < \infty$$

ภาคผนวก ข

กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

(Stochastic Processes and Related Theory)

ภาคผนวก ข เป็นการอ้างถึงทฤษฎีที่จำเป็นที่ได้ใช้ในบทที่ 4 โดยได้อธิบายทฤษฎีและนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม การสุ่มเดิน การเคลื่อนที่แบบบราวเนียน เป็นต้น

ข.1 กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic processes)

กำหนดให้ $(\Omega,\Im,P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น *กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม* คือกลุ่ม (collection) $\{X(t)|t\in T\}$ ของตัวแปรสุ่ม $X(t)$ ที่ถูกนิยามบน $(\Omega,\Im,P)$ โดยที่ T คือเซตที่ถูกเรียกว่า เซตดัชนี (index set) ของกระบวนการ $\{X(t)|t\in T\}$ โดยทั่วไป T มักจะเป็นเซตย่อยของเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$ กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มอาจจะถูกพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันในสองตัวแปร $X(=X(t,\omega))$ โดยที่ $t\in T$ และ $\omega\in\Omega$ ที่ซึ่ง $X_t(\omega):=X(t,\omega)$ เป็นตัวแปรสุ่มบน $(\Omega,\Im,P)$ สำหรับค่า t แต่ละตัว

กำหนดค่า t ใด ๆ มาให้ แล้วค่าของฟังก์ชัน $X(t)$ ถูกเรียกว่าเป็น *สถานะ (State)* ของกระบวนการ ที่เวลา t เซตของสถานะทุกตัว สำหรับทุกค่า t ของกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มถูกเรียกว่า *ปริภูมิสถานะ (State space)*

ถ้า T เป็นเซตวิยุตแล้วกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มจะถูกกล่าวว่าเป็น *กระบวนการเวลาวิยุต (discrete-time stochastic process)* แต่ถ้า T เป็นเซตย่อยที่เป็นช่วง (interval) ของเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$ แล้ว กระบวนการ $\{X(t)|t\in T\}$ เรียกว่า *กระบวนการเวลาต่อเนื่อง (continuous-time stochastic process)*

ข.2 การเดินสุ่ม (Random walk)

ให้ $(\Omega,\Im,P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น และ $\{X_i\}$ เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาวิยุตที่ถูกนิยามบน $(\Omega,\Im,P)$ โดยที่ X_i แต่ละตัวเป็นตัวแปรสุ่มค่าจริงที่อิสระต่อกันและมีการแจกแจงทางสถิติเหมือนกันและ $i\in\mathbb{N}$ ซึ่งเป็นเซตของจำนวนนับแล้ว*การเดินสุ่ม(Random walk)* จะเป็นลำดับย่อยของหรือผลรวมย่อยดังนี้

$$W_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

ถ้า $X_i\in\{-1,1\}$ แล้วการเดินสุ่มที่ถูกนิยามบน X_i จะถูกเรียกว่าเป็นการเดินสุ่มอย่างง่าย(Simple Random Walk) หากโอกาสความน่าจะเป็นที่ทำให้ $X_i=1$ มีค่าเท่ากับ $\left(P(X_i=1)=\frac{1}{2}\right)$ แล้วการเดินสุ่มอย่างง่ายจะถูกกล่าวว่าเป็นการเดินสุ่มอย่างง่ายแบบสมมาตร (Symmetric Simple Random Walk)

ข.3 การเคลื่อนที่แบบบราวเนียน (Brownian motion)

การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนอาจจะ หมายถึง ปรากฏการณ์ทางกายภาพที่อนูขนาดเล็กที่เคลื่อนไหวอย่างสุ่ม หรือหมายถึงรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมการเคลื่อนไหวแบบสุ่ม หากกล่าวในเชิงคณิตศาสตร์แล้ว การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนจัดเป็นกระบวนการเวียนเนอร์ (Wiener Process) ที่ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability Distribution) ของตำแหน่งของอนูที่เวลา $t+dt$ เมื่อกำหนดให้ตำแหน่งของอนูที่เวลา t มีค่า p จะเป็นการแจกแจงปกติที่มีค่ามัชฌิมเป็น $p+\mu dt$ และค่าความแปรปรวนเป็น $\sigma^2 dt$ โดยที่ μ คือ ความเร็วของการเคลื่อนที่ (drift velocity) และ σ^2 คือ กำลังงานของสัญญาณรบกวน โดยทั่วไปแล้ว กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มหลายกระบวนการสามารถลดรูปลงมาเป็น การเคลื่อนที่แบบบราวเนียน ได้ภายใต้เงื่อนไขบางประการ

ข.3.1 การเคลื่อนแบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต (Geometric Brownian Motion: GBM) เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาต่อเนื่อง ที่ซึ่งลอการิทึมของปริมาณที่แปรค่าแบบสุ่มสอดคล้องกับการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนหรือกระบวนการของเวียนเนอร์

โดยทั่วไปแล้วการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิตนิยมถูกใช้เป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของสินทรัพย์ในตลาดการเงิน ซึ่งกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม S_t ถูกกล่าวว่ามีการเคลื่อนที่แบบGBM ถ้า S_t สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม

$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

โดยที่ $\{W_t\}$ คือกระบวนการเวียนเนอร์หรือการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน เมื่อ μ และ σ เป็นค่าคงที่หรือเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มอิสระ ในกรณีที่ทั้ง μ และ σ เป็นค่าคงที่ ซึ่งสมการข้างต้นมีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

เมื่อ S_0 เป็นค่าเริ่มต้นใดๆ

ข.4 ตารางการคูณ (Multiplication table) ในการคำนวณหาอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม จำเป็นต้องอาศัยตารางการคูณต่อไปนี้ในการคำนวณ

$\times$	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

ข.5 ทฤษฎีบทตั้งของ Ito (Ito's Lemma)

สมมติให้ $\mathbf{X}_t$ *และ* $\mathbf{Y}_t$ *เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มสองกระบวนการที่มีอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม และให้* $f(x,y)$ *เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง แล้ว* $f(\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)$ *ย่อมมีอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่มดังนี้*

$$df(\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)=\frac{\partial}{\partial x}f(\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)d\,\mathbf{X}_t+\frac{\partial}{\partial y}f(\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)d\,\mathbf{Y}_t$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)(d\,\mathbf{X}_t)^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)d\,\mathbf{X}_t\,d\,\mathbf{Y}_t+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)(d\,\mathbf{Y}_t)^2\right\}$$

ในหนังสือบางเล่ม ทฤษฎีบทตั้งของ Ito อาจจะเขียนได้ ดังนี้

ถ้า Y *เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มที่สอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์เฟ้นสุ่ม* $dY=\sigma dX_t+rd\tau_0$ *และ* f *เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง แล้ว* $Z_t:=f(Y_t)$ ***จะเป็น*** *กระบวนการเฟ้นสุ่มด้วย และมีค่าอนุพันธ์เป็น* $dZ_t=\left(\sigma f'(Y_t)\right)dX_t+\left(rf'(Y_t)+\frac{1}{2}\sigma^2f''(Y_t)\right)d\tau_0$

<u>ตัวอย่าง</u> จงคำนวณหาค่าของ dW_t^2 เมื่อ W_t เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $f(x)=x^2$ ดังนั้น จะได้ว่า $f'(x)=2x$ และ $f''(x)=2$ เมื่อแทนค่าในสูตรการหาอนุพันธ์ของ Ito จะได้ว่า

$$df(W_t)=f'(W_t)dW_t+\frac{1}{2}f''(W_t)(dW_t)^2=2W_tdW_t+dt$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงคำนวณหาอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่มของ $S_t=\exp(\mu t+\sigma W_t)$ เมื่อ μ และ σ เป็นค่าคงที่ และ W_t เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $f(x)=e^x$ และ $X_t=\mu t+\sigma W_t$ ดังนั้น จะได้ว่า $f(x)=e^x=f'(x)=f''(x)$ และ $dX_t=\mu dt+\sigma dW_t$ เมื่อแทนค่าในสูตรการหาอนุพันธ์ของ Ito จะได้ว่า

$$df(X_t)=f'(X_t)dX_t+\frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2=f(X_t)\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dW_t\right)$$

นั่นคือ $dS_t=S_t\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dW_t\right)$

ข.6 กฎการคูณเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic Product Rule)

กำหนดให้ $\mathbf{X}_t$ และ $\mathbf{Y}_t$ เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม ดังสมการ

$$\mathbf{X}_t=\alpha W_t+bt \text{ และ } \mathbf{Y}_t=\alpha W_t+\beta t$$

โดยที่ W_t เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน ดังนั้น จะได้ว่า

$$\mathbf{X}_t\,\mathbf{Y}_t = \left(aW_t + bt\right).\left(\alpha W_t + \beta t\right) = a\alpha W_t^2 + \left(a\beta + b\alpha\right)tW_t + b\beta t^2$$

เมื่อคำนวณหารูปแบบเชิงอนุพันธ์ (Differential form) จะได้

$$d\left(\mathbf{X}_t\,\mathbf{Y}_t\right) = a\alpha dW_t^2 + \left(a\beta + b\alpha\right)d\left(tW_t\right) + b\beta dt^2$$

แต่จากตัวอย่างในหัวข้อข.5จะพบว่า $dW_t^2 = 2W_t dW_t + dt$ และ $d\left(tW_t\right) = tdW_t + W_t dt$ ดังนั้น รูปแบบเชิงอนุพันธ์ของผลคูณของกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มสองกระบวนการ จะได้เป็น

$$\begin{aligned} d\left(\mathbf{X}_t\,\mathbf{Y}_t\right) &= a\alpha dW_t^2 + \left(a\beta + b\alpha\right)d\left(tW_t\right) + b\beta dt^2 \\ &= a\alpha\left(2W_t dW_t + dt\right) + \left(a\beta + b\alpha\right)\left[tdW_t + W_t dt\right] + b\beta\left(2tdt\right) \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อทำการจัดรูปใหม่แล้ว จะได้ว่า $d\left(\mathbf{X}_t\,\mathbf{Y}_t\right) = \mathbf{X}_t\,d\,\mathbf{Y}_t + \mathbf{Y}\,d\,\mathbf{X}_t + \left(d\,\mathbf{X}_t\right)\left(d\,\mathbf{Y}_t\right)$

เนื่องจาก $d\,\mathbf{X}_t = adW_t + bdt, d\,\mathbf{Y}_t = \alpha dW_t + \beta dt$

และ $\left(d\,\mathbf{X}_t\right)\left(d\,\mathbf{Y}_t\right) = \left(adW_t + bdt\right)\left(\alpha dW_t + \beta dt\right) = a\alpha dt$

ผู้อ่านจะสังเกตได้ว่า รูปแบบเชิงอนุพันธ์ที่ได้ข้างต้น จะมีพจน์ของ $\left(d\,\mathbf{X}_t\right)\left(d\,\mathbf{Y}_t\right)$ (หรือ $a\alpha dt$) อยู่ด้วย แต่หากกำหนดให้ $\mathbf{X}_t$ และ $\mathbf{Y}_t$ เป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม ดังสมการ $\mathbf{X}_t = aW_t + bt$ และ $\mathbf{Y}_t = \alpha\tilde{W}_t + \beta t$ โดยที่ W และ $\tilde{W}_t$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนที่อิสระต่อกัน แล้วผู้อ่านสามารถพิสูจน์ได้ว่า $d\left(\mathbf{X}_t\,\mathbf{Y}_t\right) = \mathbf{X}_t\,d\,\mathbf{Y}_t + \mathbf{Y}\,d\,\mathbf{X}_t$

ข.7 ผลคูณวิยุต (Discrete product)

ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มวิยุตที่เวลาใด ๆ ซึ่งสามารถหาผลต่างของตัวแปรสุ่ม X และ Y ที่เวลาต่างกันได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta\left(XY\right)_{t_i} &= X_{t_i}Y_{t_i} + X_{t_{i-1}}Y_{t_{i-1}} \\ &= \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)Y_{t_i} + X_{t_{i-1}}\left(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}\right) \\ &= \Delta X_{t_i}Y_{t_i} + X_{t_{i-1}}\Delta Y_{t_i} \end{aligned}$$

ข.8 ฟิวเตรชั่น (Filtrations) ในทฤษฎีเมเชอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในทฤษฎีของกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม ฟิลเตรชั่น (Filtration) คือลำดับของ พีชคณิตซิกมาบนปริภูมิเมเชอร์ ซึ่งฟิลเตรชั่น สามารถกล่าวในเชิงคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

กำหนดให้ $(\Omega, \Im)$ เป็นปริภูมิเมเชอร์ ฟิวเตรชั่น คือลำดับของพีชคณิตซิกมา $\{\Im_t : 0 < t < \infty\}$ โดยที่ $\Im_t \subset \Im$ สำหรับทุกค่า t

บางครั้ง อาจจะมีการนิยาม $\Im_\infty$ เป็น พีชคณิตซิกมา ที่ถูกสร้างขึ้นมาจากการยูเนียนกันของ $\Im_t$ จนถึงค่าอนันต์ นั่นคือ $\Im_\infty = \bigcup_{t=1}^{\infty}\Im_t \subset \Im$

เนื่องจาก พีชคณิตซิกมา นิยามเซตของเหตุการณ์ที่สามารถหาเมเชอร์ได้ ดังนั้น ฟิลเตรชั่นจึงถูกใช้แทนการเปลี่ยนแปลงในเซตของเหตุการณ์ที่สามารถหาเมเชอร์ได้ ไม่ว่าจะเป็นการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของข้อมูล สำหรับในด้านการวิเคราะห์ตลาดในเชิงคณิตศาสตร์นั้น ฟิลเตรชั่นได้ถูกนำมาใช้แทนข้อมูลที่สามารถหามาได้ ณ เวลา t และข้อมูลจะมีความแม่นยำมากขึ้นเรื่อย ๆ ในขณะที่ได้รับข้อมูลที่เวลาปัจจุบัน

ข.9 มาร์ตินเกล (Martingales) ในทฤษฎีความน่าจะเป็นกระบวนที่ถูกกล่าวเป็นมาร์ตินเกล (M_s) เมื่อเทียบกับเมเชอร์ P และฟิวเตรชั่น (Filtration: $\Im_s$) ถ้า $\mathbf{E}^{P}\left[M_t \middle| \Im_s\right] = M_s$ สำหรับเป็นกระบวนการที่ทำให้ค่าคาดหมายของมูลค่าสินทรัพย์ในอนาคตเท่ากับค่าเฉลี่ยของมูลค่าสินทรัพย์ในปัจจุบันโดยทราบข้อมูลของมูลค่าสินทรัพย์ในอดีตจนถึงปัจจุบันกล่าวคือ $M_s = \mathbf{E}^{Q}\left[M_t \middle| \Im_s\right]$ เมื่อ $t_0 = 0 \le s \le t \le t_N = T$ โดยที่ $\Im_s$ คือ ฟิวเตรชั่น (ข้อมูลของมูลค่าสินทรัพย์ในอดีตจนถึงปัจจุบัน)

ข.9.1 *มาร์ตินเกลเวลาวิยุต* คือ กระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มเวลาวิยุต $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ที่สอดคล้องกับสมการ $\mathbf{E} = \left[X_{n+1} \middle| X_1, \ldots, X_n\right] = X_n$
กล่าวคือ ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข ของการสังเกตในครั้งถัดไป เมื่อกำหนดข้อมูลในอดีตทั้งหมดมาให้จะมีค่าเท่ากันการสังเกตครั้งล่าสุด

ข.9.2 *มาร์ตินเกลเวลาต่อเนื่อง* คือกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มแบบ Zero-drift กล่าวคือตัวแปรสุ่ม X_t จะมีพฤติกรรมเป็นมาร์ตินเกลแบบเวลาต่อเนื่องเกือบแน่นอน (Almost Surely) ก็ต่อเมื่อ

$$dX_t = \sigma dW_t$$

โดยที่ W_t เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนและค่า Volatility(σ) เป็นค่าคงที่หรือเป็นกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่มที่อาจจะขึ้นกับ X_t หรือตัวแปรเชิงสุ่มอื่น ๆ

ภาคผนวก ค

ข้อมูลราคาหุ้นบริษัท Silverstarenergy (OBB: SVSE)

ในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของข้อมูล $\mu = \frac{1}{ndt}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{S_{i+1}-S_i}{S_i}\right)$

เมื่อ S_i เป็นราคาหุ้น ณ ตำแหน่งที่ i

n เป็นจำนวนข้อมูลราคาหุ้นทั้งหมด และให้ dt เป็นช่วงห่างของข้อมูล

สูตรในคำนวณหาค่าความแปรปรวนของข้อมูล $\sigma^2 = \frac{1}{(n-1)dt}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(S_{i+1}-S_i)}{S_i}-\mu dt\right)^2$

Stock History OBB : SVSE			
DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
04/26/2006	0.275	0.25	531310
04/25/2006	0.265	0.253	438925
04/24/2006	0.29	0.271	724422
04/21/2006	0.28	0.3	382158
04/20/2006	0.31	0.28	417882
04/19/2006	0.28	0.31	640350
04/18/2006	0.268	0.28	662987
04/17/2006	0.263	0.265	465249
04/13/2006	0.261	0.27	439035
4/12/2006	0.3	0.28	584640
4/11/2006	0.33	0.31	322560
4/10/2006	0.345	0.33	479070
4/7/2006	0.336	0.339	78639
4/6/2006	0.335	0.359	332010
4/5/2006	0.33	0.335	257596
4/4/2006	0.375	0.33	311795
4/3/2006	0.375	0.376	325195
03/31/2006	0.365	0.39	197871
03/30/2006	0.37	0.36	338625
03/29/2006	0.39	0.38	97200

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
03/28/2006	0.4	0.37	233585
03/27/2006	0.395	0.4	191463
03/24/2006	0.4	0.395	114093
03/23/2006	0.395	0.395	187935
03/22/2006	0.39	0.395	325774
03/21/2006	0.39	0.38	240337
03/20/2006	0.36	0.4	618325
03/17/2006	0.34	0.36	148600
03/16/2006	0.335	0.351	136230
03/15/2006	0.335	0.34	97491
03/14/2006	0.335	0.335	118790
03/13/2006	0.335	0.335	137344
3/10/2006	0.34	0.34	97430
3/9/2006	0.34	0.34	65784
3/8/2006	0.37	0.34	80571
3/7/2006	0.37	0.35	183750
3/6/2006	0.355	0.35	216290
3/3/2006	0.38	0.37	209630
3/2/2006	0.375	0.37	95850
3/1/2006	0.35	0.38	138340
02/28/2006	0.36	0.39	164584

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
02/27/2006	0.36	0.34	222771
02/24/2006	0.33	0.36	104571
02/23/2006	0.38	0.37	117680
02/22/2006	0.38	0.38	194557
02/21/2006	0.37	0.39	150030
02/17/2006	0.375	0.4	77450
02/16/2006	0.345	0.375	292070
02/15/2006	0.34	0.345	233425
02/14/2006	0.354	0.35	403395
02/13/2006	0.361	0.36	188938
2/10/2006	0.38	0.37	257905
2/9/2006	0.415	0.38	158251
2/8/2006	0.41	0.405	134685
2/7/2006	0.4	0.405	156965
2/6/2006	0.4	0.405	142380
2/3/2006	0.41	0.4	191355
2/2/2006	0.401	0.4	128240
2/1/2006	0.41	0.401	166515
01/31/2006	0.42	0.41	265427
01/30/2006	0.37	0.43	642183
01/27/2006	0.42	0.36	562566
01/26/2006	0.43	0.42	305725
01/25/2006	0.44	0.43	554605
01/24/2006	0.46	0.455	1232223
01/23/2006	0.39	0.45	1419833
01/20/2006	0.395	0.385	442350
01/19/2006	0.34	0.395	651665
01/18/2006	0.319	0.34	310099
01/17/2006	0.31	0.326	440763
01/13/2006	0.32	0.305	400658
1/12/2006	0.335	0.32	262129
1/11/2006	0.31	0.33	887766

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
1/10/2006	0.25	0.3	691731
1/9/2006	0.255	0.25	171249
1/6/2006	0.26	0.255	222908
1/5/2006	0.24	0.25	206890
1/4/2006	0.2165	0.24	107376
1/3/2006	0.21	0.25	173041
12/30/2005	0.23	0.22	597058
12/29/2005	0.215	0.23	681648
12/28/2005	0.225	0.215	415119
12/27/2005	0.24	0.212	495205
12/23/2005	0.265	0.249	263918
12/22/2005	0.26	0.265	263336
12/21/2005	0.28	0.255	333828
12/20/2005	0.255	0.275	225802
12/19/2005	0.27	0.264	539329
12/16/2005	0.27	0.28	292000
12/15/2005	0.265	0.26	270735
12/14/2005	0.265	0.265	347540
12/13/2005	0.26	0.265	627374
12/12/2005	0.265	0.26	339642
12/9/2005	0.26	0.265	405978
12/8/2005	0.25	0.26	224085
12/7/2005	0.24	0.25	471625
12/6/2005	0.285	0.26	380202
12/5/2005	0.24	0.27	721611
12/2/2005	0.245	0.235	405592
12/1/2005	0.255	0.245	356961
11/30/2005	0.26	0.245	515289
11/29/2005	0.284	0.28	963519
11/28/2005	0.29	0.284	425047
11/25/2005	0.295	0.295	83350
11/23/2005	0.28	0.295	507345

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
11/22/2005	0.27	0.28	250364
11/21/2005	0.3025	0.28	1016930
11/18/2005	0.315	0.315	322426
11/17/2005	0.315	0.319	792400
11/16/2005	0.33	0.315	573295
11/15/2005	0.3525	0.34	218831
11/14/2005	0.345	0.3599	136036
11/11/2005	0.3525	0.35	243842
11/10/2005	0.3525	0.35	358152
11/9/2005	0.35	0.35	472130
11/8/2005	0.35	0.35	153595
11/7/2005	0.35	0.36	275919
11/4/2005	0.37	0.36	133775
11/3/2005	0.33	0.37	354750
11/2/2005	0.35	0.35	186895
11/1/2005	0.326	0.36	346563
10/31/2005	0.325	0.331	242735
10/28/2005	0.325	0.325	110277
10/27/2005	0.315	0.325	194606
10/26/2005	0.31	0.312	283580
10/25/2005	0.315	0.315	346226
10/24/2005	0.34	0.32	286044
10/21/2005	0.335	0.35	168280
10/20/2005	0.35	0.35	207574
10/19/2005	0.35	0.34	124070
10/18/2005	0.37	0.35	172484
10/17/2005	0.37	0.37	260459
10/14/2005	0.33	0.37	440549
10/13/2005	0.365	0.33	495130
10/12/2005	0.379	0.365	679679
10/11/2005	0.39	0.379	848640
10/10/2005	0.47	0.41	1930710

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
10/7/2005	0.45	0.47	341415
10/6/2005	0.49	0.445	479833
10/5/2005	0.485	0.49	718798
10/4/2005	0.45	0.48	620223
10/3/2005	0.45	0.452	607977
09/30/2005	0.455	0.455	986288
09/29/2005	0.49	0.47	613912
09/28/2005	0.5	0.4944	538860
09/27/2005	0.51	0.505	201057
09/26/2005	0.52	0.51	410934
09/23/2005	0.54	0.53	324680
09/22/2005	0.522	0.54	301657
09/21/2005	0.529	0.523	468775
09/20/2005	0.55	0.53	256765
09/19/2005	0.54	0.54	296468
09/16/2005	0.55	0.5695	261406
09/15/2005	0.58	0.57	199858
09/14/2005	0.57	0.57	151916
09/13/2005	0.595	0.57	113861
9/12/2005	0.56	0.59	615846
9/9/2005	0.535	0.55	377200
9/8/2005	0.56	0.54	659914
9/7/2005	0.58	0.555	460455
9/6/2005	0.6	0.59	305170
9/2/2005	0.62	0.6	360695
9/1/2005	0.61	0.619	509077
08/31/2005	0.605	0.61	336630
08/30/2005	0.61	0.61	471817
08/29/2005	0.625	0.6	1062488
08/26/2005	0.6	0.61	359360
08/25/2005	0.62	0.59	570290
08/24/2005	0.58	0.6195	756294

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
08/23/2005	0.541	0.565	188127
08/22/2005	0.56	0.55	313715
08/19/2005	0.565	0.56	474914
08/18/2005	0.59	0.565	288863
08/17/2005	0.61	0.57	896192
08/16/2005	0.68	0.61	693274
08/15/2005	0.68	0.68	598743
8/12/2005	0.72	0.66	1563200
8/11/2005	0.63	0.7	1804415
8/10/2005	0.58	0.6	626257
8/9/2005	0.53	0.57	621445
8/8/2005	0.53	0.54	788977
8/5/2005	0.51	0.532	405342
8/4/2005	0.535	0.52	563731
8/3/2005	0.48	0.515	567710
8/2/2005	0.465	0.465	288099
8/1/2005	0.47	0.46	354610
07/29/2005	0.47	0.47	139545
07/28/2005	0.46	0.47	202983
07/27/2005	0.45	0.46	192868
07/26/2005	0.47	0.45	336420
07/25/2005	0.48	0.47	682524
07/22/2005	0.49	0.49	264080
07/21/2005	0.52	0.49	213985
07/20/2005	0.515	0.52	193985
07/19/2005	0.51	0.52	548251
07/18/2005	0.46	0.5	1467790
07/15/2005	0.455	0.46	632357
07/14/2005	0.47	0.46	629862
07/13/2005	0.475	0.475	730234
7/12/2005	0.51	0.48	1114204
7/11/2005	0.54	0.515	692413

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
7/8/2005	0.565	0.55	371101
7/7/2005	0.59	0.565	865573
7/6/2005	0.62	0.6	296909
7/5/2005	0.61	0.62	197124
7/1/2005	0.63	0.61	210580
06/30/2005	0.609	0.605	207880
06/29/2005	0.6	0.6	189177
06/28/2005	0.62	0.6	257842
06/27/2005	0.63	0.61	303386
06/24/2005	0.61	0.62	344440
06/23/2005	0.63	0.6	456848
06/22/2005	0.635	0.625	745813
06/21/2005	0.56	0.61	1229693
06/20/2005	0.52	0.545	728721
06/17/2005	0.515	0.52	579226
06/16/2005	0.524	0.5	938326
06/15/2005	0.58	0.524	1836001
06/14/2005	0.56	0.545	2471405
06/13/2005	0.48	0.51	3115646
6/10/2005	0.424	0.46	802693
6/9/2005	0.44	0.424	888030
6/8/2005	0.445	0.429	1259994
6/7/2005	0.465	0.445	1746632
6/6/2005	0.44	0.455	1587874
6/3/2005	0.49	0.435	1967976
6/2/2005	0.485	0.485	994276
6/1/2005	0.535	0.499	2408936
05/31/2005	0.53	0.53	1734057
05/27/2005	0.59	0.53	1579991
05/26/2005	0.68	0.6	3983213
05/25/2005	0.69	0.68	667570
05/24/2005	0.705	0.695	712319

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
05/23/2005	0.72	0.715	508626
05/20/2005	0.75	0.725	844001
05/19/2005	0.75	0.745	1207865
05/18/2005	0.81	0.73	1573450
05/17/2005	0.825	0.805	555373
05/16/2005	0.83	0.82	889734
05/13/2005	0.805	0.81	596683
5/12/2005	0.82	0.8	618475
5/11/2005	0.84	0.82	2529906
5/10/2005	0.78	0.825	1850128
5/9/2005	0.69	0.76	1598112
5/6/2005	0.68	0.69	322690
5/5/2005	0.67	0.67	642365
5/4/2005	0.625	0.64	294960
5/3/2005	0.68	0.63	220401
5/2/2005	0.675	0.68	149515
04/29/2005	0.65	0.68	449201
04/28/2005	0.67	0.66	244296
04/27/2005	0.66	0.67	230150
04/26/2005	0.75	0.69	470605
04/25/2005	0.65	0.72	560927
04/22/2005	0.62	0.64	316686
04/21/2005	0.66	0.63	283733
04/20/2005	0.66	0.63	236897
04/19/2005	0.67	0.66	339092
04/18/2005	0.7	0.69	264679
04/15/2005	0.71	0.7	360436
04/14/2005	0.62	0.7	660922
04/13/2005	0.66	0.63	613889
4/12/2005	0.69	0.66	881204
4/11/2005	0.725	0.71	424327
4/8/2005	0.71	0.735	322794

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
4/7/2005	0.73	0.73	423178
4/6/2005	0.751	0.74	283106
4/5/2005	0.75	0.775	282734
4/4/2005	0.74	0.79	515481
4/1/2005	0.76	0.75	261811
03/31/2005	0.79	0.74	1292301
03/30/2005	0.84	0.78	662923
03/29/2005	0.91	0.86	351465
03/28/2005	0.9	0.9	312020
03/24/2005	0.915	0.89	288074
03/23/2005	0.92	0.92	704880
03/22/2005	0.865	0.91	527018
03/21/2005	0.86	0.87	378839
03/18/2005	0.8	0.87	884117
03/17/2005	0.8	0.78	539258
03/16/2005	0.775	0.815	599413
03/15/2005	0.83	0.79	1201024
03/14/2005	0.88	0.83	338409
3/11/2005	0.88	0.86	452552
3/10/2005	0.99	0.9	580573
3/9/2005	0.94	0.99	1145395
3/8/2005	0.93	0.93	318842
3/7/2005	0.91	0.94	637335
3/4/2005	0.92	0.91	289764
3/3/2005	0.92	0.91	423318
3/2/2005	0.94	0.92	331451
3/1/2005	0.94	0.95	876570
02/28/2005	0.785	0.885	1157793
02/25/2005	0.88	0.815	936838
02/24/2005	0.96	0.9	1327841
02/23/2005	1.01	0.97	654036
02/22/2005	1.03	1.02	488140

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
02/18/2005	1.01	1.03	484455
02/17/2005	1.01	1	687737
02/16/2005	1.02	1.01	462293
02/15/2005	1.1	1.02	599819
02/14/2005	1.11	1.11	507330
2/11/2005	1.12	1.12	770170
2/10/2005	1.18	1.125	593178
2/9/2005	1.24	1.19	582016
2/8/2005	1.265	1.24	480520
2/7/2005	1.28	1.27	492230
2/4/2005	1.26	1.27	405746
2/3/2005	1.28	1.26	525681
2/2/2005	1.26	1.28	475527
2/1/2005	1.22	1.26	606985
01/31/2005	1.2	1.24	552121
01/28/2005	1.165	1.19	402155
01/27/2005	1.16	1.16	746031
01/26/2005	1.3	1.16	828025
01/25/2005	1.29	1.29	871662
01/24/2005	1.28	1.28	750758
01/21/2005	1.24	1.27	664237
01/20/2005	1.26	1.24	665255
01/19/2005	1.22	1.22	1360807
01/18/2005	1.18	1.2	544248
01/14/2005	1.19	1.14	197514
01/13/2005	1.12	1.15	470771
1/12/2005	1.17	1.14	405629
1/11/2005	1.17	1.15	317120
1/10/2005	1.22	1.17	600287
1/7/2005	1.12	1.225	493648
1/6/2005	1.11	1.11	437270
1/5/2005	1.18	1.14	392200

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
1/4/2005	1.21	1.195	848494
1/3/2005	1.23	1.2	541743
12/31/2004	1.17	1.22	370541
12/30/2004	1.15	1.17	647962
12/29/2004	1	1.125	1384264
12/28/2004	1.05	1.02	1025106
12/27/2004	1.1	1.05	1512979
12/23/2004	1.19	1.12	984261
12/22/2004	1.255	1.19	946604
12/21/2004	1.29	1.27	721376
12/20/2004	1.37	1.33	1229162
12/17/2004	1.42	1.34	1813933
12/16/2004	1.42	1.4	2205389
12/15/2004	1.32	1.405	4472862
12/14/2004	1.2	1.29	3835966
12/13/2004	1.09	1.18	2940740
12/10/2004	1.02	1.07	2384002
12/9/2004	0.995	1	944520
12/8/2004	0.99	0.99	838014
12/7/2004	1	0.96	1204055
12/6/2004	1.04	0.98	1817095
12/3/2004	0.935	1.01	2296725
12/2/2004	0.92	0.92	1033709
12/1/2004	0.9	0.91	964081
11/30/2004	0.91	0.89	1152164
11/29/2004	0.961	0.91	1367092
11/26/2004	0.94	0.92	433687
11/24/2004	0.93	0.93	1002274
11/23/2004	0.97	0.92	710930
11/22/2004	0.98	0.96	1155100
11/19/2004	0.95	0.955	666442
11/18/2004	0.88	0.92	512186

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
11/17/2004	0.94	0.88	586682
11/16/2004	0.96	0.91	448733
11/15/2004	1	0.94	782617
11/12/2004	0.97	1	291287
11/11/2004	0.96	0.99	733532
11/10/2004	0.97	0.95	638603
11/9/2004	0.87	0.95	657370
11/8/2004	0.86	0.865	633450
11/5/2004	0.9	0.89	65101
11/4/2004	0.86	0.9	1368685
11/3/2004	0.9	0.885	203526
11/2/2004	0.9	0.885	100801
11/1/2004	0.94	0.9	1561634
10/29/2004	0.86	0.93	1007846
10/28/2004	0.85	0.84	302119
10/27/2004	0.82	0.865	724655
10/26/2004	0.78	0.82	743616
10/25/2004	0.7	0.77	211546
10/22/2004	0.745	0.7	149900
10/21/2004	0.81	0.75	120935
10/20/2004	0.81	0.785	127986
10/19/2004	0.85	0.805	425541
10/18/2004	0.84	0.84	687267
10/15/2004	0.85	0.83	656463
10/14/2004	0.78	0.85	614789
10/13/2004	0.79	0.76	943034
10/12/2004	0.69	0.765	1320771
10/11/2004	0.715	0.66	98255
10/8/2004	0.62	0.7	926390
10/7/2004	0.57	0.6	406775
10/6/2004	0.6	0.57	116655
10/5/2004	0.55	0.6	92560

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
10/4/2004	0.56	0.57	104680
10/1/2004	0.6	0.56	112069
09/30/2004	0.57	0.6	135747
09/29/2004	0.55	0.575	125500
09/28/2004	0.55	0.55	66375
09/27/2004	0.54	0.59	98950
09/24/2004	0.6	0.55	63125
09/23/2004	0.55	0.55	208005
09/22/2004	0.56	0.55	165222
09/21/2004	0.555	0.56	63129
09/20/2004	0.64	0.551	232378
09/17/2004	0.66	0.59	314250
09/16/2004	0.7	0.64	31950
09/15/2004	0.72	0.7	44299
09/14/2004	0.76	0.72	120280
09/13/2004	0.7	0.75	437659
9/10/2004	0.67	0.705	1313445
9/9/2004	0.66	0.67	53642
9/8/2004	0.65	0.66	50480
9/7/2004	0.66	0.66	87785
9/3/2004	0.67	0.66	124355
9/2/2004	0.58	0.67	262499
9/1/2004	0.58	0.595	182110
08/31/2004	0.54	0.58	200800
08/30/2004	0.53	0.54	121891
08/27/2004	0.52	0.56	40650
08/26/2004	0.52	0.55	38025
08/25/2004	0.55	0.54	96614
08/24/2004	0.57	0.55	93000
08/23/2004	0.55	0.565	590000
08/20/2004	0.54	0.56	526905
08/19/2004	0.49	0.52	666857

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
08/18/2004	0.56	0.515	170383
08/17/2004	0.59	0.6	236992
08/16/2004	0.63	0.615	68516
08/13/2004	0.69	0.63	82580
8/12/2004	0.69	0.69	26680
8/11/2004	0.68	0.69	109515
8/10/2004	0.64	0.69	86608
8/9/2004	0.66	0.62	71275
8/6/2004	0.61	0.62	157133
8/5/2004	0.69	0.64	96349
8/4/2004	0.69	0.67	15350
8/3/2004	0.7	0.67	39675
8/2/2004	0.74	0.68	47627
07/30/2004	0.73	0.72	31369
07/29/2004	0.71	0.72	18600
07/28/2004	0.72	0.68	32300
07/27/2004	0.72	0.68	68600
07/26/2004	0.67	0.7	82400
07/23/2004	0.67	0.7	29900
07/22/2004	0.67	0.67	58200
07/21/2004	0.72	0.71	94000
07/20/2004	0.69	0.7	34700
07/19/2004	0.75	0.69	49700
07/16/2004	0.74	0.71	21900
07/15/2004	0.65	0.74	65100
07/14/2004	0.7	0.7	60300
07/13/2004	0.76	0.71	42900
7/12/2004	0.71	0.76	128600
7/9/2004	0.68	0.71	68000
7/8/2004	0.74	0.71	181200
7/7/2004	0.75	0.76	111700
7/6/2004	0.75	0.78	59400

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
7/2/2004	0.79	0.8	40300
7/1/2004	0.77	0.8	61300
06/30/2004	0.83	0.77	65300
06/29/2004	0.8	0.77	38800
06/28/2004	0.89	0.83	109500
06/25/2004	0.93	0.9	182700
06/24/2004	0.93	0.92	432700
06/23/2004	0.83	0.92	366000
06/22/2004	0.77	0.86	268900
06/21/2004	0.83	0.83	460900
06/18/2004	0.76	0.79	129300
06/17/2004	0.86	0.76	140500
06/16/2004	0.93	0.86	140000
06/15/2004	0.91	0.92	130500
06/14/2004	0.9	0.91	152000
6/10/2004	0.87	0.89	71200
6/9/2004	0.87	0.89	113000
6/8/2004	0.77	0.86	171300
6/7/2004	0.7	0.77	595800
6/4/2004	0.86	0.71	959300
6/3/2004	0.93	0.85	355000
6/2/2004	0.97	0.94	105900
6/1/2004	0.99	0.96	108900
05/28/2004	1.03	1.02	35000
05/27/2004	1.04	0.99	104300
05/26/2004	1.01	1.04	55400
05/25/2004	1.07	1.02	117900
05/24/2004	1.02	1.08	291200
05/21/2004	0.99	1.02	391100
05/20/2004	0.97	1	136500
05/19/2004	0.97	0.99	90700
05/18/2004	0.99	0.975	80200

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
05/17/2004	1.02	0.98	116200
05/14/2004	1.04	1	179400
05/13/2004	1.05	1.05	156600
5/12/2004	1.06	1.04	448500
5/11/2004	1.03	1.02	1396300
5/10/2004	1.05	1.02	172500
5/7/2004	1.11	1.4	151700
5/6/2004	1.11	1.11	93600
5/5/2004	1.15	1.13	153300
5/4/2004	1.01	1.12	232300
5/3/2004	0.94	1	109200
04/30/2004	0.89	0.9	187800
04/29/2004	0.975	0.9	195200
04/28/2004	1.1	0.96	513800
04/27/2004	1.23	1.11	401600
04/26/2004	1.24	1.23	137700
04/23/2004	1.25	1.26	134100
04/22/2004	1.41	1.28	265800
04/21/2004	1.41	1.35	212500
04/20/2004	1.43	1.4	257400
04/19/2004	1.46	1.4	234200
04/16/2004	1.4	1.42	305000
04/15/2004	1.29	1.4	383000
04/14/2004	1.3	1.27	575100
04/13/2004	1.4	1.3	507800
4/12/2004	1.58	1.41	508100
4/8/2004	1.63	1.56	373000
4/7/2004	1.575	1.585	564700
4/6/2004	1.62	1.56	288500
4/5/2004	1.65	1.605	639300
4/2/2004	1.62	1.62	578800
4/1/2004	1.57	1.55	436500

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
03/31/2004	1.45	1.56	632600
03/30/2004	1.58	1.48	729400
03/29/2004	1.6	1.565	913800
03/26/2004	1.68	1.55	1311500
03/25/2004	1.635	1.66	1845600
03/24/2004	1.54	1.6	1496000
03/23/2004	1.525	1.54	2195000
03/22/2004	1.37	1.47	1627500
03/19/2004	1.26	1.34	751800
03/18/2004	1.28	1.25	342200
03/17/2004	1.13	1.25	411400
03/16/2004	1.16	1.12	340100
03/15/2004	1.19	1.155	299000
3/12/2004	1.22	1.17	134200
3/11/2004	1.29	1.23	174400
3/10/2004	1.17	1.27	253000
3/9/2004	1.26	1.18	218200
3/8/2004	1.22	1.26	109900
3/5/2004	1.31	1.23	220200
3/4/2004	1.38	1.35	185400
3/3/2004	1.32	1.37	431000
3/2/2004	1.19	1.29	589000
3/1/2004	1.19	1.19	3400800
02/27/2004	1.6	1.54	234200
02/26/2004	1.68	1.58	399300
02/25/2004	1.65	1.66	542100
02/24/2004	1.68	1.64	792200
02/23/2004	1.64	1.68	330900
02/20/2004	1.64	1.62	515300
02/19/2004	1.65	1.62	566300
02/18/2004	1.83	1.61	2178500
02/17/2004	1.93	1.815	1030500

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
02/13/2004	2.04	1.92	510100
2/12/2004	2.05	2.03	589400
2/11/2004	1.95	2.04	878800
2/10/2004	1.91	1.94	962500
2/9/2004	1.91	1.89	470200
2/6/2004	1.92	1.89	132900
2/5/2004	1.9	1.905	188500
2/4/2004	1.92	1.9	353900
2/3/2004	1.91	1.9	566200
2/2/2004	1.92	1.91	529900
01/30/2004	2.05	1.92	1147900
01/29/2004	1.96	2.02	1558900
01/28/2004	1.86	1.935	3214400
01/27/2004	1.84	1.845	1095700
01/26/2004	1.75	1.8	668700
01/23/2004	1.68	1.75	500400
01/22/2004	1.71	1.69	218300
01/21/2004	1.75	1.7	140300
01/20/2004	1.74	1.73	512400
01/16/2004	1.72	1.72	1652600
01/15/2004	1.67	1.71	508900
01/14/2004	1.64	1.635	457700
01/13/2004	1.6	1.63	33000
1/12/2004	1.66	1.65	58800
1/9/2004	1.65	1.65	239500
1/8/2004	1.6	1.645	291400
1/7/2004	1.63	1.645	166100
1/6/2004	1.7	1.63	241500
1/5/2004	1.65	1.7	290400
1/2/2004	1.575	1.625	67400

DATE	OPEN	CLOSING	VOLUME
12/31/2003	1.6	1.575	46800
12/30/2003	1.575	1.575	46600
12/29/2003	1.63	1.56	68400
12/26/2003	1.65	1.64	2200
12/24/2003	1.65	1.65	2600
12/23/2003	1.715	1.65	75200
12/22/2003	1.75	1.71	160400
12/19/2003	1.725	1.735	199200
12/18/2003	1.665	1.705	487400
12/17/2003	1.65	1.66	61000
12/16/2003	1.65	1.64	337200
12/15/2003	1.605	1.635	137200
12/12/2003	1.65	1.585	116800
12/11/2003	1.6	1.65	21600
12/10/2003	1.625	1.625	246000
12/9/2003	1.5075	1.6	810400
12/8/2003	1.525	1.5	381200
12/5/2003	1.415	1.475	135600
12/4/2003	1.395	1.4	123000
12/3/2003	1.39	1.38	196400
12/2/2003	1.45	1.38	145400
12/1/2003	1.39	1.45	72400
11/28/2003	1.415	1.4	79200
11/26/2003	1.4	1.425	156800
11/25/2003	1.375	1.395	627200
11/24/2003	1.52929	1.375	787200
11/21/2003	1.5	1.5	1715000
11/20/2003	1.075	1.45	2606000

ภาคผนวก ง

ความไม่เป็นเอกฐานของเมทริกซ์ M

(Non-singularity of Matrix M)

สมมติให้เมทริกซ์ M เป็น เมทริกซ์จัตุรัสขนาด $N \times N$ แล้ว M ถูกกล่าวว่าเป็นเมทริกซ์ที่ไม่ใช่เมทริกซ์เอกฐาน (nonsingular matrix) ก็ต่อเมื่อตัวกำหนด (determinant) ของ M ไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$M \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ is nonsingular } \Leftrightarrow \mathbf{det}(M) \neq 0$$

ซึ่งจากทฤษฎีของพีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra) จะพบว่าเงื่อนไขของความไม่เป็นเอกฐานในข้างต้นนั้น สามารถกล่าวอีกอย่างได้ว่า

$$M \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ is nonsingular } \Leftrightarrow \lambda_i(M) \neq 0 \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, N$$

โดยที่ λ_i คือค่าเจาะจงของเมทริกซ์ M

ดังนั้น หากกำหนดให้

$$M = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}$$

และให้ v คือเวกเตอร์

$$v = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}.1\right) \\ \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}.2\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}.N\right) \end{bmatrix}$$

จะพบว่า แท้จริงแล้ว v คือเวกเตอร์ค่าเจาะจง กล่าวคือ $Mv = \lambda v$ เมื่อ $\lambda = 1 + 2\alpha\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right)$

โดยที่สามารถพิสูจน์โดยการแทนค่าโดยตรง ดังนี้

พิจารณากรณีที่ 1 เมื่อให้ $i=1$

$$[Mv]^{(1)} = (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi\cdot 1}{N+1}\right) - \alpha\sin\left(\frac{k\pi\cdot 2}{N+1}\right)$$

$$= -\alpha\sin\left(\frac{k\pi\cdot 0}{N+1}\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi\cdot 1}{N+1}\right) - \alpha\sin\left(\frac{k\pi\cdot 2}{N+1}\right)$$

(เนื่องจาก $\sin\left(\frac{k\pi 0}{N+1}\right) = 0$)

$$= -\alpha\left[\sin\left(\frac{k\pi\cdot 0}{N+1}\right) + \sin\left(\frac{k\pi\cdot 2}{N+1}\right)\right] + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi\cdot 1}{N+1}\right)$$

จากสูตร $\sin(A-B)+\sin(A+B) = 2\cos B\sin A$
ทำให้สมการข้างต้นเป็น

$$[Mv]^{(1)} = -2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$$
$$= \left[1+2\alpha-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$$

กำหนดให้ $\lambda = 1+2\alpha\left[1-\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right]$ ทำให้สมการข้างต้นเป็น ดังนี้

$$[Mv]^{(1)} = \lambda\sin\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$$

พิจารณากรณีที่ 2 เมื่อ $1<i<N$

$$[Mv]^{(i)} = -\alpha\sin\left(\frac{k\pi(i-1)}{N+1}\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi i}{N+1}\right) - \alpha\sin\left(\frac{k\pi(i+1)}{N+1}\right)$$
$$= -\alpha\left[\sin\left(\frac{k\pi(i-1)}{N+1}\right) + \sin\left(\frac{k\pi(i+1)}{N+1}\right)\right] + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi i}{N+1}\right)$$

จากสูตร $\sin(A-B)+\sin(A+B) = 2\cos B\sin A$
ทำให้สมการข้างต้นเป็น

$$[Mv]^{(i)} = -2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{k\pi i}{N+1}\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi i}{N+1}\right)$$
$$= \left[1+2\alpha-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi i}{N+1}\right) = \lambda\sin\left(\frac{k\pi i}{N+1}\right)$$

พิจารณากรณีที่ 3 เมื่อ $i = N$

$$[Mv]^{(N)} = -\alpha \sin\left(\frac{k\pi(N-1)}{N+1}\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi N}{N+1}\right)$$
$$= -\alpha \sin\left(\frac{k\pi(N-1)}{N+1}\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi N}{N+1}\right) - \alpha \sin\left(\frac{k\pi(N+1)}{N+1}\right)$$

(เนื่องจาก $-\alpha \sin\left(\frac{k\pi(N+1)}{N+1}\right) = 0$)

ดังนั้น

$$[Mv]^{(N)} = -\alpha\left[\sin\left(\frac{k\pi(N-1)}{N+1}\right) + \sin\left(\frac{k\pi(N+1)}{N+1}\right)\right] + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi N}{N+1}\right)$$

จากสูตร $\sin(A-B) + \sin(A+B) = 2\cos B \sin A$

ทำให้สมการข้างต้นเป็น

$$[Mv]^{(N)} = -2\alpha \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{k\pi N}{N+1}\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\frac{k\pi N}{N+1}\right)$$
$$= \left[1+2\alpha-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi N}{N+1}\right) = \lambda \sin\left(\frac{k\pi N}{N+1}\right)$$

จากทั้งสามกรณี จะได้ว่า $Mv = [Mv]^{(i)} = \lambda[v]^{(i)} = \lambda v$ เพราะฉะนั้น v ที่กำหนดให้คือเวกเตอร์ค่าเจาะจง ในขณะที่ λ ที่ได้คือค่าเจาะจงของเมทริกซ์ M

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \le 1$ และ $\alpha > 0$ ดังนั้น $\lambda = 1+2\alpha\left[1-\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right] > 0$ สำหรับทุกค่า $1 \le k \le N$ นั่นย่อมแสดงว่า M เป็นเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน

ภาคผนวก จ

ตัวอย่างของสัญญาและตราสารหนี้

(Samples of Contracts and Bond Certificates)

หน่วยละ หนึ่งพันบาท เลขทะเบียน

พันธบัตรที่

ผู้ว่าการการประปานครหลวง ในนามของการประปานครหลวงให้คำมั่นสัญญาว่า ผู้ทรงพันธบัตรฉบับนี้ คือ

ตัวอย่าง

มีสิทธิที่จะได้รับชำระต้นเงินกู้ตามพันธบัตรคืน จำนวน บาท

( ) ณ วันที่

และในระหว่างที่พันธบัตรยังมีอายุอยู่มีสิทธิจะได้รับดอกเบี้ยในอัตราร้อยละ ต่อปี ชำระในวันที่

และวันที่ ทุกปี และมีสิทธิโอนกรรมสิทธิ์หรือจำนำพันธบัตรฉบับนี้ได้

ทั้งนี้ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดไว้ด้านหลังแห่งพันธบัตรฉบับนี้ โดยกระทรวงการคลังเป็นผู้ค้ำประกัน

วันที่ พ.ศ.

นายทะเบียน

หนักงาน

ผู้ว่าการการประปานครหลวง

รูปที่ จ.1 แสดงตัวอย่างของพันธบัตรที่ออกโดย การประปานครหลวง

CREDIT UNION SHARE CERTIFICATE

in

05-09-03
Date Issued

TECH Federal Credit Union
Name of Credit Union

990186658
Account Number

5478
Certificate Number

224-79-4924
Social Security Number

This is to certify that Tanit Malakorn or Matthew Bublitz
Name

Has a Share Certificate Account in the above named Credit Union

CERTIFICATE AMOUNT	MINIMUM BALANCE REQUIREMENT	MATURITY DATE	TERM	DIVIDEND RATE / ANNUAL PERCENTAGE YIELD
$10,001.00	$500.00	05-09-06	36 Months	3.25% APY

Subject to the terms herein and the signature card relating to this account, the credit union's bylaws and applicable State and Federal laws, rules and regulations, upon the surrender of this certificate the person named above or any joint owner(s) whose signature(s) appear on the signature card relating to this account may (1) on the maturity date, withdraw all funds then in the account, and (2) prior to the maturity date withdraw the funds remaining in the account after the deduction of the amount of the penalty prescribed for early withdrawal.

This certificate may not be pledged, transferred or assigned to any party other than the Credit Union.

If more than one owner is listed on the signature card, the right of the Credit Union to permit the withdrawal of funds from this account in accordance with the terms hereof and the signature card relating to this account may be terminated only by its receipt of written notice from any of the persons named on the signature card that withdrawals should not be permitted, but such notice shall not affect withdrawals theretofore made.

The Right of Survivorship of the certificate shall be determined by the provisions contained in the signature card relating to this account.

Dividends are available to the owner ______ (specify period)

Dividends are
☒ compounded
as follows: Quarterly
☐ not compounded.

Dividends are to be
☒ paid to regular share account No. 990186658
☐ mailed to owner(s).

Party redeeming certificate ______
Address ______
Social Security Number ______
Date ______

Except for certain early withdrawals as specified by applicable Law, Rules and Regulations or the credit union, A SUBSTANTIAL PENALTY IS IMPOSED if certificate funds other than dividends are withdrawn before the maturity date. The penalty is:

a forfeiture of earned dividends equal to the smaller of (1) all dividends since the date of issuance or (2) 90 Days dividends. The forfeiture is calculated at the simple interest rate being paid on the certificate regardless of how long the funds withdrawn have remained in the account. The principal amount upon which the forfeiture is calculated is the amount withdrawn unless the amount withdrawn reduces the balance below $ 500.00. In that event, the account will be cancelled, and the principal amount upon which the forfeiture is calculated is the entire amount of the certificate.

Katrina K Flory
Authorized Signature

NOT TRANSFERABLE
as defined in 12 CFR Part 204

100 VCUL 855 3/95

รูปที่ จ.2 แสดงตัวอย่างของตราสารหนี้ (Share Certificate)
ที่ออกโดย Federal Credit Union

ALIGN TECHNOLOGY, INC.

NOTICE OF GRANT OF STOCK OPTION

Notice is hereby given of the following option grant (the "Option") to purchase shares of the Common Stock of Align Technology, Inc. (the"Corporation"):

Optionee: Kelsey Wirth

Grant Date: January 4, 2001

Vesting Commencement Date: January 4, 2001

Exercise Price: $ 15.00 per share*

Number of Option Shares: 1,000,000 shares*

Expiration Date: January 3, 2011

Type of Option: Non-Statutory Stock Option

Exercise Schedule: The Option shall become exercisable for twenty-five percent (25%) of the Option Shares upon Optionee's completion of one (1) year of Service measured from the Vesting Commencement Date and shall become exercisable for the balance of the Option Shares in a series of thirty-six (36) successive equal monthly installments upon Optionee's completion of each additional month of Service over the thirty-six (36) month period measured from the first anniversary of the Vesting Commencement Date. In no event shall the Option become exercisable for any additional Option Shares after Optionee's cessation of Service.

Optionee understands and agrees that the Option is granted subject to the terms and conditions of the Stock Option Agreement attached hereto as Exhibit A and agrees to be bound by those terms and conditions. The Option is subject to the approval of the Corporation's stockholders and shall terminate in the event such stockholder approval is not obtained before July 1, 2001.

----

* Pre-adjusted to reflect the 2-for-1 split of the Common Stock to be effective January 5, 2001.

<PAGE>

Employment at Will. Nothing in this Notice or in the attached Stock Option Agreement shall confer upon Optionee any right to continue in Service for any period of specific duration or interfere with or otherwise restrict in any way the rights of the Corporation (or any Parent or Subsidiary employing or retaining Optionee) or of Optionee, which rights are hereby expressly reserved by each, to terminate Optionee's Service at any time for any reason, with or without cause.

Definitions. All capitalized terms in this Notice shall have the meaning assigned to them in this Notice or in the attached Stock Option Agreement.

DATED: 1/24/01

ALIGN TECHNOLOGY, INC.

By: Illegible

Title: Director

Illegible

0PTIONEE

Address:

ATTACHMENTS

Exhibit A - Stock Option Agreement

Exhibit B - Prospectus

<PAGE>

EXHIBIT A

STOCK OPTION AGREEMENT

<PAGE>

EXHIBIT B

PROSPECTUS

<PAGE>

COMPENSATION AGREEMENT

Agreement dated as of the.........day of January, 2001 by and between Kelsey Wirth ("Optionee") and Align Technology, Inc., a Delaware corporation (the "Corporation").

WITNESSETH

WHEREAS, Optionee is to provide services to the Corporation, and the Corporation wishes to provide an equity incentive to Optionee to provide such services.

NOW, THEREFORE, in consideration of the above premises, the partis hereto agree as follows:

1. On January 4, 2001 Optionee was granted an option to acquire 1,000,000/1/ shares of the Corporation's Common Stock (the "Option") under the terms and conditions set forth in the Stock Option Agreement, attached hereto as Exhibit A.

2. Corporation and Optionee acknowledge and agree that the Option is granted as compensation for services and not for any capital-raising purposes or in connection with any capital-raising activities.

3. This agreement is intended to constitute a written compensation contract within the meaning of Rule 701 of the Securities Act of 1933, as amended.

4. Nothing herein or in the Stock Option Agreement shall confer upon Optionee any right to continue in the Corporation's employ or service for any period of specific duration or interfere with or otherwise restrict in any way the rights of the Corporation or Optionee, which rights are hereby expressly reserved by each party, to terminate Optionee's service at any time for any reason, with or without cause.

IN WITNESS WHEREOF, the parties hereto have executed this agreement as of the date first above written.

OPTIONEE:	Align Technology, Inc.
Illegible	By: Illegible
----------------------------	----------------------------
	Title: Directo

/1/ Pre-adjusted to reflect the 2-for-1 split of the Common Stock to be effective January 5, 2001.

รูปที่ จ.3 แสดงตัวอย่างของตราสารอนุพันธ์

ประวัติผู้ทำโครงงาน

ชื่อ: นายคนัย วัฒน์ชรานนท์

รหัส: 45380040

เกิดวันที่: 14 ส.ค. 2526

ภูมิลำเนา: 42 ม.3 ต.โกรกพระ อ.โกรกพระ จ.นครสวรรค์

ประวัติการศึกษา:

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย: โรงเรียนนครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

ระดับปริญญาตรี: สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จ.พิษณุโลก

ชื่อ: นายสุทธิพันธ์ สิทธิอักษร

รหัส: 45380139

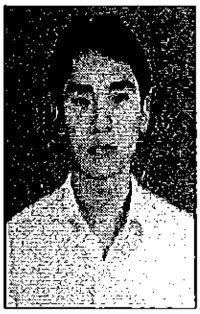
เกิดวันที่: 7 ม.ค. 2526

ภูมิลำเนา: 284/1 ม.7 ต.ป่าแดด อ.ป่าแดด จ. เชียงราย 57190

ประวัติการศึกษา:

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย: โรงเรียนเมืองเชียงราย จ.เชียงราย

ระดับปริญญาตรี: สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จ.พิษณุโลก



ชื่อ: นายศุภโชค ธรรมาธร

รหัส: 45380263

เกิดวันที่: 30 ก.ย. 2526

ภูมิลำเนา: 99 ม.9 ต.ช่องแค อ.ตาคลี จ.นครสวรรค์ 60210

ประวัติการศึกษา:

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย: โรงเรียนตาคลีประชาสรรค์ จ.นครสวรรค์

ระดับปริญญาตรี: สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จ.พิษณุโลก